UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL

ÉTUDE DES STRUCTURATIONS DU CONTRÔLE DÉPLOYÉES LORS DE LA RÉSOLUTION EN ÉQUIPE DE PROBLÈMES ALGÉBRIQUES

MÉMOIRE

PRÉSENTÉ

COMME EXIGENCE PARTIELLE

DE LA MAÎTRISE EN MATHÉMATIQUES

PAR

BENOIT MORAND

SEPTEMBRE 2020

REMERCIEMENTS

Ce mémoire est le point culminant d'une aventure qui peut paraitre pour certains solitaire. Dans mon cas, plusieurs personnes ont croisé ma route et ont permis ainsi l'achèvement de cette odyssée.

Je veux d'abord remercier très chaleureusement mes directrices Doris Jeannotte et Mireille Saboya. Je vous remercie pour tout le temps que vous m'avez consacré dans les lectures des différentes versions du mémoire et également pour les nombreuses rencontres, pour votre générosité intellectuelle et pour votre soutien. Vous avez été une équipe formidable avec qui je collaborerais n'importe quand.

Doris, tu as été un phare pour moi lors de ce voyage. J'ai croisé ton chemin au début de la maîtrise et j'ai vite compris que je devais travailler avec toi. Tu es certainement la personne qui m'a permis de grandir le plus en tant que chercheur. Tu es une source d'inspiration tant comme professeure/enseignante, chercheure et personne. Je te remercie d'avoir si bien compris ma personnalité et de m'avoir guidé d'une main de maitre lors de cette aventure. Tu as su naviguer entre douceur et fermeté lorsque le moment était nécessaire. Je te remercie aussi pour ton écoute, ta patience, ta compréhension et tes judicieux conseils tout au long des 4 dernières années.

Mireille, les cours que j'ai suivis avec toi, lors du Baccalauréat ont clairement confirmé mon intérêt de poursuivre à la maîtrise. Travailler avec toi était en quelque sorte un incontournable pour moi, surtout que tes travaux sur le contrôle m'ont grandement inspiré. Je te remercie de m'avoir permis de m'inclure dans ceux-ci et d'y ajouter ma couleur. Ton enthousiasme, ton soutien, tes encouragements et ton ouverture sur mes idées et sur ma vision du concept ont été pour moi des éléments clés qui m'ont permis d'arriver à ce stade.

Je tiens à remercier les professeurs, monsieur Fernado Hitt et madame Izabella Oliveira, merci d'avoir accepté d'évaluer mon mémoire. Vos commentaires et suggestions m'ont permis d'approfondir mes réflexions et d'enrichir l'élaboration de celui-ci. Je veux aussi remercier madame Claudia Corriveau qui m'a accueilli dans son équipe de recherche lors d'un stage de recherche. Ce stage m'a permis de retrouver la motivation nécessaire pour terminer ce mémoire.

Je veux remercier les enseignant(e)s, élèves et étudiant(e)s qui se sont prêté au jeu en résolvant les problèmes et en répondant aux diverses questions que je leur ai posées. Sans vous il n'y aurait pas d'histoire à raconter.

Je désire aussi remercier mes collègues étudiant(e)s, Mathieu, Sarah, Catherine, Judith, Marie-Line, Fanny, Stéphanie et Stéphane, pour le soutien et les multiples discussions pertinentes et impertinentes. Merci aussi à mes amis proches Nicholas, Mathieu, Ève-Lyne, Gabriel et Carole, pour vos encouragements et vos questions stimulantes qui m'ont permis de vulgariser mes idées.

Je remercie ma famille pour votre soutien et votre amour inconditionnel, sans vous mon retour aux études n'aurait pas été possible. Julien, je veux te remercier (même si selon certains tu ne sers à rien) pour ton écoute et tes conseils. Tu as été un soutien des plus précieux lors de mon retour aux études.

Finalement, mes remerciements les plus chaleureux vont à Émilie. Ton soutien à travers les bons et moins bons moments des huit dernières années est sans contredit celui que je chéris le plus. Je te remercie de ne pas avoir lâché prise et d'avoir cru en moi. Tu m'as permis de m'épanouir et de réaliser une étape que je ne croyais jamais réaliser auparavant. Sans toi, je n'y serais pas parvenu. Je t'aime!

«If you don’t try you’ll never know»
-Proverbe anglais

TABLE DES MATIÈRES

LISTE DES FIGURES

LISTE DES TABLEAUX

LISTE DES ABRÉVIATIONS, DES SIGLES ET DES ACRONYMES

BEPEP : Baccalauréat en enseignement primaire et éducation préscolaire

BES : Baccalauréat en enseignement secondaire

MEQ : Ministère de l'éducation du Québec

MELS : Ministère de l'éducation, du loisir et du sport

PFEQ : Programme de formation de l'école québécoise

PGCD : Plus grand commun diviseur

PPCM : Plus petit commun multiple

SN : science naturelle

UQAM : Université du Québec à Montréal

RÉSUMÉ

Cette recherche s'intéresse au concept de contrôle vu comme une réflexion de la part des élèves sur les actions posées ou à poser. Le cadre théorique élaboré par Saboya (2010) distingue dix composantes qui permettent un nouveau regard sur l'activité mathématique en algèbre. Les recherches se basant sur ce cadre ont permis d'appréhender l'activité exercée par les élèves dans différents contenus mathématiques à travers une analyse des composantes du contrôle mobilisées. Un aspect intéressant ressort de ces recherches, sans en être toutefois l'objet central d'investigation, il s'agit du repérage d'interactions entre certaines composantes. Ce mémoire vise à mieux comprendre la structuration du contrôle dans l'activité mathématique lors de la résolution de problèmes algébriques. Deux questions en découlent : *Comment se structurent les composantes du contrôle en résolution de problèmes algébriques?* et *Quels éléments externes aux composantes jouent sur ces structurations?*

Pour répondre à ces deux questions, deux problèmes résolus par cinq équipes ayant des bagages mathématiques différents ont été analysés. Les résolutions étaient suivies d'un entretien d'explicitation (Vermesch, 1998) afin que les participants puissent s'exprimer sur les actions posées et ainsi mieux comprendre ce qui les a guidés. Les traces écrites de chacun des participants ainsi que l'enregistrement audio et vidéo des diverses résolutions et de l'entretien ont été collectés.

L'analyse des différentes résolutions a permis d'établir dix-neuf structurations locales du contrôle gravitant autour de six composantes. Elle a permis de confirmer certaines relations entre les composantes issues de la littérature, toutefois il en ressort que d'autres composantes se greffent à ces structurations. De plus, cette étude permet d'en savoir plus sur certaines structurations peu documentées. L'analyse a également permis d'identifier quatre aspects externes aux composantes qui peuvent teinter la structuration du contrôle.

Mots clés : Didactique, contrôle, structurations, algèbre, activité mathématique

INTRODUCTION

Cette recherche s'intéresse aux actions posées, ou à poser, lors de la résolution de problèmes algébriques. Plus précisément, elle porte sur les interactions entre les composantes du contrôle (Saboya, 2010) mobilisées dans l'activité mathématique à savoir comment se structurent ces composantes. À titre d'exemple, un *engagement réfléchi*, une *anticipation*, une *vérification*, la *perception d'erreurs* ou encore un *choix éclairé* de stratégie sont des exemples de ces composantes qui peuvent se manifester. Ce questionnement provient d'une observation personnelle lors d'un cours de maitrise où le cadre du contrôle développé par Saboya (2010) a été abordé. Lors de ce cours, j'ai été amené à constater que certaines composantes du contrôle étaient interreliées et qu'elles guidaient la résolution. Différentes lectures utilisant ce cadre (par ex. Saboya, 2010; Dufour et Jeannotte, 2013; Saboya et Rhéaume, 2015; Saboya, Bednarz et Hitt, 2015) a permis de valider cette observation sur l'interaction entre certaines composantes. En effet, il est possible de relever dans ces recherches que certaines composantes semblent interagir entre elles lors de la résolution d'un problème. Toutefois, l'étude des interactions n'est pas l'objet d'étude de ces recherches. De plus, Rhéaume (2020) fait état d'un *contrôle restreignant* qui peut jouer sur la mobilisation des composantes du contrôle. Il s'agit de croyances, de règles ou d'attentes scolaires. La présente étude cherche donc à comprendre *comment se structurent les composantes du contrôle* et *quels éléments externes aux composantes jouent sur ces structurations*.

Dans le premier chapitre, un survol du concept du contrôle est d'abord présenté afin de mieux comprendre l'origine du questionnement de cette recherche. Le contrôle est présent dans le programme de formation de l'école québécoise [PFEQ] dans la présentation de la première compétence, « *Résoudre une situation problème* », même si cette appellation n'est pas utilisée. De plus, l'importance croissante de la résolution de problèmes dans le programme québécois, depuis le début du 20e siècle, justifie l'étude du contrôle lors de la résolution de problèmes et plus particulièrement en algèbre. Ensuite, ce chapitre présente les observations qui ont pris place dans un cours de 2e cycle et qui ont menées à l'émergence du questionnement à l'origine de cette recherche. Finalement, des liens, non soulignés, entre différentes composantes du contrôle ont été dégagés de recherches utilisant ce concept sur différents contenus mathématiques à différents niveaux scolaires. Ceci a mené à la formulation de l'objectif de cette recherche.

Dans le second chapitre, le concept du contrôle est approfondi, sont présentés les différentes composantes et les indices de leur mobilisation. Par la suite, les relations entre les composantes du contrôle ressorties dans le premier chapitre et provenant des recherches en didactique des mathématiques sont reprises et approfondies. D'autres relations sont mises de l'avant. Ces relations sont un point de départ pour cette étude, une voie qui sera explorée et poursuivie. Est également présentée la recherche de Rhéaume (2020) qui met l'accent sur un *contrôle restreignant* qui implique la présence de facteurs externes aux composantes de Saboya (2010) pouvant interagir sur les composantes du contrôle. Ces différentes sections mènent à la précision de l'objectif de recherche en termes de « structuration du contrôle » et à l'énonciation de deux questions de recherche.

Le troisième chapitre présente et justifie l'orientation méthodologique de cette recherche, une recherche qualitative/interprétative. Le déroulement de l'expérimentation en deux étapes est explicité : la résolution de trois problèmes par divers participants suivie d'un entretien d'explicitation (Vermersch, 2000). Une analyse de chacun des problèmes sous l'angle des composantes du contrôle est proposée. Les cinq équipes ayant participé à la recherche sont décrites ainsi que l'approche d'analyse des données.

Le quatrième chapitre s'attarde sur l'analyse des données recueillies. Deux problèmes ont été retenus à des fins d'analyse. Pour ces deux problèmes, entre deux et quatre épisodes porteurs de différentes structurations du contrôle ressortent de l'analyse, et ce, pour chacune des cinq équipes. De plus sont présentés différents éléments externes aux composantes du contrôle qui semblent agir sur certaines structurations. L'analyse s'appuie sur des extraits de transcription qui prennent place pendant les échanges entre les participants, mais également lors de l'entretien d'explicitation. Les productions des participants viennent appuyer les propos ainsi que certains gestes et expressions manifestés par les participants.

Le cinquième chapitre présente une discussion issue d'une analyse transversale de ce qui émerge de l'analyse menée dans le chapitre 4. Dix-neuf structurations qui gravitent autour de six composantes mises en lumière sont explicitées. De plus, les éléments autres que les composantes ayant joué un rôle sur la mobilisation de certaines composantes sont présentés et catégorisés.

La conclusion fait un retour sur l'objectif et les questions de recherche, avant de présenter les limites de celle-ci. Finalement, les retombées pour la recherche et les prolongements de cette étude sont proposés.

CHAPITRE I

PROBLÉMATIQUE

En mathématiques, selon le PFEQ et certains chercheurs, il est attendu des élèves et des étudiants[1] de tous niveaux qu'ils exercent un contrôle sur la résolution de problèmes. En effet, lorsqu'un élève résout un problème, il devrait être capable de s'engager de façon réfléchie, de choisir la manière la plus efficace pour le résoudre, de vérifier sa démarche, son résultat et de percevoir ses erreurs, s'il y en a. La *perception des erreurs*, l'*engagement réfléchi* et la *vérification* sont quelques-unes des composantes du contrôle. Cette étude s'intéresse au contrôle dans la résolution de problèmes mathématiques, concept qui a été étudié entre autres par Saboya (2010), mais plus particulièrement aux liens qui peuvent exister entre les composantes du contrôle. Ce chapitre présente un survol sur le concept de contrôle pour mieux comprendre ce qu'il recouvre. Par la suite, un regard sur le programme de formation de l'école québécoise permet de discerner la place qui est octroyée au contrôle dans la résolution de problèmes. La troisième section explicite l'origine du questionnement de départ autour des liens entre les composantes du contrôle. La quatrième section revisite les recherches qui traitent du concept de contrôle pour y dégager les relations entre certaines composantes. Finalement, dans la cinquième section est énoncé l'objectif qui a guidé cette recherche.

---

[1] Pour cette étude « élève » désignera une personne qui fréquente une école primaire ou secondaire et « étudiant » une personne qui est de niveau post-secondaire.

1.1 Un survol du concept du contrôle

Le nouveau Petit Robert (2010) définit le contrôle par la vérification ou par le fait pour une personne de maitriser quelque chose ou quelqu'un. En didactique des mathématiques, ce concept prend un sens comparable au sens commun, puisque si un élève maitrise ses actions mathématiques lors de la résolution d'une tâche, celui-ci fait preuve de contrôle lors de son activité mathématique. Dans sa thèse de doctorat, Saboya (2010) a établi un cadre d'analyse sur l'activité de contrôle qui va au-delà de la justesse de la démarche ou de la réponse et dans lequel le contrôle se traduit par :

> i) une réflexion de la part de la personne sur toute action, sur tout choix tout au long de la tâche : au début, en cours ou à la fin de la résolution.
> ii) la capacité de prendre des décisions de façon réfléchie, rationnelle.
> iii) une prise de distance par rapport à la résolution.
> iv) Le recours aux fondements sur lesquels on s'appuie pour valider. (p. 116)

De plus, le contrôle se caractérise par dix composantes (figure 1.1) par exemple l'*anticipation* d'un ordre de grandeur de la réponse, une *vérification* de la démarche ou de la réponse et une *perception des erreurs* qui ont pu être commises. Les autres composantes sont le *contrôle sémantique*, le *contrôle syntaxique*, la *sensibilité et le dépassement de la contradiction*, la *validation*, l'*engagement réfléchi*, le *choix éclairé* et les *métaconnaissances*[2].

[2] Les composantes seront détaillées dans le chapitre II.

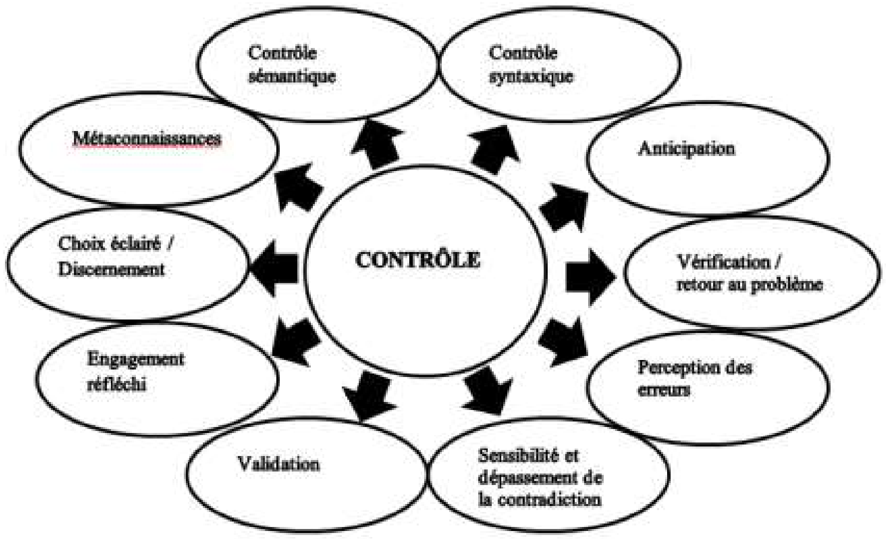


Figure 1.1 Schéma des composantes du contrôle modifié de Dufour et Jeannotte (2013, p. 32)

À titre d'exemple, le *contrôle syntaxique* fait référence à l'aspect opératoire de la résolution et le *contrôle sémantique* à l'aspect conceptuel tant au niveau de la compréhension du problème qu'au niveau de sa résolution. Saboya (2010), illustre comment ceux-ci peuvent être mobilisés à l'aide du problème suivant :

> Maggie et Sandra vont à une vente de disques. Maggie a 67$ en poche, et Sandra 85$. Sandra dépense 4 fois le montant de Maggie. Lorsqu'elles quittent la boutique, il leur reste le même montant d'argent en poche. Combien ont-elles dépensé chacune? (p. 99)

Selon Saboya, la mise en équation nécessite un *contrôle sémantique* s'articulant sur une signification contextuelle des grandeurs, de leurs relations et de leurstransformations.

> Si x représente le montant dépensé par Maggie, Maggie ayant au départ 67$ en poche, elle aura après ses achats 67 - x (ce qu'elle avait au départ moins ce qu'elle a dépensé). Sandra dépense 4 fois le montant de Maggie, soit 4 fois x. Elle avait au départ en poche 85$. Après ses achats, elle aura donc en poche 85 - 4x. Comme on sait qu'il leur reste à toutes les deux le

> même montant d'argent en poche, nous obtenons l'égalité $67 - x = 84$ [SIC] $- 4x$. (p. 99)

Tandis que la résolution de l'équation requiert un autre type de contrôle, identifié comme le *contrôle syntaxique*. Celui-ci s'effectue sans avoir recours au contexte, en opérant sur chaque membre de l'égalité et en utilisant certaines manipulations telles que :

> $67 - x + 4x = 85$
> $67 + 3x = 85$
> $3x = 85 - 67$
> $3x = 18$
> $x = 6$ (p. 99)

1.1.1 Le concept de contrôle en résolution de problèmes dans le PFEQ

Sans que le terme « contrôle » soit explicitement mentionné, on peut constater que le développement de l'activité de contrôle des élèves en résolution de problèmes est présent dans le PFEQ, particulièrement en ce qui a trait à la compétence 1 qui se nomme *Résoudre une situation problème*[3]. Le PFEQ du 1er cycle du secondaire (2006) précise que « la résolution d'une situation problème est un processus dynamique qui nécessite de nombreux aller-retour et fait appel à l'anticipation, au discernement et au jugement critique » (p. 240). C'est donc dire que lors de la résolution de ce type de situations, un élève devrait faire des retours sur le problème (*vérification*), qu'il devrait anticiper le(s) résultat(s) obtenu(s) (*anticipation*), et choisir de manière éclairée les méthodes à utiliser (*choix éclairé*). De plus, les composantes de cette première compétence disciplinaire (figure 1.2) ouvrent la porte à d'autres

---

[3] Cette étude parle de résolution de problème au sens large sans entrer dans le débat sémantique de ce qu'est une situation problème.

composantes du contrôle qui sont à développer chez les élèves. Par exemple, l'aspect « Valider la solution » qui requiert de « Confronter le résultat obtenu avec le résultat attendu » est en relation avec l'*anticipation* et la *vérification* ; « Rectifier la solution au besoin » se rapporte à la *perception des erreurs* et « Préciser les raisons pour lesquelles une stratégie ou une solution est inadéquate » fait appel à la *validation* et aux *métaconnaissances*. Un autre aspect de la première compétence qui rejoint le concept de contrôle est « Élaborer une solution mathématique » dans laquelle il est mentionné que l'élève doit « Justifier les étapes de sa démarche » ce qui rejoint la composante *validation* du modèle de Saboya (2010).

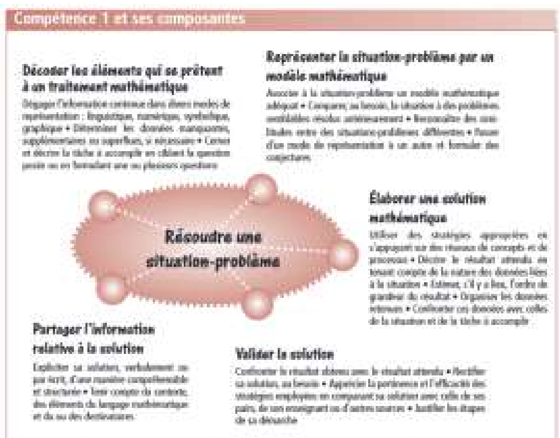


Figure 1.2 Compétence 1 et ses composantes (schéma tiré du PFEQ, 1[er] cycle du secondaire; MEQ, 2006, p. 241)

Il est également possible de faire des liens entre les attentes de fin de cycle de la compétence 1 au 2[e] cycle du secondaire et les composantes du contrôle :

> À la fin du deuxième cycle du secondaire, et ce, pour les trois séquences de formation, l'élève résout des situations problèmes - problèmes qui comportent plusieurs étapes. Il sait mettre en œuvre diverses stratégies pour se représenter une situation problème, élaborer une solution et la valider. Au besoin, il explore différentes pistes de solutions et recourt aux réseaux de concepts et de processus propres à un ou à plusieurs champs de la mathématique. Il présente une solution structurée qui comprend une

> démarche et un résultat et dont il est en mesure de justifier et d'expliciter les étapes en utilisant un langage mathématique. (MELS, p. 23)

L'utilisation de diverses stratégies pour se représenter une situation peut être reliée à un *engagement réfléchi* puisque l'élève tente en procédant ainsi de donner un sens à la situation. La justification de la démarche et de la solution est l'expression d'une *validation* au sens de Saboya (2010).

Ainsi, ,on peut dire que le développement d'un contrôle est central dans la résolution de problèmes. De plus, Lajoie et Bednarz (2014) soulignent que la résolution de problème[4] occupe une place prédominante dans les programmes du Québec, et ce, depuis le début du 20e siècle : « la résolution de problème a en effet de tout temps été un élément important de la réalité de l'enseignement des mathématiques au Québec » (p. 10). S'appuyant sur une étude documentaire des différents programmes en vigueur au Québec et autres ressources pédagogiques et didactiques, les chercheures soulignent que les finalités des problèmes changent dans le temps comme l'illustre le tableau 1.1. Dans ce tableau, on peut constater qu'au fil des réformes la résolution de problèmes a de plus en plus de finalités.

[4] Ce mémoire utilise des problèmes comme outil de collecte et non des situations problèmes.

Tableau 1.1 Évolution des finalités de la résolution de problèmes, tirés de Lajoie et Bednarz (2014, p. 13)

Différents rôles associés à la résolution de problèmes / SP / différentes significations associées	1904-1945	1946-1959	1960-1970	1980-1990	2000...
Fonction d'application	Une fonction d'application fortement liée au monde de la pratique / une intention de mise en pratique des connaissances	Idem	Une intention d'utilisation des connaissances et des techniques apprises	Une intention de réinvestissement des connaissances	Une intention de réinvestissement des concepts et des *processus mathématiques*
Fonction de formation	Une occasion de raisonner les notions	Idem	Une occasion de développer la pensée mathématique	Une occasion de développer des habiletés générales (estimer, généraliser, abstraire, etc.)	Une occasion de développer des habiletés intellectuelles faisant appel au raisonnement et à l'intuition créatrice
Fonction de construction de connaissances			Un problème comme amorce à l'apprentissage de concepts, de propriétés	Un problème à la source de la construction de connaissances nouvelles	Une SP qui permet d'explorer, d'inventer, de construire des concepts et *des processus mathématiques*
La résolution de problèmes comme objet d'apprentissage				La résolution comme objet d'étude et habileté de base à développer (s'accompagne d'un regard méta sur cette résolution)	Le processus de résolution de SP comme objet d'apprentissage (s'accompagne d'un regard méta sur ce processus)
La résolution de problèmes comme modalité pédagogique				La résolution de problèmes vue comme une approche pédagogique, un moyen à privilégier dans l'enseignement des maths	La résolution de SP, en tant que modalité pédagogique, supporte la grande majorité des démarches d'apprentissage en maths
Une fonction plus générale			Situation servant d'amorce à l'apprentissage		*La résolution de SP pour développer les autres compétences*

Ainsi, la résolution de problème fait partie intégrante de l'enseignement et de l'apprentissage des mathématiques au Québec depuis le début du 20e siècle.

Confronté au concept de contrôle dans un cours de deuxième cycle, un questionnement a émergé quant aux liens entre les composantes du contrôle provenant de quelques observations menées dans le cadre de ca cours.

1.2 Origine du questionnement de départ

Le questionnement sur le contrôle est survenu dans le cours *Didactique de l'algèbre* (MAT 7194), cours au deuxième cycle universitaire. Une partie de ce cours était consacrée au concept de contrôle en mathématiques. Les étudiants étaient invités à découvrir et à explorer les dix composantes de l'activité de contrôle, plus précisément dans le domaine de l'algèbre. C'est autour de la composante *sensibilité et dépassement de la contradiction* que sont nées les premières réflexions qui ont mené à cet objet de recherche. Cette composante du contrôle réfère à un malaise, un conflit ressenti ou à un déséquilibre entre une *anticipation* et un résultat non attendu. Le malaise peut toutefois ne pas provenir d'une anticipation. Pour discuter autour de cette composante du contrôle, les étudiants étaient confrontés au problème des cafés/croissants, tiré de Saboya(2010).

> Au restaurant, un café et trois croissants coûtent 2,70 $. Deux tasses de café et deux croissants coûtent 3 $. Trois tasses de café et un croissant coûtent 3,50 $. Trouve le prix d'une tasse de café et d'un croissant. (p. 449)

Ce problème permet d'observer la possible mobilisation *d'une sensibilité et d'un dépassement de la contradiction*, un possible malaise vis-à-vis la solution obtenue. Ce problème peut être résolu en ayant recours à l'algèbre ou de façon arithmétique. La résolution algébrique requiert la mise en place d'un contrôle à la fois *sémantique* et *syntaxique*. Le *contrôle sémantique* se manifeste lors de la traduction de l'énoncé en symboles mathématiques, on obtient ainsi un système de trois équations à deux inconnues. Par la suite, la résolution de ce système requiert un *contrôle syntaxique*. En résolvant le système d'équations deux à deux, il est possible de trouver trois couples solutions différents pour les prix d'un café et d'un croissant. En utilisant une méthode de résolution graphique, on voit clairement les trois couples solutions distincts (figure 1.3), ce qui mène vers une contradiction.

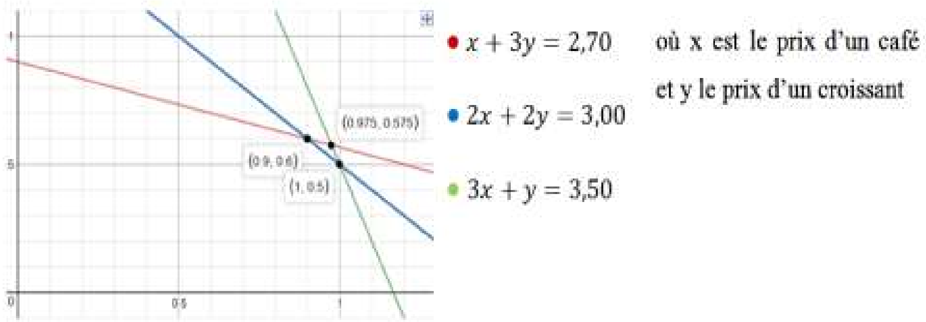


Figure 1.3 Résolution graphique du problème des cafés/croissants

Un raisonnement arithmétique, basé sur les écarts, permet également de percevoir une incohérence (figure 1.4). En effet, pour une augmentation constante d'un café et une diminution constante d'un croissant, la variation de prix n'est pas la même, ce qui est contradictoire.

Nb de cafés	Nb de croissants	Prix ($)
1	3	2,70
2	2	3,00
3	1	3,50

+ 1 café, - 1 croissant : + 0,30$

+ 1 café, - 1 croissant : + 0,50$

Figure 1.4 Résolution du problème des cafés/croissants par l'observation des variations

Lors de la résolution de ce problème en classe, une étudiante qui s'est engagée dans une résolution algébrique a été incapable de percevoir cette contradiction en raison de ses habilités dans la résolution de problèmes algébriques et plus particulièrement dans la résolution de systèmes d'équations. Alors que plusieurs étudiants ont rapidement remarqué l'impossibilité de la situation, cette dernière était insensible à la contradiction et clamait avoir une solution tangible. Malgré les avertissements de ses pairs, elle restait persuadée que sa réponse était valable, puisque sa méthode de résolution l'était dans une situation présentant une solution. En effet, l'étudiante a additionné les deux premières équations avant de comparer avec la troisième équation, sa résolution reposant sur le registre formel. En additionnant les deux premières équations (en rouge et en bleu, figure 1.5), elle a trouvé une nouvelle équation, $3x + 5y = 5{,}70$, (en orange, figure 1.5) possédant le même couple solution que les deux équations utilisées. Cette équation faisait donc partie, pour elle, de l'ensemble des droites passant par le point d'intersection des deux premières équations. De ce fait, la résolution de la troisième équation (en vert, figure 1.6) avec la quatrième créée par addition des deux premières équations (en orange, figure 1.6) devrait donner le couple solution unique. Toutefois, cette méthode lui a plutôt permis de trouver un nouveau couple solution différent des trois premières possibilités.

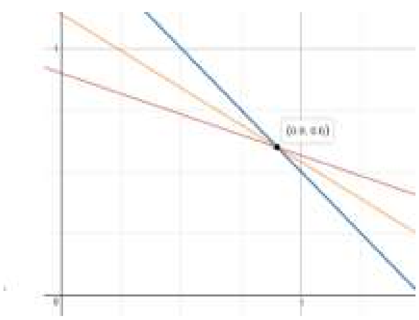


Figure 1.5 Représentation graphique de la droite résultante (en orange) de l'addition des deux premières équations (en rouge et en bleu)

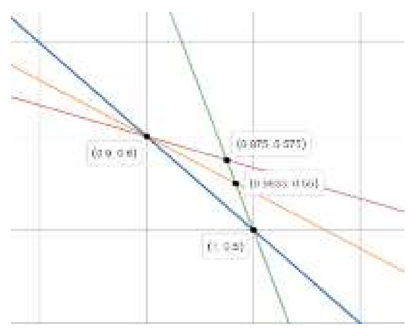


Figure 1.6 Comparaison finale entre la troisième équation (en vert) et les autres (en rouge, en bleu et en orange)

Lors de sa démarche, l'étudiante était en mesure de justifier syntaxiquement chacune de ses étapes et d'expliquer pourquoi le résultat était, selon elle, valide. Ainsi, l'étudiante a exercé un *contrôle sémantique* lors de la traduction de l'énoncé en un système de trois équations. Par la suite, elle a quitté le contexte pour traiter, grâce à un *contrôle syntaxique,* le système d'équations. C'est donc dire que portée par un *contrôle syntaxique* sur le problème sans mobiliser en même temps un *contrôle* *sémantique*, l'étudiante a été insensible à la contradiction dans ce problème en prenant pour acquis que le système d'équations présentait un couple solution. Suite à cette expérience, un questionnement sur les possibles relations entre les composantes du contrôle a commencé à émerger chez le chercheur. Effectivement, cette situation a permis d'observer que la mobilisation d'un fort *contrôle syntaxique* qui n'est pas supporté par d'autres composantes du contrôle, telles que la *vérification* ou le *contrôle sémantique*, peut nuire à la mise en œuvre d'autres composantes telles que la *sensibilité et le dépassement de la contradiction*.

Toujours dans le cadre de ce cours, en réalisant un travail sur le concept de contrôle auprès d'un groupe d'élèves du secondaire qui amorce l'apprentissage formel de l'algèbre, un collègue souhaitait observer la *sensibilité à la contradiction* à l'aide de ce même problème, des cafés/croissants. Cependant, lors de l'analyse de ses données, il n'a pu observer la manifestation de cette composante chez aucun des participants puisque les élèves n'étaient pas en mesure de résoudre le problème. Étant plongés dans l'algèbre dans leurs cours, les élèves se sont tous tournés vers une résolution algébrique qu'ils n'ont pas été capables de mener à bout. En effet, certains élèves n'ont pu manifester de malaise vis-à-vis la situation, en raison de leurs difficultés à traduire mathématiquement une situation en utilisant l'algèbre et d'autres ont ressenti des difficultés à résoudre un système de trois équations à deux inconnues. Les élèves ne se sont pas tournés vers une autre résolution. Il semble donc qu'il existe des conditions minimales à la manifestation de certaines composantes du contrôle. Par exemple, l'élève doit être capable de s'engager dans le problème et de faire face à un blocage, ce sont des conditions pour que puisse se manifester un contrôle sur la situation.

Finalement, en partageant ces réflexions avec deux professeures, d'autres relations entre les composantes du contrôle ont été mises en lumière. En effet, une de ces professeures a relaté une histoire autour de la résolution d'un problème par son fils du primaire. Lors d'un devoir, l'enfant devait déterminer combien de cubes seraient colorés si l'on plonge un cube, formé par de petits cubes (10 x 10 x 10), dans un pot de peinture. Avant même la résolution, le jeune a anticipé la réponse maximale en évaluant le nombre de faces de petits cubes qui allaient être peintes. Puisque chaque face du grand cube est composée de 100 petits cubes, le nombre de petits cubes peints devait être inférieur à 600 puisque certains petits cubes ont plusieurs faces colorées. Toutefois, à la fin de sa résolution, la réponse trouvée après des calculs était plus grande que celle anticipée. Celui-ci savait pertinemment que sa réponse était erronée, mais il était incapable de trouver l'erreur. C'est à ce moment qu'il a demandé l'aide de sa mère. L'explication de sa démarche avait beaucoup de sens selon elle, mais menait systématiquement à la réponse erronée. Il leur a fallu une heure pour trouver l'erreur dans le raisonnement. C'est donc dire que sans cette *anticipation* de l'ordre de grandeur de la réponse, l'enfant n'aurait probablement pas *perçu son erreur*. De plus, c'est cette *anticipation* qui a mené l'enfant et sa mère à *vérifier* la démarche entreprise afin de trouver l'erreur. Cette relation entre des composantes du contrôle a donc été déterminante lors de la résolution. La composante *anticipation* a mené à un doute lors de l'obtention du résultat qui a permis une vérification de la démarche et par la suite a abouti à la *perception d'erreurs*. Ainsi, les composantes du contrôle n'apparaissent pas comme isolées, des liens semblent se tisser entre certaines de ces composantes, elles sont en quelque sorte interreliées.

Ces exemples ont permis de constater que pour qu'un contrôle se mette en place, certaines conditions semblent requises comme un engagement dans le problème ainsi que les connaissances nécessaires pour la résolution. De plus, la grande maitrise ou la présence de certaines composantes du contrôle chez les élèves/étudiants peut empêcher la mobilisation d'autres composantes. D'après les expériences rapportées, un lien semble unir les composantes *anticipation*, *vérification* et *perception des erreurs*. À ce stade, un questionnement émerge quant aux liens qu'entretiennent les différentes composantes du contrôle, soit, quelles sont les relations possibles entre les composantes du contrôle?

Les expériences relatées dans cette section illustrent qu'il peut exister un lien entre les composantes du contrôle. Dans la prochaine section, quelques recherches portant sur le concept de contrôle ont été revues afin de dégager ces possibles liens même si ces liens ne sont pas l'objet d'étude de ces recherches [5].

1.3 Survol de liens entre les composantes du contrôle retrouvés dans la littérature

Plusieurs auteurs se sont intéressés à différentes composantes du contrôle[6] que les élèves déploient lors d'une tâche mathématique. Cipra (1985) et Coppé (1993) se sont penchés sur l'*anticipation* et la *vérification*, Perkins et Simmons (1988), Lee et Wheeler (1989) ainsi que Margolinas (1989) se sont attardés à la *validation*. L'*engagement réfléchi* a été étudié par Margolinas (1989) et Kargiotakis (1996). La *perception des erreurs* et la *sensibilité à la contradiction* ressortent des travaux de Piaget (1974) et Hitt (2004). Pour ce qui est du *contrôle syntaxique et sémantique*, on retrouve des réflexions sur ces contrôles dans les travaux de Brousseau (1986) et de Kouki (2007). Les chercheurs ont ainsi étudié ces différentes composantes de façon isolée, leur regard étant axé sur une (ou deux) composante(s).

Dans sa thèse, Saboya (2010) a repris ces recherches en construisant un cadre sur le contrôle à travers différentes composantes et en s'appuyant sur des travaux issus de différentes perspectives : épistémologique, psychologique, didactique, sociologique et éducation mathématique. À travers une recherche collaborative menée avec une

---

[5] Les études cités dans cette section autour des liens possibles entre les composantes seront approfondies dans le chapitre II.
[6] Les chercheurs n'utilisent toutefois pas toujours le terme « contrôle ».

enseignante, Saboya (2010)[7] a cherché à opérationnaliser le cadre sur le contrôle, en caractérisant d'une part les situations permettant le développement d'un contrôle chez les élèves, en dégageant, d'autre part, des indicateurs de contrôle chez les élèves et finalement en ciblant les interventions coconstruites avec l'enseignante qui visent à développer un contrôle lors de la résolution de ces situations. Son travail doctoral a donné lieu à différentes publications dans lesquelles les liens entre les composantes du contrôle ne sont toutefois pas l'objet central d'étude.

1.3.1 L'étude de Saboya (2010) sous l'angle des possibles liens entre les composantes du contrôle

Dans l'étude de Saboya (2010) et plus précisément dans l'analyse des données, les composantes du contrôle sont identifiées et traitées de façon individuelle. Cependant, il est mentionné que certaines composantes du contrôle sont reliées. C'est le cas de la *vérification* qui est définie comme pouvant provenir d'une *anticipation*. On retrouve ici le lien explicité lors du questionnement de départ avec la situation de la professeure et de son fils qui ont *vérifié* la démarche entreprise en raison d'une solution ne satisfaisant pas l'*anticipation* de l'ordre de grandeur. À cet effet, Saboya précise qu'il existe deux types de vérification :

> — Une vérification provenant d'une anticipation, on anticipe le résultat et on exerce ensuite une vérification face au résultat obtenu pour le confronter à celui anticipé.
> — Une vérification sans anticipation préalable, une fois le résultat obtenu, on se pose les questions suivantes « a-t-il du sens dans le contexte? », « est-il conforme à ce qui est demandé? ». (p. 407)

[7] L'étude menée se place en algèbre, plus précisément autour des exposants et s'attarde à la résolution de problèmes, mais également à diverses activités reliées aux exposants.

Ainsi, dans l'étude de Saboya, il apparait ce lien entre l'*anticipation* et la *vérification*.

1.3.2 L'étude de Saboya et Rhéaume (2015) sous l'angle des possibles liens entre les composantes du contrôle

Saboya et Rhéaume (2015) proposent un regard nouveau sur la résolution d'un problème de comparaison de fractions à travers une étude portant sur la manifestation par des élèves du début du secondaire d'actions contrôlées. En découlent des pistes d'enseignement à la lumière des résultats obtenus. Dans leur texte, les auteures caractérisent le *contrôle sémantique*, *l'engagement réfléchi* (défini comme une prise de distance, de recul par rapport à la tâche à effectuer) et *le choix éclairé* (qui se manifeste par la capacité à choisir la méthode la plus efficace) dans un problème de comparaison de fractions (figure 1.7).

Lors des Olympiques scolaires de ton école, tu es responsable du classement des athlètes. Les résultats représentent, en fraction, la distance parcourue par l'athlète. À partir des résultats du saut en longueur, complète le tableau de la remise des médailles. Celui qui parcourt la plus grande distance gagne.

Luc: $\frac{3}{5}$ Paolo: $\frac{2}{7}$ Julien: $\frac{1}{2}$ Alex: $\frac{3}{8}$ Yvan: $\frac{6}{7}$

1ière place (Or)	2e place (Argent)	3e place (Bronze)	4e place	5e place

__Note__: Étant donné la grande responsabilité de cette tâche, tu dois expliquer aux juges comment tu as fait. Laisse des traces ta démarche.

Figure 1.7 Problème de comparaison de fractions tiré de Saboya et Rhéaume (2015, p. 10).

L'analyse des productions d'élèves s'appuie sur les différentes composantes du contrôle. Ainsi, les chercheures présentent des indices de manifestations des composantes du contrôle à travers certaines démarches d'élèves. Toutefois, le dynamisme entre les composantes du contrôle est peu explicité. Il est tout de même présent entre l'*engagement réfléchi* et le *choix éclairé* et apparait alors qu'un élève compare les numérateurs aux dénominateurs des fractions du problème en prenant comme repères les deux fractions une demie et trois quarts (figure 1.8).

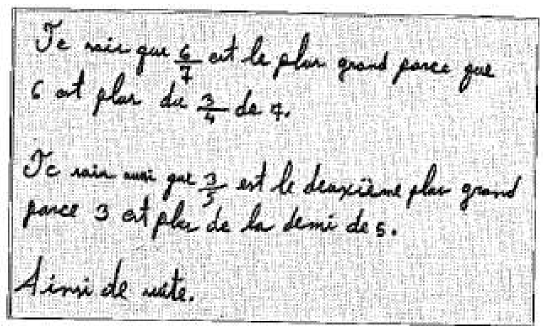


Figure 1.8 exemple de résolution, tiré de Saboya et Rhéaume (2015, p. 18)

Dans l'extrait suivant, les chercheures soulignent la mobilisation d'un *choix éclairé* de procédure qui provient d'un *engagement réfléchi* en relation avec la résolution présentée à la figure 1.8. Il semble donc y avoir un lien entre ces deux composantes du contrôle :

> Cette procédure de comparaison requiert un regard sur les fractions pour en déduire un ordre de grandeur lié au nombre et à la grosseur des morceaux. (…) Cet élève exerce ainsi un engagement réfléchi dans le problème, un choix éclairé d'une procédure efficace en temps de résolution et limitant les risques d'erreurs de calcul. (p. 18-19).

1.3.3 L'étude de Dufour et Jeannotte (2013) sous l'angle des possibles liens entre les composantes du contrôle

Dans leur étude, Dufour et Jeannotte (2013) portent un regard nouveau sur les difficultés que les étudiants rencontrent lors de la résolution d'une tâche non routinière en calcul différentiel (figure 1.9) en s'attardant sur le contrôle que les étudiants exercent sur ce type de tâche.

Trouve les valeurs de a et b pour que la droite $2x + 3y = a$ soit tangente au graphique de $f(x) = bx^2$ au point $x = 3$. Représente la situation graphiquement (à main levée).

Figure 1.9 Tâche non routinière tirée de Dufour et Jeannotte (2013, p. 34) (reprise de Selden, Selden, Hauk et Mason (1999)).

Dans cette étude, les chercheures présentent une synthèse des manifestations des composantes du contrôle observées chez les étudiants sous forme de tableau. Une composante du contrôle est cochée si l'étudiant a mobilisé celle-ci avec ou sans erreurs, lors de sa résolution. Ce tableau permet de constater que les étudiants mobilisent peu de contrôle vis-à-vis ce type de tâche non routinière. Il n'y a toutefois pas de mention quant à la possible interaction entre ces composantes dans le tableau. C'est lors de l'analyse des démarches des élèves par les chercheures que l'on peut entrevoir de possibles liens entre les composantes du contrôle et que l'on peut discerner les difficultés des étudiants lors de la résolution de ce type de tâche. Par exemple, lorsqu'un étudiant évoque l'idée d'utiliser la dérivée avant toute résolution sans savoir où l'utiliser ni comment dans sa démarche, les chercheures associent ce discours à un *engagement réfléchi* (car il y a une réflexion sur l'action à poser), mais également à un *manque de métaconnaissances* (reliées à la pertinence de l'utilisation de connaissances dans un contexte donné) et à un *manque de choix éclairé* (car l'étudiant a de la difficulté à faire un choix sur la méthode la plus appropriée à utiliser pour résoudre la tâche). De plus, la conclusion des chercheures amène un aspect intéressant en termes de relation entre les composantes du contrôle. En effet, lorsqu'elles mentionnent l'apport du cadre sur le contrôle pour déceler les difficultés des étudiants, plusieurs composantes sont mises en relation. Par exemple, les étudiants *ne perçoivent pas leurs erreurs*, puisqu'ils *ne vérifient pas* leur solution et un *manque de contrôle sémantique* (relié au sens) limite la possibilité d'une *anticipation* des résultats. Ainsi, ce regard sur les liens entre les composantes du contrôle permet de comprendre les difficultés que les étudiants rencontrent lors de la résolution de cette tâche.

1.3.4 L'étude de Saboya, Bednarz et Hitt (2015) sous l'angle des possibles liens entre les composantes du contrôle

Dans Saboya, Bednarz et Hitt (2015), les chercheurs visent à cerner les manifestations des composantes du contrôle en algèbre en contexte de résolution de deux problèmes chez des élèves de 15-16 ans. Dans l'analyse des résultats, l'aspect dynamique du contrôle est mis de l'avant. En effet, pour différentes démarches d'élèves, les auteurs font référence à la construction progressive d'un *contrôle sémantique* et d'un *contrôle syntaxique* dans l'analyse des productions de différents élèves.

Par exemple, pour le problème des trains qui s'énonce comme suit : « il y a 578 passagers à transporter entre 2 villes. On dispose de 2 trains pour le faire. Un des trains a uniquement des wagons à 12 places, et l'autre uniquement des wagons à 16 places. En sachant que les deux trains ont le même nombre de wagons, combien doit-on accrocher de wagons après chacune des 2 locomotives? » (p. 9), une élève fait quatre tentatives avant d'arriver à résoudre le problème. Le tableau 1.2 reprend les tentatives menées par l'élève lors de la résolution de ce problème.

Tableau 1.2 Démarche chronologique d'une élève lors de la résolution du problème des trains, tirée de Saboya *et al*. (2015, p. 13)

1[re] tentative	2e tentative	3e tentative	4e tentative
$w+(w+4)=578$ $12n+(12+4)n=578$ $12n+12n+4=578$ $-4 \quad -4$ $12n+12n=574$ $-12n \quad -12$ $\frac{12n}{12}=\frac{562}{12}$ $n=46{,}8$	$12n+16x=578$ $12n+12(n+4)=578$ $12n+12n+48=578$ $-48 \quad -48$ $12n+\frac{12n}{12}=\frac{530}{12}$ 530 | 12 -48 50 $\quad 44{,}1\bar{6}$ -48 20 -12 80 -72 80	$12n+16n=578$ $\frac{12n+16n}{16}=\frac{578}{16}$ $12n=36{,}125$ $\frac{12n}{12}=36{,}125$	$28n=578$ $\frac{28n}{28}=\frac{578}{28}$ $n=20{,}64$ *ou* 21 Réponse : 21 wagons

Les chercheurs soulignent que dans une première tentative, l'élève exprime des difficultés de mise en équation lors de la symbolisation. À ce stade, l'identification des grandeurs en jeu ainsi que les relations entre celles-ci ne vont pas de soi pour l'élève. De plus, la résolution de l'équation comporte quelques erreurs de manipulation et donc des difficultés de *contrôle syntaxique*. C'est au regard de la réponse obtenue que l'élève semble exprimer un doute par rapport à sa démarche, ce qui l'amène à revoir la mathématisation du problème. La mise en équation dans la seconde tentative souligne une avancée dans la symbolisation, l'équation traduit un nombre de places selon le nombre de wagons, cependant elle utilise deux variables pour représenter les différents types de wagons. Ainsi, la relation entre les deux types de trains n'apparait pas initialement, mais l'élève modifie son équation lors de la résolution, elle tente avec difficulté de revenir à une équation à une seule variable. Toutefois, ce n'est pas sans difficulté puisqu'elle remplace $16x$ par $12(n+4)$, ce qui démontre un manque de *contrôle sémantique* sur la signification des grandeurs. De plus, on peut noter des difficultés au niveau *syntaxique* de la résolution, puisqu'elle divise un seul terme de la partie de gauche de l'équation, ce qui l'amène à un résultat qui ne satisfait pas ses attentes. Elle opte alors pour une troisième tentative.

Sa troisième tentative démontre un *contrôle sémantique* qui lui permet de mathématiser le problème. En effet, l'élève prend en compte le fait que le nombre de wagons est le même pour les deux trains. Cependant, au niveau de la résolution, on peut encore observer certaines difficultés à opérer de manière à conserver l'égalité sur ses deux membres donc des difficultés de *contrôle syntaxique*. Par la suite et selon les chercheurs, c'est probablement le résultat non convaincant de la division mentale de 36,125 par 12 qui ramène l'élève à son équation de départ provenant de sa troisième tentative. Ceci permet à l'élève dans une quatrième tentative de résoudre adéquatement le problème.

Comme le mentionnent Saboya *et al.* (2015), c'est à travers ses différentes tentatives de résolution que l'élève développe un *contrôle sémantique* et un *contrôle syntaxique* qui prennent appui l'un sur l'autre, ce qui lui permet de résoudre le problème :

> Cette analyse, outre les manifestations diverses de contrôle qu'elle permet d'expliciter nous montre que contrôle sémantique et syntaxique sont profondément imbriqués. Les erreurs dans la manipulation des expressions, lors de la résolution de l'équation, et le doute que l'élève ressent face à la réponse qu'il obtient amènent l'élève à revenir sur la mathématisation du problème. (p. 16)

De plus, les chercheurs arrivent à la conclusion, en s'appuyant sur l'analyse des résolutions de différents élèves, que les manifestations des autres composantes du contrôle n'apparaissent pas comme des éléments isolés, mais comme un réseau dynamique :

> Globalement, contrôle sémantique et syntaxique, anticipation, engagement réfléchi, vérification, sensibilité aux erreurs, doute, prise en compte des contraintes, etc, n'apparaissent pas ainsi comme des éléments isolés. Nous devons voir ces composantes comme un réseau dynamique : au fur et à mesure que l'élève avance dans la résolution d'un problème, elle/il renforce ce réseau promouvant, en retour, un enrichissement de chacune de ces composantes. (p. 32)

Ces recherches apportent donc un éclairage plus ou moins explicite sur les possibles relations entre les composantes du contrôle.

La résolution de problèmes prend une place particulièrement importante dans le programme de formation de l'école québécoise (section 1.2). De nos jours, elle s'intéresse principalement aux processus mobilisés pour la résoudre, et comme il a été mentionné, cesdits processus peuvent être associés au concept de contrôle de Saboya (2010). Ainsi, la présente étude a pour objectif de poursuivre cette réflexion autour des liens entre les composantes du contrôle dans un domaine particulier, la résolution de problèmes en algèbre, prolongeant ainsi quelques études menées dans ce domaine (Saboya, 2010; Saboya *et al*., 2015).

1.4 Présentation de l'objectif de la recherche

Comme mentionné aux sections 1.2 et 1.3, des liens entre des composantes du contrôle peuvent être établis. Ainsi, des composantes peuvent s'enrichir mutuellement faisant ressortir l'existence d'un réseau dynamique entre elles. De plus, il est possible que la mobilisation d'une composante affecte le déploiement d'une autre composante faisant ressortir certaines difficultés. Les études portant sur le contrôle au sens de Saboya (2010) s'attardent généralement sur les indices qui permettent d'identifier la manifestation d'une composante du contrôle dans une résolution de problème. Quoiqu'il soit parfois mentionné que certaines composantes sont reliées entre elles ou font partie d'un réseau dynamique, ces relations ne sont pas l'objet central des études. C'est dans cette lignée que s'oriente cette recherche, vers une caractérisation des relations entre les composantes du contrôle lors de la résolution de problèmes algébriques. En effet, la résolution de problèmes est au cœur de l'enseignement des mathématiques au Québec depuis de nombreuses décennies. Actuellement, la première compétence, *Résoudre une situation problème*, encourage le développement du contrôle au sens de Saboya (2010) même si ce terme n'est pas utilisé. Cette recherche s'oriente ainsi en résolution de problèmes en algèbre, domaine déblayé par Saboya (2010) et Saboya *et al*. (2015). Cette recherche se veut ainsi une contribution sur le concept de contrôle en résolution de problèmes en algèbre à travers une étude des relations entre ses différentes composantes. L'objectif de la recherche peut s'énoncer comme suit :

> Mieux comprendre le dynamisme de l'activité de contrôle via l'étude des liens possibles entre les différentes composantes du contrôle dans la résolution de problèmes en algèbre.

CHAPITRE II

CADRE CONCEPTUEL

Comme il a été relevé dans la problématique, la littérature laisse penser que les composantes du contrôle sont interreliées lors de la résolution de problèmes. Dans ce chapitre sont approfondis les liens dégagés dans la problématique (section 1.3). Mais avant de s'intéresser aux relations entre les composantes du contrôle (section 2.3), une explicitation et exemplification de chacune des composantes est présentée dans la première section. Par la suite, sont discutées les caractéristiques des problèmes qui favorisent la mobilisation d'un contrôle (section 2.2). La quatrième section expose la possibilité que d'autres aspects puissent teinter les relations entre les composantes du contrôle. À la lumière de ces sections, l'objectif de recherche est revu en termes de structuration du contrôle et deux questions de recherche sont énoncées.

2.1 Le contrôle et ses composantes

2.1.1 Le concept de contrôle

Comme mentionné dans la problématique, en didactique des mathématiques, si un élève maitrise ses actions mathématiques lors de la résolution d'une situation, on peut dire que celui-ci fait preuve d'une action contrôlée. Saboya (2010) définit le contrôle par :

i) une réflexion de la part de la personne sur toute action, sur tout choix tout au long de la tâche : au début, en cours ou à la fin de la résolution.
ii) la capacité de prendre des décisions de façon réfléchie, rationnelle.
iii) une prise de distance par rapport à la résolution.
iv) le recours aux fondements sur lesquels on s'appuie pour valider.(p. 116)

Comme précisé dans la problématique, dix composantes du contrôle sont distinguées : la *vérification-retour au problème*, la *perception des erreurs*, la *sensibilité et le dépassement de la contradiction*, la *validation*, le *choix éclairé*, l'*engagement réfléchi*, le *contrôle syntaxique*, le *contrôle sémantique*, l'*anticipation* et les *métaconnaissances*. Lors de l'étude du contrôle mobilisé autour d'un problème de comparaison de fractions (Saboya et Rhéaume, 2015), une autre composante du contrôle est précisée, *le contrôle sur les calculs*. L'approche autour du contrôle ouvre la voie vers une nouvelle analyse de ce que font les élèves sous l'angle des difficultés vécues dans différentes situations en mathématiques, mais également pour analyser les actions contrôlées mobilisées pour résoudre un problème, la réussite n'est pas ici centrale.

2.1.2 Les composantes du contrôle

Dans cette sous-section, chacune des composantes est décrite et exemplifiée à travers leur mobilisation.

Les ***contrôles sémantique*** et ***syntaxique*** sont deux composantes importantes lors du passage de l'arithmétique à l'algèbre (Saboya, Bednarz et Hitt, 2015). Le *contrôle sémantique* se rapporte au sens, c'est-à-dire à la signification des grandeurs données dans le problème et de leurs relations (Saboya, 2010 ; Saboya *et al*., 2015). Le *contrôle syntaxique* est observable lors de la phase de résolution, puisqu'il fait référence aux transformations faites sur une équation afin de conserver l'égalité entre chaque terme (Saboya, 2010 ; Saboya *et al*., 2015). La mobilisation de ces deux composantes est illustrée par Saboya *et al*. (2015) lors de la résolution du problème des trains (section 1.4.4). La figure 2.1 présente une des tentatives de résolution d'un élève :

$$
\begin{gathered}
w + (w + 4) = 578 \\
12n + (12 + 4)n = 578 \\
12n + 12n + 4 = 578 \\
\text{-4} \qquad \text{-4} \\
12n + 12n = 574 \\
\text{-12n} \qquad\quad \text{-12} \\
\frac{12n}{12} = \frac{562}{12} \\
n = 46{,}8
\end{gathered}
$$

Figure 2.1 Mobilisation d'un *contrôle sémantique* et *syntaxique* lors de la résolution du problème des trains, tirée de Saboya *et al*. (2015, p. 13)

En termes de contrôle, selon les chercheurs, cette démarche démontre une difficulté de *contrôle sémantique* visible dans la symbolisation de la relation entre le nombre de passagers dans chacun des trains, mais l'élève explicite tout de même quelques relations pertinentes entre différentes grandeurs (la substitution de *w* par 12*n* et la relation nombre de wagons × nombre de passagers par wagon = nombre de passagers total). De plus, cette démarche illustre un certain *contrôle syntaxique* par la simplification de l'équation par une équation plus simple à résoudre, de la forme ax = b et par la soustraction simultanée aux deux membres de l'équation afin de conserver l'égalité. Cependant, on peut aussi observer une difficulté à gérer le traitement des expressions avec une inconnue (*n* n'est par distribué à chaque terme de l'addition et disparait lors d'une soustraction).

L'***anticipation*** prend place généralement avant la résolution et permet à l'élève d'appréhender certaines propriétés que doit avoir un résultat, tel que l'ordre de grandeur ou la nature du nombre obtenu (Saboya 2010). Mais au-delà d'estimer une réponse, il s'agit de poser une condition de validité d'un résultat avant même de le connaitre (Saboya *et al*., 2015). Il est cependant difficile d'observer l'*anticipation* à travers les traces écrites. Cependant, comme le rapportent Saboya *et al*. (2015), il est possible de supposer sa présence.

> L'élève semble ainsi exprimer un doute face à la réponse et la démarche qui l'a conduit à celle-ci. D'où provient ce doute ? Probablement d'une anticipation, avec un calcul approximatif, du nombre de wagons, mais cela reste une hypothèse. (p. 13)

Dans l'éventualité de la mobilisation d'une *anticipation*, il est possible que cette composante en engendre une autre, soit la ***vérification*** (Saboya, 2010 ; Saboya *et al*., 2015 ; Saboya et Rhéaume, 2015). En effet, la *vérification* peut être utilisée lorsqu'un résultat obtenu ne concorde pas avec celui anticipé. Comme le mentionne Saboya (2010), il est aussi possible de procéder à une *vérification* sans une *anticipation* préalable. Dans ce cas, selon Coppé (1993) c'est par le questionnement du caractère vrai ou faux de la solution que cette composante sera mobilisée. Quant à Saboya (2010), elle pousse le concept un peu plus loin en s'interrogeant sur la pertinence du résultat, « a-t-il du sens dans le contexte? » ou « est-il conforme à ce qui est demandé? », ce qui nécessite un retour sur la tâche à accomplir. De plus, cette *vérification* peut aussi porter sur la démarche ou sur le choix de la méthode utilisée et peut survenir en cours de processus. Saboya *et al*. (2015) illustrent par un exemple de production d'élève (figure 2.2) le cas où l'élève effectue une nouvelle tentative de résolution suite à une *vérification* en remplaçant son résultat dans l'équation initiale. En effet, la substitution permet de constater une incohérence, et ce, même si l'élève n'inscrit pas le résultat de son opération (il a surement arrêté quand il s'est aperçu qu'il n'obtiendrait pas le résultat cherché).

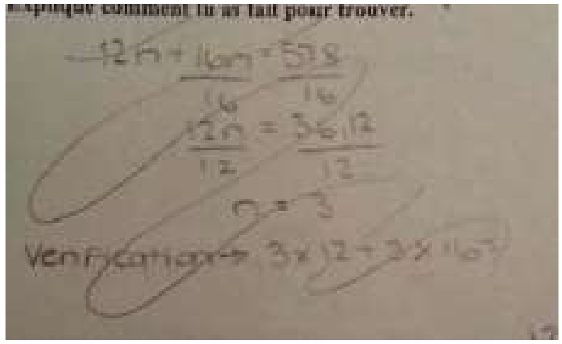


Figure 2.2 Un exemple de mobilisation de la *vérification* tiré de Saboya *et al*. (2015, p. 18).

Saboya *et al*. (2015) mentionnent que c'est par la *vérification* de la démarche qu'il est possible de ***percevoir les erreurs*** qui proviennent généralement d'une incertitude, ou d'un doute face à la véracité d'un résultat. De plus, les chercheurs précisent que ces erreurs pourraient notamment être attribuables à des erreurs de calcul. Dans sa thèse, Saboya (2010) illustre cette composante lorsqu'une élève divise un nombre par lui-même et obtient un résultat de zéro, puis corrige son erreur. En somme, la *perception des erreurs* est observable lorsqu'une erreur dans la démarche est corrigée.

La composante ***sensibilité à la contradiction*** s'apparente à la composante *perception des erreurs*. En fait, dans les premières versions du modèle, ces deux composantes n'en représentaient qu'une seule. Or, Saboya *et al*. (2015) parlent de *perception des erreurs* séparément de la *sensibilité à la contradiction*. Selon eux, la *sensibilité à la contradiction* est attribuable à un malaise, un conflit ressenti ou un déséquilibre entre une *anticipation* et un résultat non attendu. Tandis que Saboya (2010) parle plutôt d'un effet de surprise face à un résultat, ce qui n'est pas contradictoire puisque l'effet de surprise peut mener à un conflit ou un malaise face à la situation. Le ***dépassement de la contradiction*** est, quant à lui, observable lorsqu'une action est entreprise afin de dépasser cette contradiction. Elle ne peut être observée que si une contradiction a d'abord eu lieu. Pour Saboya (2010), cette composante est en quelque sorte le second niveau de la *sensibilité à la contradiction*. Dans leur recherche, Saboya *et al*. (2015) étudient la mobilisation de cette composante à travers la résolution du problème des cafés/croissants (section 1.2). La *sensibilité* se manifeste lorsque des élèves justifient qu'il n'est pas possible de trouver un prix unique pour un café et pour un croissant (figure 2.3). Dans ce cas, l'élève n'est pas juste *sensible à la contradiction*, il *dépasse cette contradiction*.

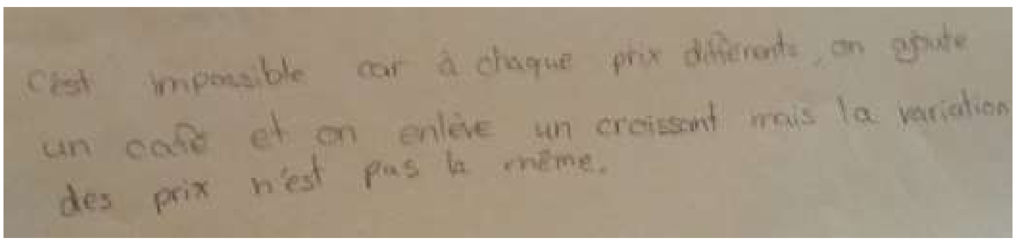


Figure 2.3 Exemple de *dépassement de la contradiction,* tiré de Saboya et al. (2015, p. 29)

Une autre composante du contrôle est ***l'engagement réfléchi***. Selon Saboya (2010), cette composante peut s'exprimer de plusieurs manières. Elle peut se manifester par une prise de distance ou un arrêt face à la tâche lors de la résolution ou avant la résolution. Elle peut s'exprimer par un retour aux fondements ou par la recherche de sens (savoir d'où proviennent les conventions, les règles, les concepts en jeu). Ou encore, elle peut se traduire par une appropriation du problème en donnant du sens en contexte, faisant appel au choix d'une interprétation du problème parmi d'autres interprétations possibles. La démarche à la figure 2.3 n'est pas seulement un exemple de *dépassement de la contradiction,* mais également la démonstration d'un *engagement réfléchi* (Saboya *et al*., 2015), puisque l'élève explique pourquoi il ne peut résoudre le problème sans avoir recours à une démarche mathématique explicite.

Lorsque l'on résout un problème mathématique, il n'existe pas un seul chemin menant à la solution. Selon Saboya (2010), le ***choix éclairé*** (ou discernement) se traduit par une capacité à choisir parmi différentes écritures et/ou différentes stratégies celle qui est la plus appropriée, la plus efficace, car elle est la moins couteuse en temps et elle est garante de peu d'erreurs de calcul. En ce sens, il est lié à *l'engagement réfléchi*. Saboya *et al*. (2015) ajoutent que cette composante se manifeste par la capacité à voir différentes stratégies pour résoudre le problème et par la capacité à faire un choix pertinent d'une de ces stratégies selon son efficacité par rapport aux autres.

Une autre des composantes est l'utilisation de ***métaconnaissances***. Selon Saboya (2010), cette composante est le fruit d'une réflexion sur les connaissances et elle exprime un savoir sur la pertinence, l'efficacité d'une notion, d'une écriture dans une tâche donnée (p. 408). Pour Artigue (1993), les métaconnaissances sont de plus reliées au rapport que l'élève a face au type de situation, aux difficultés envisageables, aux erreurs habituellement commises et donc aux moments où il faut faire preuve de vigilance (p. 38).

Selon Saboya (2010), la ***validation*** s'appuie sur des fondements, explicités, qui permettent de juger du caractère vrai, faux, partiellement vrai de ce qui est avancé (p. 407). En ce sens, la validation est fortement liée à la preuve (Jeannotte, 2015). De surcroit, Saboya (2010) stipule que dans le cas d'énoncés algébriques, la validation se traduit par une coordination entre l'arithmétique et l'algèbre et par la capacité de passer d'un cadre à l'autre (p. 407). La chercheure donne l'exemple de la réponse d'un élève qui réagit aux propos de l'enseignante, celle-ci précise que x^2 et x n'ont pas les mêmes valeurs, cet élève répond alors « Oui, cette égalité est vraie si $x^2 = x$ si $x = 1$ » (p. 314).

En ce qui a trait au ***contrôle sur les calculs***, cette composante se manifeste par les opérations arithmétiques effectuées lors de la résolution d'un problème. Par exemple, Saboya et Rhéaume (2015) mentionnent que lors de la résolution d'une tâche de comparaison de fractions (voir section 1.4.2), les élèves déploient un *contrôle sur les* *calculs* par les multiplications et les divisions menées avec les numérateurs pour trouver un dénominateur commun ou pour transformer des fractions en pourcentages.

Les recherches précisent que la mobilisation des composantes du contrôle dépend des caractéristiques de la situation. Le choix des situations peut être ainsi déterminant pour le recours à certaines composantes.

2.2 Caractéristiques des situations qui favorisent la mobilisation de certaines composantes du contrôle

Dans son cadre théorique, Saboya (2010) souligne l'importance du choix de la situation pour favoriser le recours à des composantes du contrôle. Elle met de l'avant les caractéristiques des situations qui favoriseraient un contrôle lors de son exécution. En effet, en s'appuyant sur la littérature, elle identifie six catégories de situations en relation avec les composantes du contrôle qui sont regroupées dans un tableau synthèse (voir tableau 2.1).

Tableau 2.1 Tableau énonçant les caractéristiques des situations selon une composante visée, tiré de Saboya (2010, p. 136).

Anticipation (Margolinas, 1989; Cipra, 1985; Balacheff, 1987) **La situation proposée doit** permettre de **pouvoir poser a priori une condition de validité du résultat** avant de le connaître.	**Vérification, validation** (Hadamard, 1945/1975; Cipra, 1985; Coppé, 1993; Margolinas, 1989; Richard, 1998; Kargiotakis, 1996; Schoenfeld, 1985; Lee et Wheeler, 1989; Perkins et Simmons, 1988). **La situation proposée doit permettre d'engager des vérifications successives,** périodiques **tout au long de la tâche.** Le résultat obtenu peut mener vers un retour sur la tâche, sur la méthode, ou sur les calculs.	**Engagement réfléchi** (Margolinas, 1989; Balacheff, 1987; Kargiotakis, 1996; Perkins et Simmons, 1988; Schmidt, 1994) **La situation fait intervenir le sens,** la compréhension des concepts en jeu de manière à permettre un engagement réfléchi. **Elle requiert également une prise de distance** par rapport à la tâche, un temps d'arrêt, de réflexion.
Discernement, choix éclairé (Schoenfeld, 1985; Balacheff, 1987; Kargiotakis, 1996) **La situation permet plusieurs engagements possibles.** C'est l'idée d'un choix éclairé entre diverses stratégies possibles, pour **discerner celle qui est la plus efficace,** celle qui mène vers la solution le plus rapidement, sans trop de risques d'erreurs.	**Idée de métaconnaissance** (Artigue, 1993; Robert, 1993 ; Lenfant, 2002; Julien, 1989-90) **La situation sollicite l'utilisation de connaissances de type méta,** nommées métaconnaissances, liées à la prise de décision sur l'utilisation des connaissances les plus appropriées en lien avec la tâche.	**Perception des erreurs, sensibilité à la contradiction. Capacité de dépasser la contradiction** (Balacheff, 1987; Piaget, 1974; Kargiotakis, 1996) **La situation provoque un déséquilibre, une contradiction,** des résultats aberrants, qui n'ont pas de sens… de manière à provoquer une prise de conscience. **Elle invite aussi à dépasser la contradiction.**

Il y a ainsi une attention à porter sur les situations à proposer pour prévoir les composantes du contrôle qui peuvent être mobilisées, une même situation pouvant solliciter différentes composantes. Dans la prochaine section, le travail de mise en apparence autour des liens entre les composantes du contrôle, travail entrepris lors de la problématique est poursuivi et approfondi.

2.3 Relations possibles entre les composantes du contrôle

Comme mentionné dans la problématique (sections 1.2 et 1.3), il semble exister des liens entre différentes composantes du contrôle. Cette recherche tente de mettre en lumière ces liens. Cette section a pour objectif de faire ressortir les relations entre les composantes qui émergent du travail de Saboya (2010) et des autres recherches sur le contrôle qui s'appuient sur ce cadre. Comme mentionné, certaines de ces relations sont sous-entendues dans ces recherches.

2.3.1 Relations entre les composantes du contrôle issues de Saboya (2010)

Selon les caractérisations des composantes du contrôle qui ressortent du travail de Saboya (2010), il existe bel et bien certains liens entre différentes composantes du contrôle. Malgré que chaque composante puisse être mobilisée indépendamment, il ressort de cela que l'*anticipation*, la *vérification* et la *perception des erreurs* sont intimement reliées. En effet, tel que vu à la section 1.3.1, selon la caractérisation de la composante, la *vérification* peut reposer sur l'*anticipation*. De plus, la *perception des erreurs* peut prendre place à la suite d'une vérification enclenchée par une *anticipation* déçue. De même, la *sensibilité à la contradiction* et *son dépassement* vont de pair, c'est-à-dire que le *dépassement de la contradiction* ne peut se manifester que si la contradiction a été observée. Selon Hitt et Morasse (2009), il est aussi possible que la contradition soit observée, sans que les participants aient la possibilité de la dépasser. Elles sont dans ce sens définies sous deux niveaux d'une même composante, *sensibilité/dépassement de la contradiction*. Il semble aussi exister un lien entre *l'engagement réfléchi* et le *choix éclairé*, car il est nécessaire d'avoir un certain recul face à la question afin de choisir la méthode la plus efficace.

Voici donc les liens possibles qui ressortent de cette étude :

- Anticipation ----- vérification------perception des erreurs
- Sensibilité à la contradiction---- dépassement de la contradiction
- engagement réfléchi ------ choix éclairé

2.3.2 Relations entre les composantes du contrôle issues de Saboya et Rhéaume (2015)

Dans leur article, Saboya et Rhéaume (2015) mettent en relation quelques composantes du contrôle. Dans la section 1.3.2, un lien entre *engagement réfléchi* et *choix éclairé* a été établi. En fait, d'autres composantes peuvent se greffer à ces deux composantes. En effet, les chercheures avancent que *l'engagement réfléchi* survient lorsque l'élève marque un temps d'arrêt afin de réorienter sa démarche. Cependant, ce changement de procédure demande de faire un retour sur le problème. En d'autres mots, cette mobilisation de *l'engagement réfléchi* devrait passer par une *vérification* qui pourrait mener par le fait même à une certaine *perception des erreurs*.

> En résumé un changement de procédure implique que, suite à un premier essai non concluant, les élèves marquent un temps d'arrêt, une prise de distance qui leur permet de choisir une autre procédure pour comparer les fractions à l'étude, prenant ainsi conscience des limites de la première procédure mobilisée. Ce changement de procédure requiert un retour sur le problème, un regard sur les fractions à comparer. (p. 17)

Dans un autre ordre d'idée, Saboya et Rhéaume (2015) mettent de l'avant un lien entre le *contrôle sur les calculs*, l'*engagement réfléchi* et le *choix éclairé* de stratégie lors de l'analyse de la démarche d'un élève qui abandonne une résolution lors de la comparaison de fractions, résolution qui repose sur la recherche d'un dénominateur commun en passant par une écriture en pourcentage.

> Ce changement illustre un engagement réfléchi en cours de résolution menant à un choix éclairé d'une procédure. Après la mise en échec de la première tentative de résolution, l'élève est amené à reconnaitre les limites de la procédure et à se tourner vers une autre procédure qui lui permettra de comparer les fractions. Le passage des fractions en pourcentage requiert un contrôle sur les calculs. (p. 16)

C'est donc dire que le texte de Saboya et Rhéaume soulève qu'un *engagement réfléchi* soutenu d'une *vérification* pourrait mener à un *choix éclairé* de méthode, lorsque la première approche s'avère inefficace ou qu'une *erreur est perçue*. De surcroit, le changement de méthode peut être orienté par le *contrôle sur les calculs* que l'élève possède.

Voici donc les liens possibles qui ressortent de cette étude :

- Engagement réfléchi ------ choix éclairé --- Vérification (avec possibilité d'une perception des erreurs)
- Engagement----- choix éclairé --------- contrôle sur les calculs

2.3.3 Relations entre les composantes du contrôle issues de Dufour et Jeannotte (2013)

Dufour et Jeannotte (2013) laissent entrevoir la possibilité de certains liens entre les composantes du contrôle, sans les étudier explicitement. En effet, les chercheures mettent de l'avant lors de l'analyse de la tâche (figure 1.9) que les étudiants qui sont incapables de donner du sens au problème ou de mobiliser leurs connaissances en relation avec la dérivée ne pourront pas anticiper correctement une réponse :

> Donc si l'étudiant reconnait que la pente de la droite est négative, il peut déduire que le premier cas est le bon et il peut anticiper le signe des deux inconnues. Ceci demande, par contre, un très grand contrôle sémantique en plus de métaconnaissances. En effet, l'étudiant doit être capable d'articuler les différentes représentations du problème et d'en dégager des conclusions s'il veut faire une telle anticipation. (p. 36).

Ainsi, l'*anticipation* d'un résultat pourrait requérir la mobilisation de *métaconnaissances* sur le domaine mathématiques à l'étude en plus d'un contrôle sur la mathématisation du problème (*contrôle sémantique*).

Dans un autre ordre d'idées, les chercheures présentent le cas d'un étudiant qui mathématise avec une seule équation contenant deux inconnues. L'étudiant isole une des inconnues et remet la valeur trouvée dans la même équation, ce qui mène vers un raisonnement circulaire. Les chercheures soulèvent que l'étudiant n'arrive pas à *percevoir ses erreurs* puisqu'il ne maitrise pas le sens et les opérations en jeu lors de sa démarche. En d'autres mots, les lacunes *syntaxiques* ressenties par l'étudiant ne lui permettent pas de douter de sa réponse et nuisent ainsi à une *perception de l'erreur*. On peut donc remarquer que la mobilisation (ou non) d'une composante du contrôle semble jouer sur l'émergence d'une autre composante. Ceci amène à un questionnement sur les conditions minimales pour qu'ait lieu l'expression d'une action contrôlée.

Voici donc les liens possibles qui ressortent de cette étude :

- Métaconnaissance ---- sémantique ------- anticipation
- Syntaxique ---- rupture---- sémantique ---- vérification (et perception des erreurs)

2.3.4 Relations entre les composantes du contrôle issues de Saboya *et al*. (2015)

Tel qu'explicité à la section 1.3.4, Saboya *et al*. (2015) mettent bien en valeur l'articulation de certaines composantes du contrôle et le dynamisme de l'activité de contrôle. Dans la discussion, les chercheurs précisent ce qui suit (citation présentée dans le chapitre I) :

> Globalement, contrôle sémantique et syntaxique, anticipation, engagement réfléchi, vérification, sensibilité aux erreurs, doute, prise en compte des contraintes, etc., n'apparaissent pas ainsi comme des éléments isolés. Nous devons voir ces composantes comme un réseau dynamique : au fur et à mesure que l'élève avance dans la résolution d'un problème, elle/il renforce ce réseau promouvant, en retour, un enrichissement de chacune de ces composantes. (p 32)

Cette citation souligne que plusieurs composantes du contrôle sont interreliées. De plus, la schématisation de l'analyse de la mobilisation des composantes du contrôle (figure 2.4) illustre que lors de la construction progressive d'un *contrôle sémantique*, plusieurs composantes viennent se greffer entre elles afin de parvenir à une réponse finale. En effet, cette schématisation permet de voir qu'au début les contrôles *sémantiques et syntaxiques* sont défaillants, mais que l'*anticipation*, la *prise de distance* et la *vérification* agissent pour que l'élève développe un *contrôle sémantique* et par la suite un *contrôle syntaxique*.

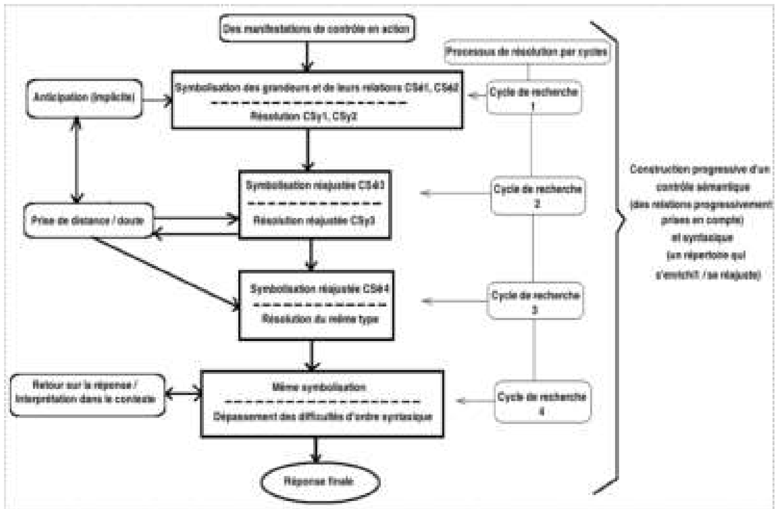


Figure 2.4 Schématisation de la construction d'un *contrôle sémantique* et d'un *contrôle syntaxique*, tirée de Saboya *et al*. (2015, p. 20)

Il semble donc exister une relation entre les composantes *anticipation*, *engagement réfléchi*, *vérification*, *perception des erreurs* et *contrôle sémantique* et *syntaxique*.

Voici les liens possibles qui ressortent de cette étude :

- Sémantique ---- syntaxique
- Anticipation ------ engagement réfléchi ---- vérification--- perception des erreurs

2.3.5 Relations entre les composantes du contrôle issues d'Artigue (1993)

Selon Artigue (1993), les *métaconnaissances* permettent d'évaluer la pertinence d'une démarche. Ainsi, faire un *choix éclairé* de stratégie pourrait nécessiter le déploiement de *métaconnaissances*. De plus, selon la définition d'Artigue (1993), les *métaconnaissances* sont aussi des connaissances sur les forces et les faiblesses de celui qui résout. Il est possible qu'une personne vérifie toujours une certaine étape, car elle est consciente de ses lacunes ou qu'elle reconnaisse une erreur qu'elle commet fréquemment. Se mettent alors en place des moments de vigilance qui repose sur la reconnaissance de ces faiblesses. Cette définition amène ainsi un lien entre les métaconnaissances et la vérification et/ou la perception des erreurs.

Voici donc les liens possibles qui ressortent de cette étude :

- Choix éclairé --------- métaconnaissance
- Métaconnaissance ------vérification
- Métaconnaissance ------perception des erreurs

2.3.6 Synthèse autour des relations entre les composantes du contrôle ressorties de la littérature

L'observation des différentes relations qui ressortent de la littérature permet de faire trois constats :

1) Il semble exister des conditions minimales pour que l'expression d'un contrôle soit possible.
2) Il semble exister des relations étroites entre certaines composantes du contrôle :
    - Anticipation ----- vérification------perception des erreurs
    - Sensibilité à la contradiction---- dépassement de la contradiction
    - engagement réfléchi ------ choix éclairé
    - Choix éclairé --------- métaconnaissance
    - Vérification----- engagement réfléchi ------ choix éclairé
    - Métaconnaissance ---- sémantique ------- anticipation
    - Syntaxique --- rupture---- sémantique ---- vérification
    - Syntaxique ------- sémantique -------- sensibilité à la contradiction
    - Métaconnaissance ------vérification
    - Métaconnaissance ------perception des erreurs

3) Il est possible que certaines composantes du contrôle nuisent à l'expression d'autres composantes

2.4 Des aspects autres que les composantes de Saboya (2010) qui peuvent agir dans les relations entre les composantes du contrôle

Rhéaume (2020) s'intéresse à documenter et à mieux comprendre les prises de décision d'élèves de 6e année primaire lors de la résolution de problèmes de proportionnalité. Pour cela, elle s'appuie sur le concept de contrôle. Elle a établi deux types de contrôle autour desquels gravitent les différentes composantes du contrôle. Il s'agit du *contrôle structural* et du *contrôle opérationnel*. Le *contrôle structural* guide les prises de décision relatives à la représentation d'un problème par des actions comme déterminer le but, identifier les informations jugées pertinentes, mobiliser des connaissances, questionner ou utiliser d'autres euristiques de recherche. La représentation du problème repose sur un contrôle sémantique qui s'attarde à la signification des relations, des grandeurs et des transformations. Un *contrôle opérationnel* guide les prises de décision relatives à l'opérationnalisation du problème grâce aux composantes *anticipation*, *vérification*, *sensibilité à la contradiction et son dépassement*, *discernement/choix éclairé* et un *contrôle sur les calculs*. Ces deux contrôles sont chapeautés par un *engagement réfléchi*.

Rhéaume (2020) dégage un troisième type de contrôle nommé *contrôle restreignant*. Elle constate que les élèves s'appuient parfois sur des croyances, des règles ou des attentes scolaires pour résoudre un problème, ce qui influence leur manière de s'engager dans la résolution. Ces croyances, règles ou attentes scolaires viennent restreindre le processus de résolution et guident certaines actions au moment de résoudre (p.79). De ce fait, on peut observer des éléments externes aux composantes du contrôle de Saboya (2010) qui peuvent jouer sur leur mobilisation.

2.5 Retour sur l'objectif de la recherche : vers une structuration du contrôle

Jusqu'à maintenant plusieurs termes : relation, liens, articulation, interaction, dynamisme, ont été utilisés pour parler des « relations » entre les composantes du contrôle, afin de les analyser. Les définitions de ces appellations permettent de mieux comprendre les similitudes et les différences entre ces termes. Selon le Petit Robert (2010), une relation est le « caractère de deux ou plusieurs choses entre lesquelles existe un lien » (p. 2175) et un lien est « ce qui relie, qui unit » (p. 1455). Ainsi, les deux appellations « lien » et « relation » semblent utiliser une définition cyclique, deux objets ayant un lien sont en relation et un lien relie deux objets.

En ce qui a trait aux interactions, celles-ci sont définies comme « des actions réciproques ou interdépendantes » (p. 1351), tandis qu'une articulation est une « imbrication de deux processus » (p. 149), c'est-à-dire qu'ils sont étroitement liés. Ces deux définitions mentionnent aussi l'existence de liens, mais introduisent deux concepts intéressants pour l'analyse de l'activité contrôlée, soit les actions et les processus. De plus, en parlant d'interdépendance, on introduit la possibilité que certaines actions puissent contribuer au développement d'une autre action, tel que relevé entre certaines composantes du contrôle et présenté dans la section précédente. L'activité contrôlée est présentée comme un processus dynamique, ce qui signifie que l'on considère les choses dans leur mouvement, leur devenir (p. 796). Ceci amène en un certain sens, un type d'évolution, de cheminement de la démarche ou même de l'évolution des relations entre les composantes du contrôle.

En somme, cette étude porte sur les manifestations des composantes du contrôle dans une démarche de résolution de problèmes algébriques et sur les liens qui existent entre celles-ci. Ceci se rapporte à l'étude de la structuration du contrôle. En effet, Legendre (2005) définit la structuration comme le processus par lequel on associe des éléments, entre lesquels on établit des relations, de façon à construire une structure, une organisation (p. 1267). Il apparait donc pertinent d'étudier la structuration d'une activité contrôlée afin d'observer les relations, les liens, les interactions, les articulations, le dynamisme et le développement des différentes composantes du contrôle.

L'objectif de cette recherche peut être revu dans le sens de la structuration du contrôle et peut s'énoncer comme suit :

> *Mieux comprendre la structuration du contrôle dans l'activité mathématique lors de la résolution de problèmes algébriques*.

Cette étude de la structuration sera appréhendée par les liens entre les composantes du contrôle ainsi que sur les éléments externes aux composantes. Deux questions se dégagent de cet objectif, soit :

> Comment se structurent les composantes du contrôle lors de la résolution de problèmes algébriques?
>
> Quels éléments externes aux composantes jouent sur ces structurations?

CHAPITRE III

MÉTHODOLOGIE

L'objectif de cette recherche est de mieux comprendre la structuration du contrôle dans l'activité mathématique lors de la résolution de problèmes algébriques. Pour répondre à cet objectif, cette étude s'intéresse à la façon dont différentes équipes agissent vis-à-vis un problème algébrique sous l'angle des composantes du contrôle qu'elles mobilisent. Dans une première section, l'orientation méthodologique adoptée ainsi que le rationnel sous-jacent sont décrits. Dans la seconde, le déroulement de la collecte de données est présenté. Entre autres, les trois problèmes qui ont été proposés aux participants sont analysés sous l'angle des composantes du contrôle pouvant être mobilisées. Une troisième section s'attarde au choix des cinq équipes de participants, des équipes aux profils mathématiques différents. Finalement, ce chapitre explicite la procédure d'analyse des données.

3.1 Orientation méthodologique globale de la recherche

Cette recherche est exploratoire, puisqu'aucune recherche ne s'est attardée auparavant de façon explicite à cet aspect de l'activité de contrôle. Afin de comprendre et d'interpréter comment interagissent les composantes du contrôle lors de l'analyse des résultats, la recherche qualitative/interprétative semble la mieux disposée pour cette recherche. En effet comme le mentionne Crotty (1998, dans Karsenti et Savoie-Zajc, 2011), « le courant interprétatif se préoccupe de comprendre les situations humaines et sociales » (p. 124). De surcroit, selon Karsenti et Savoie-Zajc (2011), l'une des finalités de la recherche qualitative/interprétative vise « la description ou la théorisation de processus » (p. 127), ce qui rejoint l'intérêt dans cette recherche de comprendre et de décrire les structurations d'une activité contrôlée.

3.2 Déroulement de la collecte de données

Cinq équipes ont participé à cette étude. Pour chacune d'elles, la collecte de données s'est déroulée en deux étapes qui ont été enregistrées de façon audio et vidéo. La première étape correspond à la résolution de trois problèmes par les participants, sans aucune intervention externe de la part du chercheur. Après la résolution des problèmes, un entretien d'explicitation entre l'équipe et le chercheur a eu lieu. La figure 3.1 présente le déroulement de l'expérimentation.

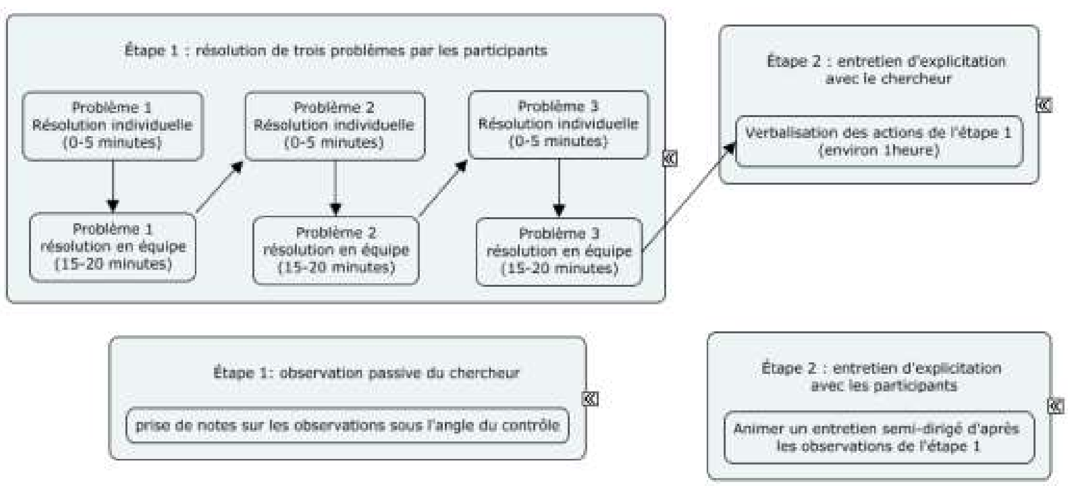


Figure 3.1 Déroulement d'une séance de collecte de données

3.2.1 Description du déroulement de l'étape 1 (résolution des problèmes)

Lors de cette première étape, il a été proposé aux participants de résoudre trois problèmes algébriques en équipe et ils disposaient d'environ une heure pour le faire. Au départ, les participants pouvaient débuter la résolution de chacun des problèmes de façon individuelle, en utilisant un stylo d'une couleur noire. Dès que le travail d'équipe s'enclenchait, il était demandé aux participants d'utiliser un stylo de couleur bleue. Cette façon de procéder a permis de discerner sur les copies des participants ce qui émanait du travail individuel, du travail en équipe.

Les recherches portant sur l'activité de contrôle en algèbre analysent généralement des résolutions manuscrites de productions d'élèves ou d'étudiants. Les chercheurs (Saboya, 2010; Saboya, *et al.*, 2015) précisent que certaines composantes sont plus difficiles à observer sur papier, c'est le cas par exemple de l'*anticipation* qui est rarement rapportée telle quelle à l'écrit. Le choix de s'attarder à des résolutions en équipes tente de pallier cette lacune. En effet, mis en équipe, la communication entre les participants est encouragée, permettant ainsi d'observer la mobilisation en action des composantes du contrôle ainsi que la dynamique entre elles. Il est ainsi possible d'avoir accès à des traces observables de raisonnements mathématiques autres que manuscrites. Initialement, des dyades de travail étaient ciblées pour cette recherche afin de ne pas surcharger les échanges et de simplifier l'observation. Cependant, des équipes de trois ou quatre personnes ont aussi été acceptées afin de ne pas rompre la chimie déjà existante entre certains participants. En effet, certaines équipes avaient l'habitude de travailler ensemble, elles avaient développé une méthode de travail avec des rôles et des apports précis pour chaque membre de l'équipe. De plus, cette recherche porte sur la structuration des composantes du contrôle en général, et non pas à l'activité contrôlée d'un seul participant. De ce fait, il n'est pas problématique d'observer plusieurs participants en coopération, au contraire, la mobilisation de certaines composantes du contrôle de la part d'un participant pourrait engendrer la mobilisation d'une autre composante de la part de son partenaire.

Lors de cette étape, le chercheur a pris le rôle d'un observateur passif. Selon Karsenti et Savoie-Zacj (2011), l'observation est un des outils de collecte de données important de la recherche qualitative/interprétative puisque l'observation permet au chercheur de centrer son attention sur une situation et d'en analyser la dynamique interne (Postic et De Ketele, 1988 dans Karsenti et Savoie-Zacj, 2011). Cette posture passive a été choisie afin de ne pas altérer la dynamique de l'équipe lors de la résolution. Lors de ces observations, des notes ont été prises par le chercheur afin d'alimenter l'entretien d'explicitation qui prenait place après la résolution des trois problèmes par les participants. Pour ce faire, une liste d'unités d'observation a été créée, comme suggéré par Karsenti et Savoie-Zajc (2011). Ces unités d'observation sont en relation avec les composantes du contrôle qui étaient susceptibles de survenir lors de la résolution des différents problèmes (voir Annexe B). Les notes prises durant la résolution des participants s'orientaient principalement sur les actions qui ont été menées et qui ont permis le déploiement de composantes du contrôle ainsi que la dynamique entre ces composantes.

3.2.2 Présentation des trois problèmes proposés aux participants

Lors de cette première étape, les participants ont résolu trois problèmes présentés dans le même ordre. Ces problèmes ont été sélectionnés selon leur potentiel pour favoriser l'émergence de diverses composantes du contrôle (Saboya, 2010). Les caractéristiques présentées dans le tableau 2.1 ont permis d'analyser les problèmes. Comme les trois problèmes ont déjà été étudiés en termes de contrôle, ceci minimise les risques de ne pas être en mesure d'observer la mobilisation de composantes du contrôle. Ainsi, le choix de problèmes déjà étudiés sous l'angle du contrôle permet de mieux anticiper et d'identifier les manifestations des différentes composantes du contrôle dans la résolution en portant une attention plus particulière sur les liens entre ces composantes. Dans cette sous-section, les trois problèmes et leur analyse sous l'angle du contrôle anticipé sont présentés.

3.2.2.1 Problème 1 : les trains

Le premier problème utilisé est le problème des trains, qui est une situation de partage inéquitable tirée de Bednarz, Janvier, Mary et Lepage (1992), elle se lit comme suit :

> Il y a 588 passagers à transporter entre 2 villes. On dispose de 2 trains pour le faire. Un des trains a uniquement des wagons à 12 places et l'autre uniquement des wagons à 16 places. En sachant que le train formé de wagons à 16 places a 8 wagons de plus que l'autre, combien doit-on accrocher de wagons après chacune des locomotives?

Saboya (2010) a utilisé une version modifiée qui omet la contrainte entre les deux types de wagons (« 8 wagons de plus », voir annexe C). Dans ce mémoire, ce problème a été présenté à des participants ayant des bagages mathématiques différents et l'algèbre est un concept appris depuis longtemps pour la majorité de ceux-ci. Il semblait donc préférable de conserver cette contrainte pour pouvoir ainsi s'attarder à la mobilisation d'un possible *contrôle sémantique* par la prise en compte de cette contrainte lors de la mise en équation. Une résolution non algébrique qui s'appuie aussi sur un *contrôle sémantique,* est également possible. Cette résolution sera présentée ultérieurement.

Ce problème pousse également à un retour sur l'énoncé du problème. En effet, le problème demande de trouver un nombre de wagons donc un nombre qui est un entier naturel. Or, le résultat obtenu est un nombre décimal. Non seulement la résolution ne donne pas un nombre entier, comme le contexte le suggère, mais le reste de la division correspond exactement à la capacité d'un wagon des deux types de trains, peu importe la relation choisie. Ainsi cette résolution devrait permettre d'observer la *vérification*, mais aussi le *contrôle sémantique* selon l'interprétation de ce reste et le *contrôle syntaxique* par les opérations mobilisées lors de la résolution. La figure 3.2 présente deux exemples de processus algébrique.

x: nombre de wagons à 16 places
y: nombre de wagons à 12 places

$x = y + 8$	$y = x - 8$
$12y + 16(y + 8) = 588$	$12(x - 8) + 16x = 588$
$12y + 16y = 460$	$12x + 16x = 684$
	$28x = 684$
$28y = 460$	$x = 16$ *reste 16*
$y = 24$ *reste 12*	

Figure 3.2 Exemples de processus algébrique du problème des trains

De plus, il est aussi possible de résoudre ce problème de différentes manières arithmétiques comme le suggèrent Bednarz *et al.* (1992). Ces façons de résoudre s'appuient, entre autres, sur un contrôle sur les calculs. Par exemple, il est possible de trouver la réponse par des essais systématiques ou par des essais/erreurs. La différence entre les essais systématiques et les essais/erreurs repose sur le regard posé sur la solution obtenue lors d'un essai et sur le choix de l'essai suivant. Une méthode systématique démontre une réflexion (un *engagement réfléchi*) sur la solution obtenue en contexte en évaluant l'écart pour arriver au nombre total recherché, tandis que la méthode essais/erreurs est plutôt séquentielle, les essais sont faits dans l'ordre sans sauter d'étapes.

Il est aussi possible de résoudre ce problème par une approche surplus/parts. Dans cette résolution, on commence par retirer le surplus (les 8 wagons de 16 places) des 588 passagers. Puis, on divise par 28 les passagers restants. En effet, à chaque fois que l'on prend un wagon à 12 places, on peut prendre un wagon à 16 places puisqu'il y en a maintenant le même nombre. C'est comme si l'on avait un nouveau train avec des wagons pouvant contenir 28 passagers. Ainsi les démarches algébriques et les approches arithmétiques, outre l'essai erreur, sont des *choix éclairés* de stratégies. Comme pour la résolution algébrique, la *vérification*, l'*engagement réfléchi* et le *contrôle sémantique* peuvent être mobilisés lors de la découverte d'une réponse ou d'un nombre total de passagers qui n'est pas de 588.

De surcroit, l'énoncé ne mentionne pas que l'on cherche le nombre minimum de wagons. Il est donc enviseagable qu'une équipe donne comme solution, un couple composé d'un grand nombre de wagons comme 250 wagons de 12 places et 258 wagons de 16 places. Cette réflexion serait signe d'un *engagement réfléchi* et d'un *choix éclairé* de stratégie.

En somme, ce problème devrait permettre d'observer diverses composantes comme l'*engagement réfléchi,* le *choix éclairé,* la *vérification,* le *contrôle sémantique,* le *contrôle syntaxique* et le *contrôle sur les calculs*.

3.2.2.2 Problème 2 : les robots

Le second problème est une situation exponentielle tirée de Saboya (2010) qui provient de Confrey (1994)[8], qui se lit comme suit :

> Un expert efficace travaille dans une usine de fabrication de robots. En cinq minutes, un robot construit une copie de lui-même et se déplace ensuite jusque dans une caisse où il est emballé pour être expédié vers l'extérieur. L'expert a une idée géniale et découvre une façon d'augmenter le rendement. Il fabrique un robot capable de construire deux de ses semblables en cinq minutes. Le robot mère se déplace ensuite dans une caisse où il est emballé pour être expédié vers l'extérieur.

[8] La version du problème par Confrey a été modifiée suite au travail réflexif entre Saboya et une enseignante de troisième année du secondaire (élèves de 15-16 ans). Est considérée ici la version modifiée.

> L'expert court voir sa supérieure pour lui expliquer qu'il a doublé la production et met en route le robot au préalable pour être à même de lui montrer sa nouvelle invention. Lorsqu'il arrive, sa supérieure est en réunion, et il doit attendre trois heures avant de pouvoir la rencontrer. Quand elle est libre, l'expert lui explique son invention, celle-ci regarde l'horloge et court, alarmée, jusqu'à l'usine. Pourquoi panique-t-elle? Combien de robots l'expert s'attend-il qu'elle trouve? (p. 186)

Ce problème a une structure exponentielle. Il s'agit tout d'abord de trouver 36, le nombre de 5 minutes qu'il y a dans 3 heures. Le nombre de robots actifs au bout des trois heures est donc de 2^{36}. Par la suite, il faut aussi réfléchir au nombre total de robots (les nouveaux et ceux emballés) qui ont contribué à la panique de la supérieure. Dans ce cas, on obtient une somme d'exponentielles[9] : 1 (ou 2^0) + $2^1 + 2^2 + \ldots + 2^{36}$ qui correspond à $2^{37} - 1$. Ce problème a les mêmes caractéristiques que celui de l'échiquier de Sissa[10].

Plusieurs composantes du contrôle pourraient être observées lors de la résolution de ce problème. La modification apportée lors de la recherche de Saboya porte essentiellement sur l'ajout de la question : *Pourquoi panique-t-elle (la supérieure)?* En effet, cette question suscite une *anticipation* de l'ordre de grandeur de la réponse. On s'attend à trouver un grand nombre de robots. De plus, le *contrôle sémantique* peut être sollicité puisque ce problème est un énoncé complexe qui force une interprétation du problème par la découverte de la relation entre les données. En effet, il est pratiquement impossible de trouver le nombre de robots total (actifs et emballés), sans observer la relation qui existe entre le nombre de robots à chacune des tranches des 5 minutes. Cette relation est observable après l'explicitation du nombre de robots

[9] Saboya (2010) précise que ce nombre de robots dépasse largement la population mondiale.

[10] https://fr.wikipedia.org/wiki/Probl%C3%A8me_de_l%27%C3%A9chiquier_de_Sissa

dans les cinq ou six premières tranches de 5 minutes (tableau 3.1). Le *contrôle sur les calculs* devrait aussi être sollicité lors de la résolution.

Tableau 3.1 Exemple de relations observables dans le problème des robots

Temps (min)	Nombre de nouveau(x) robot(s)	Nombre de nouveau(x) robot(s) (notation exponentielle)	Nombre de robots total	Nombre de robots total (notation exponentielle)
0	1	2^0	1	2^0
5	2	2^1	3	2^0+2^1
10	4	2^2	7	$2^0+2^1+2^2$
15	8	2^3	15	$2^0+2^1+2^2+2^3$
20	16	2^4	31	$2^0+2^1+2^2+2^3+2^4$
25	32	2^5	63	$2^0+2^1+2^2+2^3+2^4+2^5$

Les données du tableau 3.1 permettent d'observer que le nombre de robots total à un certain temps est toujours un de moins que le double de nouveaux robots au temps qui suit. Donc au bout de 36 tranches de 5 minutes (3 heures), il y aura 2^{37} - 1 robots. Ainsi, cette résolution peut mener à une réponse sans passer par une équation algébrique. La mobilisation d'un *engagement réfléchi* et d'un *choix éclairé de stratégie* peut être observée dans ce problème, par les interprétations possibles de l'énoncé, la représentation de la structure de ce problème par un schéma (celui-ci peut s'appuyer par une représentation de l'exponentielle en arbre, voir Saboya, 2010) ou par l'utilisation de la notation exponentielle. La *vérification* devrait aussi être mobilisée par des retours sur le contexte ou par la mise en évidence de liens entre la solution et une schématisation. En somme, on peut prévoir que ce problème permettra d'observer l'*engagement réfléchi,* le *choix éclairé,* la *vérification,* l'*anticipation,* le *contrôle sémantique* et le *contrôle sur les calculs*.

3.2.2.3 Problème 3 : cafés/croissants

Le troisième et dernier problème est le problème des cafés/croissants. Il s'agit du problème dont l'observation de sa résolution est à l'origine de cette recherche (section 1.2). Il s'agit d'une situation qui peut se modéliser par un système de trois équations avec deux inconnues, tirée de Saboya (2010) et qui provient de Schmidt (1994)[11].

> Au café du coin, un café et trois croissants ont couté 2,70$ à Ève-Lyne, tandis qu'Émilie a déboursé 3$ pour deux cafés et deux croissants et trois cafés et un croissant ont couté 3,50$ à Julien. Trouve le prix d'un café, ainsi que le prix d'un croissant.

Saboya (2010) a proposé ce problème afin d'observer principalement la *sensibilité à la contradiction*, puisque ce problème présente un système à trois équations incompatible. Comme il a été mentionné dans la problématique (section 1.2), ce problème ne présente aucun couple solution, en fait en résolvant les équations deux à deux, on trouve trois couples solutions distincts selon la combinaison d'équations choisie. La résolution graphique présentée à la figure 3.3 illustre bien ces différentes solutions.

---

[11] Le contexte a été modifié légèrement en donnant des noms aux clients du café, mais sans modifier les données du problème.

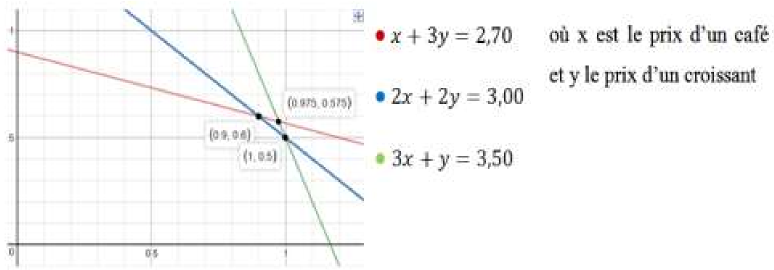


Figure 3.3 Résolution graphique du problème des cafés/croissants

Cette contradiction peut aussi être observée de manière arithmétique par un regard sur les variations. En passant de la facture 1 à la facture 2, on ajoute un café et l'on retire un croissant pour une augmentation de 0,30 \$. Puis pour passer de la facture 2 à la facture 3, on ajoute comme précédemment un café et l'on retire un croissant pour une augmentation de 0,50 \$ (figure 3.4).

+ 1 café, - 1 croissant

+ 1 café, - 1 croissant

Nb de cafés	Nb de croissants	Prix (\$)
1	3	2,70
2	2	3,00
3	1	3,50

+ 0,30\$

+ 0,50\$

Figure 3.4 Résolution du problème des cafés/croissants par l'observation des variations

Dans ce problème, le dépassement de la contradiction passe principalement par l'acceptation que la situation est incompatible, il n'existe pas de prix unique pour un café et un croissant. Cependant, le contexte peut guider la mise en œuvre de justifications extramathématiques, telles l'existence d'un combo ou d'une erreur de la caisse.

Toutefois, il est possible que cette contradiction ne soit pas observée, car lors de la résolution d'un système compatible, ce qui est généralement le cas dans une situation en contexte, la troisième équation est superflue. Cette troisième équation peut toutefois servir de vérification. Si la *vérification* avec la troisième équation n'est pas faite alors il ne peut y avoir de *sensibilité à la contradiction*. Une autre composante du contrôle que l'on peut observer dans ce problème est l'*engagement réfléchi* et le *choix éclairé*, par le mode de résolution choisi, le mode de représentation de la situation, ainsi que par le regard posé sur les données du problème. Le *contrôle sémantique*, par la mise en équation et par le regard sur la solution, ainsi que le *contrôle syntaxique*, par la résolution de systèmes d'équations, sont deux autres composantes qui peuvent être mobilisées lors de la résolution de ce problème. En somme, on peut prévoir que ce problème permettra d'observer l'*engagement réfléchi*, le *choix éclairé*, la *vérification*, la *sensibilité à la contradiction et son dépassement*, le *contrôle sémantique* et le *contrôle syntaxique*.

3.2.3 Description des données recueillies lors de la passation des problèmes

Les données recueillies lors de cette étape consistent en des enregistrements vidéo et audio de la période de résolution, les résolutions manuscrites des trois problèmes de chacun des participants et les notes prises lors de l'observation par le chercheur.

3.2.4 Description du déroulement de l'étape 2 (l'entretien d'explicitation)

La deuxième étape s'est déroulée immédiatement après la première étape. A été mise en place une entrevue d'explicitation, au sens de Vermesch (2000) d'une durée approximative d'une heure avec chacune des cinq équipes. Il s'agissait de comprendre le rationnel ayant guidé les participants lors de la résolution des trois problèmes en revenant sur certaines actions significatives repérées par le chercheur lors de l'observation de la résolution des problèmes. La globalité des entretiens a aussi été enregistrée de façon audio et vidéo à des fins d'analyse. De plus, si les participants désiraient poursuivre ou modifier certaines résolutions, ils avaient la consigne d'utiliser un stylo de couleur rouge afin de pouvoir différencier les parties de la résolution qui ont émergé lors de cet entretien. Lors de cette étape, le rôle des participants a été principalement de verbaliser leurs actions et le rôle du chercheur était d'amener les participants à expliciter leurs actions, leur rationnel par des questions précises portant sur des moments clés repérés par le chercheur pendant les résolutions ainsi que de prendre des notes sur les réponses des participants. Ces réponses étaient écrites à même les feuilles utilisées par le chercheur lors de l'observation.

3.2.5 Description de l'outil de collecte de données, l'entretien d'explicitation

L'entrevue d'explicitation de Vermesch (2000) semblait tout à fait appropriée pour une étude sur la structuration des composantes du contrôle, puisqu'elle permet de faire la lumière sur les actions qui ont mené à la mobilisation de certaines composantes du contrôle et leur dynamique. De ce fait, elle peut permettre de déceler d'autres composantes non apparentes lors de la résolution ou d'autres dynamiques entre les composantes du contrôle. En effet, cette entrevue a pour objectif la verbalisation de l'action. De plus, comme le mentionnent Saboya *et al*. (2015), parfois il est nécessaire de passer par une entrevue pour savoir si une composante du contrôle a été mobilisée, c'est le cas de l'anticipation qui apparait rarement sur une copie manuscrite. En outre, l'entretien d'explicitation vise à déceler les difficultés à résoudre un problème à travers la description du déroulement de l'action. C'est à travers l'analyse du contrôle mobilisé que pourront être décelées les possibles difficultés à l'égard d'un problème :

> La connaissance du résultat final seul est insuffisante pour diagnostiquer la nature et la cause d'une difficulté ou d'une réussite exceptionnelle. Si par action, je désigne la réalisation d'une tâche, l'entretien d'explicitation vise la description du déroulement de cette action, tel qu'elle a été effectivement mise en œuvre dans la tâche réelle. De plus, ce déroulement d'action est la seule source d'inférences fiables pour mettre en évidence les raisonnements effectivement mis en œuvre (…), pour identifier les buts réellement poursuivis (…), pour repérer les savoirs théoriques effectivement utilisés dans la pratique (…), pour cerner les représentations ou les préconceptions sources de difficulté. (Vermesch, 2000, p. 18)

Ainsi, l'entrevue d'explicitation permet de déceler les actions contrôlées ou non contrôlées lors de la résolution. De plus, Martinez (1997) mentionne que ce type d'entretien a pour finalité la verbalisation des données permettant une reconstitution de la structure de l'action dans une recherche qualitative :

> Ce qui organise l'ensemble, c'est la finalité poursuivie, à savoir décrire et élucider ce qui s'est passé tel que cela s'est passé, en faisant verbaliser des données de plus en plus fines telles que les prises d'information dans l'action, dans le but de reconstituer la structure de l'action. (p. 2)

C'est pourquoi l'entrevue d'explicitation était toute désignée pour étudier les structures des composantes du contrôle à travers la verbalisation des actions des participants.

Selon Martinez (1997), lors d'un entretien d'explicitation, le chercheur doit diriger l'entrevue avec un individu ou un groupe d'individus de manière à s'intéresser au vécu de l'action du sujet, plutôt qu'à son imaginaire. Cela se traduit par des questions qui amènent à une explication de ce qui s'est produit, par exemple « explique-moi … » plutôt que des suppositions comme « si tu avais à refaire … ». Pour arriver à une description de l'action de la part de l'interlocuteur, Vermersch (1994) présente l'importance de la formulation des questions qu'elle soit relative à la prise d'information (Qu'as-tu vu?), à la localisation (Où écrivais-tu?) ou à l'organisation temporelle (Par quoi as-tu commencé?). En effet, celles-ci permettent la verbalisation de faits plutôt que les causalités qu'engendrent les questions descriptives commençant généralement par « pourquoi? » ou « comment? ». Selon Vermersch (1994), ces questions feront plutôt émerger la perception du participant plutôt que son action.

3.2.6 Description des données recueillies lors de l'entretien d'explicitation

En somme, les données recueillies lors de cette étape consistent en des enregistrements audio et vidéo de l'entretien d'explicitation avec chaque équipe, les traces manuscrites des participants lors de la résolution des trois problèmes et des possibles ajouts écrits en rouge lors de cette étape et les notes prises lors de l'entretien par le chercheur.

3.3 Choix et description des participants

Pour cette recherche, deux éléments ont guidé la sélection des participants : la diversité des profils et la capacité à communiquer. Premièrement, le recrutement de cinq équipes aux profils mathématiques différents a été envisagé afin d'avoir une diversité en termes de bagages et d'expériences chez les participants. En effet, cette diversité peut permettre de constater le rôle du bagage et de l'expérience en termes de contrôle et ainsi documenter les éléments autres que les composantes du contrôle de Saboya (2010) qui peuvent agir sur les structurations. De plus, avoir des participants avec des profils mathématiques différents peut permettre d'observer diverses méthodes et approches de résolution et ainsi documenter une variété de structurations du contrôle. Ainsi, une équipe d'élèves au 1er cycle du secondaire et une au 2^{e} cycle du secondaire, deux équipes d'étudiants universitaires, soit une en enseignement du primaire et éducation préscolaire et et l'autre en enseignement des mathématiques au secondaire, ainsi que des enseignants des mathématiques au secondaire ont participé à ce projet.

Deuxièmement, tous les participants ont été sélectionnés principalement sur leur capacité et leur facilité à communiquer lors de résolution de problèmes mathématiques, afin de faciliter la collecte des données en termes de composantes du contrôle. Pour ce faire, deux enseignantes d'un collège privé de Montréal ont été approchées. Celles-ci préconisent le travail d'équipe dans leur enseignement, ainsi, il était aisé pour elles d'identifier au moins deux élèves potentiellement volontaires pour cette recherche et ayant les caractéristiques souhaitées. Les élèves au 1^er^ et au 2^e^ cycle du secondaire ont été ainsi sélectionnés. Pour ce qui est des étudiants universitaires, les candidats à solliciter ont été identifiés par le chercheur lors de séances de travaux pratiques pilotées par celui-ci. En ce qui a trait aux enseignants, deux enseignants provenant du même collège privé et travaillant souvent de pair ont été approchés.

3.3.1 Description des élèves du secondaire

Suite à la description du projet et des critères de sélection, les enseignantes ont suggéré des élèves d'un programme particulier du collège. Ce programme développe entre autres le leadership, la coopération et la coordination entre équipes afin de réaliser un voyage humanitaire lors de la dernière année du secondaire. De plus, tous les élèves de ce groupe sont considérés comme étant forts académiquement, car chaque année une seule classe de ce type est ouverte et les demandes d'admission sont nombreuses. Les élèves participant à ce programme sont admis au regard non seulement de leurs résultats académiques, mais aussi d'une entrevue menée par le directeur adjoint responsable et un enseignant du programme, la coopération et la communication sont des critères importants dans leur sélection.

L'enseignante de première secondaire priorise généralement le travail en équipe de deux avec un système de tuteur. C'est-à-dire que généralement, les équipes sont formées de deux élèves et la charge de l'un d'entre eux est d'aider le second et de lui expliquer les raisonnements et les concepts enseignés. Il arrive que ce rôle change selon la matière enseignée. Ainsi, les élèves sont habitués à travailler en équipe ainsi qu'à expliquer les raisonnements qui guident leurs actions. Pour trouver les élèves pouvant participer à cette recherche, cette enseignante a présenté le projet à sa classe et pris les noms de ceux qui désiraient participer : quatre élèves, Nicolas, Lilianne, Catherine et Antonia, se sont portés volontaires. N'ayant pas reçu d'enseignement explicite de l'algèbre, il semblait préférable de permettre une équipe de quatre élèves afin de favoriser une plus grande émergence d'idées et de méthodes de résolution.

L'enseignante de 5^{e} secondaire, séquence sciences naturelles (SN), forme, quant à elle, dès le début de l'année scolaire, des équipes de cinq à six élèves qui vont travailler ensemble pour toute l'année scolaire. Elle priorise un enseignement par la découverte à l'aide de situations permettant la construction des savoirs. De plus, lors de certaines évaluations effectuées en équipe, l'enseignante pose des questions sur la résolution et sur les raisonnements sous-jacents à chacun des coéquipiers, dans le but de s'assurer de la compréhension de chaque élève. De ce fait, la communication des raisonnements entre les élèves devient primordiale afin que chacun puisse répondre aux questions. Suite à la présentation du projet, l'enseignante a rapidement identifié deux élèves, Shawn et Alexandre qui cadraient parfaitement aux attentes. En somme, les deux élèves travaillent toujours ensemble, ont généralement des idées de résolution originales et souvent différentes, ceci les oblige généralement à s'expliquer l'un l'autre la voie qu'ils ont empruntée.

3.3.2 Description des étudiants universitaires

Le cours de l'UQAM, *L'activité mathématique* (MAT1011) a pour but d'explorer les mathématiques avec les futurs enseignants du préscolaire et du primaire (du programme BEPEP, Baccalauréat en enseignement primaire et éducation préscolaire) et de développer une vision large des mathématiques à travers la résolution de différentes situations problèmes. Par exemple, la figure 3.5 présente un problème qu'ils ont résolu dans ce cours et auquel ils font référence lors de la résolution du problème des cafés/croissants (voir section 4.2.1). Dans la situation *Dites-le avec des fleurs!*, les étudiants doivent trouver le prix d'un arrangement floral (case D) à partir des informations disponibles.

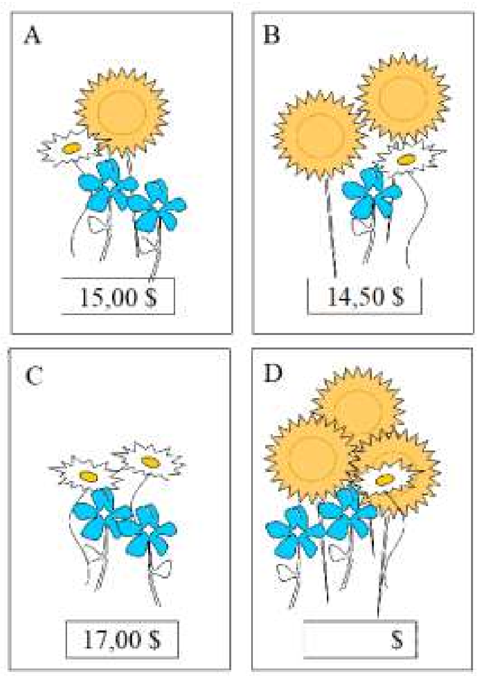


Figure 3.5 Problème *Dites-le avec des fleurs!* tiré de Bélisle (1999, p. 7) (inspiré de la revue Math-École (1993, p. 20))

En classe, ce problème a été résolu sans algèbre explicite, par des raisonnements sur des comparaisons des prix des différents agencements. Par exemple, la case C permet de déduire que la combinaison d'une fleur blanche et d'une fleur bleue est la moitié de 17 $, soit 8,50 $. On retrouve par la suite ce même arrangement (cercle rouge, figure 3.6) dans la case B, ce qui permet de dire que deux fleurs jaunes coutent 6 $ (une fleur jaune coute ainsi 3 $). Cette déduction permet ensuite de trouver le prix de l'arrangement de la case D (21,00 $), qui correspond à l'arrangement de la case A (cercle vert) (15,00 $) plus deux fleurs jaunes (6,00 $).

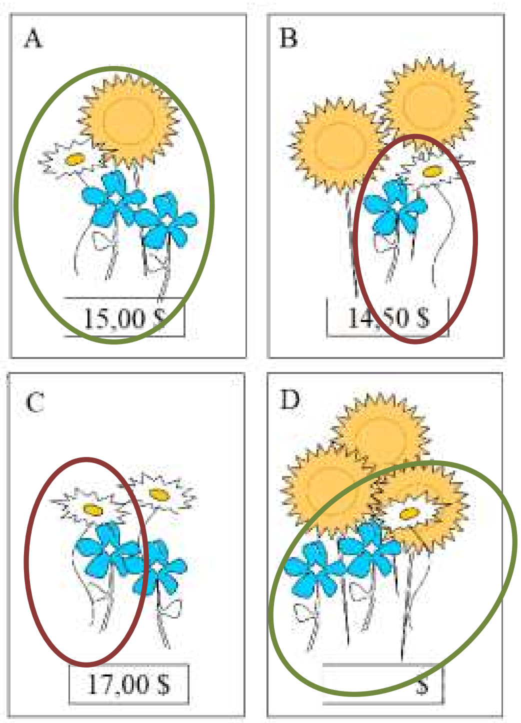


Figure 3.6 Résolution du problème *Dites-le avec des fleurs!* par comparaison des prix des différents agencements

C'est lors de périodes de travaux pratiques de ce cours que trois futurs enseignants en enseignement primaire et préscolaire, Félix, Francine et Pierre ont été invités à participer. Ces étudiants en particulier ont été approchés puisqu'ils démontraient une bonne compétence à communiquer leurs raisonnements. De plus, ce n’est pas sur leur capacité à bien résoudre les situations, mais sur leur facilité à expliquer un raisonnement aux autres membres de l’équipe que ceux-ci ont été approchés pour participer. Ce cours est le premier et le seul cours de mathématiques que les étudiants inscrits dans ce programme universitaire ont à suivre et il n’y a aucun préalable mathématique pour s’inscrire dans ce programme. D’ailleurs, les trois futurs enseignants ont confirmé ne pas avoir fait de mathématiques depuis environ deux ans. C’est donc dire qu’avant ce cours, les étudiants avaient uniquement les acquis du secondaire. En classe, ces trois personnes travaillaient toujours ensemble, deux d’entre elles, Francine et Félix, démontraient de très bonnes capacités en mathématiques et communiquaient systématiquement leurs découvertes aux autres. Le troisième étudiant, Pierre, démontrait un peu plus de difficultés mathématiques, mais plus d’originalité lors de blocages. De plus, sa curiosité par rapport aux démarches des autres obligeait ses collègues à verbaliser leurs raisonnements. Afin de conserver cette chimie et d’assurer une émergence substantielle de composantes du contrôle et favoriser une dynamique entre ces composantes, les trois étudiants ont été invités à former une équipe de participants.

Les deux étudiants au baccalauréat en enseignement des mathématiques au secondaire (du programme BES, Baccalauréat en enseignement secondaire), André et Victor, ont quant à eux été identifiés lors des travaux pratiques du cours *Didactique et laboratoire I* (MAT 2024) à l’UQAM. Ce cours est le premier cours de didactique de ce programme de formation et il prend place à la deuxième session lors de la première année. L’objectif de ce cours est de sensibiliser les futurs enseignants aux différents aspects de l’élaboration d’une séquence d’enseignement, tels que l’analyse des concepts à enseigner, ses préalables ainsi que les différentes interventions à privilégier. Ce cours comprend une partie laboratoire qui amène les étudiants à verbaliser oralement des concepts mathématiques à partir d’exemples de formateurs ou d’anciens étudiants par enregistrement vidéo. De plus, pour accéder au baccalauréat, les étudiants doivent avoir fait trois cours de mathématiques au collégial. C'est donc dire que ces participants ont continué à faire des mathématiques après le secondaire et ont même eu quelques cours de mathématiques plus avancés, par exemple celui portant sur la géométrie vectorielle et l'algèbre linéaire, que ces étudiants ont suivis en même temps que le cours de didactique. Dans ce cours, les étudiants ont étudié les matrices, ce qui sera réinvesti lors de la résolution du problème des cafés/croissants (voir chapitre IV). Les deux étudiants ont été approchés en raison de leur travail d'équipe continuel et leur facilité à communiquer ensemble.

3.3.3 Description des enseignants de mathématiques au secondaire

La participation des enseignants s'est faite sur une base volontaire. En fait, lors de la présentation du projet pour la sélection d'élèves du secondaire, l'enseignante du second cycle s'est portée volontaire pour participer elle aussi au projet. Elle a aussi suggéré un collègue, Laurent, pour qui elle a un grand respect et partage une certaine complicité, puisque les deux ont une perception complémentaire des mathématiques. En effet, Maude, enseignante de 5^{e} secondaire SN démontre de la créativité dans ses résolutions, par le recours à des approches originales, tandis que son coéquipier, enseignant en 3^{e} secondaire, démontre une grande force en mathématiques avec une approche un peu plus conventionnelle. Cette équipe a donc été sélectionnée sur une base volontaire pour participer et sur l'affinité qui existe entre les deux participants.

3.4 Procédure d'analyse des données

Suite à la collecte des données, le problème des robots a été laissé de côté pour l'analyse, car il s'est avéré moins riche en termes de contrôle. En effet, pour plusieurs équipes la mobilisation de composantes du contrôle semble minimaliste. Certaines équipes arrivent rapidement à une solution exponentielle sans vraiment porter de regard sur celle-ci. D'autres équipes font le lien avec l'échiquier de Sissa, ce qui les amenait directement vers la formule, sans que le contrôle mis en place puisse être observé. Ainsi, ce problème a perdu de l'intérêt pour l'analyser en termes de structurations du contrôle. L'analyse des données s'est donc concentrée sur les problèmes 1 et 3, les trains et les cafés/croissants qui semblaient présenter des structures plus riches en termes de mobilisation d'une panoplie de composantes du contrôle et de leur dynamique.

Tout d'abord, une retranscription du problème des trains et de la portion de l'entrevue portant sur ce problème a été effectuée pour quatre des équipes, les étudiants du BEPEP, ceux du BES, les élèves au 2e cycle et les enseignants du secondaire, permettant ainsi une première analyse de ce problème. La retranscription de la résolution des élèves au 1er cycle a été effectuée après, en ciblant uniquement les échanges pertinents en termes de structure du contrôle. Par la suite, une retranscription du problème et de l'entrevue portant sur le problème des cafés/croissants a été faite pour les étudiants du BEPEP, permettant ainsi un regard sur les éléments clés à observer dans les vidéos des autres équipes de participants. Ceci a donc permis de faire une retranscription ciblée pour les quatre autres équipes. Ces retranscriptions ont été agrémentées de marqueurs de temps permettant de mieux retrouver les extraits vidéos ciblés et ainsi pouvoir les revoir. De plus, l'ensemble des retranscriptions précisent les gestes importants, les intonations de voix ou les réactions (non verbales) qui ont eu lieu lors des résolutions et qui peuvent documenter les structurations du contrôle.

À l'aide des retranscriptions, des vidéos et des traces manuscrites, une première analyse des deux problèmes a été produite. Cette analyse a permis de faire ressortir des épisodes qui semblaient intéressants et communs à certaines équipes. Par exemple, la mathématisation du problème. Puis un retour sur les données a amené une modification ces épisodes afin qu'il se concentre sur certaines composantes du contrôle et leur dynamisme avec d'autres composantes plutôt que sur un moment de la résolution. Cette deuxième analyse a permis de mieux cerner différentes structures du contrôle. Ainsi, après plusieurs allers-retours entre l'analyse et les données, entre deux et quatre épisodes ont été identifiés pour chaque équipe, mettant en lumière un aspect local de la résolution où les composantes du contrôle interagissaient. Suite à l'analyse de chacune des équipes (chapitre IV), une analyse transversale des épisodes a été effectuée afin de faire ressortir les structures communes ou s'organisant autour d'une même composante (chapitre V).

CHAPITRE IV

ANALYSE

Ce chapitre présente l'analyse de deux des problèmes qui ont été soumis aux participants. Les problèmes retenus sont le problème des trains (voir section 3.2.2.1) et celui des cafés/croissants (voir section 3.2.2.3). Pour chacun de ceux-ci est présentée une analyse de la résolution des cinq équipes en faisant ressortir comment se structurent différentes composantes du contrôle. Pour ce faire et comme précisée dans la méthodologie, une analyse des communications verbales des participants a été effectuée par l'entremise des retranscriptions des échanges lors de la résolution des problèmes et de l'entrevue d'explicitation qui suivait. Les traces écrites laissées par les participants[12] et le repérage vidéo du langage non verbal, des temps d'attente, des hésitations, ou autres éléments qui ont permis de mieux comprendre les différentes structurations du contrôle ont également été pris en compte. Pour chacun des problèmes est présentée d'abord l'analyse des étudiants universitaires, ceux au Baccalauréat en enseignement primaire et éducation préscolaire puis ceux au Baccalauréat en enseignement au secondaire. Par la suite est explicitée l'analyse des enseignants du secondaire et finalement les analyses des élèves du secondaire, 2^{e} cycle et 1er cycle sont rapportées.

[12] Les traces manuscrites de la résolution de chacun des participants se trouvent en annexe. L'annexe D contient les résolutions du problème des trains et l'Annexe E contient celles du problème des cafés/croissants.

4.1 Analyse des résolution et des échanges autour du problème des trains

Lors de l'analyse du problème des trains, différents épisodes pour chacune des équipes participantes ont pu être dégagés, épisodes qui retracent diverses structurations du contrôle. Ces épisodes ne sont pas nécessairement linéaires dans la résolution, ils mettent plutôt en lumière une ou plusieurs parties de la résolution qui peuvent s'entrecroiser où différentes composantes du contrôle interagissent. Le nombre d'épisodes varie entre deux et quatre selon les équipes. Même si ceux-ci mettent en place des composantes communes du contrôle comme l'anticipation, la vérification et la perception des erreurs, il est possible de remarquer que la structuration qui prend place n'est pas la même selon les équipes. L'analyse fait ressortir le côté dynamique de cette structuration ainsi que la prise en compte d'éléments autres que les composantes du contrôle et qui agissent sur la structuration.

4.1.1 Analyse de la résolution et des échanges des étudiants du BEPEP

L'analyse de la résolution du problème des trains par trois futurs enseignants du préscolaire et du primaire permet de distinguer quatre épisodes qui font apparaitre certaines structurations entre les composantes du contrôle. Ces épisodes sont : 1) La construction d'un contrôle sémantique grâce à l'expression de doutes, de perception d'erreurs et de retours constants au contexte lors de la mathématisation du problème ; 2) Un choix éclairé et un engagement réfléchi autour de l'utilisation d'un concept mathématique qui est le PPCM, puis une perception d'une démarche non valide due à une anticipation non satisfaite ; 3) Un contrôle sémantique qui s'exprime par la mise en place d'une nouvelle inconnue, et qui repose sur un engagement réfléchi et des retours constants au contexte ; et 4) Une anticipation de la nature du résultat non satisfaite qui mène à une sensibilité à la contradiction puis à un dépassement de celle-ci par des vérifications successives qui aboutissent à une validation du couple résultat.

4.1.1.1 Épisode 1 : La construction d'un contrôle sémantique grâce à l'expression de doutes, de perception d'erreurs et de retours constants au contexte lors de la mathématisation du problème

Au départ, les trois participants, Félix (désigné par F), Pierre (P) et Francine (Fr), prennent un temps pour lire le problème et travailler individuellement. Pierre retranscrit les informations importantes de la situation en utilisant deux lettres (*A* et *B*) pour représenter les différents wagons (figure 4.1). Pierre présente certaines difficultés *sémantiques* puisqu'il ne semble pas reconnaitre la contrainte de « 8 wagons de plus ».

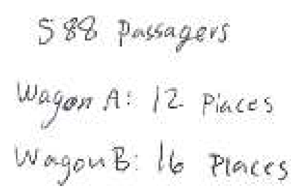


Figure 4.1 Traces écrites de Pierre lors de l'appropriation individuelle de la situation

Félix, quant à lui, extrait les informations importantes du problème qu'il semble juger importantes (voir figure 4.2). On voit apparaitre les différents trains et leurs caractéristiques, le nombre de passagers total, ainsi que la relation entre le nombre de wagons de chaque train. On peut donc dire que Félix présente un *engagement réfléchi*, par la mise en évidence de certaines données du problème.

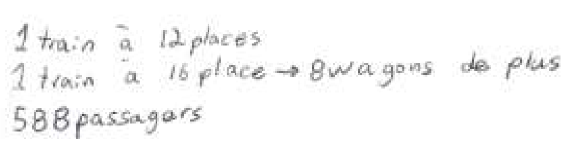


Figure 4.2 Traces écrites de Félix lors de l'appropriation individuelle de la situation

Enfin Francine note non seulement les données connues du problème, mais aussi celles qui sont inconnues (figure 4.3). Elle met ainsi en place un *contrôle sémantique* soutenu par un *choix éclairé* en nommant les deux inconnues du problème à l'aide d'une seule lettre, ces dernières sont liées par une relation additive. En effet, on peut voir qu'elle utilise x pour exprimer le nombre de wagons à 12 places et x (+8) pour le nombre de wagons à 16 places. Il est important de noter qu'aucun participant n'a proposé d'équation pour illustrer la situation lors de la phase individuelle.

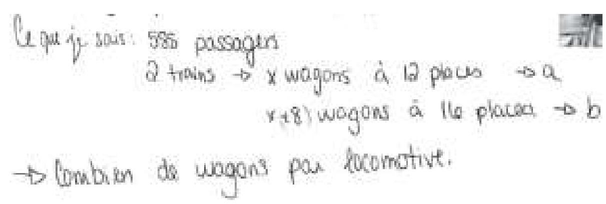


Figure 4.3 Traces écrites de Francine lors de l'appropriation individuelle de la situation

Dès que le travail en équipe débute, on peut observer que les trois participants tentent d'écrire une équation représentant la situation :

27 P : Genre wagon *A* + genre 16*B*, non 8.
28 F : *A*, *A*12 mettons.
29 Fr : Ça c'est le nombre de places dans un wagon.
30 F : Ouin, pis le *A* c'est le train 1.
31 P : Ouais c'est ça, pis 16*B*.
32 F : Pis le *B*, c'est ça.

L'équipe cherche ainsi à passer de la situation en mots à une équation mathématique en reprenant l'idée de Pierre, soit d'utiliser les lettres *A* et *B* pour représenter respectivement les wagons à 12 places et à 16 places. Lors de cette mathématisation, on perçoit un contrôle *sémantique* déficient chez Pierre, alors qu'il a de la difficulté à interpréter les 8 wagons de plus dans son expression. On peut discerner cette même difficulté chez Félix et Francine qui ne sont pas en mesure, à ce moment, de remettre en question la proposition de Pierre d'utiliser deux lettres plutôt qu'une comme Francine a fait lors de la phase individuelle. Or Francine, par un retour au contexte exprime un certain contrôle *sémantique* qui permet d'établir la relation entre le nombre de places par wagon dans le train *A* et l'écriture *A*12 (ligne 29).

Par la suite, les difficultés de Pierre pour placer le 8 dans son équation (12*A* + [16*B* × 8] = 588), créent un doute chez Francine puisqu'elle lui demande de justifier « Pourquoi fois 8? » (ligne 34). Elle ressent un malaise vis-à-vis la justification de Pierre « parce qu'il y a 8 wagons de plus » (ligne 35) en disant « Ouin, je ne suis pas sûre » (ligne 36). Le malaise de Francine permet à Félix de percevoir l'erreur de Pierre « Ce n'est pas tout qui est fois 8 » (ligne 38) et le mène à réécrire l'équation de façon correcte, mais en utilisant toujours deux inconnues (*A*12 + 16*B* + [8 × 16] = 588). On assiste ainsi à une construction d'un *contrôle sémantique* qui mène à l'élaboration de l'équation, il repose sur une *perception de l'erreur* de Pierre par Félix qui émerge d'une demande de *vérification* de la part de Francine.

33 P : 16*B* fois 8.
34 Fr : Pourquoi fois 8 ?
35 F, P : [en simultané] Parce qu'il a 8 wagons de plus.
36 Fr : Ouin, je ne suis pas sûre.
37 P : Ouin c'est ça, 16*B* fois 8 est égal à.
38 F : Ce n'est pas tout qui est fois 8.
39 Fr : Ouais c'est ça.
40 F : C'est le 16 qui est fois, ah dans le fond.
41 P : Non c'est ça check.
42 F : On a juste à faire 8 fois 16 à côté.
43 P : Pourquoi ?
44 F : Parce qu'il y a 8 wagons de 16 places on sait sûr à 100%, après ça les deux autres, il y en a, le reste ça va être égal.
45 Fr, P: Ok ?
46 F : Plus 8 fois 16 égal 588.
47 P : Je ne suis pas certain là.
48, 49 Fr : Ha, parce que tu sais qu'il y en a 8 de plus absolument, puis il y a 16 places dans chacun des wagons de plus donc il y a assurément 16 fois 8 places de base dans ceux-là. Comprends-tu ?
50 P : Ouais ouais.
51 Fr : Donc c'est pour ça qu'on l'a sorti du reste de la formule.

52 P : C’est beau, mais je ne comprends pas pourquoi tu fais $B16 + 8$ fois 16?

Or, Pierre se questionne sur l’équation produite par Félix (lignes 43, 47 et 52), demandant des explications à plusieurs reprises. Ce sont ces échanges entre Pierre et Francine qui amènent Félix à revenir sur le problème pour faire des liens entre l’équation et la situation (ligne 44) et ainsi faire preuve d’un *contrôle sémantique*. De plus, cela amène Francine à verbaliser les relations entre les inconnues (ligne 48, expression d’un *contrôle sémantique*). Le *contrôle sémantique* se construit ainsi tout au long des échanges et prend place autour d’une écriture qui fait état de difficultés *sémantiques*.

Cet épisode permet de constater que le *contrôle sémantique* des participants se construit grâce aux interventions de Francine qui questionne Pierre sur son équation (doute et perception des erreurs) et par Pierre qui pose des questions sur les changements survenus sur l’équation proposés par Félix. Félix profite des doutes exprimés par Francine et fait preuve d’un *contrôle sémantique*. En effet, Pierre est celui qui propose une écriture symbolique avec A et B, écriture adoptée par Francine qui optait initialement pour la lettre x (figure 4.3), les discussions prennent appui sur l’écriture que Pierre propose et sur ses difficultés de compréhension. Pendant que Francine explique à Pierre, Félix bénéficie de ces explications et son *contrôle sémantique* se construit le long de ces explications. Ce *contrôle sémantique* est possible grâce à une *perception de l’erreur* dans l’écriture mathématique proposée par Pierre, liée au doute exprimé par Francine. Ce doute permet à Félix de construire une expression valide qui s’appuie sur la précédente. À ce stade, il est impossible de savoir si Pierre perçoit son erreur. De plus, le retour au contexte semble un tournant lors de cette mise en équation. C’est en ayant recours constamment au contexte que l’équipe arrive à transformer l’équation proposée par Pierre en une équation à deux inconnues où l’erreur multiplicative n’est plus présente.

4.1.1.2 Épisode 2 : Un choix éclairé et un engagement réfléchi autour de l'utilisation d'un concept mathématique qui est le PPCM, puis une perception d'une démarche non valide due à une anticipation non satisfaite

Au début du travail d'équipe, Félix propose de chercher le plus petit commun multiple (PPCM) de 12 et 16. Cette approche est rapidement abandonnée par l'équipe. Cette proposition souligne le recours à deux composantes du contrôle de la part de Félix. En effet, bien que cette approche ne permette pas de résoudre ce problème, on peut déceler un *engagement réfléchi* et un *choix éclairé* de stratégie. Le calcul du PPCM permet de trouver un nombre commun à deux autres (le plus petit multiple commun de 12 et 16) qui correspond à un même nombre de passagers pour les deux trains dans ce contexte. Or, on cherche bien un même nombre, mais un nombre de wagons plutôt qu'un nombre de passagers. Dans le cas de Félix, il peut avoir suggéré le PPCM, car il cherche un même nombre de passagers (*difficulté sémantique*). Toutefois, il peut aussi avoir suggéré le PPCM pour trouver le (même) nombre de wagons, ce qui serait une difficulté davantage liée à l'utilité de ce concept mathématique dans ce contexte précis. De plus, il est possible que Félix propose cette approche, influencé par ce qu'il a vécu dans un cours universitaire de mathématiques MAT1011 – L'*activité mathématique*. Effectivement, dans ce cours, les étudiants sont encouragés à émettre diverses stratégies avant d'entreprendre une résolution. De surcroit, lors de ce cours, le PPCM et le PGCD sont deux notions à l'étude. Il est donc possible que ces éléments aient poussé Félix à émettre cette conjecture.

Plus tard, dans la discussion entre les trois participants, Félix a de nouveau recours à cette idée de trouver deux valeurs identiques pour les deux trains : « Alors là on va, il va falloir regarder combien on a besoin de wagons à 16 places pis à 12 places, pis ça doit être le même nombre » (lignes 82, 83). Il fait ainsi preuve de contrôle sémantique, toutefois il effectue un choix peu éclairé par rapport à la démarche de résolution, alors qu'il divise 230 (la moitié de 460) par 12 et par 16. Cela démontre tout de même un *engagement réfléchi*, puisque cette première tentative de résolution s'apparente un peu à l'approche proposée initialement, d'utiliser le PPCM. En effet, cette opération lui permet ainsi de trouver le nombre de wagons nécessaires pour transporter un même nombre de passagers dans les deux trains, mais le nombre de wagons obtenu diffère comme dans le cas du calcul du PPCM de 12 et de 16. On remarque toutefois que les divisions sont par la suite barrées, pointant vers une *perception de la démarche entreprise comme non valide* qui est possiblement due au constat qu'il ne peut obtenir le même nombre de wagons pour les deux trains une fois que le surplus de 8 wagons pour le train à 16 places a été enlevé. De plus, Félix constate que son *anticipation* d'obtenir des résultats entiers pour le nombre de wagons n'est pas satisfaite, comme il le mentionne lors de l'entrevue.

> 233 à 237 F: en fait, moi c'est, j'ai divisé 460 en deux ça fait 230 puis il n'était pas divisible ni par 16, pour un nombre entier par 16 puis par 12 alors à ce moment-là, là c'était déjà une erreur là, parce que je n'aurais pas eu le même nombre de wagons pour 16 et 12, mais je suis dit : ah ça ne sera sûrement pas un nombre entier.

Ainsi, malgré des difficultés d'ordre *sémantique,* Félix déploie un *choix éclairé* de stratégie soutenu par un *engagement réfléchi* lié à l'utilisation de cette stratégie (le PPCM permet d'obtenir un nombre commun à deux autres valeurs). Cependant, le *contrôle sémantique* de Félix ne lui permet pas de *percevoir que la démarche n'est pas valide,* c'est plutôt autour d'une *anticipation* qui ne se réalise pas (obtention d'un nombre entier de wagons) que son *engagement réfléchi* se structure, afin de revoir sa stratégie de résolution.

4.1.1.3 Épisode 3 : Un contrôle sémantique qui s'exprime par la mise en place d'une nouvelle inconnue, et qui repose sur un engagement réfléchi et des retours constants au contexte

Lors de la résolution du problème, une discussion s'enclenche entre Francine et Félix sur la façon de résoudre le problème, pendant que Pierre travaille de son côté pour comprendre l'équation produite par Félix. C'est pourquoi il est complètement absent de cette discussion.

> 82, 83 F : Alors là on va, il va falloir regarder combien on a besoin de wagons à 16 places pis à 12 places, pis ça doit être le même nombre?
> 84 Fr : Oui ça doit être le même nombre si on veut considérer, si on veut continuer à ce qu'il ait 8 de plus.
> 85 F : De plus, oui c'est ça, il faut absolument qu'on ait le même nombre.
> 86 Fr : Donc on peut faire.
> 87 P : Si tu fais juste.
> 88, 89 Fr : Dans le fond, ça revient à dire qu'on a 28 places *AB* ensemble, si on continue d'utiliser *AB* pour trouver le minimum.
> 90 F : Pour trouver quoi ?
> 91, 92 Fr : Dans le fond s'il y a 12 places dans *A*, puis 16 places dans *B*, ça veut dire que dans un wagon qui aurait les deux *AB*, on aurait 28 places.
> 93, 94 F : Hmmm, pas tout à fait, parce que admettons que tu dis que tu en places 17 dans lui ça ne marche pas, si tu en places 13 dans lui ça ne marche pas.
> 95 Fr : Ouin, mais après ça, en le redivisant ça va fonctionner.
> 96 F : Ouin, mais en regardant tes restes, tu ne peux pas couper un humain en deux-là.
> 97 (……..)
> 98 F : Tu as peut-être raison avec ton 28.

Lors de cette discussion, on peut discerner un *engagement réfléchi* de la part de Félix en lien avec la situation. Il prend en considération une des contraintes du problème, le nombre de wagons à 12 places et à 16 places doit être le même. Toutefois, il a des difficultés à traduire cette contrainte de façon symbolique puisqu'il garde les deux inconnues *A* et *B* (figure 4.4).

$$A12 + B16 + (8 \cdot 16) = 588$$
$$A12 + B16 + 128 = 588$$
$$A12 + B16 = 460$$

Figure 4.4 Équation écrite par Félix et sur laquelle discute l'équipe

Francine confirme que les deux trains doivent avoir le même nombre de wagons, si les 8 wagons de plus ne sont pas considérés (ligne 84). Par la suite, en manifestant un contrôle *sémantique* sur la situation, elle exprime l'expression $A12 + B16$ par une seule inconnue qu'elle construit en contexte (ligne 91). Les explications fournies font preuve d'un *engagement réfléchi* de la part de Francine qui justifie en contexte l'utilisation d'une nouvelle inconnue nommée *AB* (le choix des lettres est en lien direct avec l'interprétation du problème, c'est un nouveau train constitué de wagons *A* et *B* donc de 12 et 16 places, ligne 91). Félix exprime un doute quant à la proposition de Francine. Il présente un argument contre ce que propose Francine (ligne 93), mais celui-ci n'est pas retenu. Francine n'arrive pas à contredire Félix, on sent un flottement à ce moment qui se termine lorsqu'il semble prendre un peu de recul et se conformer à ce que Francine propose sans qu'il soit complètement sûr (« tu as ***peut-être*** raison avec ton 28 », ligne 98).

De plus, dans l'extrait qui précède, un point intéressant est le malaise ressenti entre la formulation des inconnues (ligne 82) et leur représentation écrite (figure 4.4). En effet, pour l'équipe, les deux inconnues *A* et *B* doivent être égales alors qu'elles ne représentent pas le même objet. Ce malaise amène Félix à douter de son choix de résolution. De surcroit, cet épisode souligne l'importance de l'*engagement réfléchi* exercé par les participants. Cette composante semble une composante charnière dans leur résolution, puisque le recul pris face au problème leur permet de réorienter l'écriture de l'équation par le déploiement d'un contrôle *sémantique* et d'un malaise.

4.1.1.4 Épisode 4 : Une anticipation de la nature du résultat non satisfaite qui mène à une sensibilité à la contradiction, puis à un dépassement de celle-ci par des vérifications successives qui aboutissent à une validation du couple résultat

Cet épisode se déroule sur deux moments différents de la résolution en équipe. En effet, une *anticipation* est observée lors de la première tentative de résolution. C'est à ce moment que Félix réalise que les calculs ne mènent pas à un nombre entier de wagons. Par la suite, cette réflexion guide l'ensemble des discussions jusqu'à une vérification finale par l'équipe.

Comme on peut le voir dans l'échange suivant, la réaction de Félix et de Pierre qui expriment un malaise vis-à-vis un résultat décimal, semble être la manifestation d'une *anticipation* du résultat ainsi qu'une *sensibilité à la contradiction* (lignes 60 et 61).

59 (2 min de silence)
60 P : On n'arrivera pas à un
61 F : Ouin c'est ça, on n'arrivera pas à un chiffre pile
62 (Pause)
63 Fr : Mais, en même temps, ce n'est pas grave, on a besoin de combien minimum là?
64 F : Ouais, c'est ça, ouais
65 P : Combien on doit accrocher de wagons après chaque locomotive?
66, 67 Fr : Ouais, dans le fond il faut au moins que ce nombre de personnes là rentre, même si y'a des sièges libres, je ne pense pas que

En effet, comme discuté lors de l'analyse préalable du problème (section 3.2.2.1), on cherche un nombre de wagons donc un entier naturel. Ainsi, on peut penser que les personnes qui résolvent ce problème anticipent une réponse entière. L'obtention d'un résultat décimal amène l'équipe du BEPEP à prendre un recul par rapport à la situation qui s'illustre par une pause (ligne 62). Un engagement réfléchi se manifeste alors de la part de Francine qui fait un retour sur le problème (ligne 63) pour gérer cette nouvelle information (ligne 66) et ainsi *dépasser la contradiction*.

Par la suite, alors que la résolution tire à sa fin, Félix s'appuie sur les deux contraintes du problème (même nombre de wagons et 8 wagons de plus), pour trouver une réponse qui lui semble acceptable. Il fait alors une interprétation en contexte, mais sans utiliser le nombre de wagons à 28 places (illustré par l'inconnue AB de Francine), ce qui témoigne d'un contrôle *sémantique* (lignes 145 à 147). Félix gère sans difficulté le reste trouvé, puisqu'il valide sa réponse (17 wagons à 12 places et 25 wagons à 16 places). Quant à Francine, elle justifie qu'elle arrondit à l'entier supérieur en s'appuyant sur le contexte (lignes 150 et 154). Il lui semble cependant important de revenir sur le problème (ligne 162) afin de confirmer que l'utilisation d'un wagon de moins dans chacun des trains ne permettrait pas d'obtenir une réponse satisfaisante puisque la relation entre les deux types de wagons ne serait pas respectée. Elle joue ainsi avec différents nombres de wagons à 12 places tout en respectant les deux contraintes pour montrer pourquoi le couple qu'elle a trouvé est adéquat.

145 à 147 F: moi je pense que ça prend absolument 17 wagons, mettons 12, 17 en 16, pas 17 là, dans le fond c'est 17 + 8 en 16, parce qu'admettons que tu prends 16 de chaque, tu arrives à 448, alors y'en à 12 qui ne peuvent pas partir.
148 Fr: il en manque.
149 F: après ça tu as juste, tu as des places de lousse.
150 à152 Fr: je m'alignais sur la même réflexion, parce que moi j'ai fait ce que je voulais tantôt, diviser par 28 si tu prends les deux, alors moi ça me donne 16 reste 20, donc ça va me prendre 17 wagons chaque pour que ça rentre.
153 F: ouais c'est ça.
154 Fr: parce que je ne peux pas avoir reste 20 personnes.
155 P: si tu as 17.
156 F: admettons que tu as 17 en 12.
157 Fr: pis 25 en 16.
158 F: ouais.
159 P: dans le *B* tu aurais 17 aussi ou ?
160 Fr: non, 25 parce que là admettons pour faire les calculs maintenant on reprend les 8.
161 P: ouais ok c'est ça faut les rajouter.
162 à 164 Fr: moi ça me donne 608, là, 604 excuse. Puis là 588 rentrerait, mais. C'est ça vu qui en a 8 de plus, on ne peut pas aller un plus

> bas parce que, on ne peut pas aller 2 plus bas dans le fond. On n'est pas capable. Sinon ça détruit le 8.

Ainsi, Francine maîtrise les relations en jeu dans le problème, par son *contrôle* sémantique, ce qui lui a ainsi permis de *valider* sa réponse comme étant la plus petite possible. On peut le constater dans cet extrait de l'entrevue :

> 353 à 355 Fr : (…) on savait que c'était 8 de plus, donc on ne pouvait pas seulement enlever un wagon de 16 ou seulement un wagon de 12, ça changeait le prorata. Donc, si j'enlevais 28 au total, on obtenait une valeur plus basse (à 588), donc c'était impossible.

Pour ce qui est de Pierre, il est à l'écoute et montre des signes de compréhension de la démarche adoptée par Félix. En ce qui a trait à la démarche de Francine, Félix et Pierre n'arrivent pas à bien saisir ce qu'elle fait, ce qui est probablement dû à l'écriture symbolique qui diffère de leur démarche.

La *vérification* prend place en raison de l'attente qu'ont les participants envers le résultat du problème (*anticipation*) qui ne concorde pas avec le résultat qu'ils obtiennent (il n'y a pas eu de calcul écrit, ces calculs se font mentalement), ce qui les amène à une *validation* à travers la recherche du plus petit couple solution. Les trois participants prennent un certain recul afin d'évaluer les répercussions de ce résultat non entier sur le problème. C'est cette *anticipation* de la nature de la réponse qui guide l'ensemble de la résolution ainsi que, les différents essais de la réponse finale et les justifications sur l'impossibilité d'une autre réponse. Ainsi, l'*engagement réfléchi* (qui se traduit par une prise en compte des contraintes du problème) accompagné d'un retour sur le problème et d'une *anticipation* de la nature du résultat semble être le tournant de la réussite de la résolution du problème des trains. La démarche proposée par Francine fait évoluer la démarche adoptée par Félix qui doute initialement, puis se remet en question jusqu'à bien comprendre le problème.

4.1.1.5 Synthèse en termes de structurations des composantes du contrôle lors de la résolution des étudiants au BEPEP

Ainsi, il est possible d'établir des liens entre différentes composantes du contrôle à travers les échanges entre les trois étudiants du BEPEP. Le contrôle sémantique semble une composante pivot dans ces épisodes. Il se développe lors de la mathématisation du problème par l'expression de doutes, de perception d'erreurs et de retours au contexte. Il permet également l'émergence d'une nouvelle inconnue et repose sur un engagement réfléchi. L'anticipation non satisfaite est également une composante essentielle qui permet la mobilisation de la sensibilité et du dépassement de la contradiction qui mène à des vérifications successives de couples solution possibles ce qui aboutit à une validation à travers l'expression du plus petit couple solution possible.

L'*engagement réfléchi* et le *retour sur les contraintes* du problème semblent jouer un rôle important lors de la résolution de problème pour l'équipe du BEPEP. Dans ce cas précis, c'est lors d'un blocage ou d'un passage entre deux étapes de résolution que l'*engagement réfléchi* permet à l'équipe de poursuivre la résolution. Il est donc un moteur pour permettre aux participants de terminer la résolution du problème. Dans un autre ordre d'idées, les différents doutes survenus semblent avoir un rôle important dans la démarche et dans la mobilisation des composantes du contrôle. Toutefois, ces composantes ne se manifestent pas de la même manière chez les trois étudiants. Francine fait preuve d'un *contrôle sémantique* fort, elle fait des retours constants au contexte, aux contraintes du problème, ce qui l'amène dès le début à exprimer les deux inconnues par le même générateur et qui par la suite l'amène à créer la nouvelle inconnue *AB* (un nombre de wagons qui peuvent transporter 28 passagers). Cette nouvelle inconnue provient toutefois de la discussion avec Félix qui questionne et pousse la manifestation d'un contrôle sémantique chez Francine. Les diverses composantes du contrôle mobilisées par Francine permettent à Félix de développer un *contrôle sémantique*. Il perçoit que son équation à deux inconnues amène à une impasse et revient ainsi sur le sens de ces deux inconnues (qui sont égales). Félix manifeste de plus un choix éclairé, une réflexion autour du PPCM qui provient des contraintes du problème. Pierre est plutôt en retrait et observateur de ce qui se passe. Il refait surface à la fin de la résolution où il se manifeste alors que l'équipe *valide* le couple solution comme étant le plus petit couple possible. Il ressort finalement de l'analyse des étudiants du BEPEP, un apport de ce qu'ils ont vécu dans leur cours universitaire qui les amène à exercer un *choix éclairé* d'une stratégie qui est par la suite mise en doute à bon escient. C'est un élément qui semble agir sur une des structurations des composantes du contrôle.

4.1.2 Analyse de la résolution et des échanges des étudiants du BES

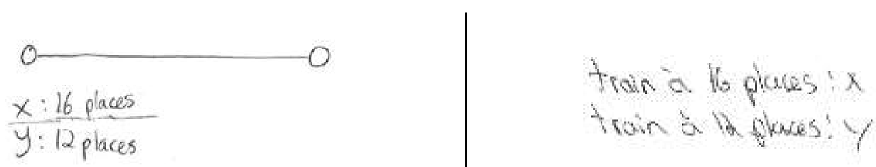
L'analyse de la résolution du problème des trains par deux futurs enseignants au secondaire, Victor (V) et André (A), permet de distinguer trois épisodes qui font apparaitre certaines structurations entre les composantes du contrôle. Ces épisodes sont : 1) Des difficultés sémantiques persistantes et de différents ordres d'un des participants qui forcent une explicitation sémantique de l'autre participant ; 2) Une structuration autour des composantes anticipation de la nature du résultat, engagement réfléchi, vérification, perception et correction de l'erreur pour aboutir à une validation ; et 3) Un contrôle sur les calculs par un engagement réfléchi permettant la perception d'erreurs.

4.1.2.1 Épisode 1 : Des difficultés sémantiques persistantes et de différents ordres d'un des participants qui forcent une explicitation sémantique de l'autre participant

Dès le départ, les deux étudiants décident de travailler en équipe plutôt que de s'approprier le problème de manière individuelle. En effet, la lecture du problème se déroule à voix haute et le choix des inconnues s'effectue en équipe comme on peut le voir dans l'extrait suivant. Victor et André mentionnent qu'ils doivent donner des noms à leurs inconnues et optent pour x et y pour désigner les deux trains.

> 9, 10 A: [trace un trait entre deux points qui représente la distance entre les deux villes]. Bon, alors là, attends. Alors, on a deux trains, c'est ça, un qui a des wagons de 12 places, un qui a des 16 places.
> 11 V: Ouais
> 12 A: On a… OK, bon, on va leur donner des petits noms.
> 13 V: Tu sais qu'il y a un des trains qui a 8 wagons de plus que l'autre, en fait celui qui a 16 places.
> 14 A: Hmm hmm. Alors dans le fond. Attends.
> 15 V: J'ai appelé, on leur donnes-tu des noms? Train *A*, train.
> 16 A: Moi je les ai appelés *x* pis *y*.

Les traces écrites initiales des deux étudiants (figure 4.5) permettent d'observer qu'André a sommairement schématisé la situation en traçant un trait qui représente le chemin parcouru entre les deux villes, puis l'équipe opte pour l'utilisation de lettres afin de représenter la situation.



Traces d'André | Traces de Victor

Figure 4.5 Traces écrites d'André et de Victor autour de la mathématisation du problème des trains

Ainsi, la première lecture du problème faite par les deux participants et les premières traces écrites laissent percevoir qu'André et Victor s'engagent dans la résolution rapidement en reconnaissant deux inconnues. Toutefois, ils ne parlent pas en termes de « nombre des wagons pour le train à 12 places et pour celui à 16 places », mais en termes d'objets, les différents trains. À ce stade, on ne peut pas savoir s'ils réfèrent au nombre de wagons de chacun des trains quand ils parlent de x et y. En effet, il peut arriver que l'on parle de « trains » de façon raccourcie, mais qu'on réfère en fait au nombre de wagons de ces trains.

Par la suite, André manifeste un *choix éclairé,* en mentionnant que l'on peut écrire x en fonction de y. Il traduit ainsi la contrainte « 8 wagons de plus » par l'expression $y = x + 8$. André procède donc à la traduction de la contrainte en une équation à deux inconnues. Toutefois, il semble faire une traduction textuelle de la relation de comparaison, en proposant *:* « alors il y en a un qui en a x, pis l'autre on met x+8 » (ligne 43). Cette erreur, liée à une difficulté de *contrôle sémantique*, ne sera réalisée que plus tard lors de la résolution du système d'équations construit par André ($y = x + 8$ et $16x + 12y = 588$) lorsque les deux étudiants se penchent sur le sens à donner au résultat décimal obtenu.

Ainsi, lors de l'expression de la relation, André manifeste des *difficultés sémantiques* pour traduire la relation de comparaison énoncée dans le problème. Or, on retrouve également des difficultés *sémantiques* lors de la traduction du problème chez Victor. Tout d'abord, il propose une traduction par une relation multiplicative entre les deux types de train plutôt qu'une relation additive : « ça va être $8y$, $8y = x$ » (ligne 30). Cependant, on peut quand même constater que cela traduit bien qu'il y a plus de wagons à 16 places que de wagons à 12 places (prise en compte de l'ordre de grandeur entre le nombre de wagons des deux trains). De plus, on peut observer, chez Victor, un autre épisode de difficultés *sémantiques* qui se manifeste par une non-prise en compte de la contrainte « 8 wagons de plus ». En effet, alors qu'André réfléchit à la mise en équation, Victor propose de prendre uniquement un wagon à 16 places et le reste en wagons à 12 places :

53, 54 V : À la limite, on pourrait genre juste prendre un train à 16 places pis prendre juste des trains à 12 places. Il faut juste que ce soit divisible par 588.

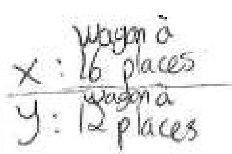
Cependant, cette idée n'est pas conservée par l'équipe, puisque Victor finit par la rejeter en effectuant un retour sur le problème et sur les contraintes présentées. Lors de ce retour au problème, Victor manifeste des difficultés *sémantiques* reliées cette fois-ci au sens accordé à l'identification des inconnues.

En effet, c'est à ce moment, que l'on peut distinguer chez Victor des difficultés *sémantiques* qui prennent forme autour du sens accordé à la lettre. L'utilisation de lettres n'est pas une façon abrégée de représenter un nombre, mais sert plutôt à représenter un objet pour Victor. On peut souligner que ce n'est pas le cas d'André qui maîtrise mieux cet aspect, l'identification des inconnues étant une écriture abrégée représentant un nombre. En effet, alors qu'André propose une équation à deux inconnues pour mathématiser le problème ($16x + 12y = 588$ et $y = x + 8$), Victor ne comprend pas comment il est parvenu à écrire ces équations. Dans l'extrait suivant, on peut percevoir les difficultés *sémantiques* des deux participants en lien avec le sens accordé à la lettre. Victor tente de comprendre le sens du coefficient du terme en x et André tente de verbaliser le sens de son équation.

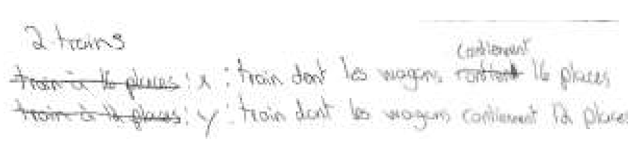
72 à 75 A : (…) Parce que peu importe, dans le fond ça c'est train 1 (pointe $16x$), ça c'est train 2 (pointe $12y$). Alors c'est ça, alors là ensuite on va résoudre ça (souligne l'équation $16x+12y=588$) avec ça ici (pointe $y= x+8$). Alors on va pouvoir genre, $16x + 12$ fois $x+ 8$ [André se retrouve face à un système d'équations à résoudre]
76 V: ouais, mais là tu dis déjà que x c'est 16 places, pis là tu dis $16x$
77, 78 A: Parce que dans chaque wagon de 16, x ce n'est pas 16 places. C'est wagons qui contiennent 16 places.
79 V: ben c'est ça x c'est…
80 A: alors s'il y a un x, on transporte 16 personnes.
81 V: Ouais.
82 A: S'il y a 2 x, on transporte 32 personnes.
83 V: OK? Mais pourquoi, tu as dit $16x$?

84 A: Parce que 16x. Si on voulait, attends comment te dire ça? x, Ça reste le nombre de wagons.
85 V: Ouais
86 A: Pis il y a combien de personnes qui rentrent dans un wagon qui a 16 places, c'est 16.
87 V: Oui
88, 89 A: Ben c'est ça. Alors on va multiplier par 16 le nombre de wagons. Alors si on a pris 3 wagons, ça va être 16 fois 3.
90 V: hmm hmm.
91, 92 A: Pour obtenir le…, parce que là on cherche un nombre de personnes qui est égal à 588.
93 V: OK ouais ouais ouais
94 A: Alors, je pense, c'est juste (débute la résolution du système d'équations)
95 V: hmm, OK d'abord. J'ai mal écrit ça (modifie l'identification de ses inconnues).

On peut ainsi voir dans cet extrait qu'André a une bonne compréhension de la lettre qui désigne un nombre de wagons (contrôle *sémantique*), tel qu'il le souligne aux lignes 84 et 88 lorsqu'il mentionne que x est un « nombre de ». Cependant, lorsqu'il tente d'expliquer à son coéquipier à l'aide d'exemples numériques (lignes 80, 82 et 86), il utilise une verbalisation qui est cohérente avec la compréhension de Victor. En effet, au lieu de dire si j'ai deux wagons de 16 places, il mentionne « S'il y a 2x, on transporte 32 personnes », ce qui fonctionne avec l'interprétation de la lettre objet de Victor. Cette discussion amène Victor à renommer ses inconnues (figure 4.6), mais toujours en référence au train.



Traces laissées par André



Traces laissées par Victor

Figure 4.6 Modification de l'identification des inconnues par les deux étudiants

On peut remarquer plus tard dans l'échange entre les deux participants que, pour Victor, x et y semblent toujours faire référence à l'objet « train ». C'est une difficulté sémantique qui persiste chez lui telle que soulignée dans l'extrait suivant :

> 107 à 109 V :[chuchote] Combien doit-on accrocher [voix normale]? Mais, d'abord x ça devrait être, ouais. J'ai de la misère à genre donner une valeur à x pis à y. parce que là toi tu as dit que x c'était 16 places. [André ajoute sur sa feuille "wagon à" dans l'identification de ces variables]

C'est cette intervention de Victor qui amène André à modifier l'identification de ses inconnues (figure 4.6) en précisant « wagon à » puis à verbaliser à nouveau que x représente le nombre de wagons à 16 places. Ceci permet pour la première fois à Victor de verbaliser que la lettre x représente un nombre (« ah ok, je viens de voir, 16 fois le nombre de wagons à 16 place*s* », ligne 117) et ainsi d'écrire une équation représentant le problème ($16x + 12y = 588$), la même équation que celle d'André. Ainsi, le *contrôle sémantique* d'André semble avoir permis à Victor de développer lui aussi un *contrôle sémantique* lié au sens de la lettre.

Toutefois, on peut voir que le contrôle sémantique de Victor n'est pas tout à fait acquis lors de la résolution du système d'équations. En effet, lorsque l'équipe obtient un nombre décimal, Victor propose d'emblée de prendre un wagon supplémentaire. Malgré ce *choix éclairé* de stratégie, ses difficultés *sémantiques* refont surface et ralentissent une fois de plus la résolution du problème. Il affirme qu'en ajoutant un wagon qui correspond selon lui à $1x$ (« Alors, ce que tu vas faire ici [pointe $12x + 96$] tu vas ajouter $1x$ », ligne 161), la relation entre les nombres de wagons des deux trains ne sera plus respectée (« Parce que là, admettons ça va être $x + 9$ parce que tu vas ajouter un wagon », ligne 149.). Cette affirmation sème un doute chez André par rapport à son *contrôle sémantique*, ce qui amène l'équipe à *vérifier* les calculs effectués et à tenter de donner du sens à l'équation $28x = 492$. L'équipe arrive alors à une impasse, puisqu'ils ne parviennent pas à interpréter ce que signifie le nombre 28 dans le contexte.

En somme, comme mentionné dans la littérature (Saboya, Bednarz et Hitt, 2015), on peut constater que le *contrôle sémantique,* particulièrement en ce qui a trait au sens de la lettre, joue un rôle très important dans la mise en équation. Cependant, cet épisode permet de percevoir comment des difficultés dans la mobilisation d'une composante peuvent prendre le dessus sur la mobilisation d'autres composantes du contrôle. Dans un premier temps, on peut constater que les difficultés sémantiques de Victor amènent André à revoir et même à douter de son propre contrôle sémantique. Elles amènent également André à déployer un engagement réfléchi sur les différentes approches qu'il adopte pour verbaliser le sens de la lettre. De plus, lors de la résolution, les difficultés sémantiques de Victor l'empêchent de progresser à la suite de l'obtention d'une valeur décimale, et ce malgré un *choix éclairé* de stratégie. Cependant, on peut aussi percevoir que c'est ce qui amène l'équipe à vérifier et à tenter de donner du sens aux opérations syntaxiques effectuées. De surcroit, Victor semble, à la suite des discussions, avoir acquis un *contrôle sémantique*. Ainsi le développement d'un *contrôle sémantique* de Victor passe par *l'engagement réfléchi* et l'explicitation du *contrôle sémantique* d'André qui prend place grâce aux questionnements de Victor.

4.1.2.2 Épisode 2 : Une structuration autour des composantes anticipation de la nature du résultat, engagement réfléchi, vérification, perception et correction de l'erreur pour aboutir à une validation

Cet épisode prend place en cours de résolution, lorsque les étudiants obtiennent un nombre décimal comme résultat de la division (492 divisé par 28). Le premier indice d'une *anticipation* de la nature du résultat apparaît dès le début de la résolution et elle est exprimée par André quand il mentionne qu'ils doivent trouver le nombre de wagons pour transporter **exactement** 588 passagers. En effet, on peut associer cette formulation, lorsqu'on la met en lien avec sa réaction face au résultat non entier qu'il aura plus tard, à une *anticipation* de la nature entière de la solution. Cette *anticipation* amène un *doute* sur la résolution menée une fois qu'André obtient comme résultat un nombre décimal (résultat de la division de 492 par 28). Ce dernier est persuadé qu'ils ont commis une erreur : (« Alors non ce n'est pas un entier. On ne doit pas faire quelque chose de correct [sic] » lignes 135,136). En quelque sorte, la *sensibilité à la contradiction* observée permet également de percevoir qu'André *anticipe* la nature du résultat. Pour Victor, ce résultat n'est pas problématique, il propose d'arrondir, on voit donc que Victor exerce un *engagement réfléchi* et un *choix éclairé* quant à la réponse trouvée, mais, comme discuté dans la section précédente, il est persuadé que cet arrondi va modifier la contrainte « 8 wagons de plus ». La discussion entre les deux partenaires les amène à *vérifier* les calculs effectués et à tenter de donner du sens à l'équation $28x = 492$. L'équipe arrive alors à une impasse comme mentionnée dans l'épisode 1. Ils n'arrivent pas à interpréter ce que signifie le nombre 28 dans le contexte.

Toutefois, en substituant 18 (puisque $492/28 = 17,\overline{57148}$) comme nombre de wagons à 16 places dans la première équation, André réalise l'erreur commise lors de la mise en équation.

> 208 à 210 A : (écrit y= 18+8) Attends on as-tu? 16 places c'est 8 wagons de plus que l'autre. OK. Non. Je pense que c'est juste ça (pointe y= x+8) qu'on a mal fait, x+8. Sachant que le train formé, 8 wagons de plus que l'autre.

La *perception de cette erreur*, la mauvaise traduction de la relation de comparaison « 8 de plus », est visible grâce à *un retour sur la contrainte* du problème et semble soulager l'*anticipation* non satisfaite d'une solution entière comme le mentionne André : « mais c'est pour ça que ça ne marche pas notre affaire, on a juste fait une erreur au début » (ligne 214). Ainsi, on peut dire que *l'engagement réfléchi* d'André a permis la *perception de l'erreur*.

La perception de cette erreur a donc mené l'équipe à la résolution d'un deuxième système d'équations qui a été corrigé. Cependant, les participants se retrouvent encore une fois vis-à-vis cette *anticipation* d'une réponse entière non satisfaite. Ils manifestent alors un *engagement réfléchi*, en tentant de donner du sens au reste de la division de 460 par 28 comme on peut voir dans l'extrait suivant :

> 266 à 268 V: OK, mais là le 16 qu'on a trouvé, ça veut dire que $y = 16$ reste 12. Ça veut dire que, si je fais ça (débute une vérification), $16x$, non, $16x + 12y$ ça serait supposé me donner 588, mais là j'ai que ça (x) ça va donner $y + 8$.
> 269 A: Qu'est que tu fais là?
> 270 V: Parce que là, si $y = 16$, il va nous rester 12 personnes à transporter, c'est ça?
> 270 A: C'est ça ! Si on fait $y = 16$, puis $x = 16 + 8$, 24, il va nous rester 12 personnes.
> 271 V: Ça veut dire qu'il va falloir rajouter un y, alors on ne respectera pas la contrainte

Cet extrait permet d'observer le *contrôle sémantique* de Victor en relation avec l'interprétation du reste en contexte. Cependant, son contrôle *sémantique* ne lui permet pas de déployer un *engagement réfléchi* pour aboutir à la solution du problème. C'est plutôt André qui finit par proposer que les wagons ne doivent pas nécessairement être aux maximum de la capacité. Cet *engagement réfléchi* dirige les participants vers une *vérification* par injection de la solution dans l'équation initiale. Cependant, les deux participants n'utilisent pas le même couple solution pour vérifier. En effet, André *vérifie* qu'en utilisant 17 wagons à 12 places et 25 wagons à 16 places, la solution sera supérieure à 588 passagers. Tandis que Victor *vérifie* qu'en prenant 16 wagons à 12 places et 24 wagons à 16 places, la solution sera inférieure d'exactement 12 à 588 passagers. C'est cette double vérification qui permet à André de *valider* que la réponse qu'il a trouvée, est la plus petite possible.

444 à 446 A : 1, 2, 4, pis c'est quoi 124, 124 ça va être ça (regarde sa table de 28), 112, pis 112 j'ai dit que c'était quoi, 4. On arrive avec la même chose. Là je te gage qu'il va rester 12. Ouais. Alors là on arrive encore avec 24 trains à 8 places, pis il reste 12 personnes à faire fitter. Alors c'est ça. (…)

447 V : En fait, tu n'as pas

448 à 450 A :En fait, l'affaire qui est cool c'est que si on rajoutait un wagon comme ça à la place (pointe x=25), pour faire fitter ces 12 personnes là, il faudrait quand même rajouter un wagon vide de 12 places ici, alors il y aurait quand même 16 places libres.

En somme, lors de cet épisode, on peut voir que l'anticipation déçue d'une solution entière met sur un pied d'alerte les participants. En effet, elle amène ceux-ci à *vérifier* les calculs et à donner du sens à la réponse dans le contexte (en respectant les contraintes du problème). C'est cet état d'alerte qui a permis à André de *percevoir une erreur* lors de la mise en équation. Toutefois, c'est l'*engagement réfléchi* de Victor qui permet à André d'avancer, de vérifier la réponse arrondie, de *percevoir l'erreur* et de la corriger. Ainsi la détection et la correction de l'erreur ne sont possibles que par l'*engagement réfléchi* de la part de l'étudiant qui manifestait des difficultés sémantiques lors du premier épisode (Victor). La discussion entre les deux participants amène une double vérification par injection, soit avec les entiers inférieurs et supérieurs, ce qui permet par la suite à André de *valider* la solution.

4.1.2.3 Épisode 3 : Un contrôle sur les calculs par un engagement réfléchi permettant la perception d'erreurs

Lors de la résolution des deux systèmes d'équations (dont l'un est erroné, épisode 1), les participants font plusieurs calculs sans calculatrice. C'est ainsi qu'émerge un *contrôle sur les calculs* qui prend différentes formes.

Lors de la résolution du premier système d'équations ($y = x + 8$ qui est erronée et $16x + 12y = 588$), André substitue $y = x + 8$ dans l'équation $16x + 12y = 588$. Au terme de cette résolution, il se retrouve à devoir diviser 492 par 28. Lors de cette phase, il est possible d'observer un *contrôle sur les calculs* de la part d'André alors que celui-ci construit une table de valeurs (figure 4.7), afin de trouver le multiple de 28 qui s'approche de 212 sans le dépasser.

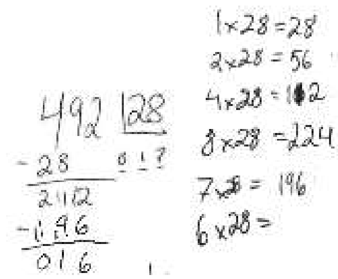


Figure 4.7 Résolution de la division et suite de multiplications produites par André

En effet, André commence par faire 28 fois 1 et 28 fois 2, mais par la suite, il passe à 28 fois 4 et 28 fois 8, pour ensuite faire 28 fois 7 puisqu'il a dépassé la valeur 212 qu'il cherche à atteindre. Ainsi, la table de multiplications semble être construite sans faire cette opération, mais plutôt par un processus d'additions et de soustractions successives. Cette méthode est semblable à celle utilisée par les égyptiens et qui a été vue par les étudiants lors de leur premier cours de didactique qu'ils viennent de suivre. André s'aperçoit après avoir fait ces calculs qu'il ne peut obtenir 212 en procédant ainsi. Cette approche montre aussi un *engagement réfléchi et un choix éclairé*, puisqu'il construit une suite de multiplications, ce qui lui permet d'*anticiper* qu'il ne trouvera pas la valeur recherchée tel qu'on peut le voir dans l'extrait suivant :

> 133 à 136 A : ouais c'est ça. Mais si ça ne donne pas un entier, je vais avoir un nombre de wagons pas entier, pis là je me demande juste si 212 c'est un multiple de 28. On va continuer, 4 fois 28, ça fait 56 + 56, ça donne 112. Ça s'aligne mal. Alors non ce n'est pas un entier. On ne doit pas faire quelque chose de correct.

Un autre exemple de *contrôle sur les calculs* survient alors que l'équipe tente d'effecteur la division de 492 par 28. Au départ, Victor laisse percevoir certaines difficultés sur *les calculs*. Comme on peut le remarquer dans la figure 4.8, il inscrit d'abord un 2 à la position des dizaines, puis réalise que le résultat sera de 56. Pour corriger son erreur, il décide de remplacer le 2 par un 0 (ligne 173). C'est le *contrôle sur les calculs* d'André qui permet à Victor de *percevoir son erreur*.

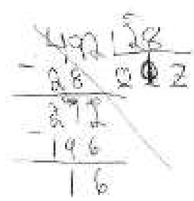


Figure 4.8 Opération effectuée par Victor pour résoudre le problème situation

173,174 V: 46 (a écrit 2 aux dizaines du quotient). Non ça va donner 56 (remplace le 2 par 0). C'est quoi fois 28 qui donne 492.
175 A: Moi j'ai trouvé 17 reste 16.
176 V: Attends, quoi? (Regarde la feuille de A). Ah! Je suis cave, je ne sais pas comment faire des calculs (remplace le 0 par 1).

Ainsi, ces difficultés manifestées par Victor permettent l'émergence d'un *contrôle sur les calculs* de la part d'André qui prend une forme différente de celle exercée précédemment. En effet, Victor procède comme André et substitue y par x+8 dans l'équation $16x + 12y = 588$. Il arrive alors à $16x + 12x + 12 \times 8 = 588$ donc $28x = 588 - 96$. Victor questionne son partenaire sur le résultat de la multiplication de 12 par 8 puis il cherche le résultat de 588 - 96. Pour cette soustraction, André procède par un calcul équivalent, mais plus simple, exerçant ainsi une stratégie connue en calcul mental (« Non, mais je me dis tu fais : -100 + 4 », ligne 131). On peut remarquer que les difficultés calculatoires de Victor permettent d'avoir accès aux stratégies de calcul d'André, qui, on le voit, possède un *contrôle sur les calculs* qui prend différentes formes. Les explications d'André vont faire cheminer Victor qui, de lui-même, va percevoir son erreur dans la division et refaire son calcul correctement.

De plus, on observe l'expression d'un *contrôle sur les calculs* qui prend place lors de la vérification de la deuxième tentative de résolution du système d'équations (avec la bonne relation) en calculant le nombre de passagers que 17 wagons à 12 places permettent de transporter. André calcule adéquatement le résultat de 17 fois 12 (204) en posant l'opération alors que Victor effectue une erreur d'addition dans la multiplication de 16 fois 12. Rappelons qu'André et Victor n'utilisent pas le même couple solution (17,25) pour André et (16, 24) pour Victor.

318 V: [calcul mentalement 16 fois12] ça fait 182, 182
319 A: Comment tu es arrivé à 182?
320 V: J'ai fait 16 fois 10, 160, plus 32.
321 A: 16 fois 2, OK alors mon affaire ici (pointe 17 × 12) je n'ai pas raison, intéressant.
322 V: Plus 170, ça donne 204 c'est correct.
323 A: Mais si tu enlèves 12, ça fait 16 fois 12.
324 V: Mais tu fais + 34, c'est ça nous donne.
325 A: Mais ce que je ne comprends pas c'est…
326 V: On fait tout sauf résoudre le problème en ce moment.
327 A: 16 fois, 16 fois 12 ça donne 182.
328 V: Ouais.
329 A: Pis 17 fois 12, ça donne 204.
330 V: Ouais.
331 A: Il devrait avoir 12 entre…
332 V: 24, non, ouais 12.
333 A: Mais 182 + 12, ça fait…

Dans cet extrait, on peut observer que le *contrôle sur les calculs* d'André lui permet de *percevoir une erreur,* ce *contrôle sur les calculs* semant un doute chez lui. Ce doute l'amène à *vérifier* les opérations effectuées. En effet, il est *sensible à une contradiction* entre le fait que « 16 fois 12 donne 182 » (ligne 318) et que « 17 fois 12 donne 204 » (ligne 322), il devrait y avoir un écart de 12 entre ces deux résultats, ce qui n'est pas le cas.

Surmontant des erreurs de calcul mental, Victor finit par mettre en place un *contrôle sur les calculs* lors de la vérification finale, alors que l'équipe injecte les valeurs trouvées pour *x* et *y* dans l'équation initiale. En effet, alors qu'André utilise les résultats arrondis, qui devraient permettre de transporter tous les passagers nécessaires, Victor décide d'utiliser la partie entière trouvée, soit 16. Il effectue cette opération puisqu'il sait que la solution en utilisant cette valeur devrait lui donner une réponse inférieure de 12 à 588. De plus, il sait que cette valeur devrait être exactement de 12 en dessous de 588, puisque cela correspond au reste de la division de 460 par 28 comme il le mentionne lors de la résolution : « parce que là, si y = 16, il va nous rester 12 personnes à transporter » (ligne 270). On peut donc dire que Victor est en mesure de donner du sens au reste (*contrôle sémantique*). Cet aspect lui permet donc d'*anticiper* la solution, c'est-à-dire que sa réponse devra être inférieure à 588 de 12. De surcroit, lors de cette étape, il commet encore une erreur de calcul, par omission d'une opération. Effectivement, à ce moment, Victor tente de mettre en place un *contrôle sur les calculs*, principalement dans le but de faire la multiplication de 16 fois 16. Pour ce faire, il multiplie 16 par 10 et 16 par 6, mais il omet d'inclure le premier résultat dans sa chaîne d'opérations. C'est son *anticipation* issue de son *contrôle sémantique* sur le reste qui lui permet de *percevoir cette erreur* (figure 4.9).

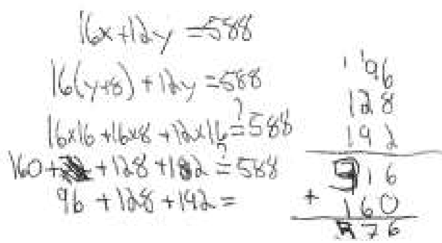


Figure 4.9 Opération effectuée par Victor lors de l'étape de vérification

En somme, cet épisode permet d'observer la mise en place d'une structuration de certaines composantes du contrôle telles qu'un *contrôle sémantique*, *un contrôle sur les calculs*, *une perception des erreurs* et *sensibilité à la contradiction*. André exerce un *contrôle sur les calculs,* sur les algorithmes de division et de multiplication autour de la multiplication et de l'addition. De son côté, Victor manifeste des difficultés calculatoires. Toutefois, le contrôle exercé par André qui lui explique ce qu'il fait, permet à Victor de dépasser ses difficultés et l'amène à *percevoir et corriger* ses erreurs. On observe ici une construction du *contrôle sur les calculs* de Victor qui provient du contrôle exercé par André.

4.1.2.4 Synthèse en termes de structurations des composantes du contrôle lors de la résolution des étudiants au BES

La résolution de ce problème fut particulièrement ardue chez les futurs enseignants de mathématiques au secondaire. Ceci est principalement dû aux difficultés d'ordre *sémantique* en relation avec le sens de la lettre. En effet, Victor manifeste souvent des difficultés sémantiques, elles sont récurrentes et persistantes et amènent de nombreux blocages. Ceci pousse André à expliciter ce qu'il fait, à exemplifier, il développe ainsi son *contrôle sémantique*. Le même phénomène est présent en ce qui a trait au *contrôle sur les calculs*, les difficultés calculatoires de Victor font en sorte qu'André explicite ses stratégies de calcul qui reposent sur du calcul mental. De plus, il est possible de croire que le cours universitaire qu'ils viennent de suivre, MAT2024 – *Didactique et Laboratoire 1*, ait joué sur la structuration des différentes composantes du contrôle lors de la résolution.

Ces épisodes permettent d'observer la mise en place d'un contrôle sémantique chez Victor. On peut affirmer que la difficulté sémantique autour du sens de la lettre est toujours présente à la fin de la résolution alors que les autres difficultés semblent être dépassées (sur la symbolisation de la relation de comparaison et sur la prise en compte des contraintes). Toutefois, l'analyse permet de voir qu'il possède un contrôle sémantique qui s'exprime principalement quand il doit donner du sens au reste d'une des divisions. Ceci met de l'avant une multitude de facettes du contrôle sémantique qui s'exprime de différentes façons et à différents moments. L'anticipation joue également un rôle important et il est le moteur d'une structuration autour de différentes composantes comme l'engagement réfléchi, la vérification, la perception et correction d'erreurs. Elle va permettre en fin de compte d'arriver à une validation du couple solution comme la plus petite valeur possible.

4.1.3 Analyse de la résolution et des échanges des enseignants au secondaire

L'analyse de la résolution de deux enseignants, Maude (M) et Laurent (L), permet de mettre en lumière deux épisodes significatifs : 1) Un contrôle sémantique lors de la mathématisation du problème qui mène vers un engagement réfléchi et un choix éclairé de stratégie ; et 2) Une anticipation de la nature du résultat non satisfaite qui met en branle l'expression de trois types de vérifications, une sensibilité et un dépassement de la contradiction pour aboutir à une validation de la solution.

4.1.3.1 Épisode 1 : Un contrôle sémantique lors de la mathématisation du problème qui mène vers un engagement réfléchi et un choix éclairé de stratégie

Lors de la résolution de ce problème, la partie mathématisation se déroule de manière individuelle chez les enseignants. Ainsi, l'analyse des structurations des composantes du contrôle de chacun des participants est présentée séparément. Tout d'abord, lors de la lecture du problème, on peut voir Maude représenter certains éléments de la situation par un schéma (2 villes et 2 types de wagons) (figure 4.10). Dans les traces laissées, elle identifie les deux types de wagons par n et $n + 8$ et par deux boites dans lesquelles est écrit respectivement le nombre de passagers par wagon que peuvent transporter chacun des trains. C'est donc dire qu'elle fait preuve à la fois d'un *choix éclairé* de stratégie, l'écriture algébrique et d'un *contrôle sémantique* par l'utilisation d'un seul générateur pour représenter les deux inconnues ainsi que par la représentation de la relation existante entre les deux types de trains. De plus, ce *contrôle sémantique* se manifeste dans la mise en équation des relations du problème.

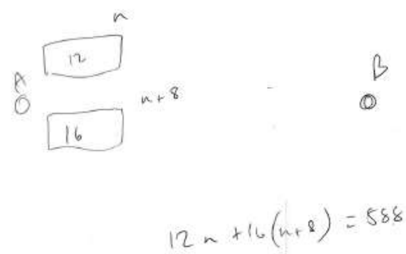


Figure 4.10 Traces écrites de Maude autour de la mathématisation du problème des trains

En ce qui a trait à Laurent, plutôt que de schématiser la situation comme le fait Maude, celui-ci passe directement à l'identification d'inconnues identifiées par un générateur dans le but de procéder à une résolution algébrique, ce qui peut être interprété comme un *choix éclairé de stratégie* et un *contrôle sémantique* (figure 4.11).

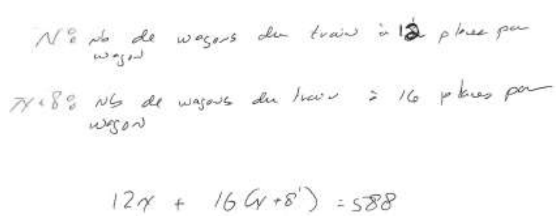


Figure 4.11 Traces écrites de Laurent de la mathématisation du problème des trains

L'*engagement réfléchi* de Laurent est perceptible par le recul que celui-ci prend lors de la mathématisation du problème. En effet, il fait plusieurs allers-retours entre l'énoncé et son équation. C'est ainsi qu'il s'assure que sa mathématisation du problème est adéquate. Le *contrôle sémantique* de Laurent est également observable par la mise en équation du problème.

Dans ce premier épisode, on peut observer que les deux enseignants exercent un contrôle *sémantique* soutenu d'un *engagement réfléchi* et d'un *choix éclairé* par une mise en équation à l'aide d'une seule inconnue. La structuration du contrôle est semblable dans les cas de Maude et de Laurent. Ce n'est que la présence de schémas (la représentation des villes identifiées par A et B et celle des deux trains) qui les distingue. Maude identifie ses inconnues par ces schémas alors que Laurent le fait en mots. Ainsi, ils procèdent aisément à un décodage de l'énoncé mobilisant un *engagement réfléchi*, un *choix éclairé* de stratégie et un *contrôle sémantique*, ces contrôles étant imbriqués.

4.1.3.2 Épisode 2 : Une anticipation de la nature du résultat non satisfaite qui met en branle l'expression de trois types de vérifications, une sensibilité et un dépassement de la contradiction pour aboutir à une validation de la solution

Tout comme pour les deux premières équipes présentées (BEPEP et BES), cette structuration reliée à l'*anticipation* se déroule en deux temps, soit au début de la résolution puis à la fin de celle-ci. On peut observer l'*anticipation* de Maude, en relation avec la nature du résultat, qui prend place avant même que le travail en équipe ne débute. D'abord, un *contrôle syntaxique* va lui permettre de résoudre son équation jusqu'à ce qu'elle arrive à $460 = 28n$. Pour trouver la valeur de son inconnue, Maude met en place un choix éclairé de stratégie. En effet, alors qu'elle tente de terminer sa résolution, au lieu de diviser directement 460 par 28, Maude tente de trouver des fractions équivalentes (*contrôle sur les calculs*) afin de trouver la fraction irréductible correspondante à 460 vingt-huitièmes. C'est à ce moment qu'il est possible de percevoir de la part de Maude une *anticipation* non satisfaite. Alors qu'elle arrive à la fraction 115 septièmes, elle fait la moue et freine sa résolution. Cette réaction permet de déceler l'*anticipation* par l'insatisfaction du résultat de façon non verbale. De plus, lors de l'entrevue, Maude mentionne que cette réponse l'a dérangée et l'a fait douter (*sensibilité à la contradiction)* de sa démarche quelques instants.

> 101 à 104 M : C'est ça, parce que comme les élèves font, j'imagine, c'est parce que je me suis dit ça devrait être juste parce que le nombre de wagons on ne peut pas le couper en deux ou quoi que ce soit. Mais cela a duré 2 secondes, parce que moi je sais que je fais des problèmes comme ça, où ça n'arrive pas tout le temps juste et il faut arrondir et tout ça

C'est cette *anticipation* qui la mène à prendre un recul vis-à-vis sa démarche (*engagement réfléchi*) et à relire le problème afin de voir si un autre agencement de wagons permettrait d'atteindre exactement 588 passagers. Ce retour sur le problème lui permet donc de se *vérifier* et de *dépasser la contradiction*. De plus, on peut voir que l'expérience d'enseignante de Maude lui permet de dépasser plus facilement la contradiction, puisqu'elle-même propose parfois des situations semblables dans son enseignement.

Dans le cas de Laurent, on voit *l'anticipation* et la *sensibilité à la contradiction* apparaitre au début du travail en équipe alors que celui-ci constate que la réponse de Maude ne correspond pas à un entier comme c'est le cas pour sa réponse. Ainsi, pour vérifier la résolution qu'il a faite, il regarde si Maude obtient la même réponse que lui. C'est ce doute par rapport à la solution décimale qui amène Laurent à entamer le travail d'équipe. Afin de pallier cet inconfort, il propose de *vérifier* sa solution à l'aide des résultats qu'il a obtenus, soit 16,5 et 24,5. Cette approche sert essentiellement de *vérification* sur les calculs comme il le mentionne lors de l'entrevue.

> 130 à 133 L : (…) en multipliant 16,5 par 12 et 24,5 par 16, et qu'on tombe pile dessus, on voit alors qu'on n'a pas fait d'erreurs dans notre résolution de système d'équations. Après ça on va pouvoir dire, ok on va prendre un wagon de plus, un wagon de moins et on va écrire une réponse excentrique ici, mais au moins on sait qu'on n'est pas dans le champ et qu'on n'a pas d'erreurs de calcul

Par la suite, c'est cette vérification qui amène l'équipe à constater qu'une erreur est survenue lors de la résolution. En injectant les résultats (16,5 et 24,5) dans l'expression algébrique $12y + 16(x + 8)$, ceux-ci obtiennent 590 passagers au lieu de 588. C'est pour cette raison que les deux participants tentent de vérifier plus en détail les calculs, jusqu'à ce que Maude réalise que 115 septièmes, ne donne pas 5 à la position des dixièmes (« Ça ne m'arrive pas à point 5 moi, c'est juste pour ça », ligne 42). On assiste ici à une perception de l'erreur par une prise de distance par rapport au résultat obtenu sous forme fractionnaire où le sens division de la fraction est sollicité. En ce qui a trait à la *validation* (ligne 53 à 61), celle-ci survient alors que les deux participants acceptent que la réponse doive nécessairement être arrondie à la hausse, puisqu'une réponse en dessous de 16,5 et 24,5 ne permettrait pas de transporter assez de passagers.

53 L: ben c'est ça ok. Donc c'est clairement 16 points, donc il faut que ce soit 17 et 25
54 M: c'est ça. Si on veut qu'ils prennent tout le monde.
55 L: ouais
56 M: et que ce soit exactement 8 wagons de plus que l'autre
57 L: parce que si on fait 17 fois 12 plus 25 fois 16
58 M: 604 passagers
59 L: 25 fois 16 ça fait 400, pis 17 fois 12 ça fait, 170,
60 M: moi j'ai 204
61 L: 204, ouais c'est ça. Alors on aurait notre réponse.

Les enseignants reviennent sur la validation de leur réponse à la toute fin de la résolution. En effet, l'équipe est prête à passer au problème suivant, quand Laurent a une idée soudaine *:* « c'est juste que ce n'est pas écrit qu'il faut prendre le moins de wagons possible. (…) Je pourrais écrire où x wagons de 12 passagers et $x + 8$ de 16 passagers tel que x est plus grand ou égal à 17 » (lignes 70 à 74). Celui-ci réalise ainsi que le problème ne demande pas d'optimiser la solution en trouvant le moins de wagons possible et il propose ainsi une solution où 17 et 25 sont les conditions minimales pour transporter ces passagers (figure 4.12).

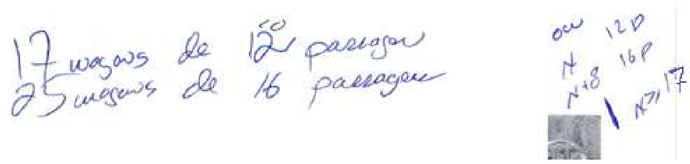


Figure 4.12 Solution finale de Laurent au probléme des trains

En somme, cet épisode permet d'observer que l'*anticipation* de la nature des résultats, en plus d'un *contrôle syntaxique* et *sur les calculs*, permet un regard sur la réponse et peut aussi amener à un *choix éclairé* sur la méthode de résolution. De plus, c'est cette *anticipation* qui mène à une *sensibilité à la contradiction* qui peut être *dépassée* par un agencement de composantes du contrôle comme l'*engagement réfléchi* et des *vérifications*. L'expérience professionnelle joue également un rôle dans la mise en place de ces composantes. Trois types de vérification sont mobilisés par les enseignants. Tout d'abord, une vérification prend place à travers la confrontation entre les résultats trouvés par les deux enseignants, les deux ont trouvé des résultats non entiers, ce qui les conforte. Par la suite, une injection des solutions décimales trouvées dans l'équation de départ permet de vérifier qu'il n'y a pas d'erreurs de calcul. Comme cette vérification n'est pas satisfaite, une autre vérification se met en place qui repose sur la reconnaissance que 115 septièmes ne peut avoir un 5 pas à la position des dixièmes. Ils sont alors sûrs que Laurent a fait une erreur de calcul dans la résolution de l'équation. On peut remarquer que *vérification* et *perception de l'erreur* sont interreliées.

4.1.3.3 Synthèse en termes de structurations des composantes du contrôle lors de la résolution des enseignants au secondaire

La résolution du problème des trains par les enseignants du secondaire a été de plus courte durée que pour les deux autres équipes présentées (BEPEP et BES). Outre une erreur de calcul, on peut voir que les enseignants exercent un contrôle optimal de leur activité mathématique. En effet, ils mathématisent sans difficulté le problème (*contrôle sémantique*) et exercent un *contrôle syntaxique* qui s'exprime lors de la résolution de l'équation. Ainsi, le *contrôle syntaxique* débouche sur un *contrôle sur les calculs* chez Maude quand elle trouve la solution de son équation par des fractions équivalentes. Cette façon de procéder lui permet de *percevoir* par la suite *l'erreur* dans les calculs quand ils décident d'injecter les résultats décimaux trouvés par Laurent. Cette maîtrise n'est pas surprenante vu leur expérience en mathématiques. Ces *vérifications* prennent une autre forme que les vérifications utilisées par les autres équipes vues précédemment (BEPEP et BES). Laurent vérifie qu'il ne s'est pas trompé dans la résolution en injectant les valeurs décimales trouvées dans son équation, il jette de plus un regard sur la production de Maude pour confronter ce qu'il a fait. L'expérience professionnelle joue ici un rôle dans la reconnaissance de ce type de problèmes puisque les enseignants disent donner des problèmes semblables à leurs élèves. Lors de l'entrevue, Laurent mentionne qu'il comprend mieux le sentiment d'un élève vis-à-vis ce type de situation où il se retrouve devant une *anticipation* non satisfaite. De plus, il mentionne que la vérification devrait être une étape de toute résolution. Il est ainsi possible de voir, comme c'est le cas dans l'analyse des deux équipes précédentes, que l'expérience des participants est un élément essentiel à considérer et pouvant influencer les structurations du contrôle.

4.1.4 Analyse de la résolution et des échanges des élèves au 2^e^ cycle du secondaire

L'analyse de la résolution et des échanges autour du problème des trains des deux élèves au 2^e^ cycle du secondaire, Shawn (S) et Alexandre (A), fait ressortir trois épisodes significatifs de structuration du contrôle, soit : 1) L'utilisation d'une représentation du problème réfléchie et sémantiquement opérationnelle qui repose sur un engagement réfléchi et un contrôle sémantique ; 2) Des difficultés syntaxiques et un blocage d'un des participants dépassés par la compréhension de la résolution de l'autre participant qui procède autrement ; et 3) Une anticipation non satisfaite qui mène vers une triple vérification et aboutit grâce à une réflexion sur les restes d'une division à une validation du couple solution.

4.1.4.1 Épisode 1 : L'utilisation d'une représentation du problème réfléchie et sémantiquement opérationnelle qui repose sur un engagement réfléchi et un contrôle sémantique

Tout d'abord, les deux élèves prennent le temps de s'approprier le problème de façon individuelle. Pour les deux participants, on peut voir apparaitre une représentation schématique de la situation. Cet épisode s'intéresse particulièrement à la représentation visuelle produite par Shawn (figure 4.13).

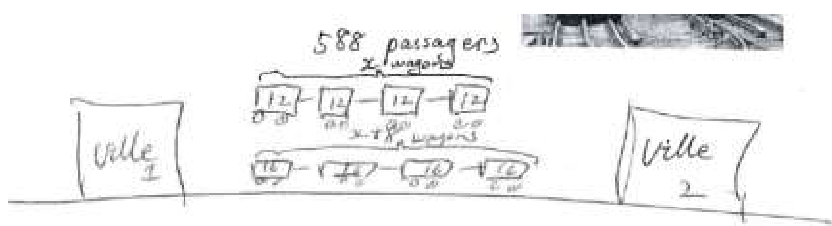


Figure 4.13 Schématisation du problème des trains de Shawn

Celui-ci représente les deux villes qu'il nomme « Ville 1 » et « Ville 2 », puis il représente le train 1 et le train 2 en dessinant quatre wagons à 12 places (désignés par x wagons) et quatre wagons à 16 places (désignés par $x + 8$ wagons). Au-desssus de son schéma, il écrit 588 passagers. On peut ainsi remarquer que tous les éléments de la situation sont représentés dans le schéma: le total, les grandeurs en jeu, les relations entre les grandeurs, ce qui lui permet de ne plus revenir à l'énoncé. Selon Shawn, cette façon de faire l'aide à interpréter le problème en visualisant les différents aspects du problème, ce qui lui permet d'éviter de possibles erreurs et d'omettre certains éléments de la situation comme il le précise dans l'extrait d'entrevue suivant :

> 183 à 189 S : Ah, moi c'est juste pour m'aider de voir si je me suis trompé quelque part, si j'ai oublié un détail, parce qu'en visualisant ça me dit que j'avais la bonne façon de penser. Parce que ça se peut que des fois que j'arrive à me dire que peut-être qu'il y a quelque chose d'autre qui s'ajoute dans ça, ce qui n'est pas le cas ici. Admettons, un wagon qui est incomplet, qui je ne sais pas, que j'ai des doutes, je ne sais pas si la tête de la locomotive peut contenir des gens que je dois ajouter et faire un plus quelque part un terme constant. C'est juste pour m'aider là à visualiser.

On peut remarquer que, lors de la résolution, Shawn ne retourne plus à l'énoncé du problème, mais plutôt à sa schématisation. Ceci est visible quand Shawn explique son raisonnement à son coéquipier, il soutient son raisonnement en pointant des éléments de son schéma.

En d'autres mots on peut dire que Shawn utilise une schématisation opérationnelle de la situation qui est construite sur un *engagement réfléchi* par le recul pris sur le problème, un *contrôle sémantique* dans son interprétation et un *choix éclairé* par l'utilisation d'une seule variable. De surcroit, cette schématisation opérationnelle sert de support pour expliciter le raisonnement mobilisé par l'élève.

4.1.4.2 Épisode 2 : Des difficultés syntaxiques et blocage d'un des participants dépassés par la compréhension de la résolution de l'autre participant qui procède autrement

Cet épisode s'intéresse à la mathématisation du problème produite de façon individuelle par Alexandre qui évolue par la suite grâce aux échanges avec son coéquipier. La mathématisation effectuée par Alexandre l'amène à un blocage du côté *syntaxique*. Toutefois, ces difficultés *syntaxiques* sont dépassées lors de l'entrevue et amènent à une deuxième tentative de résolution par Alexandre qui est cette fois-ci fructueuse.

Au départ, à l'instar de Shawn, Alexandre fait une schématisation de la situation (figure 4.14), qui est moins élaborée.

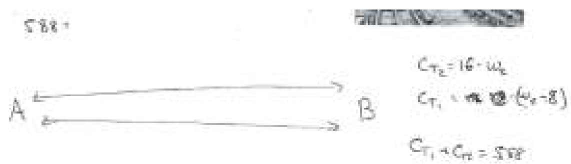


Figure 4.14 Traces écrites par Alexandre autour de la mathématisation du problème des trains

Alexandre représente les deux villes (A et B) et il trace des flèches entre celles-ci, désignant le trajet des deux trains. Pour traduire le problème, il choisit trois inconnues qui ne sont pas identifiées (mais nommées oralement plus tard), soit la capacité du train 1 (C_{T1}), la capacité du train 2 (C_{T2}) et le nombre de wagons du train 2 (W_2). On peut déduire la signification de ces inconnues pour Alexandre par sa façon de donner du sens à l'équation de Shawn : « 12*x* ça veut dire quoi? C'est 12, ça correspond à la capacité fois le nombre de wagons » (ligne 45). Lors de la mathématisation, on voit qu'il a écrit que la capacité du train 2 est égale à 16 fois le nombre de wagons du train 2. Toutefois, il a des difficultés à faire le même travail pour C_{T1} puisqu'il barre le membre de droite de l'égalité. Il ne sait comment exprimer cette inconnue autrement. Puis il écrit la relation entre la capacité du train 1 et celle du train 2 qui est de 588 passagers. En somme, cette approche mène Alexandre à un système d'équations à trois équations et à trois inconnues. Les discussions entre les deux élèves soulignent le blocage d'Alexandre. Une fois qu'il a produit ces traces, il ne sait comment poursuivre. Ce blocage pourrait s'expliquer par le fait que généralement, les situations au secondaire se limitent à deux équations avec deux inconnues.

Suite à ce blocage, Alexandre déploie un *engagement réfléchi*, par l'abandon de cette méthode au profit d'une idée moins « efficace » selon lui, soit : une approche essais-erreurs. En effet, lors du début de la résolution en équipe, il suggère que les valeurs proposées (12,16 et 588) amènent une résolution arithmétique simple par un *contrôle sur les calculs*.

> 38 à 40 A : Est-ce que je peux juste dire mon intuition rapidement? Il y a 588 passagers et on parle de chiffres de 12, de 16 pis 8, ça semble se faire vraiment facilement par essai-erreur ça. Je pense que ce n'est pas une bonne façon de le faire là, mais.

C'est donc dire que, dans un premier temps, lors de la résolution individuelle, on peut voir un *engagement réfléchi* qui permet un *choix éclairé* soutenu par un *contrôle sémantique* lors de la mise en équation de la part d'Alexandre. Cependant, un blocage au niveau du *contrôle syntaxique* ne lui permet pas d'aboutir à une équation unique. Or, ce blocage du *contrôle syntaxique* le pousse ultérieurement à un *engagement réfléchi* par le *contrôle sur les calculs* et le *choix éclairé* d'une autre approche, qui est selon lui moins « belle », c'est-à-dire une résolution arithmétique par essais-erreurs.

Durant l'entrevue, Alexandre dépasse ce blocage, alors qu'il réalise comment il aurait pu résoudre le problème à partir du système d'équations qu'il a écrit lors de la première tentative de mathématisation. Il parvient par lui-même à comprendre l'étape manquante permettant de compléter algébriquement la résolution, soit en remplaçant les 2 premières équations ($C_{t2} = 16W_2$ et $C_{t1} = 12\,[W_2 + 8]$) dans la troisième ($C_{t1} + C_{t2} = 588$).

> 177 à 179 A : Je viens de réaliser que l'étape qu'il me manquait c'est de juste insérer ça là-dedans, puis ça aurait été la même chose que lui, sauf que moi j'avais décidé de, x - 8 et 12, ça revient au même là.

Ce déblocage est particulièrement intéressant puisqu'il met en lumière le développement du *contrôle syntaxique* et *sémantique* d'Alexandre à travers la résolution en équipe. En effet, c'est par la compréhension de la résolution produite par Shawn qu'Alexandre peut par la suite revenir en entrevue sur ce qu'il a fait et compléter sa résolution. Lors de cette résolution, à la demande de Shawn, Alexandre a été capable de verbaliser l'entièreté de la mathématisation et la résolution de l'équation de son coéquipier. De plus, on peut remarquer qu'il n'a pas simplement copié la résolution de Shawn puisque les deux résolutions n'utilisent pas le même générateur. Effectivement, on peut voir à la figure 4.15 que l'inconnue de l'équation de Shawn est le nombre de wagons à 12 places, tandis qu'Alexandre utilise le nombre de wagons à 16 places.

$12x + 16(x+8) = 588$ $12x + 16x + 128 = 588$ $28x = 460$ $x = 16$ R12	$16w + 12w - 96 = 588$ $28w = 684$ $w = 24$
Shawn	Alexandre

Figure 4.15 Processus algébriques effectuées par les deux élèves au 2e cycle du secondaire

On peut ainsi dire que, suite au blocage *syntaxique* ressenti par Alexandre, les *contrôles sémantique* et *syntaxique* de Shawn, observable à travers diverses *vérifications* (voir épisode suivant), ont permis à Alexandre de développer un *contrôle syntaxique et sémantique* qu'il applique à sa propre résolution.

4.1.4.3 Épisode 3 : Une anticipation non satisfaite qui mène vers une triple vérification et aboutit grâce à une réflexion sur les restes de la division à une validation du couple solution

Cet épisode prend place quand les deux élèves commencent à travailler de pair. En fait, ce sont l'*anticipation* insatisfaite et la *sensibilité à la contradiction* de Shawn qui déclenchent le travail d'équipe alors que celui-ci a presque terminé la résolution du problème. En effet, il affirme qu'il a trouvé la réponse et commence la division de

460 par 28. En procédant, il se rétracte alors qu'il réalise que la solution ne sera pas un nombre entier, ceci survient avant même qu'il ait terminé son calcul : « attends 2 secondes, il se peut que ça ne soit pas bien. [pause pour compléter le calcul)]. C'est ça, ce n'est pas pile » (ligne 12). C'est ce qui l'amène à douter de sa démarche et à prendre un certain recul (*engagement réfléchi*) puis à interpeler son partenaire. Shawn cherche ainsi l'approbation d'Alexandre en verbalisant de façon détaillée la façon dont il a procédé pour traduire le problème en une équation mathématique afin de *vérifier* sa compréhension du problème (*contrôle sémantique*). À la suite de cette vérification, Shawn montre des signes de *dépassement de la contradiction,* alors qu'il mentionne qu'une solution entière serait l'idéal, ce qui sous-entend qu'une solution non entière serait possible. Toutefois, cette *vérification* de Shawn semble insuffisante, puisqu'il insiste auprès d'Alexandre pour confirmer son raisonnement. Ce qui force Alexandre à *vérifier sémantiquement* l'équation de son coéquipier.

61 S: alors tout ce que j'ai à faire, c'est de m'assurer qu'il n'y a pas d'erreurs de calcul.
62 A: ok.
63 S: ok, 16 fois 8. 128?
64 A: c'est comme 4 fois 15, c'est 60, plus 4 fois 15 c'est 120 plus une fois.
65 S: qu'est-ce que tu fais là?
66 A: plus 5 fois 8. Ok, admettons, je te crois. Ok je vais te croire.
67 S: attends, tu me fais douter. Oui c'est ça, ok sans faute.
68 A: ok (rire).
69 S: juste s'assurer que j'ai rien oublié de transporter.
70 A: là ça te donne un chiffre qui n'est pas égal, c'est ça.
71 à 73 S: combien doit-on accrocher de wagons après chacune des. Ouais je pense que c'est ça, parce que attends, est-ce qu'on s'entend, on va transporter d'un coup (pointe de A à B). On va transporter 588 passagers d'un coup d'ici à là (pointe de A vers B).
74 A: oui il y a deux rails (pointe l'image). Ok là tu as un *x* de combien? 460 sur 28 ça fait quoi?
75 S: c'est parce qu'ici (pointe 12*x*) parce que ici j'ai 12 plus 16, 28. 28. 588 moins ça (pointe 128), ça donne 460.
77 A: c'est bon.

78 S: cependant ça ne me donne pas un chiffre pile.
79, 80 A: ça donne combien à peu près? Tu vas devoir juste arrondir à la hausse, parce que tu ne peux pas.
81 S: ouais c'est ça à la hausse ouais.

Cet extrait permet d'observer ce qui se produit lorsqu'Alexandre approuve l'équation de Shawn. C'est cette approbation qui amène l'équipe à passer d'une *vérification sémantique* à une *vérification syntaxique* et *sur les calculs*. C'est-à-dire qu'ils s'assurent que toutes les opérations et les étapes de la résolution sont sans erreurs (lignes 61 à 75). Lors de ce passage, on peut observer un *contrôle sur les calculs,* mais incomplet, de la part d'Alexandre alors que celui-ci tente de faire mentalement la multiplication de 16 fois 8, en passant par la multiplication par 15 : « c'est comme 4 fois 15, c'est 60, plus 4 fois 15 c'est 120 plus une fois (…) plus 5 fois 8. Ok, admettons, je te crois » (ligne 64). Il est à noter que ce calcul n'est pas complété à cause de l'impatience de Shawn par rapport à cette façon de procéder. C'est cette triple vérification qui les convainc de la véracité de leur démarche et qui leur permet ainsi d'accepter la réponse non entière comme valeur de l'inconnue *x*. Cet aspect de la réponse ne semble pas importuner Alexandre qui affirme qu'il faut simplement arrondir à l'entier supérieur (ligne 79). Son flegme par rapport à cette affirmation permet d'observer un *choix éclairé* vis-à-vis la solution, puisqu'il l'interprète, malgré une intervention préalable (« on devine que les wagons doivent être pleins », ligne 4) qui laissait présager une anticipation d'une réponse entière. Dans son cas, il semble plutôt que ce soit un *contrôle sémantique* de la situation qui lui permet d'affirmer promptement comment gérer les restes dans cette situation.

Ainsi, suite à la résolution, c'est cette réflexion sur le reste qui amène Shawn à être en mesure de *valider* la solution de l'équipe lorsqu'il exprime que les ensembles solutions possibles de nombres de wagons à 12 places et à 16 places sont respectivement, 16 et 24 ou 17 et 25. Cette réflexion lui permet ainsi de démontrer que seul l'ensemble solution 17 et 25 permet de transporter au moins les 588 passagers.

C'est donc dire que l'*anticipation* de Shawn et sa *sensibilité à la contradiction* ont mené l'équipe à une triple *vérification* (sémantique, syntaxique et calculatoire). Ces multiples vérifications en équipe, conjointement à la manifestation du *contrôle sémantique* et du *choix éclairé* d'Alexandre d'arrondir la solution, ont permis à Shawn de valider la réponse et ainsi de trouver le plus petit couple solution possible.

Dans cette équipe, on voit que Shawn prend un rôle de meneur et dirige la résolution, ses contrôles *sémantique* et *syntaxique* l'amènent à prioriser l'algèbre au-delà de toute autre résolution, voire même à hiérarchiser différentes approches. Quant à Alexandre, il prend un rôle plus réservé. En effet, les difficultés *sémantiques* qu'il a rencontrées en début de résolution le guident sur une voie plus arithmétique qui lui aurait permis de résoudre le problème. Cependant, Shawn insiste sur la résolution algébrique, ce qui relègue Alexandre à un rôle de soutien (vérificateur) aux raisonnements de son coéquipier.

4.1.4.4 Synthèse de la résolution en termes de structurations des composantes du contrôle lors de la résolution du problème par les élèves au 2e cycle du secondaire

Outre le blocage syntaxique d'Alexandre, on peut remarquer que ces élèves exercent sensiblement un bon contrôle sur la résolution de ce problème. En fait, ceux-ci ne semblent pas douter de la démarche qu'ils ont entreprise, quoique surpris par la réponse non entière obtenue. Ainsi, les trois vérifications ne semblent pas être axées sur le sens de la démarche, mais plutôt sur la recherche d'une erreur dans la production de la démarche. De plus, ces *vérifications* permettent à l'équipe d'accéder à la *validation* du couple solution. En effet, après avoir *vérifié* que toutes les étapes ont été effectuées adéquatement, l'équipe conclut que la solution trouvée n'est pas entière et doit être arrondie. C’est ainsi que les élèves *vérifient* les deux possibilités de solutions, soit en arrondissant à l’entier inférieur ou à l’entier supérieur. La *validation provient* ainsi de cette opération puisqu’ils concluent qu’en arrondissant à l’entier supérieur, ils obtiennent une solution valable à la situation alors que l’utilisation de l’entier inférieur est insuffisante. Ils établissent ainsi que le couple (17, 25) est le plus petit couple possible. Cette équipe permet d’observer deux types de contrôle vis-à-vis la solution non entière dans ce problème, soit la *sensibilité à la contradiction* et le *choix éclairé*. Dans les deux cas, ces contrôles semblent encore en relation avec une *anticipation* non satisfaite, le fait que la réponse doit être entière, mais la réaction est différente. Dans le cas de Shawn (qui est *sensible à la contradiction*), c’est le doute qui l’amène à déployer des vérifications systématiques des différentes étapes. Tandis qu’Alexandre (qui fait preuve d’un *choix éclairé de stratégie*) ne fait preuve d’aucun malaise, mais il vérifie plutôt à la demande de son coéquipier. Il est également à noter le développement syntaxique d’Alexandre qui arrive à comprendre le raisonnement de son équipier et l’applique pour résoudre son équation qui n’est pas écrite sous la même forme que celle de son camarade. Il réinvestit ainsi ce que son partenaire lui a expliqué dans la résolution de ses équations.

4.1.5 Analyse de la résolution par les élèves au 1^er^ cycle du secondaire

L’analyse de la résolution du problème des trains par quatre élèves au 1^er^ cycle du secondaire, Antonia (A), Catherine (C), Nicola (N) et Lilianne (L), permet de distinguer deux épisodes qui font apparaitre certaines structurations entre les composantes du contrôle. Ces épisodes sont : 1) La mise en œuvre d’un contrôle sémantique et d’un engagement réfléchi qui permet de commencer la résolution du problème de façon non algébrique, mais qui n’aboutit pas ; et 2) Le recours à diverses stratégies numériques : mise en place d’un engagement réfléchi et d’un contrôle sémantique s'appuyant sur le sens des opérations en contexte permettant de percevoir une impasse dans l'utilisation de ces stratégies.

La résolution du problème des trains par ces quatre participants au 1er cycle du secondaire n'a pas été aisée en raison de l'absence d'enseignement explicite de l'algèbre et plus particulièrement de la résolution de problèmes algébriques à ce niveau d'étude. Tout de même, les élèves ont étudié la généralisation de suites, ce qui veut dire que théoriquement, ils devraient être en mesure de faire ressortir des relations et de symboliser mathématiquement celles-ci. De plus, comme mentionnées dans la méthodologie (voir 3.2.2.1), différentes stratégies de résolutions arithmétiques permettent de résoudre ce problème (Bednarz *et al.*, 1992), comme les procédures de type essais numériques ou celles s'articulant sur un raisonnement portant sur les relations connues du problème. Ainsi, ce type de situation est accessible à des élèves au 1er cycle du secondaire.

4.1.5.1 Épisode 1 : La mise en œuvre d'un contrôle sémantique et d'un engagement réfléchi qui permet de commencer la résolution du problème de façon non algébrique, mais qui n'aboutit pas

Au départ, les élèves prennent le temps de lire le problème de manière individuelle. Nicola est le seul élève qui schématise la situation. Cela dénote un certain *engagement réfléchi* (figure 4.16) puisqu'il reconnait les données importantes du problème comme l'existence de deux trains avec le nombre de places par wagon et le trajet entre deux villes. Cependant, un aspect important semble omis par ce dernier. En effet, la relation de 8 wagons de plus n'est pas représentée, ce qui peut s'associer à une difficulté pour mobiliser un *contrôle sémantique*. De plus, on peut observer une autre difficulté d'ordre *sémantique* de sa part alors qu'il questionne ses coéquipières sur la distribution des passagers dans les wagons : « Est-ce que c'est un nombre égal de passagers qu'il faut avoir dans les deux trains ?» (Ligne 2, 3). Cette question n'est pas surprenante parce que les élèves du premier cycle travaillent généralement avec des valeurs connues dans la résolution de problèmes, donc l'idée de séparer le nombre de passagers en deux parties équivalentes n'est pas si saugrenue.

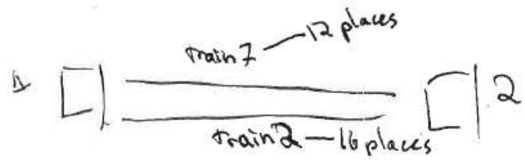


Figure 4.16 Schématisation duproblème des trains de Nicola

Cette intervention de Nicola permet de faire ressortir que Catherine est consciente de la contrainte, il y a 8 wagons à 16 places de plus. La prise en compte de cette contrainte portant sur la relation qui existe entre les deux types de wagons est observable chez les trois autres participantes alors qu'elles amorcent la résolution en multipliant 8 par 16 afin de retrancher ce résultat des 588 passagers. Cette opération est attribuable à un *contrôle sémantique*, comme on le voit dans les propos d'Antonia, celle-ci donne un sens à cette opération : « il y a au moins 128 passagers dans le 16, dans le train 2, il y a au moins 128 passagers » (Ligne 5, 6)). On peut voir que les élèves font preuve d'une bonne compréhension *sémantique* de la relation entre les wagons et aussi entre le ratio et le nombre de wagons lorsque les deux sont connus (8 wagons de 16 passagers par wagon). Cette approche s'apparente à une résolution arithmétique de type surplus/part où pour résoudre, il est possible de soustraire les surplus (les 8 wagons de 16 passagers) puis de partitionner le reste des passagers par 28, qui représente un train à 28 places (section 3.2.2.1), puisqu'à chaque fois que l'on a un wagon à 16 places on a aussi un wagon à 12 places. Or, les élèves gèrent bien la partie surplus, toutefois ils sont incapables de gérer la partie *parts*. Possiblement par le fait qu'il existe deux types de wagons, donc possiblement pour eux 2 types de parts. C'est donc dire que leur *contrôle sémantique* devient moins évident à déployer lorsque ce qui semble être deux valeurs inconnues entre en jeu.

4.1.5.2 Épisode 2 : Le recours à diverses stratégies numériques : mise en place d'un engagement réfléchi et d'un contrôle sémantique s'appuyant sur le sens des opérations en contexte permettant de percevoir une impasse dans l'utilisation de ces stratégies.

Suite à ce travail initial, les quatre élèves se lancent dans une variété de stratégies qui sont pour la plupart infructueuses. Cet épisode relate la mobilisation des composantes du contrôle à travers une stratégie avec des traces algébriques et des stratégies arithmétiques, en discutant également de ce qui permet à l'équipe de valider ou d'infirmer les choix qu'ils font. Tout d'abord, l'approche algébrique est présentée et ensuite les différentes procédures arithmétiques qui ont finalement permis de déboucher sur une solution sont décrites.

Suite à la mise en place de différentes stratégies arithmétiques qui seront décrites par la suite, Lilianne effectue, lors d'un blocage, une tentative de résolution ressemblant à l'algèbre, comme on peut voir à la figure 4.17.

Figure 4.17 Mathématisation du problème des trains de Lilianne

Lilianne fait ainsi preuve d'un certain *engagement réfléchi*, en prenant du recul par rapport à l'essai précédent puisqu'elle utilise les 588 passagers, plutôt que les 460 (588 – 128) considérés précédemment. On peut noter des difficultés d'ordre *sémantique* alors que pour elle, le « ? » est utilisé pour écrire tous les nombres qu'elle ne connaît pas plutôt qu'une inconnue qui est recherchée. Le point d'interrogation revêt donc deux significations (le nombre de wagons à 12 places et le nombre de wagons à 16 places). On peut voir également que la relation « 8 wagons de plus » est incluse dans le deuxième point d'interrogation, puisqu'elle mentionne que les deux points d'interrogation cherchent le « quoi » recherché : « 16 fois quoi plus 12 fois quoi donne 588 » (Ligne 30). Ces difficultés *sémantiques* entrainent un blocage puisqu'elle n'est pas capable d'exercer un *contrôle syntaxique*, ne possédant pas les connaissances nécessaires pour le faire. En effet, elle se retrouve vis-à-vis une équation avec deux termes constitués d'inconnues qui ne représentent pas le même nombre. La résolution d'équations du premier degré est un outil que ces élèves n'ont pas encore abordé en classe, outre par le biais de la généralisation d'une suite. De ce fait, l'algèbre semble pour eux une procédure à appliquer comme on peut le voir dans l'affirmation suivante de Lilianne : « Il faut faire de l'algèbre, il faut mettre tout à l'envers. Il y a un égal, puis si tu as un plus, il faut que tu mettes un moins, puis un fois ça fait un diviser » (Ligne 36, 37). On assiste ainsi à la mise en place d'un *contrôle sémantique* pour mathématiser le problème, mais un blocage survient puisque l'équation obtenue n'est pas du type ax + b, équation qu'elle sait résoudre. Plus tard dans la résolution, Nicola revient sur cette idée de faire le problème à l'envers en précisant toutefois que ce n'est pas de l'algèbre :

41, 42 N : Sérieusement je pense qu'elle a raison qu'il faut le faire à l'envers, mais ce n'est pas de l'algèbre.
43 L : Ce n'est peut-être pas de l'algèbre, mais on le fait à l'envers.
44 C : OK, comment on le fait à l'envers? OK ça commence avec les 16 places.
45, 46 N : s'il faut automatiquement qu'il y ait 8 wagons de plus, on peut juste faire comme.
47 C : 460.
48 N : de?
49, 50 L : 588 divisé par 12 fois quelque chose. Non, non, c'est ça qui me perd à chaque fois que je le fais à l'envers, je ne comprends plus.
51 C : non c'est divisé par, parce que sinon ça fait plus que 588.
52 L : c'est 16 fois quelque chose plus 12 fois quelque chose donne 588.
53 C : tu as dit 588 divisés 16 fois.
54 L : parce qu'il faut le faire à l'envers, mais je ne sais pas si je l'ai bien fait.

Cet extrait permet de comprendre ce que signifie faire le problème à l'envers, c'est-à-dire qu'ils cherchent à isoler les inconnues en utilisant les opérations inverses, ce qui s'apparente à la mobilisation d'un *contrôle syntaxique*. Cette stratégie est efficace s'il n'y a qu'une valeur inconnue. Or, ici les élèves sont confrontés à deux inconnues, ils sont donc bloqués, ne sachant comment procéder.

Avant que Lilianne ne se lance dans une mathématisation du problème, quatre autres stratégies sont essayées par l'équipe soit : une résolution par un tableau de données, un appui sur diverses divisions, l'utilisation du PPCM et/ou du PGCD et la stratégie par essais-erreurs. Lors de ces différents moments, les interactions entre les élèves permettent de valider ou d'infirmer ces diverses approches. Ces validations s'appuient généralement sur l'expression d'un *engagement réfléchi* et d'un *contrôle sémantique* manifesté à travers le sens accordé aux opérations en contexte.

La première stratégie de résolution arithmétique est proposée par Catherine qui suggère l'utilisation d'un tableau (figure 4.18) dans lequel sont répertoriés dans une colonne les wagons à 12 places et dans une autre colonne ceux à 16 places. Cependant, cette approche mène rapidement à un nouveau blocage. En effet, l'ajout d'un support visuel n'aide pas l'équipe à mieux comprendre comment répartir les passagers dans les différents wagons. Cette méthode est abandonnée, car les élèves recherchent une résolution plus directe.

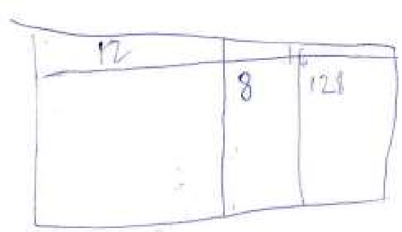


Figure 4.18 Schématisation en tableau du problème des trains de Catherine

Une autre approche arithmétique suggérée par l'équipe s'appuie sur le recours à des divisions. Les élèves procèdent à trois divisions distinctes pour tenter de résoudre ce problème, soit : 230 (la moitié de 460) divisé par 12 et par 16, 460 divisé par 12 et par 16, ainsi que 588 divisé par 12 et par 16. L'ensemble de ces opérations repose sur un *engagement réfléchi* puisque le choix des opérations provient généralement d'un retour sur la situation. Toutefois, on peut voir que le choix de certaines divisions met de l'avant d'autres composantes du contrôle. Par exemple, Antonia exerce un *contrôle sémantique* sur la situation lorsqu'elle mentionne que le nombre de wagons dans les deux trains doit être le même, rappelant la contrainte : « Et on sait qu'il y a huit wagons de plus pour le train 2, alors il faut des nombres égaux de wagons pour les deux. » (Ligne 8, 9).

Ainsi, les élèves utilisent différentes divisions pour tenter de résoudre le problème, toutefois aucune d'entre elles ne permet pas de trouver une solution qui leur semble adéquate. On peut voir que différentes composantes du contrôle amènent les participants à se réengager de manière réfléchie dans la résolution. En effet, après avoir effectué les opérations de 230 divisé par 12 et 230 divisé par 16, c'est par la mobilisation d'une *vérification* et d'*un engagement réfléchi* accompagnés d'*un contrôle sur les calculs* qu'Antonia réalise que cette approche n'est pas adéquate puisque qu'ils n'obtiendront pas le même nombre, comme on peut le voir dans l'extrait suivant :

> 12, 13 A : Je ne pense pas que c'est. Attends. Parce que si on fait ça, on divise par 2, il y aura plus de wagons pour lui. Alors c'est.
> 14 C : non, mais c'est vrai pour le 12.
> 15 N : c'est ça ne marche pas.
> 16 A : le 12 en aura plus.
> 17 L : attendez, attendez, attendez.

On peut voir aussi que l'*anticipation* de la nature de la solution (un nombre entier) amène l'équipe à revoir la stratégie utilisée et facilite le déploiement à nouveau d'un *engagement réfléchi* pour tenter une nouvelle approche de résolution. Les divisions de 460 par 12 et de 460 par 16 donnent une réponse périodique, ce qui laisse perplexes les participants et les amène à considérer qu'ils ont peut-être fait une erreur. L'extrait suivant illustre cette prise de conscience :

21 L : Je ne pense pas qu'on fait la bonne chose, ça n'a pas rapport.
22 A : ah non, moi c'est 38,3 périodique (460 divisé par 12).

Cette *anticipation* joue également un rôle lors des divisions de 588 par 12 et de 588 par 16, divisions qui semblaient prometteuses à l'équipe puisque la division de 588 par 12 donne un nombre entier, mais l'équipe abandonne cette méthode lorsqu'elle s'aperçoit que le quotient de 588 divisé par 16 ne donne pas un entier. Cependant on peut noter un *engagement réfléchi* de la part de Catherine qui propose d'arrondir les valeurs trouvées.

La troisième approche arithmétique explorée par l'équipe revient à différentes reprises pendant l'échange. Elle apparait initialement lorsque l'équipe utilise la division de 460 par 16 et par 12. En effet, cette opération amène Lilianne, comme l'avait fait Félix (étudiant BEPEP), à proposer d'utiliser le PPCM (manifestation d'un *choix éclairé)*. Ce concept mathématique est vu au primaire et repris au 1^er^ cycle du secondaire, ainsi il est possible que les élèves l'aient abordé en classe peu de temps avant. Catherine propose ainsi l'idée de chercher le PPCM ou le PGCD de 460, idée qui est reprise plus tard dans la résolution par Antonia. On sent ici que Catherine et Antonia ne maîtrisent pas le sens derrière ces concepts mathématiques. En effet, le PPCM ou le PGCD s'appliquent sur au moins deux nombres, comme le fait remarquer Lilianne. C'est suite à cette réflexion que Lilianne réalise qu'il serait préférable de chercher le PGCD à 12 et 16 plutôt que le PPCM de ces deux nombres puisqu'on cherche un plus petit nombre. Toutefois, elle réalise par un *contrôle sémantique sur s*a réponse (4) que cette méthode n'aboutit pas à un nombre de wagons valable, elle est donc abandonnée.

La dernière et quatrième approche arithmétique est une des stratégies attendues pour les élèves de ce niveau scolaire. Nicola, qui travaille dans son coin a recours à des essais systématiques comme il l'explicite à ses collègues :

> 80 à 83 N : Je suis en train de voir. Ce que je suis en train de faire c'est 10 fois 12, c'est égal à quoi, puis ensuite 18 fois 16 (…). C'est parce qu'il doit toujours y avoir 8 wagons de plus avec les 16, alors ce que je fais, ce que je suis en train de voir s'il y a quelque chose qui est égal à 588

Initialement, ses coéquipières sont peu impressionnées par cette façon de procéder. Antonia propose alors de mettre l'accent sur le nombre de wagons plutôt que sur le nombre de passagers. C'est ainsi que les trois filles commencent à suivre la méthode proposée par Nicola. C'est cette approche qui permet à l'équipe de trouver la combinaison minimale permettant de transporter les 588 passagers. On peut remarquer le rôle de l'*anticipation* dans la résolution par la réaction de Catherine dans l'extrait suivant :

> 101 C : on ne peut pas séparer des wagons en deux
> 102 L : non, on ne peut pas séparer des wagons en deux.
> 103 C : 17 wagons chacun, plus 8 (surexcitée, elle se lève sur sa chaise)
> 104 L : quoi.
> 105 C : 17 wagons chacun plus 8 pour celui de 16.
> 106 A : ouais.
> 107 C : c'est ça la réponse, même s'ils ne sont pas remplis.
> 108 A : tu ne savais pas que ça ne doit pas être rempli.
> 109 L : (étonnée) il ne faut pas qu'il soit rempli?
> 110 A : non.

Ainsi Catherine fait un retour sur l'*anticipation* initiale et exerce un *engagement réfléchi* par rapport à la nature de la solution : « on n'a pas un nombre de wagons entiers. Ce n'est pas grave puisqu'il peut y avoir des wagons qui ne sont pas pleins. » (Ligne 114, 115). Ce constat rejoint l'idée d'arrondir proposée lors de l'exécution d'une des divisions. Grâce à la mobilisation d'un *contrôle sémantique* accompagné d'un *engagement réfléchi,* Catherine trouve le nombre minimum de wagons nécessaire pour les deux trains pour transporter les 588 passagers.

4.1.5.3 Synthèse en termes de structuration de la résolution des élèves au 1er cycle du secondaire

L'analyse des échanges permet de voir que l'équipe recourt à une diversité de stratégies numériques. Ainsi, ces élèves essaient plusieurs stratégies, mais s'aperçoivent, en exerçant un *engagement réfléchi* et un *contrôle sémantique* sur le sens des opérations en contexte ou sur le sens des résultats obtenus, qu'ils arrivent à une impasse. Il est à noter qu'ils ne se découragent pas et continuent à persévérer. Le premier épisode illustre la mise en place d'un *contrôle sémantique* qui s'exprime par une résolution qui repose sur le retrait du surplus des passagers correspondant aux 8 wagons de plus. C'est une belle résolution qui n'aboutit malheureusement pas puisque les élèves ne savent comment gérer les deux inconnues qu'ils ont relevé: le nombre de wagons à 12 places et le nombre de wagons à 16 places.

À partir de ce moment deux types de stratégies arithmétiques se mettent en place : 1) des stratégies qui reposent sur les 460 passagers trouvés en soustrayant de 588, le surplus de passagers qui sont dans les 8 wagons à 16 places et 2) celles qui s'appuient sur les 588 passagers, le nombre de passagers initial. Dans la première série de stratégies, les élèves essaient différentes divisions (460 divisé par 2 puis 230 divisé par 12 et 230 divisé par 16; 460 divisé par 12 et 460 divisé par 16) et la recherche du PGCD et/ou du PPCM de 460). Ces stratégies n'aboutissent pas, car les élèves n'obtiennent pas de nombre entier de wagons (leur *anticipation*) et/ou parce que ces opérations n'ont pas de sens dans le contexte (*contrôle sémantique*) et/ou parce qu'on ne peut calculer le PGCD ou le PPCM d'un seul nombre.

Dans la deuxième série de stratégies, les élèves repartent des 588 passagers. Ils cherchent à diviser 588 par 12 et 588 par 16, stratégie abandonnée, car un des résultats n'est pas entier. Une élève essaie une mathématisation algébrique qui est partielle, mais elle ne sait comment continuer par manque de connaissances algébriques, ce qui est normal à ce niveau scolaire. On observe ainsi une structuration du contrôle qui prend place autour de la mise en place de différentes stratégies qui mènent chacune à un blocage, celui-ci provient d'un *engagement réfléchi* et de la mobilisation d'un *contrôle sémantique* autour du sens accordé aux opérations en jeu et au sens en contexte des quotients trouvés. Les élèves finiront toutefois par réussir à résoudre le problème par un *choix éclairé* de stratégie, des essais systématiques. C'est au cours de cette résolution que Catherine fait réaliser à l'équipe que les wagons ne doivent pas être forcément remplis ce qui permet à l'équipe de comprendre pourquoi les résultats trouvés n'étaient pas entiers.

Dans un autre ordre d'idée, on peut voir que l'expérience mathématique semble jouer un rôle important dans la résolution. Par exemple, Lilianne se questionne au début si elle doit utiliser la méthode de résolution qu'elle dit « parfaite » pour leur enseignante, c'est-à-dire une résolution en étapes. De plus, l'utilisation du PGCD et du PPCM semble pour les élèves la clé de la solution à plusieurs reprises, ce qui pourrait s'expliquer par le fait que ces notions sont généralement vues à ce niveau scolaire. Aussi, on peut voir qu'une certaine perception des mathématiques se dégage des élèves au 1er cycle alors que l'équipe mentionne à quelques reprises qu'il doit exister une méthode, une formule ou une technique qui ne leur a pas encore été enseignée et qui leur permettrait de résoudre ce problème. En effet, ce qu'ils ont appris jusqu'ici ne leur a pas permis d'aboutir, comme l'utilisation du PPCM et du PGCD, ainsi que la généralisation d'une suite. Les élèves ont l'intuition de leur pertinence, mais ils ne savent pas comment les utiliser dans cette résolution.

4.2 Analyse des résolution et des échanges autour du problème des cafés/croissants

Comme pour le problème des trains, lors de l'analyse du problème des cafés/croissants, différents épisodes ont pu être dégagés pour chacune des cinq équipes de participants, épisodes qui retracent diverses structurations du contrôle. Le nombre d'épisodes varie de deux à trois selon les équipes. Même si celles-ci mettent en place des composantes communes du contrôle comme la *sensibilité à la contradiction*, le déploiement de *métaconnaissances et le choix éclairé*, il est possible de remarquer que la structuration qui prend place n'est pas la même selon les équipes. Comme pour le problème des trains, l'analyse de ce problème fait ressortir le côté dynamique des différentes structurations du contrôle ainsi que la prise en compte d'éléments autres que les composantes du contrôle qui agissent sur la structuration.

4.2.1 Analyse de la résolution et des échanges des étudiants du BEPEP

L'analyse de la résolution du problème des cafés/croissants par trois étudiants du BEPEP permet de distinguer trois épisodes qui font apparaitre certaines structurations entre les composantes du contrôle. Ces épisodes sont : 1) une imbrication du contrôle sémantique, du syntaxique, du choix éclairé et de la non-perception des erreurs lors de la mathématisation du problème et de la résolution ; 2) L'utilisation d'une métaconnaissance qui limite la nécessité d'une vérification et donc la possibilité d'une sensibilité à la contradiction ; et 3) Le dépassement de la contradiction par un retour au problème et le recours au choix éclairé d'une écriture mathématique.

4.2.1.1 Épisode 1 : Une imbrication du contrôle sémantique, du syntaxique, du choix éclairé et de la non perception des erreurs lors de la mathématisation du problème et de la résolution

Au départ, les trois participants, Félix (F), Pierre (P) et Francine (Fr) prennent le temps de lire le problème et de travailler individuellement. En fait, lors de cette phase, Félix et Francine complètent, selon eux, le problème, alors que Pierre éprouve davantage de difficultés à trouver une piste de résolution.

Au départ, Francine opte directement pour une résolution algébrique en identifiant d'emblée deux inconnues représentant le prix d'un café (« *a* ») et le prix d'un croissant (« *b* ») (figure 4.19).

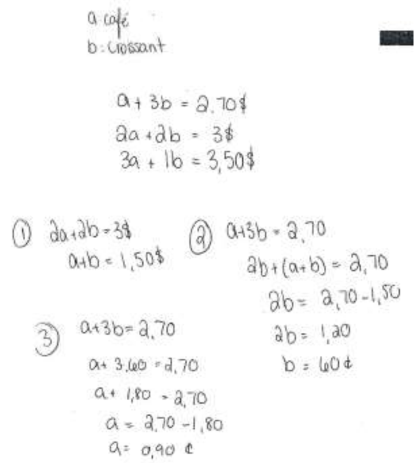


Figure 4.19 Mathématisation et résolution du problème des cafés/croissants par Francine

Le fait d'opter dès le départ pour des équations algébriques révèle un *contrôle sémantique* de sa part. De plus, on peut voir que ses équations restent attachées au contexte puisque Francine conserve les décimales jusqu'aux centièmes, ce qui correspond aux sous. Suite à cette mise en équation, elle résout le problème en utilisant un système d'équations formé de deux des trois équations posées, ce qui est la manifestation d'un *engagement réfléchi* par le choix d'une méthode normalement adéquate pour ce genre de problème. Dans sa résolution, elle fait preuve d'un *choix éclairé*, en utilisant une approche par substitution particulière. En effet, Francine commence par trouver le prix d'un café et d'un croissant ensemble ($a + b = 1{,}50\$$) en divisant par 2 la deuxième équation, pour ensuite remplacer cette valeur dans la première équation. Cela lui permet de trouver la valeur d'un des items, le prix d'un croissant ($b = 0{,}60\$$). Elle trouve ensuite le prix du café en réinjectant le prix du croissant dans cette même équation ($a = 0{,}90\$$). Le *choix éclairé* repose sur la décomposition de l'expression $a+3b$ en $2b+(a+b)$ pour retrouver l'expression $(a+b)$ dont elle connait la valeur. Les manipulations algébriques pour trouver les valeurs de a et b soulignent la mise en place d'un *contrôle syntaxique*. Ainsi, on peut dire que la résolution de Francine s'est construite sur un agencement de *contrôle sémantique*, *syntaxique* et du *choix éclairé* d'une écriture algébrique. Elle néglige toutefois la troisième équation dans sa résolution ce qui ne lui permet pas d'être *sensible à la contradiction*.

L'approche de Félix est différente, puisque celui-ci n'utilise pas d'algèbre en posant des équations comme le fait Francine. En effet, il représente plutôt les trois factures à l'aide d'une représentation iconique non conventionnelle (figure 4.20).

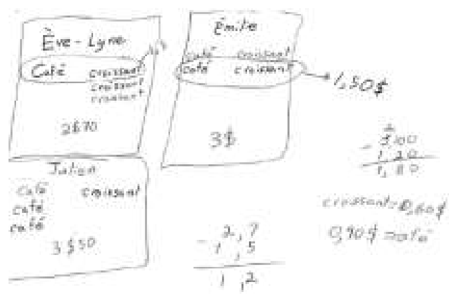


Figure 4.20 Traduction et résolution du problème des café/croissants par Félix

Les trois énoncés sont représentés dans des encadrés qui représentent les factures d'Ève-Lyne, d'Émilie et de Julien. Dans chacune de ces factures, on retrouve l'énumération des items, ainsi que le prix total. Cette traduction est fortement reliée au contexte, puisqu'il indique les décimales jusqu'aux centièmes et est inscrit même le symbole des dollars ($). Par la suite, Félix opte pour une résolution par « déduction » (*choix éclairé* de méthode de résolution). En effet, à l'aide de sa représentation iconique non conventionnelle de la facture d'Émilie, il détermine le prix d'un café et d'un croissant ensemble, puis retire cet ensemble de la facture d'Ève-Lyne, ce qui correspond à la démarche de Francine. Ce *choix éclairé* est en relation avec une expérience mathématique récente, alors que celui-ci compare son approche à la résolution d'un problème (*Dites-le avec des fleurs!*, section 3.3.2) abordé lors du cours MAT1011- L'*activité mathématique* comme il le mentionne à Pierre : « tu sais avec les fleurs, je ne sais pas si tu te rappelles dans le cours, c'est ça que j'ai fait » (lignes 43 à 45). Il semble donc que cette expérience commune au groupe a permis à Félix de faire un *choix éclairé* pour sa méthode de résolution. Il arrive alors à 60 sous pour un croissant et 90 sous pour un café, le même résultat que Francine. Il n'utilise pas non plus la troisième facture. Conséquemment, il n'a pas la possibilité d'être *sensible à la contradiction*.

Pierre commence par une retranscription quasi textuelle des données du problème avec les noms des clients, leur commande et le coût de la facture. Puis il met en place un *contrôle sémantique* en traduisant les informations par trois équations en restant attaché au contexte (conservation des décimales jusqu'aux centièmes). Il choisit *A* pour le prix d'un café et *C* pour le prix d'un croissant, mais ses inconnues ne sont pas identifiées (figure 4.21).

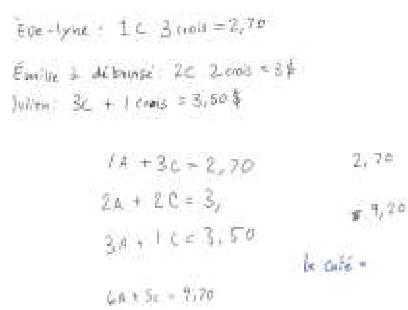


Figure 4.21 Mathématisation et tentative de résolution du problème des cafés/croissants par Pierre

Pour tenter de résoudre le problème, il déploie un *choix éclairé* en reconnaissant l'utilité de l'algèbre comme outil de résolution pour ce type de problème. Cependant, il ne semble pas se souvenir comment procéder pour résoudre un système d'équations (difficultés dans la mobilisation d'un *contrôle syntaxique*) comme on peut le voir dans l'extrait suivant : « Comment tu as trouvé ça toi (Francine)? En algèbre? Je ne me souviens plus comment faire ça » (lignes l0 à 12). Ainsi, il opte pour l'addition des trois équations, mais commet une erreur. En effet, comme on peut le voir à la figure 4 21, lorsque Pierre additionne les croissants, il arrive à un total de 5 au lieu de 6. L'étudiant est alors bloqué, il ne poursuit pas sa résolution. Il est aussi intéressant de noter que Pierre est le seul qui tente d'utiliser la troisième équation, son objectif étant de déduire la solution à partir d'une nouvelle équation comprenant les trois factures, comme il le mentionne à ses coéquipiers lors de la résolution : « Je pensais faire le total, aussi faire une déduction après, par rapport à ça là » (ligne 42). Il semblerait donc que les lacunes *syntaxiques* et son erreur de calcul ne lui permettent pas d'aller plus loin. De plus, on peut penser que c'est un *manque de perception de l'erreur* qui l'empêche de résoudre la situation. S'il avait fait l'addition correctement, Pierre aurait eu la possibilité de percevoir la contradiction portée par la situation. Effectivement, puisqu'il espérait faire une déduction, il aurait possiblement remarqué que les items de la somme des trois factures correspondent au triple des items de la facture d'Émilie, mais que le résultat de la somme ne correspond pas au triple de la facture d'Émilie. On peut ainsi dire que malgré un certain *contrôle sémantique* sur la mise en équation et un *choix éclairé* sur la résolution, les lacunes d'ordre *syntaxique* qui court-circuitent une *perception de l'erreur* empêchent Pierre de poursuivre la résolution et ainsi de déployer d'autres composantes du contrôle pour exploiter le potentiel de son approche de résolution.

Ainsi, cet épisode permet d'observer deux structurations intéressantes en termes d'imbrication des composantes du contrôle. Tout d'abord, suite au déploiement d'un *contrôle sémantique* lors de la traduction du problème, un *choix éclairé* d'approche de résolution peut être soutenu soit par un *contrôle syntaxique* (Francine) ou par une expérience mathématique récente (Félix). La seconde structure est observable par l'incapacité de Pierre à terminer sa résolution. En effet, c'est le manque de *perception de l'erreur* en relation avec un *contrôle syntaxique* déficient, qui empêche la mise en place des conditions permettant à Pierre d'être *sensible à la contradiction*. Il se retrouve alors bloqué malgré la mobilisation d'un *contrôle sémantique* et un *choix éclairé* de résolution potentiellement riche en ce qui a trait à ce problème.

4.2.1.2 Épisode 2 : L'utilisation d'une métaconnaissance qui limite la nécessité d'une vérification et donc la possibilité d'une sensibilité à la contradiction

L'épisode 1 permet de constater que Francine et Félix n'utilisent pas toutes les informations données dans le problème. En effet, ils utilisent uniquement les deux premières factures présentées. Ils se questionnent tout de même sur la pertinence d'utiliser la troisième comme on peut le voir dans l'extrait suivant :

17 Fr: as-tu utilisé la dernière formule toi?
18 F: de quoi?
19 Fr: moi admettons, j'ai pris la formule…
20 F: Ah non, je ne m'en suis pas servi, mais tu aurais pu. Tu aurais pu faire l'inverse là (pointe l'autre équation, sous-entend qu'il est possible de résoudre avec la troisième équation aussi).
21 Fr: Oui, non, je sais, mais je me demandais.

Ainsi, on peut observer l'expression d'un doute de la part de Francine qui l'amène à rechercher l'approbation de son coéquipier. En effet, celle-ci semble avoir un certain malaise par rapport au fait qu'il y ait une information qui n'a pas été utilisée dans la résolution. C'est pourquoi elle questionne Félix sur son utilisation. On pourrait associer ce moment de vigilance à un *engagement réfléchi* par le recul que celle-ci prend par rapport à sa résolution. Cependant, Félix déploie une *métaconnaissance* qui semble la convaincre que le recours à la troisième équation n'est pas nécessaire. En effet, selon lui, la situation peut se résoudre avec l'une ou l'autre des équations. Pour Félix, quand on a trois équations à deux inconnues, on peut utiliser seulement deux de ces équations pour résoudre. Comme on l'a vu dans l'analyse de ce problème (voir 3.2.2.3), cette affirmation est véridique si le système est compatible, ce qui n'est pas le cas dans le problème des cafés/croissants. La résolution par « déduction » et les justifications de Félix ne laissent pas de place à une autre possibilité d'interprétation. Ainsi, il est possible de croire que l'amalgame d'une *métaconnaissance* appuyée par les résolutions de Francine et de Félix fait en sorte que les étudiants ne ressentent pas le besoin de *vérifier* et limite donc la *contradiction*, c'est-à-dire au fait d'être sensible qu'il n'y ait pas de solution au problème. Ainsi, à ce stade de la résolution, l'utilisation de la troisième équation ne constitue plus une vérification de la solution, mais une vérification de la situation, à savoir si le système est compatible. Il est possible de penser qu'une interprétation liée à la vie de tous les jours appuie aussi cette interprétation, puisque généralement dans les restaurants les prix sont les mêmes pour chacun des items, à moins d'un spécial, comme le mentionne Francine en entrevue.

> 112 à 114 F: Avec les variables des deux premiers, on avait conclu à quelque chose qui fonctionnait pour les deux, donc on avait assumé, on n'avait pas pensé plus loin que le fait qu'il y a un prix fixe pour le croissant et un prix fixe pour le café. C'est ce que je conclus que c'est ce que l'on a fait.

Cet épisode permet d'observer que l'interprétation d'un problème en relation avec la vie courante couplée d'une *métaconnaissance* (il suffit de deux équations pour trouver la valeur de deux inconnues) rend le déploiement de certaines composantes du contrôle désuet, telles que la *vérification* et la *sensibilité à la contradiction*. En effet, les conditions semblent réunies pour que les étudiants ne ressentent pas la nécessité de vérifier la compatibilité du système à l'aide de la 3^{e} équation puisque ce problème illustre un contexte familier qui s'appuie généralement sur une solution unique à moins d'un spécial.

4.2.1.3 Épisode 3 : Le dépassement de la contradiction par un retour au problème et le recours au choix éclairé d'une écriture mathématique

L'équipe ne perçoit pas la *contradiction* entre les données du problème lors de la résolution puisqu'elle néglige le troisième énoncé. En entrevue, il est proposé aux étudiants de trouver le prix de trois croissants puis d'ajouter un café à la facture avec leur solution. Lors de ce questionnement, les étudiants arrivent à un total de 3,30 $, ce qui contredit la facture de Julien qui est de 3,50 $ pour les mêmes items. Vis-à-vis l'obtention de ces deux résultats, on observe une *sensibilité à la contradiction* de la part des étudiants, ils s'approchent ou se reculent physiquement de leur copie. Cette *sensibilité à la contradiction* les amène à tenter de *dépasser la contradiction* en justifiant dans le contexte de la vie quotidienne les raisons de cette différence de 20 sous. Par exemple, Pierre suggère l'utilisation de taxes, Félix mentionne la grosseur des cafés, alors que Francine mentionne la possibilité d'avoir des combos ou des spéciaux. Suite à ces différentes propositions, Félix décide de retourner à sa résolution et se penche sur la facture délaissée. Il encercle le prix de la combinaison café-croissant dans la facture de Julien, ce qui permet à l'équipe de déduire le prix d'un café qui serait de 1 $ (figure 4.22), comme on peut le voir dans la discussion suivante :

101 F: parce que c'est vrai, regarde si tu fais ça. 1 et 50 il reste
102 Fr: 2 cafés.
103 F: 2 dollars, ouais.
104 P: 1 piastre le café.
105 Fr: 2 piastres ça revient 1 piastre le café, alors ça serait 60 sous le café, 1 dollar, 1 dollar le café 60 sous le croissant pis le combo café croissant serait de 1 et 50.
107 P: Ben ça marcherais-tu pour ça ici (facture Émilie), 1 et 50 ça marcherait pas.

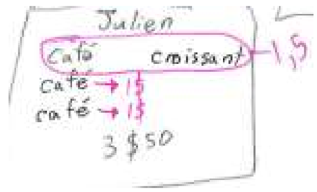


Figure 4.22 Regard de Félix sur la troisième facture

Cette exploration lors de l'entrevue se déroule de la même façon que la résolution, c'est-à-dire par la mobilisation d'une expérience antérieure qui permet un *choix éclairé* d'écriture (un café et un croissant valent 1,50 $) par rapport à l'outil de résolution. Contrairement aux autres justifications en relation avec la vie de tous les jours, cette résolution vérifie chacune des factures du problème. Toutefois, on perçoit un doute chez Pierre qui se questionne sur la véracité de cette résolution par rapport à la facture d'Ève-Lyne : « est-ce que ça marcherait pour ça, ici [pointe l'équation 1] ? 1,50, ça ne marcherait pas » (Ligne 107). Cette réflexion amène Francine à valider son approche en injectant les différentes valeurs trouvées (prix pour un café, prix pour un croissant et prix pour un combo) dans chacune des factures.

En somme, dans cet épisode on constate que le *dépassement de la contradiction* est possible par un amalgame entre des connaissances en relation avec la vie courante, ainsi que par un retour au problème qui permet la mobilisation d'un *choix éclairé* d'approche de résolution. En effet, l'utilisation de l'expression représentée par la somme du prix d'un café et du prix d'un croissant tirée d'un énoncé et appliquée aux deux autres énoncés permet de trouver différents résultats pour le prix d'un café (1 $ et 90 sous). Le *choix éclairé* de cette expression repose sur l'énoncé d'Émilie qu'ils ont divisé en deux, ce choix n'est jamais remis en question. En utilisant cet énoncé, la possibilité d'un combo semble tout à fait probable.

4.2.1.4 Synthèse en termes de structurations des composantes du contrôle lors de la résolution des étudiants au BEPEP

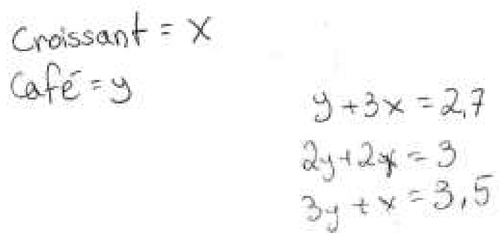
L'analyse de la résolution du problème des cafés/croissants par les étudiants du BEPEP permet principalement de mettre en lumière la structuration du contrôle dans une résolution par déduction. En effet, on peut voir que le *choix éclairé* d'une stratégie en relation avec une expérience mathématique récente a permis à Félix de résoudre cette situation sans passer par l'algèbre conventionnelle. Deux des participants mobilisent ainsi un *choix éclairé* qui se manifeste par le recours à l'expression « prix d'un café + prix d'un croissant = 1,50 \$ ». Ce *choix éclairé* prend place dans une imbrication autour de la mobilisation d'un *contrôle sémantique* et d'un *contrôle syntaxique*. Cependant, le recours à une *métaconnaissance* qui repose sur le fait qu'il est possible d'utiliser deux équations pour la résolution ne fonctionne pas dans ce problème. Cette *métaconnaissance* permet de comprendre l'absence d'une *vérification* à l'aide de la 3^{e} équation et empêche la *sensibilité à la contradiction*. La *sensibilité à la contradiction* sera enclenchée lors de l'entrevue, cette prise de conscience amène une réaction physique de surprise et déclenche un retour au problème. La prise en compte du troisième énoncé à travers le *choix éclairé* de la même expression leur permet de *dépasser la contradiction* par l'explication du recours à un combo. Il est possible d'observer que le troisième étudiant, Pierre ne participe pas beaucoup aux échanges, mais semble suivre l'évolution de la résolution. Toutefois, de façon individuelle, il manifeste un *contrôle sémantique* par l'écriture des trois équations, il mobilise aussi un *choix éclairé* en additionnant les trois équations. Cependant, il commet une *erreur de calcul qu'il ne perçoit pas* et qui limite possiblement une *sensibilité à la contradiction*. On assiste ici à la mise en place du *choix éclairé* d'une écriture correspondant à la somme des trois équations qui est prometteuse, mais qui n'aboutit malheureusement pas à cause d'une erreur de calcul.

4.2.2 Analyse de la résolution et des échanges des étudiants du BES

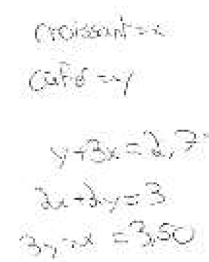
L'analyse de la résolution du problème des cafés/croissants par deux futurs enseignants au secondaire a permis de distinguer deux épisodes qui font apparaitre certaines structurations entre les composantes du contrôle. Ces épisodes sont : 1) Des métaconnaissances qui mènent à un choix éclairé de stratégie et à une anticipation de la solution ; et 2) Des métaconnaissances sur les matrices (sans contexte) qui mènent à une anticipation qui déstabilise et permet une vérification qui aboutit à une validation et donc au dépassement de la contradiction.

4.2.2.1 Épisode 1 : Des métaconnaissances qui mènent à un choix éclairé de stratégie et à une anticipation de la solution

Lors de la résolution, les participants, André (A) et Victor (V) décident de travailler en équipe dès le départ. En effet, ils font une lecture commune du problème et se proposent par la suite des pistes de résolution. La figure 4.23 présente les premières traces réalisées par chacun des participants à la suite de cette lecture.



Traces produites par André



Traces produites par Victor

Figure 4.23 : Premières traces des participants

On peut observer que les participants traduisent les données adéquatement en trois équations distinctes en identifiant le prix d'un croissant par *x* et le prix d'un café par *y* (sans que la grandeur « prix » soit nommée). Se met alors en place un contrôle *sémantique* qui permet l'écriture des trois équations. Cependant, on peut voir que l'identification des inconnues se fait, tout comme lors de la résolution du problème des trains, de manière abrégée. Il est donc impossible de savoir si celles-ci représentent des objets « croissants et cafés » plutôt qu'un nombre « prix d'un croissant et prix d'un café ». De plus, la traduction du problème par les étudiants reflète d'un détachement du contexte. En effet, ce problème est d'ordre monétaire, donc la partie décimale s'écrit généralement jusqu'aux centièmes. Or André n'écrit jamais le zéro des centièmes et Victor ne le fait qu'une seule fois, pour indiquer les 3,50 $. Ainsi, on assiste au passage d'un *contrôle sémantique* (qui prend appui sur le contexte) vers la prévision de la mobilisation d'un *contrôle syntaxique* qui se détache du contexte et qui prend place dès l'écriture de l'équation, puisqu'ils semblent conscients que cet aspect n'est pas nécessaire à la résolution.

Après avoir traduit le problème en un système de trois équations du premier degré, les deux futurs enseignants décident de résoudre le problème à l'aide d'une matrice. C'est un *choix éclairé* de stratégie puisqu'une matrice permet de résoudre le problème en ayant une vue d'ensemble des données du problème. Comme on peut le constater dans l'extrait d'entrevue suivant, cette stratégie a été utilisée essentiellement par le fait que les participants suivaient un cours d'algèbre lors de la session où l'expérimentation a eu lieu.

33 A : (…) la matrice, c'est juste qu'on vient de suivre le cours d'algèbre, alors.
34 V : Ouais c'est ça.
35 A : On va voir si ça marche.

La discussion suivante montre que ce *choix éclairé* de stratégie est apparu suite à un *engagement réfléchi* qui s'exprime par un regard sur la situation. C'est-à-dire qu'ils sont en présence de trois équations et deux inconnues.

> 4,5 A : ce que je trouve étrange c'est qu'on ait 3 équations pour 2 variables, alors si on fait la matrice.
> 6 V : (rire) est-ce qu'on fait une matrice?
> 7 A : Oui on fait ça.
> 8 V : On va chercher voir si elle est compatible.

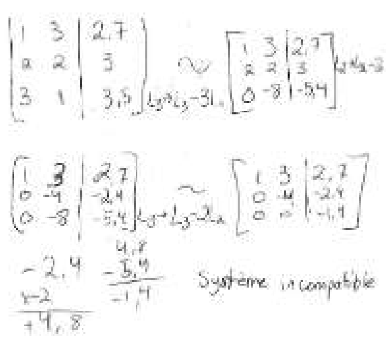
André mobilise ainsi une *métaconnaissance* : pour résoudre un système à deux inconnues, il suffit d'avoir deux équations. Cet extrait permet aussi d'observer une certaine *anticipation* de la part de Victor lorsqu'il mentionne qu'ils doivent *vérifier* la compatibilité de la matrice. Il est possible de penser que la *métaconnaissance* mobilisée par André amène Victor à douter de la compatibilité de la matrice, donc à *anticiper* cette possibilité. De plus, cette *métaconnaissance* engendre une certaine *anticipation* chez André par rapport aux différents dénouements possibles, comme il le mentionne lors de l'entrevue :

> 26 à 29 A : Je pense avoir vu qu'il y avait 2 variables et 3 équations, il y a comme 2 scénarios possibles qui se sont créés dans ma tête, soit qu'il y a une équation qui ne sert à rien, dont on ne se servira pas ou justement ça ne fonctionnera pas, on ne pourra pas trouver toutes ces équations vraies.

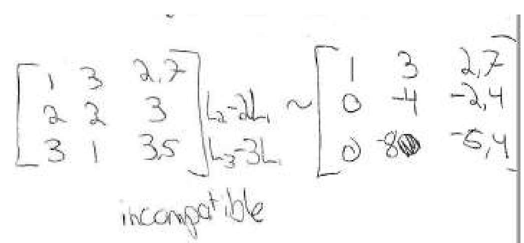
En somme, on peut constater que l'écriture de trois équations avec deux inconnues met en branle des *métaconnaissances* en relation avec la résolution de systèmes d'équations. Ce sont celles-ci qui permettent d'*anticiper* la possible incompatibilité de la matrice. Ce doute lié à l'*anticipation* mène vers différents dénouements dans la poursuite de la résolution et à l'évaluation de l'utilité d'une troisième équation. De plus, ces *métaconnaissances* et l'expérience mathématique récente et commune vécue dans un cours ont permis à l'équipe de faire un *choix éclairé* par rapport à l'outil de résolution, soit le recours à une matrice.

4.2.2.2 Épisode 2 : Des métaconnaissances sur les matrices (sans contexte) qui mènent à une anticipation qui déstabilise et permet une vérification qui aboutit à une validation et donc au dépassement de la contradiction

Comme mentionné précédemment, les participants ont utilisé une matrice afin de résoudre le problème, la figure 4.24 présente les traces individuelles proposées par chacun des participants.



Résolution matricielle par André



Résolution matricielle par Victor

Figure 4.24 traces de la résolution du problème des cafés/croissants par matrice des étudiant du BES

Les deux futurs enseignants déploient un *contrôle syntaxique* pour la résolution de la matrice, ils effectuent les opérations sans anicroche, ce qui leur permet d'établir que la matrice est incompatible. Cependant, bien que cette possibilité fût préalablement *anticipée* par Victor, ce résultat a semé un doute sur la résolution effectuée, comme il le mentionne lors de l'entrevue :

14 à 18 V : Puis, on a vu que c'était incompatible et qu'il n'y avait aucune solution. Puis là, on était comme : « Ok? ». J'ai l'impression que l'on n'était pas certain de ce que ça voulait dire, en tout cas moi. Je n'étais pas certain de ce que ça voulait dire, mais je savais que ça voulait dire qu'il n'y a aucune solution, mais en allant le faire concrètement (pointe la résolution par système d'équations) c'est clair et ça se voit.

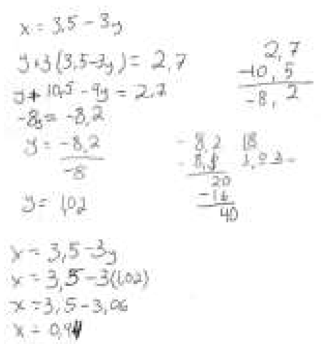
C'est donc dire que le doute de Victor évoque une *sensibilité à la contradiction* entre la mobilisation d'une *métaconnaissance* sur la compatibilité ou l'incompatibilité d'une matrice sans contexte et l'interprétation *sémantique* de celle-ci dans une situation en contexte, aspect qui va au-delà de ce qui est appris dans le cours d'algèbre linéaire. De plus, l'entrevue permet de dégager une perception sur l'enseignement des mathématiques, les problèmes en contexte devraient avoir une solution. Cette perception semble agrémenter cette contradiction.

20 à 24 V : Quand j'ai un problème mathématique qui est posé je m'attends à ce qu'il y ait toujours une réponse que l'on doit donner et selon moi, quand on est face à un problème mathématique et que l'on se fait dire que c'est mathématique, il faut arriver à une réponse à la fin. Dans ce cas-ci la réponse est que c'est impossible, alors il y a quelque chose qui cloche.

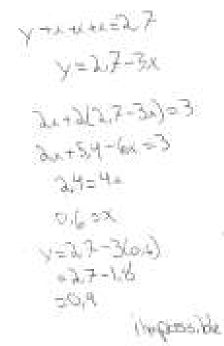
Dans le cas d'André, ce doute semble provenir de ses propres capacités à résoudre une matrice plutôt que sur la signification de l'obtention d'une matrice incompatible, comme il le mentionne lors de l'entrevue :

41 à 47A : Si, j'ai voulu faire une confirmation, c'est parce que je doutais un peu de mes aptitudes en matrice (Victor acquiesce). Faire des erreurs de calcul dans une matrice, ça arrive rapidement et on ne le sait pas. Venir vérifier et puis trouver ça confirme. Alors, je pense que je ne me considère pas expérimenté à manipuler des matrices et Dieu sait que j'en ai fait des erreurs dans les derniers trois mois. Quand j'ai vu la matrice incompatible, j'ai compris que ça ne se peut pas, qu'est-ce qui se passe, mais est-ce qu'elle l'était vraiment?

Ainsi, on peut dire qu'André met en place une *métaconnaissance* en faisant preuve de vigilance quant à ses propres difficultés en termes de *contrôle syntaxique* dans la résolution de matrices. De plus, c'est cette *métaconnaissance* en relation avec un *engagement réfléchi* qui mène au besoin d'aller *vérifier* la solution en utilisant une résolution algébrique d'un système d'équations plus conventionnel (figure 4.25).



Système d'équations proposé par André



Système d'équations de Victor

Figure 4.25 Traces de la vérification du problème des cafés/croissants par un système d'équations et explicitation de la solution

Comme on peut le constater, les deux participants résolvent deux systèmes d'équations différents. Victor utilise les factures d'Ève-Lyne et d'Émilie, tandis qu'André utilise celles d'Ève-Lyne et de Julien. Cette approche est planifiée par André qui *anticipe* qu'en utilisant des systêmes de deux équations différentes les solutions seront différentes si la situation n'a pas de solution. André affirme lors de l'entrevue qu'il suggère cette approche en relation avec l'incompatibilité de la matrice. En d'autres mots, il fait preuve d'un *choix éclairé* quant à la manière de *vérifier* le problème. Ce *choix éclairé* de *vérification* s'est avéré possible par la mise en place d'une *anticipation* portant sur l'incompatibilité de la matrice, d'une *métaconnaissance* portant sur la résolution de système d'équations ainsi que sur une *métaconnaissance* en relation avec le *contrôle syntaxique* d'un participant. C'est donc cette *vérification* qui leur permet de *valider* l'incompatible du système.

En somme, malgré une *anticipation* autour de l'incompatibilité de la matrice, la *vérification* par une deuxième méthode *choisie* de manière *éclairée* grâce au *contrôle sémantique* et à un *engagement réfléchi* d'André est nécessaire afin de *valider* leur *anticipation*. Cette *vérification* semble émerger pour des raisons diverses pour les deux participants. Pour Victor, elle provient d'une *sensibilité à la contradiction* entre le *contrôle sémantique* portant sur l'interprétation de l'incompatibilité en contexte et une *métaconnaissance* sur la compatibilité ou l'incompatibilité d'une matrice hors contexte. Tandis que pour André, elle survient d'une *métaconnaissance* par rapport à ses propres lacunes de *contrôle syntaxique* en relation avec la résolution de matrices.

4.2.2.3 Synthèse en termes de structurations des composantes du contrôle lors de la résolution des étudiants du BES

Pour résumer, l'analyse de la résolution du problème des cafés/croissants par deux futurs enseignants au secondaire permet de remarquer que leurs expériences récentes combinées à une *métaconnaissance* sur la résolution d'un système d'équations (quand on a deux inconnues, il suffit d'avoir deux équations) leur ont permis de faire un *choix éclairé* de stratégie de résolution. Cependant, malgré une *anticipation* du résultat obtenu (le fait que la matrice peut être incompatible), un doute s'installe suite au constat que celle-ci est réellement incompatible. Ce résultat déstabilise parce qu'il rentre en contradiction avec la croyance qu'un problème en mathématiques a toujours une solution. De plus, généralement les étudiants ne sont pas amenés dans le cours d'algèbre linéaire à interpréter en contexte l'incompatibilité d'une matrice ce qui contribue au malaise ressenti. Il est possible de constater que les futurs enseignants du secondaire mobilisent différentes *métaconnaissances* sur les matrices : une matrice peut être compatible ou incompatible et une vigilance à développer quant aux erreurs *syntaxiques* commises lors de la résolution de matrices. Ainsi, la mise en place d'un *contrôle sémantique* qui permet l'écriture de trois équations est source de diverses *métaconnaissances* qui sont au cœur de structurations du contrôle. Une première structuration repose sur un *choix éclairé* de stratégie, l'écriture d'une matrice, sur la mise en place d'un *contrôle syntaxique* sur les matrices et sur une *anticipation* qui déstabilise. L'autre structuration va mener à une *vérification* réfléchie qui permettra de confirmer ou infirmer l'*anticipation* (les deux systèmes ne devraient pas donner la même réponse), ce qui aboutira à une *validation* et donc au *dépassement de la contradiction*.

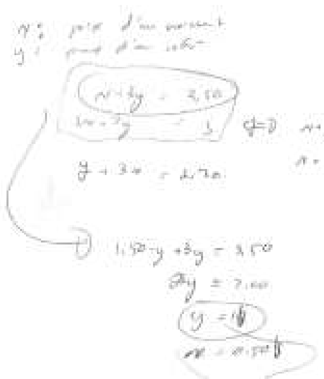
4.2.3 Analyse de la résolution et des échanges des enseignants au secondaire

L'analyse de la résolution du problème des cafés/croissants par deux enseignants du secondaire se compose de deux épisodes qui font apparaitre certaines structurations des composantes du contrôle : 1) La mobilisation des contrôles sémantique et syntaxique mènent à un engagement réfléchi et à des vérifications pour aboutir à une sensibilité à la contradiction ; et 2) Un dépassement de la contradiction qui s'appuie sur des engagements réfléchis qui ne sont pas de la même nature.

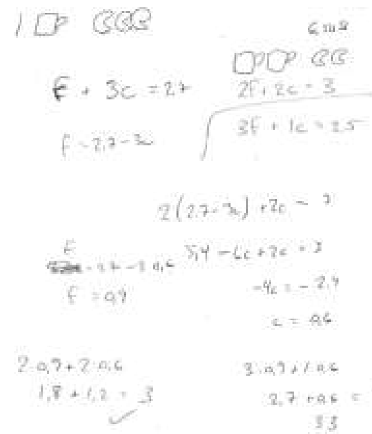
4.2.3.1 La mobilisation des contrôles sémantique et syntaxiqus mènent à un engagement réfléchi et à des vérifications pour aboutir à une sensibilité à la contradiction

La figure 4.26 présente les premières traces des deux participants, Laurent (L) et Maude (M). Initialement, les deux enseignants s'approprient le problème de manière individuelle, jusqu'à ce qu'ils soient confrontés à une contradiction. C'est lorsque

Laurent réalise que quelque chose cloche avec le problème que le travail d'équipe s'enclenche.



Traduction et résolution du problème par Laurent



Traduction et résolution du problème par Maude

Figure 4.26 Premières traces de résolution du problème des cafés/croissants des enseignants au secondaire

On peut observer que les participants traduisent les données du problème en trois équations distinctes ce qui traduit la mobilisation d'un *contrôle sémantique*. Toutefois, leur approche diffère. En effet, Laurent déploie un *engagement réfléchi* par une identification des inconnues en précisant qu'il s'agit du *prix* d'un café et du *prix* d'un croissant et par une mise en équation tandis que Maude passe par une représentation visuelle avant la mise en équation. De plus, on peut constater un attachement au contexte différent pour les deux participants. Laurent utilise une notation plus conventionnelle, les lettres *x* et *y*, mais conserve une notation décimale en relation avec l'aspect monétaire du problème (écriture jusqu'aux centièmes). Maude, quant à elle, opte plutôt pour l'utilisation de lettres qui représentent plus concrètement les objets (« *c* » pour croissant et « *f* » pour café), mais se détache de l'aspect monétaire des nombres (écriture jusqu'aux dixièmes).

Pour résoudre la situation, Laurent déploie un *contrôle syntaxique* en modifiant l'équation représentant la facture d'Émilie afin d'isoler le prix d'un croissant pour ensuite le substituer dans la facture de Julien. Il obtient alors un coût de 1 $ pour un café et 50 sous pour un croissant. C'est à travers un regard sur la valeur de ces items confronté à l'écriture des équations qu'il réalisera la *contradiction* présente dans la situation. En effet, il n'effectue aucun calcul pour arriver à affirmer que la situation ne fonctionne pas, car il est selon lui impossible d'atteindre 2,70 $ avec uniquement des dollars et des 50 sous. On assiste ainsi à un temps d'arrêt qui provient d'un *engagement réfléchi* et qui aboutit à une *sensibilité à la contradiction*. Il effectue tout de même une *vérification*, en réinjectant les valeurs dans la troisième équation. Un *engagement réfléchi* qui s'exprime par un temps d'arrêt devant les équations et les valeurs obtenues fait pressentir une *sensibilité à la contradiction* qui est confirmée par la mise en place d'une *vérification*. Cet *engagement réfléchi* s'appuie sur la mobilisation de *contrôles sémantique* et *syntaxique*.

Maude déploie également un *contrôle syntaxique* en modifiant l'équation représentant la facture d'Ève-Lyne afin d'isoler le prix d'un café pour ensuite le substituer dans la facture d'Émilie. Cela lui permet d'obtenir un coût de 90 sous pour un café et 60 sous pour un croissant. Par la suite, elle procède à une double *vérification* en réinjectant les valeurs trouvées dans les équations représentant d'abord la facture d'Émilie, puis dans la facture de Julien. Ainsi c'est cette seconde *vérification* qui lui permet d'observer la *contradiction* dans la situation, puisqu'elle obtient 3,3 plutôt que 3,5 comme le suggère le problème.

Ainsi, la *sensibilité à la contradiction* ressentie par les deux participants se manifeste un peu différemment pour chacun d'eux. Pour Laurent, elle s'appuie sur un *engagement réfléchi* qui s'exprime par un regard sur les équations et les valeurs des items trouvées et sur une *vérification* qui vient confirmer ses doutes alors que pour

Maude, la *sensibilité à la contradiction* provient des *vérifications* en injectant les valeurs obtenues dans les équations sans preuve d'un *engagement réfléchi* préalable.

4.2.3.2 Un dépassement de la contradiction qui s'appuie sur des engagements réfléchis qui ne sont pas de même nature

C'est la *sensibilité à la contradiction* ressentie par les deux enseignants qui enclenche le processus de travail d'équipe :

> 3 L: Il y a quelque chose qui ne marche pas
> 4 M: non, peut-être qu'il y a des taxes ou…
> (…)[vérification en équipe des opérations effectuées]
> 6, 7 L: Il y a une affaire cependant. Même s'il y avait de la taxe la troisième ne devrait pas être en contradiction avec les 2 premières.
> 8 M: non.
> 9 L: parce que tout est proportionnel.
> 10 à 13 M: parce que c'est proportionnel. (Pause). Au café du coin, un café, ça veut dire qu'il y a des rabais. Il y a quelque chose. Quand tu en achètes 3 ou quelque chose, il y a peut-être un rabais. Quand tu en achètes 3 et plus. Genre. Un café et 3 croissants, Émilie c'est 2 cafés et 2 croissants et trois cafés et un croissant ont couté 3 et 50 à Julien.
> 14L: ou c'est peut-être juste pour nous faire réaliser.
> 15 M: Alors elle ne marche pas.
> 16 à 18 L: C'est peut-être un problème pour nous faire réaliser que peut-être que la bonne réponse à ce problème-là c'est : on ne s'est pas fait avoir, ton problème est impossible monsieur le chercheur aussi.

Initialement, Maude tente de *dépasser la contradiction* en ayant recours à ce qui se passe dans la vie courante : présence de taxes. Ces explications sont rapidement réfutées par Laurent qui souligne la nature proportionnelle de l'ajout de taxes. Cette remarque est intéressante et elle semble refléter un *engagement réfléchi* sur l'impossibilité du problème en relation avec le contexte dans lequel il est donné (ligne 16 à 18). Toutefois, ce constat, « le problème est impossible monsieur le chercheur » est laissé en suspens pour des raisons d'insatisfaction professionnelle en relation avec sa perception des mathématiques comme on peut le constater dans l'extrait d'entrevue suivant :

> 85 à 87 L : Nous on est des profs de maths, on est habitués de chercher une solution alors lorsque l'on a réduit les deux dernières à une seule, ça nous met tout de suite dans un monde rassurant où l'on sait qu'il va n'y avoir qu'une réponse.

Cette expérience en mathématiques en relation avec des pratiques professionnelles encourage l'équipe à poursuivre la recherche et à analyser la structure du texte du problème :

> 70 à 72 M : (relecture du problème)… attends peut-être qu'on le lit mal, tandis qu'Émilie a déboursé 3 dollars pour 2 cafés et 2 croissants et 3 cafés et 1 croissant ont coûté,…non ça n'a pas de sens.
>
> 73 L : la phrase n'est pas claire là
>
> 74 à 79 M : et 3 cafés et 1 croissant ont coûté 3 et 50, mais de toute façon ça serait trop. Parce que ça c'est clair qu'au café du coin 1 café et 3 croissants ont coûté 2 et 70 à Ève-Lyne, tandis qu'Émilie a déboursé 3 piastres. Ah, je sais quoi, peut-être que les deux ensembles ça coûté 6 et 50 en tout parce qu'ils ont dit qu'il y a 1 café et 3 croissants qui ont coûté 2,70 $ à Ève-Lyne, alors peut-être qu'Émilie a déboursé 3 dollars et lui 3 et 50, mais comme c'est dans la même phrase alors.

Les deux enseignants font ressortir un nouveau système d'équations où les factures d'Émilie et de Julien sont additionnées pour former une seule facture afin de revenir à un problème présentant seulement deux équations et deux inconnues (figure 4.27), ils sont conscients qu'ils extrapolent le problème.

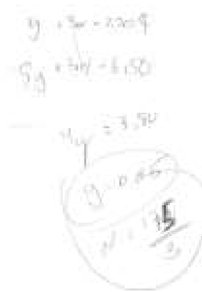


Figure 4.27 Création d'un nouveau système d'équations par Laurent

La résolution de ce système amène Laurent à accepter la contradiction, tandis que Maude n'est pas entièrement convaincue par cette approche. En combinant l'analyse de la solution de son système d'équations et la facture de Julien, elle conclut qu'une injustice semble dirigée vers celui-ci. C'est par l'utilisation de l'humour que Maude accepte *la contradiction*.

4.2.3.3 Synthèse en termes de structurations des composantes du contrôle lors de la résolution de enseignants au secondaire

En somme, on peut voir que la résolution de ce problème est plutôt simple pour les enseignants, en raison des manifestations de *contrôle sémantique* et *syntaxique* qui permettent d'écrire les équations et de mener la résolution. De plus, les enseignants sont portés à considérer l'ensemble des données du problème, ce qui enclenche une *vérification*, qui consiste à injecter les valeurs trouvées pour les deux items dans l'équation inutilisée. Il est toutefois intéressant de constater que la *vérification* dans le cas de Laurent s'appuie sur un *engagement réfléchi*, il jette un regard sur les valeurs obtenues et les équations, on sent qu'il a un doute quant à la vraisemblance des prix trouvés ce qui est confirmé par sa *vérification*. La *vérification* par injection apparaît dans le cas de Laurent comme une formalité qui n'est pas si nécessaire alors que pour Maude c'est ce type de *vérification* qui lui permet d'être *sensible à la contradiction*. En ce qui a trait au *dépassement de la contradiction*, on sent que les deux participants ne sont pas sur la même longueur d'onde. Maude s'appuie sur des constats de la vie réelle alors que Laurent reste dans le domaine des mathématiques. Ils vont ainsi *dépasser la contradiction* en utilisant des arguments de différente nature qui reposent sur un *engagement réfléchi* sur l'ensemble de la situation.

4.2.4 Analyse de la résolution et des échanges des élèves au 2e cycle du secondaire

Initialement les deux élèves au 2e cycle du secondaire, Shawn (S) et Alexandre (A), s'approprient le problème de manière individuelle. Lors de cette phase, les élèves passent au crayon bleu à la demande du chercheur puisqu'une brève discussion sur la méthode de résolution à préconiser s'enclenche. Cependant, les deux élèves reviennent à une résolution individuelle jusqu'à ce qu'ils ressentent un certain malaise vis-à-vis la situation sans changer de crayon. C'est à ce moment que le travail d'équipe semble vouloir s'enclencher réellement. L'analyse des copies des deux élèves amène des structurations différentes du contrôle, une troisième structuration prend place lors de la discussion en équipe. Ainsi, trois épisodes ont été relevés : 1) Une métaconnaissance qui aboutit à un choix éclairé de stratégie, celle-ci sert de vérification et amène à la sensibilité et au dépassement de la contradiction ; 2) Une anticipation qualitative, un engagement réfléchi et un contrôle sémantique sur le sens de l'écriture qui mènent à une vérification permettant la perception d'une erreur ; et 3) Un *dépassement de la contraction* et une *validation* qui repose sur un *engagement réfléchi* de nature différente sur la situation, mais qui aboutit à un consensus

4.2.4.1 Une métaconnaissance qui aboutit à un choix éclairé de stratégie, celle-ci sert de vérification et amène à la sensibilité et au dépassement de la contradiction

Cette première structuration de composantes du contrôle provient de la résolution individuelle (figure 4.28) de Shawn.

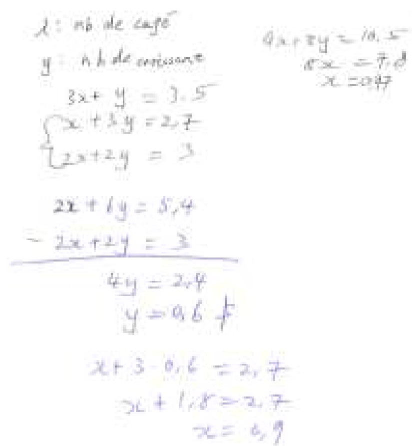


Figure 4.28 Traduction du problème des cafés/croissants et résolution par Shawn

Shawn traduit les données adéquatement en trois équations distinctes. Il opte pour une mise en équation « traditionnelle » avec un choix d'inconnues conventionnel, les lettres *x* et *y*, mais indique que celles-ci représentent le nombre de cafés et le nombre de croissants alors qu'il s'agit dans ce problème du prix d'un café et du prix d'un croissant. De plus, on peut remarquer un détachement du contexte lors de l'écriture des équations qui laisse présager la prévision par Shawn de la mobilisation d'un *contrôle syntaxique,* les valeurs décimales des centièmes qui sont inutiles lors des calculs sont omises.

Pour résoudre le problème, Shawn déploie un *contrôle syntaxique* en effectuant une résolution par réduction du système d'équations obtenu par les factures d'Ève-Lyne et d'Émilie, ce qui lui permet d'obtenir 0,9 pour un café et 0,6 pour un croissant. Par la suite, il réitère sa résolution à l'aide des factures de Julien et d'Ève-Lyne, ce qui lui permet de trouver une valeur de 0,97 pour un café. À ce moment, Shawn prétend avoir terminé sur un ton très assuré, puis il manifeste une *sensibilité à la contradiction* par une exclamation de surprise (« woah ») et un *engagement réfléchi* qui est détectable par le recul immédiat qu'il prend par rapport à la résolution. En effet, on peut observer cette prise de distance principalement par son non verbal, alors que celui-ci s'éloigne littéralement de sa copie et prend plusieurs secondes avant de réagir en soulignant que cette situation est impossible. La résolution du système de trois équations à deux inconnues en utilisant d'abord deux de ces équations puis deux autres équations lui permet d'obtenir deux prix différents pour le café. Cette approche est intéressante, elle repose sur un *choix éclairé* de stratégie. Shawn ne procède pas par une injection des valeurs obtenues par la résolution de deux équations dans la troisième équation. Le fait de résoudre deux systèmes d'équations peut lui permettre de *vérifier* qu'il n'a pas fait d'erreur (on ne sait pas si c'est l'intention poursuivie par Shawn), mais également d'avoir un regard sur la compatibilité des trois équations. C'est ce *choix éclairé* de stratégie qui permet à Shawn d'être *sensible à la contradiction*.

Lors de la lecture du problème, Shawn se mentionne à lui-même que la 3^{e} équation n'est pas nécessaire pour trouver une solution, mobilisant ainsi une *métaconnaissance*. Toutefois, il l'utilise tout de même comme outil de *vérification* comme il le mentionne lors de l'entrevue : « On a juste besoin de deux équations, mais il est important de tester avec la troisième, elle sert à vérifier que le problème est intégral » (ligne 50). Il semble vouloir dire que la 3^{e} équation permet de *vérifier* la compatibilité du système. Il ne semble pas vouloir *vérifier* par habitude, mais parce qu'il est porté par une *métaconnaissance* : le problème pourrait ne pas présenter une solution puisqu'il y a trois équations et deux inconnues.

4.2.4.2 Une anticipation qualitative, un engagement réfléchi et un contrôle sémantique sur le sens de l'écriture qui mènent à une vérification permettant la perception d'une erreur

Alexandre, quant à lui, opte pour une traduction très rattachée au contexte, ce qui exprime la mobilisation d'un *contrôle sémantique*. En effet, il utilise des abréviations qui se rattachent à la situation (caf et croiss) et conserve une écriture reliée à l'argent (une écriture jusqu'aux centièmes). On peut ainsi observer un *engagement réfléchi* de la part d'Alexandre qui cherche à conserver le sens des inconnues dans ses équations (figure 4.29).

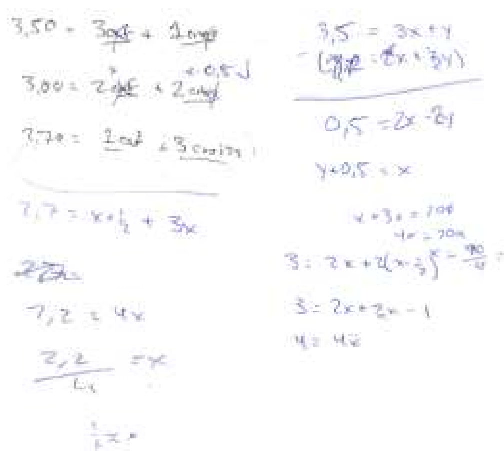


Figure 4.29 Traduction du problème des cafés/croissants et résolution par Alexandre

Avant d'entreprendre sa résolution, Alexandre déploie un *engagement réfléchi* soutenu d'un *contrôle sémantique* par rapport à la situation. En effet, celui-ci effectue une analyse qualitative du problème qui lui permet *d'anticiper* un ordre de grandeur des deux items. Au regard des données, Alexandre assume qu'un café coûtera plus cher qu'un croissant, comme on peut le voir dans l'extrait suivant : « Regarde juste pour se dire, plus tu montes de prix plus tu as de cafés, donc les cafés coûtent plus cher que les croissants. » (ligne 3, 4). Cette *anticipation* sera réinvestie lors de la résolution du problème. Elle servira de *vérification,* comme il le souligne en entrevue : « Je sais que pour moi, je regarde, ça descend comme ça, le café va être plus cher que le croissant et ça va être un des outils de validation. » (ligne 54, 55).

Sous la pression exercée par son coéquipier qui lui répète à plusieurs reprises d'utiliser une approche plus conventionnelle, Alexandre opte finalement pour une méthode algébrique de résolution. Effectivement, il remplace les mots par des inconnues plus conventionnelles (x pour le prix d'un café et y pour le prix d'un croissant), pour entreprendre la résolution du problème. Pour ce faire, il soustrait l'équation représentant la facture d'Émilie de l'équation représentant la facture de Julien (figure 4.30), ce qui lui permet d'arriver à l'équation 0,5 = *x* - *y*.

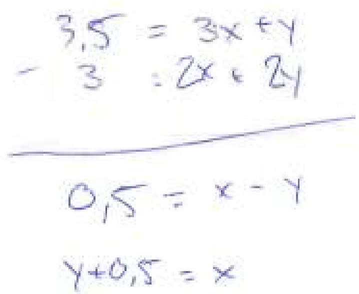


Figure 4.30 Résolution individuelle du problème des café/croissants d'Alexandre

On peut observer chez Alexandre le souci de « faire parler » les écritures qu'il obtient, de leur donner du sens en contexte. Il mobilise ainsi un *contrôle sémantique* et déploie un *engagement réfléchi* puisqu'on observe un temps d'arrêt face à l'équation obtenue. En effet, il donne un sens en contexte à l'équation obtenue, en réfléchissant à voix haute: « ça coute 50 sous de moins le croissant que le café » (ligne 7). Suite à cette remarque, il injecte cette valeur obtenue dans l'équation représentant la facture d'Ève-Lyne. Toutefois, avant de procéder, Alexandre modifie l'équation, mais fait une erreur *syntaxique,* il remplace y dans l'équation par *x* + 1/2, plutôt que par *x* - 1/2. Il obtient ainsi une valeur de *x* d'environ une demie. C'est cette solution qui amène Alexandre à *percevoir qu'il a fait une erreur* puisqu'il se trouve devant son *anticipation* qui n'est pas respectée (un café coute 50 sous de plus qu'un croissant). Cette *contradiction* l'amène ainsi à revenir sur l'expression de ses inconnues dans la mise en équation.

Ainsi, Alexandre est en mesure de corriger son erreur et de déployer un *contrôle syntaxique* qui est mis en place par une *anticipation* portant sur une analyse qualitative, sur un *engagement réfléchi* et un *contrôle sémantique* quant à l'ordre de grandeur des deux items (« Le prix d'un café c'est, le prix d'un croissant c'est le prix d'un café plus, non moins 50 sous (écrit x - 0,5 au-dessus de l'équation 2) [en se parlant à lui-même] » ligne 10, 11). Il arrive alors à une première solution qui semble le satisfaire (1 dollar pour un café et 50 sous pour un croissant). C'est donc dire qu'il parvient à *percevoir son erreur grâce à son anticipation*. Alexandre démontre un recul sur ce qu'il fait, un *engagement réfléchi*. À ce stade, Alexandre ne s'est pas aperçu de la contradiction qui émane de ce problème.

4.2.4.3 Un dépassement de la contraction et une validation qui repose sur un engagement réfléchi de nature différente sur la situation, mais qui aboutit à un consensus

Le travail d'équipe s'enclenche alors qu'Alexandre termine sa *vérification*. En effet, après avoir trouvé une valeur pour un café et un croissant, celui-ci insère les valeurs dans les trois équations afin de *valider* si la situation est incompatible soit par habitude ou sous l'influence de Shawn qui martèle que c'est impossible. En effet, Alexandre ne semble pas surpris par cette impossibilité, car Shawn insiste depuis un certain temps que ce problème est impossible. Ainsi la *sensibilité à la contradiction* et même le *dépassement de la contradiction* de Shawn influencent la démarche d'Alexandre qui *perçoit alors une contradiction*. Dès lors, Shawn expose à Alexandre que la situation est impossible comme on peut le voir dans la discussion suivante :

> 14, 15 S :ça ne marche pas, pourquoi on peut dire que ça ne marche pas. Ma réponse marche pour le 1^er^ et le 2^e^.
> 16 A : mais pas le 3^e^, c'est 1$ le café, 50 sous le croissant.
> 17 S : non, toi tu as calculé avec le 2^e^ et le 3^e^, tu n'as pas utilisé le 2 et 70.
> 18 A : le 2 et 70, non, c'est ça moi je les ai placés à l'envers.
> 19, 20 S : On s'entend que si toi tu l'as fait avec 2 et 3, moi je l'ai fait avec 1 et 2 et ça nous donne des résultats différents.
> 21 A : si ce n'est pas les mêmes résultats, ça ne se peut pas.

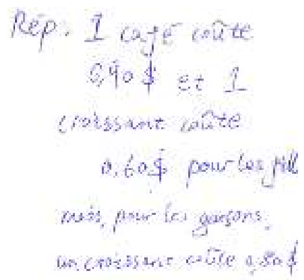
22, 23 S : ça ne se peut pas parce que tu ne peux pas avoir le même prix et respecter les 3 coûts c'est impossible.

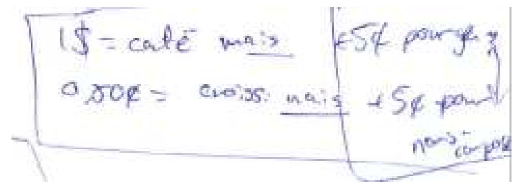
Alexandre ne souhaite pas conclure que la situation est impossible, il cherche à trouver des justifications en relation avec la vie réelle, tandis que Shawn semble satisfait de sa justification mathématique comme on peut le voir dans l'extrait suivant :

26 A : il n'y a pas de taxes là-dedans.
27 S : impossible, non c'est impossible.
28 A : et si tu multiplies tout par un coefficient, ça ne fonctionnerait pas plus.
29, 30 S : non, non même pas parce qu'à la base pour trouver la valeur de 2 inconnues, tu dois avoir 2 équations.
31 A : oui.
32 S : je veux dire 2 équations contenants les 2 variables.
33 A : ouais.
34 S : et il y a une et une seule valeur qui est associée pour x et pour y.
35 A : je suis d'accord.
36, 37 S : donc si tu rajoutes, c'est comme si je dis x + y=3 2x+3y =9 et que je dis que x+y =5 déjà là (souligne la 1re et 3e équation) tu as une erreur.
38, 39 A : je comprends, je comprends. (Pause). Attends ça coûté plus cher pour qui ça coûté plus cher pour…
40 S : je pense qu'on est prêt à s'arrêter là.
41, 42 A : ça coûté plus cher pour Julien, ils font de la discrimination envers les hommes, donc.
43 S : en effet.
44 A : le prix d'un café. Je l'ai. Le prix d'un café c'est 1$ pour les filles et le croissant.
45 S : ok ça c'est le prix pour les filles

Comme on peut l'observer, Alexandre tente de justifier par l'utilisation de taxes, mais l'équipe réalise rapidement qu'on devrait alors avoir une situation proportionnelle ce qui n'est pas le cas, ce qui montre un *engagement réfléchi* de leur part. En effet, ils observent que la multiplication par un coefficient ne change rien. On retrouve ici les arguments mentionnés par Laurent, l'enseignant du secondaire. Alors, Alexandre se rabat sur une différence de tarifs pour les hommes et pour les femmes, idée à laquelle

Shawn se rallie comme on peut le voir dans leur réponse finale présentée à la figure 4.31. On observe ici une perte de l'aspect mathématique que cette réponse représente, aspect que Shawn semblait préconiser.





Réponse finale de Shawn | Réponse finale d'Alexandre

Figure 4.31 Solution finale du problèmes des cafés/croissants des élèves au 2e cycle

4.2.4.4 Synthèse en termes de structurations des composantes du contrôle lors de la résolution des élèves au 2e cycle du secondaire

L'analyse des participants au 2e cycle du secondaire permet de constater que le *contrôle sémantique* prend ici une nouvelle couleur, il s'agit de donner du sens à l'équation $x - y = 0{,}50$ en contexte, de faire « parler l'équation ». Ce *contrôle sémantique* exercé sur le sens de l'équation en contexte permet à Alexandre de *percevoir une contradiction* avec ce qu'il avait *anticipé*. Son *anticipation* repose sur une analyse qualitative des prix des deux items : un café est plus cher qu'un croissant. La mobilisation de ces contrôles permet à Alexandre de percevoir qu'il a fait une erreur, il procède alors à une *vérification* qui lui permet de trouver son erreur. La résolution de Shawn est guidée par une *métaconnaissance* : il faut utiliser les trois équations pour vérifier la compatibilité, ce qui amène l'élève à faire une double résolution en prenant deux systèmes différents. Ceci aboutit à une *sensibilité à la contradiction,* sensibilité à laquelle Alexandre se rallie. Le *dépassement de cette contradiction* est rattaché principalement à un argument mathématique pour Shawn qui lui permet de *valider* l'impossibilité de la situation, tandis qu'Alexandre fait appel à des arguments de la vie courante pour justifier cette contradiction. Ainsi, leur *engagement réfléchi* n'est pas de même nature. Toutefois, Shawn finit par se rallier aux arguments d'Alexandre.

4.2.5 Analyse de la résolution et des échanges des élèves au 1^er^ cycle du secondaire

Comme il a été discuté dans la méthodologie, en raison de l'absence d'enseignement de l'algèbre de façon explicite, de l'enseignement de la résolution de systèmes d'équations ainsi que de l'approche covariationnelle, ce problème s'est avéré difficile pour les élèves au 1^er^ cycle. Cependant, malgré que les stratégies qu'ils utilisent ne leur permettent pas de dépasser la contradiction et ainsi d'arriver à une réponse finale, les élèves déploient une activité mathématique riche en termes de composantes du contrôle en ayant recours aux outils qui leur sont accessibles. L'analyse de leur résolution met en lumière deux structurations du contrôle, soit : 1) Un engagement réfléchi lors de l'interprétation du problème qui mène à des anticipations et à un choix éclairé par un réinvestissement de stratégie ; et 2) un contrôle sur les calculs qui mène au choix éclairé d'une écriture et d'une stratégie de résolution et une vérification par un raisonnement sur les multiples qui conduit à une sensibilité à la contradiction.

4.2.5.1 Épisode 1 : Un engagement réfléchi sur l'interprétation du problème qui mène à des anticipations et à un choix éclairé par un réinvestissement de stratégie

Initialement, les quatre élèves, Antonia (A), Catherine (C), Nicola (N) et Lilianne (L) prennent le temps de lire le problème individuellement, puis avant même de produire des traces écrites de résolution, une discussion s'engage sur les différentes perceptions du problème et des stratégies possibles en lien avec la résolution. Les élèves font ainsi preuve d'un *engagement réfléchi*. L'extrait suivant rapporte cette discussion initiale :

5 L : ok, c'est 3 différents cafés, right?
6 A : non, c'est 3 différentes personnes.
7 L : ok, mais pourquoi est-ce que c'est plus cher pour certains?
8 N : parce que le café.
9 L : ah, ils n'ont pas acheté la même affaire.
10 N : C'est ça, ils n'ont pas acheté la même affaire.
11 C : (rire) Ils changent les prix à chaque seconde.
12, 13 N : Attends, si 3$ c'est pour 2 cafés et 2 croissants est-ce qu'on peut assumer que, non parce que…
(…)
20 N : ok, le café doit c'est obligé d'être plus qu'un dollar.
21, 22 L : Il faut que ce soit le même prix pour un café et un croissant pour chacun (C acquiesce).
23 N : Le café c'est obligé d'être plus qu'un dollar sinon ça ne marche pas.
24, 25C : on essaie de deviner encore une fois, on essaie de deviner avec des valeurs et on garde celui qui fonctionne.
26 A : Est-ce qu'il y a des rabais?
27 C : il n'y a pas de rabais.
28 A : ou de taxes?
29 C : ils ne disent pas qu'il a des taxes, alors il n'y en a pas.
30 N : même s'il y a des taxes ça serait la même chose.

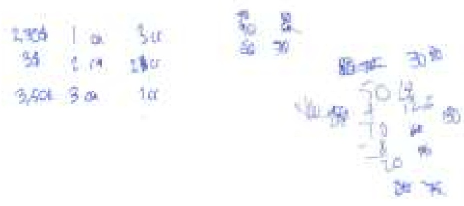
À travers cet échange, on assiste à deux *anticipations* différentes. Pour Nicola, le café doit valoir plus d'un dollar alors que pour Lilianne et Catherine le prix d'un café et celui d'un croissant doivent être le même pour chaque personne. Toutefois, on ne sait pas d'où proviennent ces *anticipations*. Par la suite, influencés par la résolution du problème des trains, les élèves au 1er cycle proposent d'utiliser des essais systématiques pour résoudre ce problème : « on essaie de deviner encore une fois, on essaie de deviner avec des valeurs et on garde celui qui fonctionne » (ligne 24, 25). Ainsi, ils penchent vers une résolution semblable à la méthode qui s'est avérée la plus efficace pour résoudre le problème des trains, soit une technique d'essais systématiques. On peut donc dire que par le recul qu'ils prennent vis-à-vis la situation, ainsi que par le choix d'une méthode qui semble la plus efficace pour eux, les élèves font preuve d'un *engagement réfléchi* et d'un *choix éclairé* de stratégie. Il est également possible d'observer un *engagement réfléchi* sur l'interprétation du problème qui se manifeste par le recours à certains éléments reliés à la vie courante tel que l'apport de taxes ou de rabais ainsi que la possibilité d'avoir des sous (0,01 $) alors que ceux-ci ont été retirés du marché. On voit que ces types d'arguments prennent place chez les autres équipes (surtout l'apport des taxes) une fois qu'ils sont *sensibles à la contradiction* donc à la fin de la résolution. Chez les élèves au 1er cycle, ces constats apparaissent dès le départ, avant toute résolution, ce qui montre un recul, un travail pour analyser, s'approprier l'énoncé du problème. De plus, Nicola fait preuve d'un *engagement réfléchi* lorsqu'il constate que l'apport de taxes ou de rabais ne change pas le problème. On peut faire l'hypothèse que cette idée de taxes et de rabais survient par le fait que cette notion leur a été enseignée, au courant de l'année scolaire, comme le mentionne Catherine lors de l'entrevue :

> 80 à 84 C : Moi, j'avais l'impression qu'il allait y avoir une attrape, parce que ça a l'air simple. Mais, c'est en continuant que l'on a compris que ce n'était pas aussi simple. Ça aurait été amusant qu'il y ait des taxes, peut-être que ça allait arrondir quelque chose, qui allait rendre les nombres plus parfaits. Puis, ça serait une étape de plus, que l'on vient d'apprendre comment faire.

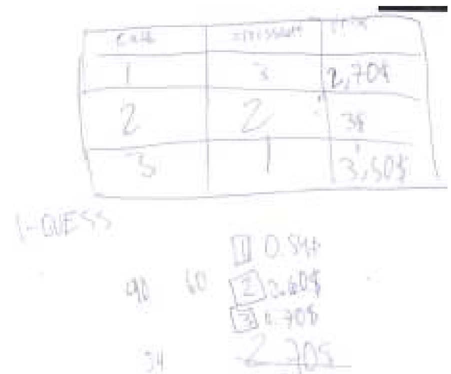
Bref, cet épisode permet de constater que la mobilisation d'un *engagement réfléchi* portant sur l'interprétation du problème permet de mener à un *choix éclairé* de stratégie, de faire des *anticipations* sur différents aspects du problème, ainsi que de favoriser l'appropriation du problème par le recours à des éléments de la vie courante.

4.2.5.2 Épisode 2 : un *contrôle sur les calculs* qui mène au *choix éclairé* d'une écriture et d'une stratégie de résolution et une *vérification* par un raisonnement sur les multiples qui conduit à une *sensibilité à la contradiction*

Malgré l'absence d'enseignement explicite de l'algèbre, on peut constater que les élèves au 1^er^ cycle mettent en place diverses stratégies de résolution comme en témoignent les traces laissées sur leurs copies (figure 4.32). Catherine et Antonia ont retranscrit les données du problème dans un tableau, Lilianne les retranscrit en utilisant des abréviations (*ca* et *cr*) et Nicola traduit le problème à l'aide de lettres. Tous les élèves restent attachés au contexte puisque dans toutes les traces laissées, ils conservent les prix jusqu'aux centièmes et ils indiquent même les unités de mesure. Cet épisode montre comment le *contrôle sur les calculs* est porteur d'un foisonnement de stratégies permettant de trouver un prix pour un café et un prix pour un croissant qui pourraient convenir aux trois factures.

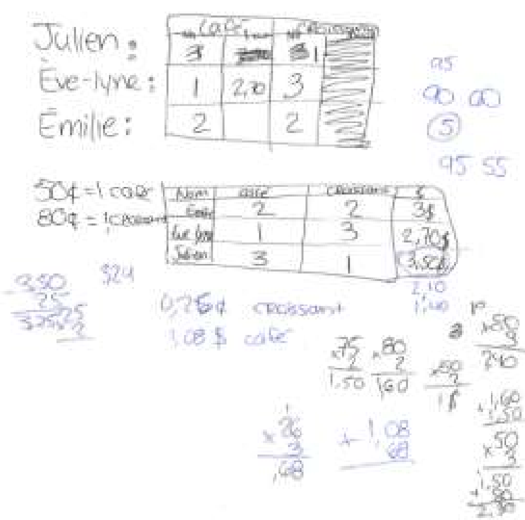


Traces de la résolution par Lilianne



Traces de la résolution par Catherine

Traces de la résolution par Nicola



Traces de la résolution par Antonia

Figure 4.32 traces de la résolution du problème des cafés/croissants par les élèves au 1er cycle du secondaire

Un des premiers indices de la mobilisation d'un *contrôle sur les calculs* survient lorsque Lilianne déploie un *choix éclairé* soutenu d'un *engagement réfléchi*. Elle cherche à simplifier les calculs en traitant les données du problème en termes de sous plutôt qu'en dollars. Au lieu de 2,70 $, 3 $ et 3,50 $, Liliane considère les quantités

270 sous, 300 sous et 350 sous. Ce changement de registre, des nombres décimaux à des entiers, souligne un *choix éclairé d'écriture*. En effet, les élèves sont plus à l'aise de travailler avec des entiers qu'avec des décimaux, le travail dans le monde des entiers limitant les possibles erreurs de calcul. Cette approche semble favoriser un *contrôle sur les calculs* comme on peut le voir dans l'extrait suivant :

> 69 C : et si 70 sous c'était pour un café
> 70 L : non parce que 200 ça ne se divise pas par 3
> 71 C : imagine 70
> 72 L : 200 ça ne se divisent pas par 3 alors ton idée ne marche pas
> 73 C : 200?
> 74, 75 L : je calcule en sous, 70 c'est pour un café plus 3 croissants. 200 divisés par 3 ça ne se divise pas

On peut aussi constater la mobilisation d'un *contrôle sur les calculs* lors de la mise en commun des idées entre les membres de l'équipe. Nicola et Lilianne *s'engagent de manière réfléchie* dans la situation grâce à un contrôle sur les grandeurs en jeu par un raisonnement sur les écarts. En effet, on peut remarquer que ces deux élèves réalisent rapidement que le prix d'un café ne pourra pas être d'un dollar parce qu'ils constatent qu'il y a un écart de 50 sous entre la deuxième et la troisième facture et qu'il n'y a pas un multiple de 50 sous avec la première facture. Un multiple de 50 sous ne correspond pas ainsi aux 70 sous de la première facture, comme on peut le voir dans l'extrait suivant :

> 31, 32 C : Ok, on fait avec, on estime comme la dernière fois. Est-ce qu'un café ça peut être 1 dollar, pis après ça si ça fait que les croissants sont les 3 le même prix.
> 33 N : ça ne peut pas être 1 dollar précisément.
> 34 C : c'est ça, ça ne peut pas le faire.
> 35 L : Mais, parce qu'il y a un 70, ça ne peut pas être un bond de 50
> (…)
> 42 N : Ok. Ça ne marche pas si le café est 1 dollar
> 43 L : oui, parce qu'il y a les 70 sous
> 44 N : c'est ça, ça voudrait dire que le, attends
> 45 L : Qu'est-ce qui donne 70?

Ainsi, Lilianne et Nicola mobilisent un *contrôle sur les calculs* qui se manifeste par un raisonnement sur les écarts et sur les multiples de 50 qui leur permet d'infirmer qu'un café coûte un dollar. Catherine et Antonia se lancent à la recherche d'un prix pour un café et le prix pour un croissant qui permettront de valider chacune des factures. En effet, alors que Nicola stipule que le café ne peut pas valoir un dollar, Catherine surenchérit en affirmant qu'un croissant ne peut coûter 50 sous. C'est le *contrôle sur les calculs* de Lilianne qui permet d'observer la raison de cette affirmation lorsqu'elle constate que ces valeurs ne permettent pas d'obtenir les 70 sous de la première facture. La première facture est ainsi celle qui semble leur poser problème.

C'est donc un *contrôle sur les calculs* qui amène l'équipe à la recherche du prix d'un café et du prix d'un croissant vérifiant à la fois la première facture (1 café et 3 croissants ont couté 2,70 $) et la deuxième facture (2 cafés et 2 croissants ont couté 3 $). On observe ici un *choix éclairé* de stratégie. Ayant considéré précédemment la deuxième et troisième facture et ayant vérifié les valeurs obtenues dans la facture 1, Catherine propose alors de porter leur attention sur la première facture puisque, selon elle, la valeur 2,70 n'est pas un nombre « égal » ou « beau ». Il est alors préférable de travailler avec la valeur considérée comme la plus difficile. En traitant les deux premières factures, Lilianne obtient des valeurs de 90 sous pour un café et de 60 sous pour un croissant. Lorsque les élèves *vérifient* ces valeurs dans la troisième facture, ils réalisent que ces valeurs ne permettent pas d'obtenir la solution désirée. Cette nouvelle *vérification* amène une déception et une incompréhension vis-à-vis la situation, qui conduit les élèves à abandonner la résolution. Donc, on peut voir que les élèves du premier cycle sont *sensibles à la contradiction*, mais ils sont dans l'impossibilité de la *dépasser* parce qu'ils ne possèdent pas les outils nécessaires à la résolution. Les élèves affirmeront à cet effet qu'il leur manque une formule magique leur permettant de résoudre ce problème.

On peut constater que malgré l'absence d'enseignement d'algèbre formel, les élèves sont en mesure d'avancer dans la résolution du problème par des boucles d'*engagement réfléchi* sur l'interprétation du problème et d'un *contrôle sur les calculs* qui permettent la mobilisation d'un *choix éclairé* d'écriture (décimaux à entiers) et de stratégies (essais systématiques et un raisonnement sur les multiples). Ces boucles leur permettent d'obtenir les solutions à deux systèmes d'équations. Cependant, les élèves sont incapables de voir qu'ils ne pourront pas trouver une solution unique au problème et donc percevoir la contradiction sous-jacente aux données du problème.

4.2.5.3 Synthèse en termes de structuration de la résolution des élèves au 1er cycle du secondaire

En somme, les élèves au 1er cycle font preuve d'un *engagement réfléchi* portant sur l'interprétation du problème qui leur permet d'émettre différents constats avant toute résolution, ce qui est nouveau. En effet, chez les autres équipes (à part pour Alexandre, élève au 2^{e} cycle du secondaire), on assiste à une résolution immédiatement après à la lecture de l'énoncé du problème et à un questionnement suite à la la résolution. Chez les élèves du premier cycle, un questionnement émerge avant qu'ils écrivent quoi que ce soit, ils prennent ainsi le temps de faire des anticipations sur le prix d'un café et d'un croissant, de relever la possibilité d'avoir des taxes et ils entrevoient un *choix* de stratégie qui est *éclairé* : des essais systématiques. Ils réinvestissent ainsi la stratégie qu'ils avaient utilisée pour résoudre le problème des trains et qui leur a permis de trouver une solution. Le *choix éclairé* prend ici une nouvelle signification par le réinvestissement d'une stratégie précédemment utilisée. Les élèves considèrent alors deux des factures, celles qui ont comme totaux 3 $ et 3,50 $. Se met alors en place un *contrôle sur les calculs* qui les amène à considérer les prix en sous au lieu de dollars. Ils convertissent ainsi pour travailler avec des valeurs entières, en conscience que leurs calculs seront plus faciles à mener. C'est cette fois-ci le *choix éclairé* d'une écriture qui est mobilisé. Ils trouvent alors les valeurs correspondantes pour un café et pour un croissant par le recours à un *contrôle sur les calculs*. De plus, ils procèdent à une vérification de ces valeurs en les invalidant grâce à la première facture. Pour cela, ils procèdent à un raisonnement sur les multiples en constatant un bond non constant de 50 sous avec la première facture. À ce moment toutefois, les élèves ne sont pas *sensibles à la contradiction*. Ils ne se découragent pas et considèrent les deux premières factures. Ils font preuve encore une fois d'un *choix éclairé* de stratégie en s'intéressant à deux autres énoncés et ils trouvent un prix pour un café et un prix pour un croissant en mobilisant un *contrôle sur les calculs*, sauf que cette fois-ci ils abandonnent suite au malaise laissé après un avoir *vérifié* avec la 3^{e} facture. Ils sont ainsi *sensibles à la contradiction* par le malaise ressenti, mais ils ne sont pas en mesure de la *dépasser* en raison des outils mathématiques qu'ils ont à leur disposition. En effet, comme mentionné au chapitre III (voir 3.2.2.3), la seule approche arithmétique permettant de constater la contradiction entre les données de ce problème est de mobiliser un regard covariationnel entre les trois grandeurs du problème, ce qui est avancé que le regard covariationnel sur les suites (deux grandeurs).

CHAPITRE V

RÉSULTATS ET DISCUSSION

Comme mentionné dans les chapitres I et II, l'objectif de cette recherche est de mieux comprendre la structuration du contrôle dans l'activité mathématique lors de la résolution de problèmes algébriques. Pour cela, les liens entre différentes composantes du contrôle mobilisées lors de la résolution de deux problèmes algébriques par cinq équipes aux profils mathématiques différents, ont été observés dans le chapitre IV. Par ailleurs, comme constaté dans le cadre conceptuel, plusieurs structurations ressortent de la littérature, ce qui a mené à différentes hypothèses préalables à l'expérimentation. À titre de rappel, ces hypothèses sont les suivantes :

- Anticipation ----- vérification------perception des erreurs
- Sensibilité à la contradiction---- dépassement de la contradiction
- engagement réfléchi ------ choix éclairé
- Choix éclairé --------- métaconnaissance
- Vérification----- engagement réfléchi ------ choix éclairé
- Métaconnaissance ---- sémantique ------- anticipation
- Syntaxique --- rupture---- sémantique ---- vérification
- Syntaxique ------- sémantique -------- sensibilité à la contradiction
- Métaconnaissance ------vérification
- Métaconnaissance ------perception des erreurs

Ces hypothèses seront discutées dans ce chapitre à la lumière des structurations ressorties dans l'analyse des résolutions des cinq équipes rapportées dans le chapitre IV. Une analyse transversale de ces résolutions a fait ressortir qu'une composante peut être mise de l'avant afin d'observer comment les autres composantes sont mobilisées autour de celle-ci. De ce fait, ces structurations ne décrivent pas une idée globale d'une structuration du contrôle, mais plutôt au niveau local autour d'une composante. De plus, puisque la résolution s'est déroulée en équipe, ces structurations sont construites par les interactions entre les participants de chacune des équipes. Ainsi, elles ne sont pas le propre d'un individu, mais plutôt le propre de l'activité mathématique de l'équipe et elles sont liées aux caractéristiques des problèmes proposés.

Pour répondre à la question *comment se structurent les composantes du contrôle dans la résolution de problèmes algébriques*, des structurations autour de six composantes sont présentées dans la première section et mises en parallèle avec les hypothèses présentées dans le chapitre II. Ces composantes choisies comme *centrale* sont colorées par diverses manifestations selon la structuration dans laquelle elles sont impliquées, c'est la raison pour laquelle elles ont été choisies. Puis, afin de répondre à la question *quels éléments autres que les composantes peuvent agir sur la structuration du contrôle*, des éléments qui teintent les structurations du contrôle autres que les composantes et qui se dégagent de l'analyse menée (voir chapitre IV) sont abordés dans la deuxième section.

5.1 Présentation des différentes structurations du contrôle dégagées autour d'une composante et retour sur les structurations provenant de la littérature

Le chapitre II a présenté différentes interactions possibles entre les composantes du contrôle d'après une analyse de ce qui ressort de la littérature. L'analyse de l'expérimentation menée dans cette recherche a permis d'observer certaines de ces interactions, mais également de mettre de l'avant de nouveaux liens entre les composantes du contrôle. Les composantes autour desquelles s'organisent diverses structurations sont : le *contrôle sémantique, le choix éclairé, le contrôle sur les calculs, la sensibilité et le dépassement de la contradiction, les métaconnaissances et la vérification/validation*. La prochaine sous-section présente une synthèse des différentes structurations ressorties de l'analyse. Les sous-sections qui suivent visent à approfondir ces structurations en faisant ressortir leurs différentes manifestations pour chacune des composantes retenues. Les liens entre ces structurations par rapport à celles issues de la littérature sont également discutés.

5.1.1 Synthèse des structurations ressorties de l'analyse transversale

La figure 5.1 présente une synthèse des structurations reliées à chacune des six composantes retenues, structurations provenant d'une analyse transversale de l'analyse menée au chapitre IV. Chacune de ces composantes avec ses structurations est présentée dans chaque colonne de la figure. Pour chacune de ces composantes, trois structurations ont été relevées à l'exception de la composante *vérification/validation* qui en compte quatre. Différentes couleurs ont été attribuées aux structurations et elles seront réutilisées lors de leur description dans les sous-sections suivantes (par exemple bleu, vert et jaune pour la composante *contrôle sémantique*). Pour chacune de ces structurations, le ou les problème(s) où elles ont émergé ainsi que les équipes qui les mobilisent sont précisés. D'une colonne à l'autre, certaines structurations sont identifiées avec une même couleur. Il s'agit des mêmes structurations, mais qui ont été regardées selon une composante *centrale* différente, c'est le cas des structurations en rouge et en bleue (voir les deux premières lignes de la figure 5.1). On peut aussi observer des structurations en une couleur plus pâle. Cette nuance dans les couleurs (rouge foncée, rouge plus clair et bleu foncé, bleu plus clair) indique que ces structurations en foncé et en pâle sont semblables, mais pas complètement identiques. Un retour sur les liens entre ces structurations sera fait après leur description (voir 5.1.8). Les huit structurations représentées une seule fois dans la figure et identifiées par une seule couleur (blanc, jaune, vert, orange, violet, rose, gris et beige) sont indépendantes. L'analyse menée autour d'une composante *centrale* a permis d'observer les structurations sous différentes lunettes et de mettre en lumière divers aspects d'une structuration, aspects qui seront décrits dans les prochaines sous-sections.

Contrôle sémantique	Contrôle sur les calculs	Choix éclairé	Sensibilité à la contradiction (dépassement)	Métaconnaissances	Vérification/Validation
Trains (1er cycle) Engagement réfléchi – contrôle sur les calculs – vérification et perception des erreurs (approches arithmétiques)	***Cafés/croissants (1er cycle)*** Contrôle sur les calculs - engagement réfléchi + choix stratégie ***Trains (Ens.)*** Contrôle sur les calculs- engagement réfléchi- choix éclairé – sensibilité	***Trains et cafés/croissants (1er cycle)*** Engagement réfléchi- contrôle sémantique (stratégies arithmétiques)			
	Trains et cafés/croissants (1er cycle) Contrôle sur les calculs (engagement réfléchi + choix stratégie + questionnement anticipation)				
		Cafés/croissants (2e cycle, BES) Sensibilité - Choix éclairé – métaconnaissance- contrôle syntaxique	***Cafés/croissants (2e cycle, Ens.)*** Métaconnaissance s– vérifications – (engagement réfléchi + choix éclairé) – sensibilité – dépassement	***Cafés/croissants (2e cycle)*** Métaconnaissances – vérification (choix éclairé) – sensibilité – dépassement	***Cafés/croissants (2e cycle)*** Métaconnaissances- choix éclairé – vérification - sensibilité– dépassement – validation
			Cafés/Croissants (BES) Métaconnaissance s– sensibilité (anticipation) – vérification/validation dépassement	***Cafés/croissants (BES)*** Métaconnaissance s– sensibilité + anticipation procédurale – choix éclairé – sensibilité – vérification – dépassement	***Cafés/croissants (BES)*** Métaconnaissances – sensibilité– vérification – dépassement -validation
Trains (Ens., 2e cycle) Engagement réfléchi – choix éclairé – contrôle syntaxique	***Trains (BES)*** Anticipation – perception des erreurs – vérification – perception de l'erreur contrôle sur les calculs	***Trains et cafés/croissants (BEPEP)*** Contrôle syntaxique (opération) – choix éclairé – engagement réfléchi	***Trains (BEPEP, BES, Ens., 2e cycle)*** Anticipation – sensibilité – engagement réfléchi- vérification – dépassement	***Cafés/croissants (BEPEP)*** Métaconnaissances – pas de vérification, pas de sensibilité	***Trains (2e cycle)*** Anticipation non satisfaite – engagement réfléchi – vérification– validation
Trains (BEPEP, BES) Contrôle sémantique en construction – engagement réfléchi – doutes/malaises – perception des erreurs – vérifications					***Trains (BES, Ens.)*** Anticipation – sensibilité - vérification – perception des erreurs – choix éclairé – vérification- validation

Figure 5.1 Synthèse des structurations ressorties lors de l'analyse autour d'une composante centrale

5.1.2 Autour du contrôle sémantique

Comme il a été décrit lors de l'analyse des deux problèmes (voir chapitre IV), un *contrôle sémantique* est mobilisé à maintes reprises tout au long de leur résolution. Toutefois, les différentes structurations autour du contrôle sémantique retenues sont apparues dans le problème des trains. Ce sont les diverses stratégies de résolution choisies par les équipes qui mènent vers ces structurations. Trois équipes sur cinq choisissent la voie algébrique pour résoudre le problème, soit les étudiants du BES, les enseignants du secondaire et les élèves au 2[e] cycle du secondaire. Les étudiants du BEPEP choisissent également de traduire le problème par une mise en équation. Toutefois, les raisonnements qu'ils développent et qui leur permettent de résoudre l'équation reposent sur une résolution arithmétique de l'équation, cette résolution se fait par des allers-retours au contexte. Ainsi, l'analyse transversale permet de discerner trois structurations qui sont illustrées à la figure 5.2.

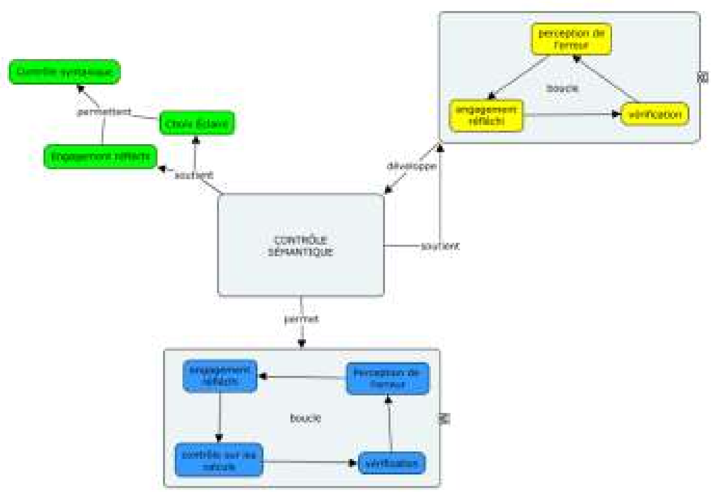


Figure 5.2 Schématisation des trois structurations ressorties autour du *contrôle sémantique*

La première structuration, en vert (figure 5.2), est propre aux équipes qui ont utilisé une approche algébrique pour résoudre le problème des trains. C'est le cas des enseignants du secondaire et des élèves au 2e cycle. En effet, plusieurs allers-retours se font vers le contexte lors de la résolution dans ces deux équipes. Dans cette première structuration, le *contrôle sémantique* se manifeste par la mathématisation du problème qui passe par l'identification des inconnues par une lettre vue comme un nombre, par le repérage d'un générateur qui permet d'obtenir une équation du premier degré à une inconnue, ainsi que par la traduction de la relation de comparaison « de plus ». Chez un des élèves au 2e cycle du secondaire, une autre manifestation du *contrôle sémantique* s'appuie sur la production d'une schématisation opérationnelle du problème. On assiste dans ce cas à la création d'un schéma dans lequel les données connues, les données inconnues et les contraintes sont représentées en contexte. Cette schématisation remplace ainsi l'énoncé en mots du problème et devient l'outil de référence de la résolution. Ces manifestations amènent une structuration des composantes du contrôle où l'on constate que lorsque le contrôle sémantique est maîtrisé et assumé, celui-ci s'accompagnerait d'un *engagement réfléchi* sur l'interprétation du problème et du *choix éclairé* d'une stratégie, dans ce cas-ci l'utilisation de l'algèbre. La combinaison de ces composantes permettrait la mathématisation du problème. Par la suite s'enclencherait un *contrôle syntaxique* qui agit lors de la résolution de l'équation ou du système d'équations du premier degré obtenu. Ainsi, la structuration en vert (figure 5.2) montre ce possible support de l'engagement réfléchi et au choix éclairé qui permettrait ensuite la mobilisation d'un contrôle syntaxique.

La seconde structuration, en jaune (figure 5.2), se manifeste chez les étudiants universitaires au BEPEP et ceux du BES, lors de la résolution du problème des trains. Dans les deux cas, un des participants de l'équipe éprouve plus de difficultés que les autres membres, ce qui semble agir sur la structuration du contrôle, puisque différentes interventions sont requises. On assiste alors à un *contrôle sémantique* en construction à travers la recherche de sens en contexte. Les étudiants au BEPEP procèdent à une résolution hybride entre une approche algébrique et arithmétique. Ce contrôle se développerait à travers diverses boucles où se manifestent, de l'*engagement réfléchi*, des doutes, des malaises, des *perceptions d'erreurs* et des *vérifications* qui reposent sur un retour constant sur le contexte du problème. En effet, l'équipe discute sur la mathématisation produite par un des participants qui utilise deux lettres différentes pour représenter le même nombre de wagons et qui fait une erreur dans la traduction de la contrainte « de plus » représentée par une multiplication. Les malaises ressentis vis-à-vis cette écriture amènent les participants à revenir au contexte et à *percevoir les erreurs,* menant ainsi à l'utilisation d'une nouvelle inconnue en contexte qui représente de nouveaux wagons à 28 places (*contrôle sémantique*). Un *engagement réfléchi* se manifeste ainsi à plusieurs reprises favorisant un recul face au problème qui permet aux participants de revenir sur l'écriture de l'équation et qui s'appuie sur la mobilisation d'un contrôle sémantique.

Comme précisé précédemment, chez les étudiants au BES, la résolution du problème est algébrique. Très tôt, diverses difficultés sémantiques surgissent chez Victor. Il a été possible de remarquer que malgré un *engagement réfléchi* sur l'interprétation du problème et un *choix éclairé* de stratégie, les difficultés *sémantiques* amènent différents blocages pendant la résolution. Ceux-ci ralentissent la mobilisation d'un contrôle *syntaxique*. Ces blocages ont pu être outrepassés par la manifestation d'un contrôle *sémantique* de la part d'André appuyé par un engagement réfléchi et des vérifications en contexte. Donc, la structuration en jaune (voir figure 5.2) montre comment le contrôle sémantique de certains coéquipiers pourrait soutenir des boucles d'*engagement réfléchi*, de *vérification* et de *perception des erreurs* qui permettraient le développement d'un contrôle *sémantique*.

La troisième structuration en bleu (figure 5.2) repose sur la résolution du problème des trains par les élèves au 1er cycle. Dans leur cas, le contrôle *sémantique* prend place par la mise en contexte de différentes approches arithmétiques pour résoudre le problème. Ainsi, se met en place une boucle qui implique la mobilisation de diverses composantes : *engagement réfléchi*, *contrôle sur les calculs*, *vérification* et *perception des erreurs*. Un *engagement réfléchi* prend place par le recul pris par les élèves pour faire un choix de différentes approches de résolution (raisonnement surplus/parts, résolution algébrique, diverses divisions, essais systématiques). Ces résolutions s'appuient de plus sur un *contrôle sur les calculs*. La *perception des erreurs* est mobilisée par l'interprétation des opérations en contexte. Ainsi, la structuration en bleu (figure 5.2), montre comment en arrière-plan, le contrôle *sémantique* pourrait régir l'imbrication entre ces composantes (engagement réfléchi, contrôle sur les calculs, vérification, perception de l'erreur) par des significations en contexte sur les différentes écritures.

5.1.2.1 Liens avec les structurations ressorties de la littérature

Saboya (2010) fait état d'une relation forte entre le contrôle *sémantique* et le contrôle *syntaxique* lors de résolutions algébriques. Les structurations permettent d'observer ce lien. Dans la majorité de celles qui ont été relevées, on peut voir que le contrôle sémantique et le contrôle syntaxique semblent liés lors de la résolution algébrique du problème. Toutefois, d'autres composantes peuvent soutenir cette relation, comme un *engagement réfléchi* sur la situation et un *choix éclairé* de stratégie de résolution. De plus, la littérature souligne certaines relations entre des composantes du contrôle lorsque le contrôle *sémantique* est en construction (Kouki, 2006; Saboya et Rhéaume, 2015; Saboya *et al*, 2015). Par exemple, des difficultés sémantiques ou syntaxiques peuvent déboucher sur des vérifications successives. Les structurations présentées précédemment (figure 5.2) ont permis d'observer que le contrôle *sémantique* peut effectivement se construire en s'appuyant sur des *vérifications*. Toutefois, ces *vérifications* semblent imbriquées dans des boucles composées de diverses composantes, telles que *l'engagement réfléchi*, la *perception des erreurs* et un *contrôle sur les calculs*.

5.1.3 Autour du choix éclairé

Lors de la résolution des deux problèmes soumis aux cinq équipes de participants, le *choix éclairé* s'est avéré un élément clé lors de leur résolution. Il s'est manifesté à différents moments et sous différentes formes. Comme il a été vu lors de l'analyse des données au chapitre IV, différentes stratégies de résolution pour les deux problèmes ont été mises de l'avant. Ainsi, les structurations des composantes qui gravitent autour de ce contrôle diffèrent aussi. L'analyse transversale permet de discerner trois structurations qui sont présentées à la figure 5.3.

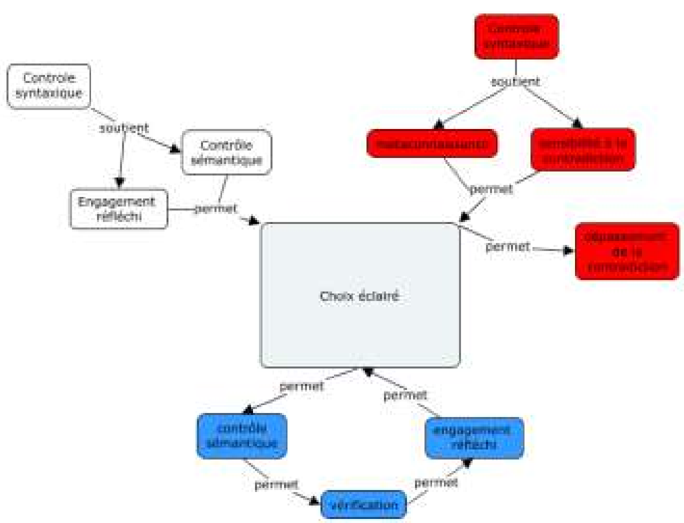


Figure 5.3 Schématisation des trois structurations ressorties autour du *choix éclairé*

La première structuration, en blanc (figure 5.3), est mobilisée par les étudiants au BEPEP lors de la résolution des deux problèmes. En effet, le *choix éclairé* apparaît lors de la mathématisation du problème après la mobilisation d'un *contrôle sémantique* qui s'exprime par la traduction des données sous forme algébrique. Les étudiants prennent alors un recul sur les écritures (*engagement réfléchi*), ce qui les amène à exercer un *choix éclairé* pour transformer une équation en une écriture qui va leur permettre d'opérer. Par exemple, dans le problème des trains, les étudiants forment une nouvelle variable AB, correspondant à un wagon de 28 places. Dans le problème des cafés/croissants, l'écriture $3a + b$ est transformée en $2a + (a + b)$. Cette transformation prend place par la mobilisation d'un *contrôle syntaxique* et est guidée par la valeur de l'expression connue $(a + b)$. Ces deux choix mènent l'équipe à résoudre les équations pour trouver une solution au problème. Ainsi, la structuration en blanc (figure 5.3) illustre comment le *contrôle syntaxique* soutiendrait un *contrôle sémantique* et un *engagement réfléchi* qui permettraient le *choix éclairé* d'une stratégie de résolution.

La seconde structuration, en rouge (figure 5.3), est associé à la résolution du problème des cafés/croissants chez deux équipes. Lors de cette résolution par les élèves au 2^{e} cycle du secondaire, le *choix éclairé* prend la forme du choix d'une stratégie qui s'appuie sur une double résolution misant sur des systèmes d'équations différents. Chez les étudiants du BES, le *choix éclairé* se manifeste par le choix d'une matrice de résolution. Dans les deux cas, il s'agit d'un choix éclairé d'une stratégie de résolution puisqu'il permet un regard sur l'ensemble du problème en utilisant l'intégralité des données proposées. Ce *choix éclairé* semble provenir d'une *sensibilité à la contradiction* et d'une *métaconnaissance* en relation avec la résolution de systèmes d'équationsselon laquelle : il suffit de deux équations pour trouver la valeur de deux inconnues. Ainsi, ce *choix éclairé* soutenu d'un contrôle syntaxique lors de la résolution a ainsi permis le dépassement de la contradiction chez ces deux équipes. Ainsi, la structuration en rouge (figure 5.3) illustre comment une *métaconnaissance* et une *sensibilité à la contradiction*, soutenues d'un *contrôle syntaxique*, pourraient favoriser l'émergence d'un *choix éclairé* de stratégie et ainsi permettre aussi un *dépassement de cette contradiction*.

La troisième structuration, en bleu (figure 5.3), présente comment les composantes du contrôle gravitent autour du choix éclairé qui repose principalement sur le choix d'approches arithmétiques dans la résolution des deux problèmes par les élèves au 1er cycle du secondaire. Les élèves ont recours à diverses stratégies numériques qui reposent sur un *engagement réfléchi* (un recul sur les données du problème pour regarder les voies possibles de résolution) et un *contrôle sémantique*. Ceci permet un *choix éclairé* de différentes stratégies puisqu'elles reposent sur une réflexion qui a une certaine cohérence par rapport à la situation. Par exemple, le PPCM qui permet de trouver un nombre commun à deux nombres, peut être une stratégie pertinente dans le problème des trains puisque celui-ci demande de trouver un nombre de wagons commun entre les deux trains quand on soustrait les huit wagons de plus d'un des trains. C'est également le cas de la stratégie qui consiste à diviser le nombre de passagers par 2 qui repose certainement sur l'idée de séparer ces passagers équitablement dans les 2 trains. C'est par un regard sur les valeurs obtenues (une *vérification*) et leur interprétation *sémantique* que les élèves décident de revoir leur stratégie et finissent par aboutir à un *choix éclairé* de stratégie, soit une résolution par des essais systématiques. La structuration en bleu (figure 5.3) présente ainsi comment le choix éclairé pourrait s'insérer dans des boucles entre *contrôle sémantique*, *vérification* et *engagement réfléchi*, ces boucles pourraient aboutir à un *choix final éclairé* de stratégie, soit une résolution par des essais systématiques.

5.1.3.1 Liens avec les structurations ressorties de la littérature

Selon Saboya (2010) et Saboya et Rhéaume (2015), il existe un lien entre l'*engagement réfléchi* et le *choix éclairé* car il est nécessaire de prendre un certain recul par rapport à la situation pour sélectionner une méthode adéquate. De plus, Saboya et Rhéaume (2015) mentionnent que cet *engagement réfléchi* pourrait passer par une *vérification* et une *perception des erreurs*. Le chapitre II a aussi permis de mettre en lumière une relation entre le *choix éclairé* et la *métaconnaissance*, Artigue (1993) mentionne en effet qu'une *métaconnaissance* peut permettre d'évaluer la pertinence d'une démarche. Les structurations présentées à la figure 5.3 témoigne des liens entre le *choix éclairé* et l'*engagement réfléchi*. Cependant, il semble que le *choix de stratégie* ne vient pas uniquement d'un recul sur la situation. En effet, afin d'effectuer un *choix éclairé*, il semble aussi nécessaire d'effectuer un *contrôle sémantique* sur la situation. Ce *contrôle sémantique* semble prendre aussi sa place dans les boucles où la *vérification* vient exiger un nouvel *engagement réfléchi* pouvant mener à un nouveau *choix éclairé*. De plus, on peut voir qu'un lien entre la *métaconnaissance* et le *choix éclairé* est possible, comme le mentionne Artigue (1993). Cependant, on peut remarquer que dans cette structuration s'accompagne d'une *sensibilité à la contradiction*.

5.1.4 Autour d'un contrôle sur les calculs

Lors de la résolution des deux problèmes, le *contrôle sur les calculs* s'est avéré un élément clé de la résolution et il a pu être observé à différentes étapes de la démarche. Malgré que ce contrôle soit mobilisé lors d'opérations arithmétiques, cette composante participe différemment aux structurations du contrôle selon l'intention ou l'efficacité du calcul effectué. L'analyse transversale permet de discerner trois structurations qui sont présentées à la figure 5.4.

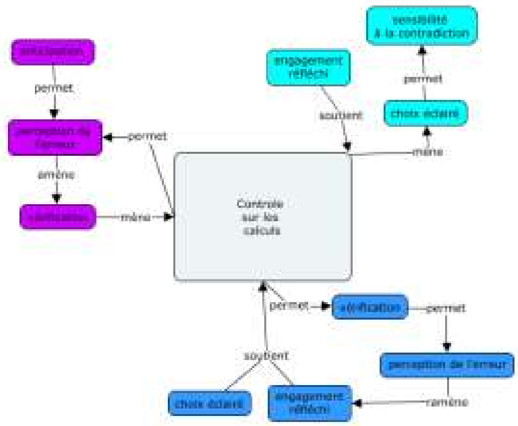


Figure 5.4 Schématisation des trois structurations ressorties autour du *contrôle sur les calculs*

La première structuration, en mauve (figure 5.4), est en relation avec la *vérification*. Elle a pu être aperçue chez les étudiants du BES lors de la résolution du problème des trains. Victor (BES), à la fin de la résolution, injecte les valeurs trouvées lors de la résolution de l'équation dans l'équation initiale. Cependant, lors de cette vérification, Victor présente des difficultés calculatoires dans l'algorithme de division et obtient 316. Il réalise qu'une erreur a été commise puisqu'il s'attend à obtenir 576. Ainsi, on peut croire que c'est cette *anticipation* qui lui permet de *percevoir son erreur*. Cette erreur illustre une difficulté dans la mobilisation d'un *contrôle sur les calculs* de la part de Victor. Cela l'amène à interroger son co-équipier, donc à chercher à *vérifier* ce qu'il a fait. André manifeste alors un *contrôle sur les calculs* qui se traduit à la fois par la mise en place de stratégies de calcul mental, par l'exécution de divisions en utilisant l'algorithme conventionnel, par la construction d'une table de valeurs pour trouver les multiples de 28 (il procède par des additions ou des soustractions répétées) et par un raisonnement sur les écarts, ce qui permet à Victor de *percevoir son erreur*. On assiste ici à la construction d'un *contrôle sur les calculs* de la part de Victor. En effet, après avoir rectifié son erreur, à la fin de la résolution, cet étudiant utilise une addition en colonne afin de voir si le nombre de wagons choisi lui permet de transporter le nombre de passagers requis. La structuration mauve (figure 5.4), présente ainsi comment une *anticipation* pourrait permettre la *perception d'une erreur* qui mènerait ensuite à une *vérification* et à un *contrôle sur les calculs* afin de trouver où l'erreur a été commise.

La seconde structuration, en bleu pâle [13] (figure 5.4), évoque comment les composantes du contrôle sont mobilisées autour d'un *contrôle sur les calculs* lorsqu'un regard est posé sur la grandeur des nombres données dans le problème sans faire de calculs écrits sur ces nombres. Cet aspect a pu être observé chez les élèves au 1er cycle du secondaire dans le problème des cafés/croissants et chez les enseignants dans le problème des trains. Pour les élèves au 1er cycle, ce *contrôle sur les calculs* se mobilise avant qu'ils ne débutent la résolution du problème cafés/croissants, alors qu'ils exercent un regard réflexif sur les données du problème, leur permettant d'établir des valeurs pour un café et un croissant qui ne sont pas admissibles. En effet, lors de la discussion initiale, Nicola et Liliane réalisent rapidement que la solution ne pourra pas être 0,50 $ et 1 $, car il est impossible de trouver un multiple de ces deux valeurs permettant d'obtenir 2,70 $. On peut ainsi constater que ce *contrôle sur les calculs* soutenu d'un *engagement réfléchi*, permet à l'équipe de choisir une *stratégie de résolution éclairée*, en travaillant principalement à trouver deux valeurs pour le prix d'un café et d'un croissant permettant d'obtenir 2,70 $. En ce qui a trait aux enseignants, cette structuration est aussi constatée lorsque Maude (enseignante au secondaire) réduit la fraction 460/28 (elle trouve 115/7) au lieu d'effectuer la division 460 par 28. Ainsi, le fait de posséder un *contrôle sur les calculs* permet à Maude d'exercer un *engagement réfléchi* vis-à-vis la fraction non simplifiée obtenue. En

---

[13] La structuration en bleu pâle est reliée à la structuration qui est en bleu (autour des composantes *contrôle sémantique* et *choix éclairé*, voir figure 5.1) mais avec certaines nuances. C'est la même chose pour les structurations en rouge (et rouge pâle) qui sont présentées dans les prochaines sections.

effet, elle marque un temps d'arrêt et elle décide alors de simplifier la fraction (*choix éclairé de stratégie*). La simplification fait preuve d'un *contrôle sur les calculs* de la part de Maude. Ce *contrôle sur les calculs* soutenu d'un *engagement réfléchi*, lui permet non seulement de faire un *choix éclairé* de stratégie en simplifiant, mais aussi d'être *sensible à la contradiction* lorsqu'elle obtient une fraction irréductible avec un dénominateur de 7, alors qu'elle s'attendait à une réponse entière. La structuration en bleu pale (figure 5.4) montre ainsi comment un *contrôle sur les calculs* soutenu d'un *engagement réfléchi* pourrait mener à un *choix éclairé* de stratégie et possiblement permettre la *sensibilité à la contradiction*.

La troisième structuration, en bleu (figure 5.4), est en relation avec des résolutions présentant différentes erreurs de traduction ou d'interprétation du problème. Le *contrôle sur les calculs* a permis à maintes reprises de revoir et de corriger l'approche choisie. Par exemple, le *contrôle sur les calculs* est central dans la résolution des deux problèmes pour les élèves au 1^er^ cycle. En effet, pour résoudre ces problèmes, les élèves sélectionnent différentes stratégies arithmétiques qui ont du sens dans le contexte du problème (différentes divisions, PPCM et PGCD). Cette structuration diffère de celle présentée précédemment par la nature des calculs. En bleu pâle, on observe un *contrôle sur les calculs* de manière mentale avant la résolution, tandis qu'en bleu les calculs sont réalisés de manière manuscrite en cours de résolution. Ainsi, dans cette structuration, le *contrôle sur les calculs* se manifeste dans le problème des trains par l'exécution de divisions en s'appuyant sur l'algorithme conventionnel. Par la suite, les élèves sont en mesure de vérifier la solution qu'ils obtiennent en revenant au contexte et de percevoir que la méthode choisie est à revoir. Ainsi, comme le montre la partie en bleu de la figure 5.4, il semble que lorsque le *contrôle sur les calculs* est soutenu d'un *engagement réfléchi* et d'*un choix de stratégie*, il permettrait une *vérification sémantique* et une *perception de l'erreur* qui enclencheraient une nouvelle boucle qui démarre par un nouvel *engagement réfléchi*.

5.1.4.1 Liens avec les structurations ressorties dans la littérature

Selon Saboya et Rhéaume (2015), il existe un lien entre le *contrôle sur les calculs*, *l'engagement réfléchi* et le *choix éclairé*. L'analyse des structurations présentées dans cette section permet aussi de constater l'interaction entre ces composantes dans certaines résolutions. De plus, il a été relevé que le *contrôle sur les calculs* peut jouer un rôle si une erreur survient. En effet, le *contrôle sur les calculs* peut se bâtir en cours de résolution, par des boucles de *perception des erreurs* et de *vérifications*, sans oublier que l'*anticipation* peut aussi jouer un rôle dans cette boucle. Finalement, cette section permet de constater qu'il est intéressant de regarder le *contrôle sur les calculs* comme une composante *centrale*. Dans la littérature, cette composante semble secondaire, puisqu'elle n'apparait pas dans la thèse de Saboya (2010). Toutefois, elle s'est avérée plus importante que ce qu'elle laisse présager, ce contrôle permettant de mobiliser plusieurs autres composantes de manière efficace, comme le *choix éclairé* de stratégie, l'*anticipation*, le *contrôle sémantique* et *syntaxique*, la *vérification* et la *perception des erreurs*.

5.1.5 Autour de la sensibilité de la contradiction qui peut aboutir à son dépassement

La *sensibilité* et le *dépassement de la contradiction* se sont avérés des composantes importantes dans la résolution des deux problèmes. Comme l'analyse des deux problèmes le souligne (voir 3.2.2.1 et 3.2.2.3), la contradiction dans les deux problèmes n'est pas de même nature, l'une provenait de la nature de la réponse qui doit être entière (un nombre de wagons, problème des trains) et l'autre du fait qu'il n'y a pas de réponse au système d'équations (problème cafés/croissants). Trois structurations du contrôle ont pu être identifiées lors de l'analyse transversale (figure 5.5).

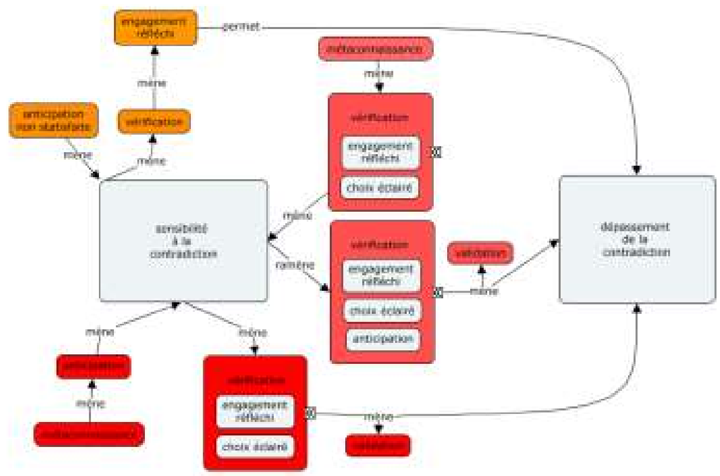


Figure 5.5 Schématisation des trois structurations ressorties autour de la *sensibilité* et du *dépassement de la contradiction*

La première structuration, en orange (figure 5.5), évoque comment les composantes du contrôle gravitent autour de la *sensibilité à la contradiction* lors de la résolution du problème des trains. Quatre équipes ont vécu un malaise par rapport à la résolution. Pour ce qui est des élèves au 1[er] cycle, ceux-ci ont plutôt eu une révélation en fin de résolution par rapport à l'inégalité de la situation (transporter « au moins » 588 passagers). Dans ce problème, la *sensibilité à la contradiction* vient principalement du contexte du problème qui demande de trouver un nombre de wagons. Ainsi, la réponse à cette question doit nécessairement être un nombre entier, car on ne pourrait pas attacher une portion de wagon à un train. Il a été possible de voir que la *sensibilité à la contradiction* semblait provenir d'une *anticipation* non satisfaite de la nature du résultat parfois explicite avant d'en arriver à la contradiction (les étudiants du BES qui cherchent à transporter exactement 588 passagers), parfois implicite (l'expression faciale de Maude, enseignante du secondaire lorsqu'elle arrive à une réponse non entière). Cette *sensibilité à la contradiction* mène les équipes à *vérifier* leur démarche afin de s'assurer qu'une erreur n'a pas été commise. Si aucune erreur n'est perceptible, cette *vérification* mène les équipes à un *engagement réfléchi*, un arrêt devant la réponse obtenue. Les participants reviennent alors au contexte du problème (il peut y avoir des places non occupées) et procèdent alors à l'arrondissement de la réponse pour satisfaire les contraintes du problème, ce qui leur permet de *dépasser la contradiction*. La structuration en orange (figure 5.5) montre ce mouvement de l'*anticipation* qui mènerait à la *sensibilité à la contradiction* pour se diriger vers le *dépassement* en passant par une *vérification* et un *engagement réfléchi*.

Les seconde et troisième structurations ont été observées lors de la résolution du problème des cafés/croissants. Une *sensibilité* et le *dépassement de la contradiction* ont pu être observés chez trois équipes (BES, 2e cycle du secondaire et enseignants du secondaire). Tandis que les étudiants du BEPEP ne sont pas sensibles à la contradiction lors de la résolution de ce problème et les élèves au 1er cycle ont un certain malaise face à la situation en étant incapable de trouver un couple solution unique. Dans ce problème, la contradiction provient de la donnée d'un système d'équations à trois équations et deux inconnues, système qui ne présente aucune solution. Ainsi, d'un point de vue mathématique, il est impossible de trouver une valeur pour le prix d'un café et une valeur pour le prix d'un croissant satisfaisant à trois différentes factures sans ajouter des informations supplémentaires au problème.

La deuxième structuration, en rouge pâle (figure 5.5), peut-être associée à la résolution de deux équipes, soit les enseignants du secondaire et les élèves au 2e cycle. Chez Shawn, élève du deuxième cycle, une *sensibilité à la contradiction* se manifeste lors de la comparaison des réponses différentes obtenues quand il résout deux systèmes d'équations différents. Le choix de Shawn de résoudre deux systèmes d'équations repose sur une *métaconnaissance* : une troisième équation n'est pas nécessaire, mais elle permet de *vérifier* qu'on a obtenu le bon couple solution. Cette *métaconnaissance* l'amène à trouver deux valeurs de x dans deux systèmes d'équations (*vérification* qui repose sur un *engagement réfléchi* et un *choix éclairé de* *stratégie*).L'obtention de ces deux valeurs mène à une *sensibilité à la contradiction* qui s'exprime par un recul physique par rapport à sa copie et par l'exclamation de l'onomatopée « woah ». Afin de s'assurer que la situation est bien incompatible, Shawn demande à son coéquipier de résoudre le deuxième système d'équations, alors que lui complète le premier en anticipant des solutions différentes. Ceci lui permet de *dépasser la contradiction* ainsi que de *valider* que la situation n'a pas de solution unique. Cette *métaconnaissance* guide aussi Laurent, un des enseignants du secondaire, à considérer le couple obtenu après résolution d'un système d'équations dans la troisième équation. Un regard sur les différentes données sans procéder à des calculs (*engagement réfléchi*) lui permet de constater que cette solution ne satisfait pas la troisième équation. La structuration en rouge pâle (figure 5.5) met en évidence le rôle joué par les *métaconnaissances* qui favoriseraient la mise en place de deux formes de *vérifications*. La première mènerait à une *sensibilité à la contradiction* et la seconde (en *anticipant* le résultat) aboutirait à un *dépassement de cette contradiction* et une *validation*.

La troisième structuration, en rouge (figure 5.5), porte principalement sur la résolution des étudiants du BES dans le problème des cafés/croissants. Après avoir choisi de résoudre le problème avec une matrice, Victor s'appuie sur une *métaconnaissance* sur les matrices : celles-ci peuvent être compatibles ou incompatibles. Ainsi, il *anticipe*, possiblement par une procédure acquise lors de son cours de mathématiques en algèbre linéaire, la possibilité que la matrice n'ait pas de solution. Toutefois, cette *anticipation* le déstabilise quand il constate, après calculs, l'incompatibilité de la matrice puisqu'il ne sait quel sens y donner dans le contexte du problème des cafés/croissants. Cette *sensibilité à la contradiction* enclenche une *vérification* qui repose sur un *engagement réfléchi* et un *choix éclairé de stratégie*. Les étudiants décident de résoudre chacun de leur côté un système d'équations différent (*choix éclairé* de stratégie qui provient d'un retour au contexte). Cette *vérification* permet à l'équipe de *valider* la solution trouvée à l'aide d'une matrice et ainsi aboutir au *dépassement de la contradiction*. Similaire à la seconde structuration, ici c'est plutôt l'*anticipation* couplée à une *métaconnaissance* qui mènerait à une *sensibilité à la contradiction* avant d'aboutir à une *vérification* permettant de la *dépasser* (boucle rouge figure 5.5).

5.1.5.1 Liens avec les structurations ressorties dans la littérature

Selon Saboya (2010), la *sensibilité à la contradiction* est préalable à son dépassement, ce qui implique une relation entre ces deux composantes. Cependant, l'analyse présentée dans cette section permet de voir que plusieurs autres composantes telles que l'*engagement réfléchi*, le *choix éclairé*, la *vérification* et des *métaconnaissances* peuvent être mobilisées afin de 1) pouvoir potentiellement être *sensible à cette contradiction* et pour 2) parvenir à *dépasser* cette dernière. En effet, le *dépassement de la contradiction* semble possible par un enchainement de réflexions et de *vérifications* qui permettent de poser un jugement par rapport à la contradiction vécue. Il est possible de remarquer que pour un même problème, la *sensibilité à la contradiction* peut provenir d'une *vérification* ou mener à une *vérification*. De plus, certaines observations à l'origine du questionnement soulevaient la possibilité d'être *sensible à la contradiction* sans être préalablement à l'aise avec la mathématisation d'un problème algébrique et les opérations permettant de conserver l'égalité d'une équation algébrique (section 1.2). En ce sens, les résultats présentés ci-dessus permettent de constater qu'il est effectivement difficile d'observer une *contradiction* sans certaines connaissances mathématiques préalables. Par exemple, les élèves au 1er cycle ne sont jamais vraiment parvenus à la *contradiction* du problème des cafés/croissants, puisque les procédures arithmétiques de résolution d'équations ne leur permettent pas d'y être sensibles. La seule méthode arithmétique permettant de constater l'incohérence du problème est d'observer les variations entre les trois énoncés, aspect qui n'est pas habituellement enseigné au début du secondaire. En ce qui a trait au problème des trains pour les élèves au 1er cycle, la *sensibilité à la contradiction* a été observée à travers la révélation que les wagons ne doivent pas être nécessairement pleins. C'est donc dire que la *contradiction* n'est pas apparue comme un doute face à la résolution, puisque les difficultés apparaissaient plutôt comme des erreurs sur le choix des procédures arithmétiques.

5.1.6 Autour de la métaconnaissance

Les participants ont eu recours à des *métaconnaissances* principalement dans la résolution du problème cafés/croissants. On a pu observer la mobilisation de cette composante à différents moments dans la résolution et pour différentes raisons, ce qui a ainsi joué sur les trois structurations du contrôle qui ressortent de l'analyse (voir figure 5.6).

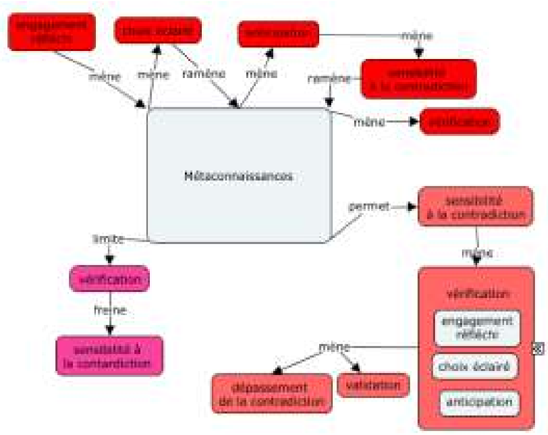


Figure 5.6 Schématisation des trois structurations ressorties autour de la *métaconnaissance*

La première structuration en rouge (voir figure 5.6) illustre la façon dont trois différentes *métaconnaissances* ont structuré la résolution du problème des cafés/croissants par les étudiants du BES. En effet, à la lecture du problème, les étudiants réalisent qu'ils sont confrontés à trois équations à deux inconnues (*engagement réfléchi* qui se traduit par une prise de distance par rapport aux données). Or, pour résoudre un système à deux inconnues, il suffit d'avoir deux équations (première *métaconnaissance*). Les étudiants mobilisent alors une autre *métaconnaissance* (la deuxième), verbalisant deux scénarios possibles : « soit qu'il y a une équation qui ne sert à rien, dont on ne se servira pas ou justement ça ne fonctionnera pas, on ne pourra pas trouver toutes ces équations vraies » (propos d'André, ligne 27 à 29). Ainsi, le fait d'avoir trois équations à deux inconnues les pousse à modéliser le problème par une matrice qui prend en considération l'ensemble des données, ce qui traduit un *choix éclairé* de stratégie. Cela amène ainsi Victor à mobiliser une *métaconnaissance* (en relation avec la seconde *métaconnaissance*) lorsqu'il mentionne qu'une matrice peut être compatible ou incompatible, procédant ainsi à une *anticipation* des possibles pour le problème des cafés/croissants. Comme il a été présenté dans la section précédente, cette *anticipation* mène à une *sensibilité à la contradiction*, qui déclenche chez l'équipe une nécessité de *vérification*. Cette *vérification* est aussi attribuable à une troisième *métaconnaissance* exprimée par André par rapport à ses capacités à résoudre sans erreurs une matrice. Ainsi, il sait qu'il doit être vigilant lors de cette résolution et qu'il doit *vérifier* ses calculs parce qu'il fait souvent lorsqu'il résout des matrices. Donc, malgré une *anticipation* préalable de la possible incompatibilité de la matrice, une troisième *métaconnaissance* en relation avec leur propre capacité à résoudre des matrices sans erreur de calcul amène un doute chez l'équipe et un besoin de *vérifier* leur résultat. Ainsi, la structuration en rouge (figure 5.6) montre comment des boucles de différentes *métaconnaissances* pourraient structurer une résolution en entier en amenant la mobilisation d'autres composantes telles que *l'engagement réfléchi*, le *choix éclairé*, l'*anticipation*, la *sensibilité à la contradiction* et la *vérification*.

La seconde structuration, en rouge pâle (figure 5.6), est attribuable au besoin de *vérification* ressenti par les élèves au 2e cycle du secondaire et en particulier par Shawn et par les enseignants du secondaire. La *métaconnaissance* mobilisée est en relation avec la résolution de systèmes d'équations : il suffit de deux équations pour résoudre un système du premier degré à deux inconnues. Cette *métaconnaissance* a permis à l'élève du deuxième cycle de ressentir un malaise face au problème, ce qui l'amène à mobiliser un *choix éclairé* de stratégie de *vérification* reposant sur l'utilisation de la résolution de deux systèmes d'équations différents en *anticipant* que ces deux systèmes peuvent aboutir à des résultats différents. C'est donc ce résultat qui lui permet de *valider* que la situation n'a pas de solution et ainsi de *dépasser la contradiction*. Pour Laurent, un des enseignants du secondaire, c'est la même *métaconnaissance* qui est mobilisée au départ. Celui-ci choisit alors de résoudre un système avec deux des équations (*choix éclairé* de stratégie), la troisième équation lui permettra de *vérifier* que le couple solution trouvé satisfait à cette troisième équation. Sans faire de calculs et en regardant les données, Laurent remarque que le couple solution trouvé ne peut satisfaire la troisième équation. Il est alors *sensible à la contradiction*. Il procède par la suite à une *validation* qui leur permet de *dépasser la contradiction*. La structuration rouge pâle (figure 5.6) illustre ainsi comment une *métaconnaissance* permet une *sensibilité à la contradiction* qui mènerait à une *vérification réfléchie* et *éclairée* permettant le *dépassement de cette contradiction* et une *validation* du problème.

La troisième structuration en rose (figure 5.6) est reliée à la résolution des étudiants du BEPEP, qui ont eux aussi mobilisé la *métaconnaissance* portant sur le fait que deux équations sont suffisantes pour résoudre le problème des cafés/croissants. Toutefois, cette *métaconnaissance* a plutôt freiné dans leur cas la mise en place d'une *vérification*. En effet, ils ont fait fi d'une des équations et ont résolu un système de deux équations à deux inconnues. Ce choix a limité la *perception de la contradiction* par les étudiants dans ce problème. C'est donc dire qu'une *métaconnaissance* pourrait freiner la *sensibilité à la contradiction* en limitant le besoin de *vérification*.

5.1.6.1 Liens avec les structurations ressorties dans la littérature

Saboya (2010) mentionne que le *choix éclairé* est la capacité à choisir la stratégie la plus efficace parmi différentes stratégies. Ainsi, pour ce faire, il semble important d'avoir une réflexion sur l'efficacité d'une stratégie et/ou d'une écriture, donc de déployer une *métaconnaissance*. L'analyse présentée dans cette section permet effectivement de voir que ces deux composantes semblent interagir entre elles. En effet, l'utilisation de différentes *métaconnaissances* a permis aux équipes de procéder à un *choix éclairé* de stratégie de résolution ou de *vérification*. De plus, Artigue (1993) mentionne que la *métaconnaissance* est attribuable aux moments de vigilance et aux difficultés envisageables, ce qui illustre une possible relation avec la *perception des erreurs* et la *vérification*. Le schéma présenté précédemment (figure 5.6) permet de développer ces relation avec la *métaconnaissance*. En effet, si celle-ci semble pouvoir favoriser le déploiement de composantes du contrôle telles que l'*anticipation* et la *vérification*, elle semble en contrepartie constituer un frein chez d'autres participants.

5.1.7 Autour de la *vérification* et de la *validation*

La *vérification* est une facette importante dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques. Elle constitue une des étapes dans certains modèles de résolution de problèmes (Polya,1957; Mason, 1997). C'est pourquoi il n'est pas étonnant que cette composante ait pu être observée lors de la résolution des deux problèmes. Cependant, elle a été mobilisée de diverses manières et à des fins différentes par les cinq équipes. De plus, plusieurs vérifications de différents ordres ont pu être observées au sain d'une même équipe. Ceci a ainsi joué sur les structurations du contrôle autour de la composante *vérification*. L'analyse transversale permet de discerner quatre structurations qui sont présentées à la figure 5.7. Dans chacune de ces structurations, une ou plusieurs *vérifications* sont mises en œuvre. De même, les structurations se terminent toujours par une *validation* de la réponse obtenue.

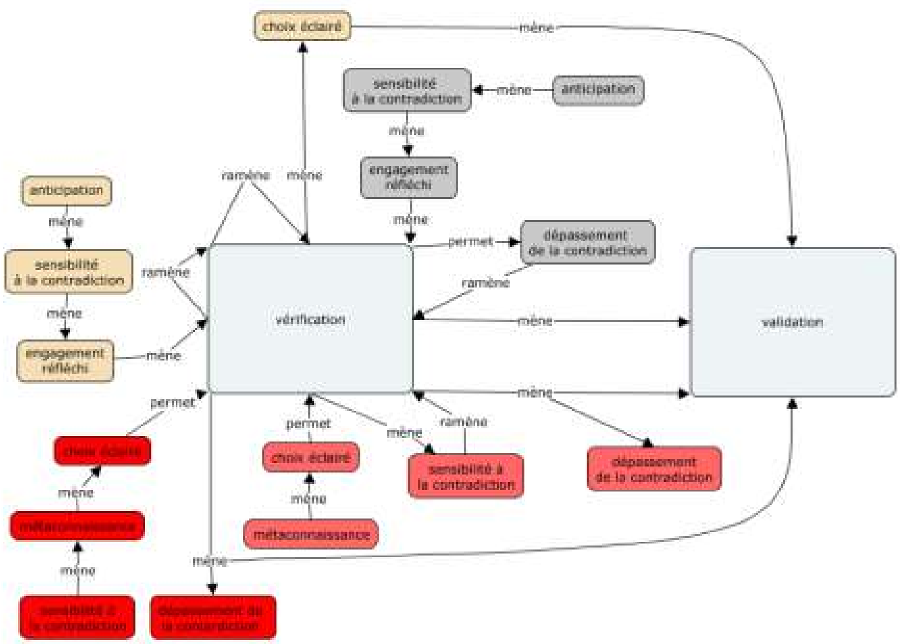


Figure 5.7 Schématisation des trois structurations ressorties autour de la *vérification* et la *validation*

La première structuration en beige (voir figure 5.7) illustre la façon dont trois *vérifications* peuvent permettre d'aboutir à une validation du problème. Cette structuration a pu principalement être observée dans la résolution du problème des trains par les élèves au 2e cycle du secondaire. Lors de la résolution de ce problème, Shawn manifeste une *anticipation* non satisfaite de la réponse obtenue qui n'est pas entière : « attends deux secondes, il se peut que ça ne soit pas bien. (Pause pour compléter le calcul). C'est ça, ce n'est pas pile » (ligne 12). Ce qui amène l'équipe à prendre un recul par rapport à la situation (*engagement réfléchi*). S'enclenche alors une boucle de trois *vérifications*. Tout d'abord, l'équipe effectue une *vérification sémantique* de la mise en équation par un retour sur l'énoncé du problème. Rappelons que Shawn a réalisé une schématisation opérationnelle du problème, et c'est vers cette schématisation qu'il revient pour procéder à la *vérification* portant sur la mathématisation du problème. Puis, l'équipe procède à une *vérification* syntaxique afin de s'assurer que toutes les opérations effectuées conservent l'égalité. Finalement, les étudiants procèdent à une *vérification* sur les calculs afin de savoir si une erreur a été commise. Ainsi, cette *triple vérification*, illustrée par les boucles qui partent de la composante *vérification* et qui y reviennent (voir figure 5.7), permet à l'équipe d'accepter la réponse non entière et aboutit à un *choix éclairé* de stratégie, l'arrondie de la réponse obtenue. Se pose alors la question de savoir s'il faut arrondir à l'entier supérieur ou inférieur. Ce questionnement débouche sur une *validation* puisque l'équipe constate que la réponse obtenue est la plus petite possible en arrondissant à l'entier supérieur. Ainsi, la structuration en beige illustre comment une boucle de diverses *vérifications* appuyées par une *anticipation*, une *sensibilité à la contradiction* et un *engagement réfléchi* pourrait permettre un *choix éclairé* menant à une *validation*.

La seconde structuration en gris (voir figure 5.7) est en relation avec la *perception des erreurs* et est reliée à la résolution des étudiants du BES dans le problème des trains et à celle des enseignants. Dans cette résolution, les étudiants du BES *anticipent* eux aussi une solution entière. Cependant, cette *anticipation* n'est pas satisfaite et mène à une *sensibilité à la contradiction*. Celle-ci amène les étudiants à prendre un recul face à la situation et à *vérifier* les calculs et à revenir sur le contexte du problème. Cette *vérification* permet à André de remarquer une erreur commise lors de la mise en équation en ce qui a trait à la traduction de la relation entre les deux types de wagons (8 wagons de plus). L'équipe modifie alors l'équation qui modélise le problème et la résout. Lorsqu'ils obtiennent à nouveau une réponse non entière, ils déploient un *choix éclairé* de stratégie en arrondissant la solution. Un des participants opte pour arrondir à l'entier supérieur, alors que l'autre participant opte pour la faire à l'entier inférieur. L'équipe procède donc à une *vérification* prennant la forme d'une injection de ces deux couples de valeurs arrondies dans l'équation initiale. Ceci leur permet ensuite de *valider* que seule la solution arrondie à l'entier supérieur satisfait la situation en transportant plus de 588 passagers. Dans le cas de Laurent, enseignant au secondaire, c'est aussi une *sensibilité à la contradiction* issue d'une *anticipation* non satisfaite qui l'amène à *vérifier* sa résolution de différentes façons. Il commence par questionner sa collègue pour savoir si elle aussi arrive à une solution décimale (17,5 et 24,5), puis il décide d'injecter les valeurs décimales trouvées dans l'équation initiale afin de vérifier les erreurs commises lors de la résolution du système d'équations. C'est finalement Maude qui percevra une erreur dans la partie décimale de la solution de Laurent (des septièmes ne peuvent pas se terminer par 0,5). Ces *vérifications* amènent l'équipe à constater que la réponse devra être arrondie, ce qui les amène à *vérifier* les résultats avec des arrondis inférieurs et supérieurs. Ces *vérifications* débouchent alors sur une *validation,* le couple solution 17 et 25 est le plus petit envisageable pour transporter tous les passagers. Pour résumer, la boucle en gris (voir figure 5.7) comprend différentes *vérifications* soutenues d'une *anticipation*, d'une *sensibilité à la contradiction* et d'un *engagement réfléchi*. Toutefois, la boucle de *vérifications* multiples pourrait passer par un *dépassement de la contra*diction avant d'atteindre une *validation*.

La troisième structuration en rouge pâle (voir figure 5.7) est en relation avec la mobilisation d'une *métaconnaissance*. Cette structuration provient de la résolution des élèves au 2^{e} cycle du secondaire pour le problème des cafés/croissants. Dans cette résolution, Shawn mobilise une *métaconnaissance* au début de la résolution concernant le nombre d'équations nécessaire pour résoudre ce problème (deux au lieu des trois proposées), ce qui l'amène à faire un *choix éclairé* de stratégie en résolvant deux systèmes d'équations distincts. Ceci lui permet de *vérifier* la compatibilité des trois équations. Cette *vérification,* qui passe par la résolution de deux systèmes d'équations, lui permet d'être *sensible à la contradiction* puisqu'il remarque que quelque chose ne fonctionne pas lorsqu'il obtient deux valeurs différentes pour le prix d'un café. Il conclura alors que le problème est impossible, *dépassant ainsi la contradiction* ressentie. Il tente ainsi de *vérifier* que son *anticipation* quant à la possibilité d'obtenir des réponses différentes est bien fondée. C'est ce qui lui permet de *dépasser la contradiction* et de *valider* que le système n'a pas de solution. Ainsi la structuration rouge pâle (voir figure 5.7) met de l'avant comment une *vérification* guidée par une *métaconnaissance* pourrait permettre une boucle comprenant une *sensibilité à la contradiction*, le *dépassement de celle-ci* et une *validation*.

La quatrième structuration en rouge (voir la figure 5.7) est également reliée à la *métaconnaissance* déployée cette fois-ci par les étudiants du BES dans la résolution du problème des cafés/croissants. La *vérification* est la même que celle produite par Shawn : résoudre deux systèmes de deux équations différents. Toutefois, cette *vérification* ne se met pas en place au début de la résolution comme c'est le cas de Shawn. Elle est une réponse à une première résolution déçue : la résolution du problème par une matrice. Malgré le déploiement d'une *métaconnaissance* autour des possibles solutions d'une matrice et donc à l'*anticipation* d'une possible incompatibilité, les étudiants se lancent dans une *vérification* de cette incompatibilité. Pour ce faire, ils ont recours à une méthode qu'ils maîtrisent et pour laquelle ils ne font pas d'erreurs de calcul comme c'est le cas pour la résolution de matrices : la résolution de systèmes d'équations. Victor et André résolvent chacun un système distinct de deux équations. Les réponses obtenues permettent de lever tout doute possible sur l'incompatibilité du système de trois équations à deux inconnues. Ils *dépassent ainsi la contradiction*. L'obtention de réponses différentes leur permet ainsi de *valider* que la situation est incompatible. La boucle rouge (voir figure 5.7) met ainsi de l'avant que la *vérification* pourrait aussi provenir d'une *sensibilité à la contradiction* et d'une *métaconnaissance* et pourrait ainsi permettre de la *dépasser cette contradiction* et de procéder à une *validation*.

5.1.7.1 Liens avec les structurations ressorties dans la littérature

Selon Saboya (2010), l'*anticipation*, la *vérification* et la *perception des erreurs* sont des composantes intiment reliées. L'analyse menée dans ce mémoire illustre cette relation. Cependant, on peut voir que la *sensibilité à la contradiction* peut aussi mener à une *vérification*. De plus, selon Saboya et Rhéaume (2015), la *vérification* peut mener à un *engagement réfléchi*. Les résultats présentés dans cette section ont plutôt permis d'observer l'inverse, l'*engagement réfléchi* a mené à diverses *vérifications*. De surcroit, l'analyse transversale amène un nouvel aspect pour la mobilisation d'une *vérification* et d'une *validation*. En effet, il a été possible d'observer une diversité de *vérifications* lors des résolutions, soit sémantique, syntaxique et portant sur les calculs. Lorsque la *vérification* assure qu'aucune erreur n'a été commise, elle permet par la suite de justifier et ainsi de *valider* la réponse. Comme on peut le voir dans la figure 5.7, la *validation* a pu être observée comme un autre niveau de *vérification* de la solution finale. Dans ce cas, la *validation* diffère de la *vérification* par des justifications qui permettent de poser un jugement sur la justesse de la solution finale.

5.1.8 Retour sur les structurations en bleu et en rouge

Les structurations identifiées en bleu sont mobilisées principalement par les élèves du 1er cycle, comme on peut le constater dans la figure 5.1 (voir 5.1.1). Elles font état des diverses résolutions arithmétiques menées par ces élèves essentiellement dans le problème des trains. La teinte en bleu pâle dans la composante *contrôle sur les calculs* illustre que ce *contrôle* se produit principalement par des calculs mentaux effectués par les élèves avant la résolution du problème des cafés/croissants, élément qui n'est pas présent dans les structurations en bleu plus foncé d'où la distinction dans la nuance de la couleur. Ainsi, les élèves atteignent une certaine *sensibilité à la contradiction* en voyant que certaines réponses sont à rejeter, et ce, sans procéder à des calculs écrits. La structuration bleue, dans cette même composante *contrôle sur les calculs*, se situe plutôt en cours de résolution et illustre les multiples approches de résolution qui s'appuient sur des algorithmes de division présents sur les traces écrites. La figure 5.1 permet de voir que le *contrôle sémantique*, le *choix éclairé* et le *contrôle sur les calculs* agissent ensemble. Cependant les sous-sections qui suivent permettent de remarquer qu'en s'intéressant au *contrôle sémantique*, on observe qu'il est présent dans l'ensemble de la boucle de résolution des élèves au 1er cycle (voir 5.1.2). Par contre, si on s'intéresse plutôt au *choix éclairé*, le *contrôle sémantique* devient un élément d'une boucle qui s'enclenche pour permettre la *vérification*. Si l'attention est portée sur le *contrôle sur les calculs*, le *contrôle sémantique* a un rôle plus secondaire.

Les structurations identifiées en rouge (voir figure 5.1, section 5.1.1) sont rattachées à plus d'une équipe, c'est ce qui amène à distinguer certaines structurations en une nuance de couleur plus pâle. Par exemple, dans la structuration rouge relevée dans la composante *choix éclairé*, on voit que le *choix éclairé* de stratégie est mobilisé sensiblement de la même façon par les élèves du 2e cycle et les étudiants du BES.

Une *métaconnaissance* et une *sensibilité à la contradiction* permettent de faire un *choix éclairé* de stratégie en mobilisant une approche utilisant l'ensemble des données. Cette approche permet aux deux équipes de *valider* l'incohérence des données dans le problème des cafés/croissants. Toutefois les sous-sections suivantes permettent de constater que lorsque l'on porte une attention particulière sur la composante *sensibilité à la contradiction*, on peut voir que celle-ci ne se déroule pas de la même façon dans les démarches entreprises par ces deux équipes. Une des deux structurations dans la composante *sensibilité à la contradiction* prendra alors une teinte plus pâle (figure 5.1). C'est donc dire, malgré une structuration semblable autour d'un *choix éclairé* de stratégie, les structurations autour de la sensibilité à la contradiction (et de son dépassement), des métaconnaissances ainsi que de la vérification et de la validation qui en découle varient dans les deux équipes.

5.2 Des éléments qui teintent les structurations du contrôle autres que les composantes

L'analyse des résolutions des cinq équipes a permis d'observer que certains éléments externes aux composantes du contrôle peuvent jouer un rôle dans la structuration de l'activité de contrôle. Rappelons que Rhéaume (2020) parle alors d'un contrôle restreignant (section 2.4). Elle précise que pour certaines décisions, l'élève s'appuie sur des croyances (conceptions, contraintes, habitudes), des règles ou des attentes scolaires, pour guider certaines de ses actions. L'analyse de ces données rejoint les constats de Rhéaume et précise d'autres éléments qui sont illustrés dans cette section. Sont présentés le recours à des outils mathématiques récemment vus par les participants, le recours à des situations mathématiques similaires, la perception personnelle des participants sur la résolution d'une situation mathématique en contexte scolaire, ainsi que la nature des échanges entre les partenaires qui diffère d'une équipe à l'autre.

5.2.1 Recours à des outils ou des connaissances mathématiques récentes

Cet aspect, qui peut se rapporter aux attentes ou aux règles scolaires du contrôle restreignant de Rhéaume (2020), a teinté certaines structurations du contrôle. Il a pu être observé d'une part chez les futurs étudiants au BEPEP, ainsi que chez les élèves au 1er cycle du secondaire. Ceux-ci explorent la possibilité d'utiliser le PPCM (ou le PGCD) lors de la résolution du problème des trains. Le recours à ces notions travaillées récemment dans leurs cours de mathématiques semble principalement lié à un *engagement réfléchi*, qui prend place au début de la résolution ou lors d'un blocage. En effet, chez les futurs enseignants du BEPEP, l'utilisation du PPCM est suggérée d'emblée par Félix comme outil de résolution. Pour les élèves au 1er cycle du secondaire, cet outil sert de tremplin pour relancer la résolution lorsqu'un blocage survient. D'autres outils ou connaissances sont invoqués par d'autres équipes. C'est le cas des étudiants au BES, qui optent pour l'utilisation d'une matrice pour mathématiser le problème des cafés/croissants, ce qui traduit un *choix éclairé* de stratégie. En effet, cet outil semble approprié puisqu'il permet de résoudre des systèmes d'équations du premier degré de deux inconnues à plus de deux équations. Ainsi, la présence de trois équations dans ce problème amène cette équipe à mobiliser cet outil qui a été travaillé dans le cours d'algèbre linéaire suivi la même session où a pris place l'expérimentation.

5.2.2 Référence à une expérience mathématique commune

L'expérience mathématique commune désigne l'utilisation ou la référence à la résolution d'un problème semblable. Mason (1997) mentionne que cette pratique permet de « dresser un répertoire de plans d'attaque tout en devenant un expert dans l'utilisation de ceux-ci » (p. 125). Cet aspect a pu être observé chez les étudiants au BES pour le problème des trains et chez les étudiants au BEPEP pour le problème des cafés/croissants. Chez les étudiants du BES, Victor fait mention d'un exposé oral portant sur la considération sur le reste d'une division en contexte lorsque l'équipe obtient une valeur non entière dans leur résolution (alors qu'ils s'attendaient à une valeur entière). Dans cet exposé vu dans leur premier cours de didactique, les futurs enseignants sont amenés à verbaliser la gestion du reste obtenu suite à une division, cette gestion se fait selon trois contextes. Le premier amène à arrondir à l'entier inférieur, le second à trouver la partie fractionnaire du quotient et le dernier à déterminer la partie décimale du quotient. Initialement, lors de leur résolution, André est *sensible à la contradiction* qui provient de son *anticipation* non satisfaite, mais il parvient à *dépasser cette contradiction* par le *choix éclairé* de Victor d'arrondir à l'entier supérieur. La réminiscence de cette expérience d'un exposé oral semble avoir permis la mobilisation de certaines composantes du contrôle et leur enchaînement.

Pour les étudiants au BEPEP, cet aspect, la référence à une expérience mathématique commune, a principalement guidé le *choix éclairé* d'une stratégie de résolution de la part de Félix, alors que celui-ci résout le problème des cafés/croissants. Il est alors guidé par la démarche de résolution adoptée lors du problème des fleurs vu préalablement lors d'un cours universitaire (section 3.3.2, figure 3.5). Cette expérience l'amène à prendre en considération le prix d'un café et d'un croissant comme un tout et ne pas chercher à isoler un de ces deux prix. De plus, on peut constater que c'est cette expérience, combinée à un *contrôle sur les calculs,* qui permet à l'équipe de *dépasser la contradiction*. En effet, lorsque la *contradiction* est révélée, les étudiants s'appuient sur le tout qu'ils ont trouvé (prix d'un café + prix d'un croissant), puisqu'il est indéniable pour eux qu'un café et un croissant ensemble doivent coûter 1,50$. C'est donc à partir de cette déduction que les étudiants du BEPEP trouvent une solution à la situation en déterminant les prix pour un croissant, pour un café et pour une combinaison d'un café et d'un croissant.

5.2.3 Perception qui se dégage des mathématiques

Le dernier aspect qui semble agir sur les structurations des composantes du contrôle s'apparente à l'aspect des croyances mathématiques du contrôle restreignant de Rhéaume (2020) et se traduit par les conceptions véhiculées lors de la résolution. La perception des mathématiques ou de la résolution de problèmes mathématiques est ressortie chez toutes les équipes. Pour les élèves au 1^er^ cycle du secondaire, on peut principalement la lier à un *engagement réfléchi*. En effet, lors de blocages, les élèves ont mentionné à plusieurs reprises qu'il devait exister une formule qui ne leur a pas encore été enseignée et qui permet de résoudre ce type de problème. Ils insinuent donc qu'en mathématiques, il semble exister une formule pour résoudre un problème donné. De plus, au début de la résolution, ces élèves se questionnent sur la nécessité d'utiliser ce qu'ils appellent la méthode « parfaite », privilégiant une approche séquencée. Cette perception de la résolution de problèmes guide les élèves vers un choix de diverses stratégies arithmétiques. Cette façon de procéder est semblable à la résolution de Francine qui approche le problème des trains par le « ce que je sais » et le « ce que je cherche ».

L'analyse des structurations des autres équipes permet d'observer comment la perception des participants sur certaines méthodes de résolution peut teinter ces structurations. Cette perception est reliée soit à la hiérarchisation des méthodes, soit à l'utilité de certaines méthodes. Alexandre, élève au 2^e^ cycle du secondaire, est confronté à un blocage face à la résolution d'un système de trois équations à deux inconnues dans le problème des trains. Il semble alors réticent à s'engager vers des essais-erreurs, approche qu'il dit être moins « élégante ». Ces essais lui auraient toutefois permis de résoudre le problème plus aisément. Cette perception sur les essais-erreurs teinte ainsi la structuration du contrôle autour du *choix éclairé* de stratégie. De plus, le choix de l'algèbre comme une méthode à privilégier est présente pour la résolution des deux problèmes puisque tous les participants reconnaissent l'importance de cette méthode (*choix éclairé*) et la puissance de cet outil. Même les élèves au 1^er^ cycle tentent de mathématiser le problème des trains avec une équation. En outre, Shawn, lors de l'entrevue alors qu'on lui demande s'il voit une autre méthode possible de résolution affirme que pour lui tout passe par l'algèbre.

Il est possible d'observer la référence à l'utilité de certaines méthodes, dans le problème des cafés/croissants, par les étudiants du BES. Ceux-ci utilisent une matrice parce qu'ils reconnaissent que les matrices permettent de résoudre le type de systèmes d'équations découlant de l'énoncé (trois équations à deux inconnues). Ce choix provient d'un cours universitaire de mathématiques, *Algèbre linéaire*, suivi à la même session qu'ils ont vécu l'expérimentation. Cependant la résolution de la matrice les amène à revenir à la résolution de deux systèmes d'équations, méthode mieux maîtrisée par les étudiants, pour laquelle ils reconnaissent faire moins d'erreurs de calcul (déploiement d'une *métaconnaissance*). Les étudiants font ainsi un lien entre leur expérience au secondaire et une méthode apprise lors d'un cours de mathématiques universitaire. Ils réalisent donc que cette approche, mathématisation par une matrice, peut aussi être utilisée dans des problèmes avec des contextes, comme le mentionne André lors de l'entrevue lorsqu'il souligne avoir réalisé que l'utilisation de la matrice est une « vraie méthode ». Ce constat semble faire référence aux matrices résolues dans leur cours d'algèbre linéaire, matrices qui ne sont pas utilisées pour résoudre des problèmes contextualisés.

Finalement, un autre élément qui teinte les structurations du contrôle et relié à la perception de la résolution de problèmes en mathématiques provient de l'*anticipation* d'une réponse entière dans le problème des trains. Pour certaines équipes (par exemple les étudiants du BES), cette *anticipation* provient d'une croyance sur le type de problèmes que l'on donne généralement aux élèves du secondaire. En effet, André mentionne qu'au secondairen les solutions sont entière : « surtout en introduction, dans un certain problème on essaie d'avoir une réponse qui tombe, alors je pense que j'avais un peu ce mindset-là d'être dans la peau d'un élève au secondaire » (lignes 589 à 590). Cette anticipation non satisfaite de la solution entière amène Maude, enseignante du secondaire, à dépasser la contradiction par une réflexion sur son propre enseignement et le type de problème qu'elle propose à ses élèves, comme on le voit dans l'extrait suivant : « Mais cela a duré deux secondes, parce que moi je sais que je fais des problèmes comme ça, où ça n'arrive pas tout le temps juste et il faut arrondir et tout ça » (lignes 103, 104). Ainsi, l'expérience professionnelle semble teinter les structurations du contrôle. De plus, la perception des mathématiques dans l'enseignement est également apparue lors de la résolution du problème des cafés/ croissants, en ce qui a trait au *dépassement de la contradiction*. En effet, la majorité des équipes ont tenté de justifier l'incohérence de ce problème soit par des raisons extra-mathématiques en relation avec la vie courante, soit en extrapolant le problème. Selon Laurent, cela est attribuable à l'expérience qu'ils ont des mathématiques en général, comme il le mentionne lors de l'entrevue : « on est habitués de chercher une solution alors lorsque l'on a réduit les deux dernières à une seule, ça nous met tout de suite dans un monde rassurant » (lignes 85 à 87).

5.2.4 Discussion autour de la nature des échanges menés entre les différents partenaires

Cette étude illustre l'importance des échanges entre les partenaires, ceux-ci jouant un rôle essentiel dans les structurations du contrôle et leur dynamisme. Toutefois, ces échanges ne sont pas de même nature selon les équipes, ce qui questionne la composition des équipes pour favoriser un travail de structuration entre les composantes du contrôle. Le nombre de participants dans chacune des équipes ainsi que les connaissances et difficultés ressenties par chaque participant semble aussi jouer un rôle dans la structuration de l'activité de contrôle. Dans les structurations rapportées dans la section 5.1, l'accent n'a pas été mis sur la mobilisation des composantes par chacun des partenaires. Toutefois, l'analyse menée au chapitre IV a permis de constater que les composantes du contrôle manifestées par les différents partenaires se chevauchent, s'entrecroisent et font « bouger » les structurations du contrôle.

Pour les étudiants du BES, lors de la résolution du problème des trains, on assiste à une construction du *contrôle sémantique* et du *contrôle sur les calculs* par un des partenaires, Victor. Cette construction prend appui sur la manifestation d'un *contrôle sémantique*, d'un *contrôle sur les calculs*, d'*un engagement réfléchi*, d'*un choix éclairé* d'écriture et de stratégie manifestés par son partenaire, André. Les échanges entre les deux partenaires sont soutenus tout au long de la résolution. La mobilisation de certaines composantes par André n'aurait peut-être pas pu être décelée sans les interrogations de Victor qui permettent à André de préciser qu'une lettre représente un nombre et non un objet (*contrôle sémantique*). La figure 5.7 illustre certaines interactions entre les composantes mobilisées par les deux coéquipiers. On peut ainsi observer qu'à différents moments de la résolution, les difficultés sémantiques de Victor viennent s'insérer dans la résolution d'André, amenant ce dernier à mobiliser différentes composantes comme la *vérification*, le *contrôle sur les calculs* et le *contrôle sémantique*.

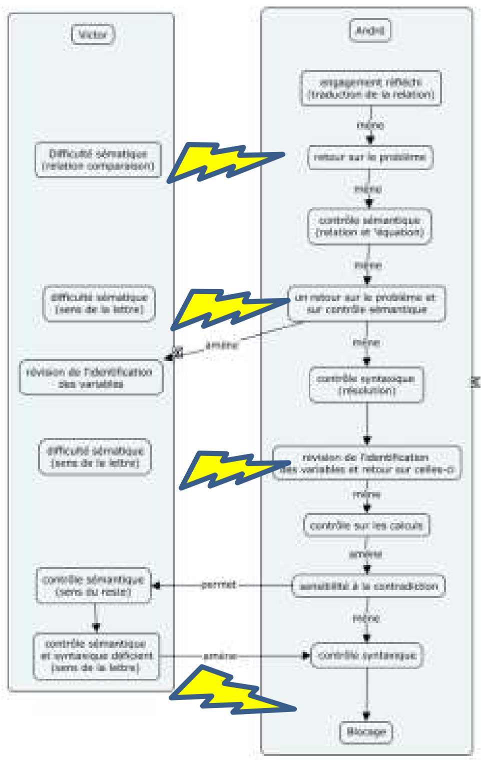


Figure 5.8 Rôle des interactions entre les partenaires dans la mobilisation des composantes du contrôle chez les étudiants du BES dans le problème des trains

Pour les trois partenaires du BEPEP, lors de la résolution des deux problèmes, on peut percevoir que deux des étudiants, Francine et Félix travaillent de concert, leurs échanges permettant d'alimenter le dynamisme entre les composantes du contrôle tout le long de la résolution. Le troisième participant, Pierre, est plus discret et même absent à certains moments. La figure 5.8 montre effectivement son absence d'interventions lors de la mise en place de la nouvelle variable dans le problème des trains. On peut également voir que la mise en place de la nouvelle variable se produit par l'*engagement réfléchi* de Félix, ce qui permet à Francine de mettre en place un *contrôle sémantique* en proposant une nouvelle variable.

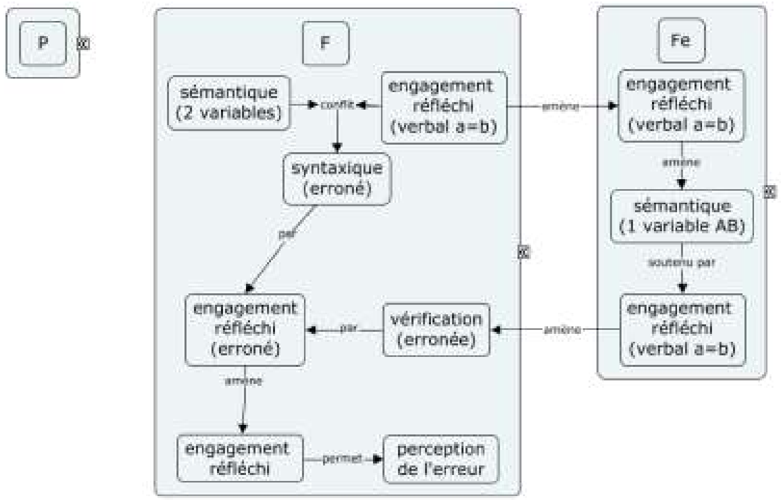


Figure 5.9 Rôle des échanges entre les partenaires dans la mobilisation des composantes du contrôle chez les étudiants du BEPEP dans le problème des trains

Toutefois, une intervention de Pierre amène l'équipe à se lancer dans des explicitations permettant de mettre en lumière le dynamisme entre les composantes du contrôle. Ces explications n'auraient peut-être pas eu lieu sans cette intervention. On peut également noter une absence de *sensibilité à la contradiction* commune à Francine et Félix dans la résolution du problème des cafés/croissants, ces deux participants s'appuyant sur une démarche de résolution semblable et ne se questionnant pas sur la nature de leur réponse. Ce n'est que lors de l'entretien d'explicitation que les étudiants sont *sensibles à la contradiction*. Cette sensibilité réenclenche un travail de *vérification* et de *dépassement de la contradiction*.

Dans d'autres équipes, notamment les enseignants du secondaire et les élèves au 2e cycle du secondaire, on peut remarquer que les interactions sont d'un autre ordre. En effet, chacun des participants aurait pu résoudre chacun des problèmes de façon individuelle. Les échanges sont ici moins percutants pour les structurations du contrôle si ce n'est pour vérifier ce que chacun a fait. Il s'agit ici de deux équipes constituées de deux participants. Dans le cas des élèves au 2e cycle, Shawn montre une grande confiance dans la résolution des problèmes, ne semblant pas prendre en considération la résolution de son partenaire qui utilise des voies différentes pour les résoudre. Alexandre profite toutefois des échanges pour progresser dans sa résolution. Il mobilise grâce aux explications et constats faits par Shawn plusieurs composantes du contrôle, et son travail est réenclenché.

Finalement, le groupe d'élèves au 1er cycle comprend quatre élèves. La résolution des deux problèmes se fait de façon chaotique et il a été difficile de dégager les structurations des composantes du contrôle qui prennent place. Un des élèves, Nicola, résout de son côté et communique au groupe une fois qu'il trouve quelque chose d'intéressant, ce qui n'est pas le cas des autres membres de l'équipe qui lancent diverses idées. Les échanges sont nombreux, mais peu structurés. Toutefois, les différents partenaires arrivent ensemble à valider ou infirmer les différentes approches qu'ils mettent en place, ce qui leur permet de progresser dans la résolution des problèmes.

CONCLUSION

Dans ce projet, l'intérêt est porté sur le dynamisme entre les composantes du contrôle. Effectivement, l'objectif de cette recherche est de mieux comprendre la structuration du contrôle dans l'activité mathématique lors de la résolution de problème algébrique. Cet intérêt est survenu principalement à partir de l'observation du chercheur du mémoire lors d'un cours de maitrise, alors qu'une collègue n'est pas parvenue à percevoir la contradiction dans le problème des cafés/croissants en raison de la mobilisation d'un fort contrôle *syntaxique* qui n'était pas soutenu par d'autres composantes telles que la *vérification* ou le *contrôle sémantique*. Or, la littérature s'intéressant à l'activité de contrôle, quoiqu'il soit possible d'extraire certains liens entre les composantes, porte davantage sur la description des composantes elles-mêmes.

Ainsi, pour répondre à ces objectifs, cinq équipes aux profils mathématiques différents ont été invitées à résoudre trois problèmes en équipes, afin de permettre une observation et une analyse de l'activité de contrôle à travers leurs interactions. Par la suite, les participants étaient invités à participer à un entretien d'explicitation afin de clarifier certaines actions posées lors de la résolution. La cueillette non seulement des traces écrites de la résolution, mais aussi des traces audio et vidéo a permis une analyse de la démarche, des paroles et des gestes des participants. En conclusion, un retour sur la façon dont les objectifs ont été répondus est présenté. Par la suite, les limites observées de la recherche sont décrites, ainsi que les aspects qui auraient pu être faits autrement. Finalement, des retombées de la recherche et quelques ouvertures de cette recherche sont explicitées.

6.1 Un retour sur l'objectif de la recherche

C'est par l'étude des structurations autour d'une composante ciblée que diverses structurations de l'activité de contrôle ont pu être mises en exergue. Trois structurations ont émergé de l'analyse transversale autour des composantes : *contrôle sémantique*, *choix éclairé*, *contrôle sur les calculs, sensibilité à la contradiction* et *métaconnaissances*. Pour la composante *vérification*/*validation,* quatre structurations ont émergé. Cette analyse transversale permet de saisir la structuration du contrôle sous différents angles et de voir que l'interaction entre les composantes varie selon la lunette que l'on choisit, c'est-à-dire la composante choisie pour être *centrale*. Ainsi, la synthèse des structurations autour de ces six composantes a permis de ressortir dix-neuf structurations génériques repérées pour une ou plusieurs équipes et pour un ou pour les deux problèmes (chapitre V, figure 5.1).

La mise en évidence de ces structurations a illustré certaines relations entre les composantes du contrôle issues de la littérature, comme entre l'*anticipation,* la *vérification* et la *perception des erreurs*. Toutefois, cette analyse va plus loin. Il a été possible de constater que ces relations peuvent être des fois assujetties à d'autres composantes qui viennent se greffer autour des liens connus entre ces composantes, c'est le cas de la *métaconnaissance*, du *contrôle sémantique* et du *contrôle sur les calculs*. De plus, l'analyse met de l'avant l'émergence de nouvelles relations entre les composantes comme entre la *validation* et la *métaconnaissance* pour le problème cafés/croissants ou bien le lien entre la *validation* et la *vérification*, qui apparait dans cette recherche comme deux niveaux d'une même composante la *vérification*/*validation*. En effet, la *vérification* a davantage le rôle de s'assurer qu'un résultat est exact soit par un *contrôle sur les calculs* ou par l'utilisation d'une stratégie différente de résolution et la *validation* vient davantage éclairer pourquoi un résultat est « vrai » en fournissant des arguments mathématiques, parfois liés à des *métaconnaissances*.

Cette recherche a aussi permis de voir le rôle du *contrôle sur les calculs* dans une résolution algébrique. Il s'est effectivement avéré plus important dans la résolution qu'il ne l'était envisagé au départ ou qu'il n'est envisagé dans les recherches (Saboya et Rhéaume, 2015). Ceci concorde avec les propos de Grugeon-Allys et Pilet (2017) qui affirment que le calcul réfléchi tout comme le calcul algébrique repose sur la transformation d'expressions à dénotation fixe. Leur réécriture s'appuie sur le sens des expressions et sur les propriétés des opérations et des nombres. De même, il a été possible de constater que ce contrôle permet de mobiliser plusieurs autres composantes de manière efficace, comme le *choix éclairé* de stratégie, l'*anticipation*, le *contrôle sémantique* et *syntaxique*, la *vérification* et la *perception des erreurs*.

Un autre aspect intéressant qui ressort de cette recherche est l'apport de la composante *métaconnaissance* dans la structuration du contrôle, puisque cette composante est très peu discutée dans les autres recherches menées sur le concept de contrôle. Dans le problème des cafés/croissants, elle s'est avérée une composante importante dans différentes structurations du contrôle. Par exemple, la mobilisation de *métaconnaissances* peut permettre d'être *sensible à la contradiction* (c'est le cas des élèves au 2e cycle du secondaire), et la *sensibilité à la contradiction* peut aussi mener à la mobilisation de *métaconnaissances* (tel que vu à travers l'analyse des étudiants du BES). De plus, il a été possible de voir que différentes *métaconnaissances* peuvent structurer toute une résolution par des boucles entre cette composante et différentes autres comme l'*anticipation*, le *choix éclairé* et la *vérification*. Enfin, n'oublions pas qu'il a été possible de constater que l'utilisation de *métaconnaissances* peut aussi limiter ou freiner la mobilisation d'autres composantes comme la *vérification* et la *sensibilité à la contradiction*.

Finalement, cette recherche permet de voir que divers aspects externes aux composantes du contrôle de Saboya (2010) peuvent venir jouer sur la structuration du contrôle, comme le recours à des outils mathématiques récents qui semble favoriser l'*engagement réfléchi* et le *choix éclair*é. Il a aussi été possible de voir que l'utilisation d'expériences communes a également joué sur le *choix éclairé* de stratégie. Finalement, la perception des mathématiques, élément du contrôle restreignant de Rhéaume (2020), semble agir sur la structuration du contrôle. La majorité des équipes a mobilisé (ou retenu), à un moment ou à un autre, une composante du contrôle selon une croyance, une attente ou une habitude. Par exemple, face à une impasse, les élèves au 1er cycle du secondaire ont évoqué à plusieurs reprises l'existence d'une règle qui ne leur a pas encore été enseignée permettant de résoudre les différents problèmes. C'est donc dire que l'*engagement réfléchi* des élèves passe par cette règle. Chez les élèves au 2^{e} cycle du secondaire, Alexandre était réticent à choisir une méthode par essais-erreurs qui lui aurait pourtant permis de résoudre le problème et de dépasser son blocage. Les raisons invoquées sont le manque d'élégance de cette méthode. Chez les étudiants au BES, c'est plutôt la perception des mathématiques dans l'enseignement qui a joué sur l'expression d'une *sensibilité à la contradiction*. Selon André, lors de l'introduction de l'algèbre, il est préférable d'avoir des problèmes qui « arrivent justes », cette croyance lui a fait croire qu'une erreur avait été commise dans sa résolution du problème des cafés/croissants. Chez les enseignants, Maude a pu *dépasser la contradiction* dans le problème des trains en se rapportant sur sa propre pratique. En effet, elle propose elle aussi, des problèmes dont la réponse doit être arrondie à l'entier supérieur ou inférieur.

6.2 Limites de la recherche

Certains aspects méthodologiques choisis ont nécessairement joué sur les résultats obtenus. Une première limite est le fait de n'avoir qu'une seule équipe pour un même niveau scolaire. En sélectionnant une seule équipe par niveau, il est difficile de décrire le potentiel de structuration de l'activité de contrôle pour un niveau spécifique. Interroger plusieurs équipes d'un même niveau aurait permis de décrire de façon plus fine les structurations associées à un certain bagage mathématique. Toutefois, l'observation d'équipes ayant des profils mathématiques différents a permis de voir une diversité de structurations avec des bagages mathématiques différents autour de la résolution d'un même problème. De plus, cela a permis de constater que des aspects autres que les composantes du contrôle de Saboya (2010) se retrouvent chez plusieurs équipes malgré des expériences mathématiques différentes.

Une seconde limite est liée au fait que les problèmes demandaient une certaine connaissance de l'algèbre, bagage que les élèves au 1er cycle n'avaient pas encore acquis. Ils ont donc éprouvé certaines difficultés lors de la résolution, difficultés qui auraient sûrement été différentes si des élèves de 2e année du 1e cycle avaient plutôt sélectionnés. Par ailleurs, la résolution des élèves de 1e année du 1e cycle a mis en lumière le rôle des connaissances mathématiques dans l'activité de contrôle et la façon dont ils ont été en mesure de progresser dans leur résolution grâce à la mobilisation de structurations du contrôle autres que celles mises en place par les autres équipes.

Le temps consacré à la résolution des problèmes et à l'entretien d'explicitation est une troisième limite dans ce projet. En effet, les participants avaient environ 1h pour résoudre les trois problèmes, ce qui ne laisse que 20 minutes par problème.Il devenait, par le fait même, difficile pour les participants de poser un regard sur leurs actions de la résolution du premiers problèmes pendant l'entretien d'explicitation. De plus, malgré une feuille de notes orientée sur l'observation de la mobilisation de diverses composantes pour chacun des problèmes par les différents participants d'une équipe, la prise de notes par le chercheur dans le feu de l'action a rendu l'entretien d'explicitation difficile à gérer. En effet, puisque la résolution du premier problème était éloignée dans le temps par rapport à l'entretien d'explicitation, il devenait difficile d'associer certaines composantes ciblées par les notes aux actions posées. Ainsi, il aurait été préférable de mener un entretien d'explicitation avec les participants après la résolution de chacun des problèmes, afin que les actions posées soient fraiches dans la mémoire à la fois des participants et du chercheur. Cela aurait probablement orienté la démarche des participants lors des problèmes subséquents, mais cela aurait aussi permis des entretiens plus riches et plus significatifs quant aux différentes structurations du contrôle.

6.3 Retombées de cette recherche et prolongements

Les résultats obtenus dans cette recherche peuvent être réinvestis en formation initiale et en formation continue. En effet, un regard sur l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques à travers les composantes du contrôle et du dynamisme entre ces composantes permet de poser un nouveau regard sur l'activité mathématique. Cette recherche a permis de constater que le développement des composantes du contrôle chez les élèves ainsi que la mise en place d'une dynamique entre ces composantes permettent une activité mathématique réfléchie et riche. De plus, les futurs enseignants et les enseignants de mathématiques peuvent prendre conscience de l'importance de favoriser les échanges que ce soit entre les élèves ou entre les enseignants et les élèves pour susciter la mobilisation de diverses composantes du contrôle tout en favorisant les relations entre ces composantes. Cette étude permet aussi de constater l'avantage de présenter des activités variées aux élèves permettant ainsi la mobilisation d'une panoplie de composantes du contrôle et l'émergence de différentes structurations du contrôle. Les élèves peuvent alors vivre une expérience mathématique stimulante et réfléchie leur permettant de développer un contrôle sur leur activité mathématique.

En ce qui a trait aux retombées scientifiques, cette recherche est une première avancée vers l'étude des structurations des composantes du contrôle. Elle permet d'en savoir plus sur le dynamisme entre les composantes du contrôle qui n'a pas été beaucoup étudié jusqu'à maintenant. De plus, cette première avancée par rapport aux structurations du contrôle aidera à la conceptualisation de tâches permettant de favoriser le dynamisme entre les composantes du contrôle et leur mobilisation dans une activité de recherche portant sur le contrôle.

Comme explicité dans la section 5.2, cette étude montre que d'autres facteurs externes aux composantes du contrôle de Saboya (2010) agissent sur les structurations, comme l'expérience commune des participants, les concepts récemment étudiés et la perception des mathématiques. Dans une recherche ultérieure, il pourrait être intéressant d'explorer spécifiquement ces aspects à travers, par exemple, l'étude de l'activité de contrôle sous une approche socio-culturelle en prenant en compte l'environnement et la communauté dans lesquels l'élève évolue en mathématiques. Cette étude serait porteuse, elle permettrait d'observer l'ensemble des facteurs externes aux composantes du contrôle. De plus, Hitt (2004) différencie deux types de contradictions, soit la contradiction cognitive et la contradiction logique. Cet aspect est absent dans le cadre élaboré par Saboya (2010). Comme mentionné au point 5.1.5, cette étude a permis d'observer la sensibilité à la contradiction sans vraiment approfondir le type de contradiction rencontré sous l'angle d'une contradiction cognitive ou logique. Il serait donc intéressant de voir comment ces deux types de contradiction agissent sur la structure du contrôle et si celles-ci devraient être distinguées dans le cadre du contrôle de Saboya (2010). Finalement, le point 5.2.3 souligne l'importance des échanges entre les partenaires, ces échanges jouent un rôle essentiel dans les structurations du contrôle et leur dynamisme. Toutefois, ces échanges ne sont pas de même nature selon les équipes. Dans une recherche ultérieure, il serait intéressant de s'intéresser à la composition des équipes pour étudier le travail de structuration entre les composantes du contrôle. Le nombre de participants dans chacune des équipes semble aussi jouer un rôle sur les structurations mobilisées ainsi que les connaissances et difficultés ressenties par chaque participant.

RÉFÉRENCES

Artigue, M. (1993). Connaissances et métaconnaissances -une perspective didactique. Dans Baron M,. Robert A. (Dir.), *Métaconnaissances en lA, en EIAO_et_en_ didactique des mathématiques* (p.29-54). Cahier de DIDIREM, IREM, Paris.

Bednarz, N., Janvier, B., Mary, C. et Lepage, A. (1992). *L'algèbre comme outil de résolution de problèmes : une réflexion sur les changements nécessaires dans le passage d'un mode de traitement arithmétique à un mode de traitement algébrique*. Actes du Colloque du programme de Recherche sur l'émergence de l'algèbre, 17-31.

Bélisle, J.G. (1999). La résolution de problème dans ma classe. *Instantanés Mathématiques*. *XXXV* (4), 5-13

Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherche en didactique des mathématiques, 7* (2), 33-115.

Cipra, B. (1985). *Erreurs… et comment les trouver avant le prof* .. ». Ed. InterEditions, Paris.

Coppé, S. (1993) *Processus de vérification en mathématiques chez les élèves de première scientifique en situation de devoir surveillé*. (Thèse de doctorat inédite). Université de Lyon.

Dufour, S. et Jeannotte, D. (2013). La tâche non routinière sous l'angle du contrôle : un exemple en calcul différentiel. *Bulletin AMQ*, *53*(4), 29-43.

Hitt, F. (2004). Les représentations sémiotiques dans l'apprentissage de concepts mathématiques et leur rôle dans une démarche heuristique. En Gisèle Lemoyne (Ed.), *Le langage dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques : complexité et* 8 *diversité des cadres* *d'étude*. *Revue des Sciences de l'Éducation*. Volume XXX, no. 2, pp. 329-354.

Hitt, F. et Morasse, C. (2009). Développement du concept de covariation et de fonction en 3ème secondaire dans un contexte de modélisation mathématique et de résolution de situations problèmes**.** Proceedings CIEAEM 61. *Quaderni di Ricerca in Didattica Matematica,* G.R.I.M. (Department of Mathematics, University of Palermo, Italy). 2. 208-216.

Jeannotte, D. (2015). *Raisonnement mathématique: proposition d'un modèle conceptuel pour l'apprentissage et l'enseignement au primaire et au secondaire* (Thèse de doctorat inédite). Université du Québec à Montréal.

Kargiotakis, G. (1996) *Contribution à l'étude de processus de contrôle en environnement informatique: le cas des associations droites-équations*. (Thèse de doctorat inédite). Université Paris VII-Denis Diderot.

Karsenti, T. et Savoie-Zajc, L. (2011). *La recherche en éducation : Étapes et approches*. 3e édition. Montréal : ERPI.

Kouki, R. (2007). L'articulation syntaxes/sémantique au Coeur des analyses didactiques au niveau de l'algèbre élémentaire? Dans Bednarz N.,Mary C. (Dir.), *Actes du colloque international EMF 2006*. Sherbrooke (Québec).

Lajoie, C., et Bednarz, N. (2014). La résolution de problèmes en mathématiques au Québec: évolution des rôles assignés par les programmes et des conseils donnés aux enseignants. *Éducation et francophonie*, *42* (2), 7-23.

Lee, L. et Wheeler, D. (1989). The arithmetic connection. *Educational Studies in Mathematic, 20, 41-54*.

Margolinas, C. (1989). *Le point de vue de la validation: essai de synthèse et d'analyse en didactique des mathématiques*. (Thèse de doctorat inédite). Université Joseph Fourier

Martinez, C. (1997). L'entretien d'explicitation comme instrument de recueil de données. *Expliciter, 21*, 2–7.

Mason, J. (1994). *L 'esprit mathématique*. Mont-Royal, QC : Modulo.

MEQ (2006). Ministère de l'éducation du Québec, Gouvernement du Québec. *Programme de formation de l'école québécoise : Enseignement secondaire, premier cycle*: Ministère de l'Éducation.

MELS (2007). Ministère de l'éducation, du Loisir et du Sport, Gouvernement du Québec. *Programme de formation de l'école québécoise : Enseignement secondaire, deuxième cycle*: Ministère de l'Éducation.

Perkins, D.N., et Simmons R. (1988). Patterns of Misunderstanding : An Integrative Model for Science, Math, and Programming. *Review of Educational Research*. *58* (3), 303-326.

Piaget, J. (1974). Recherches sur la contradiction. Avec la collaboration de A. Blanchet, G. Cellerier, C. Dami. M. Gainotti-Amann, Ch. Giliéron, A. Henriques-Christophides, M. Labarthe, 1. De Lannoy, R. Maier, D. Maurice, 1. Montangero, O. Mosimann, C. Othenin-Girard, D. Uzan, Th. Vergopoulo. *Les différentes formes de la contradiction*. *Volume* 2. Presses Universitaires de France.

Polya, G. (2004). *How to solve it: A new aspect of mathematical method* (No. 246). Princeton University press.

Rhéaume, S. (2020), *Les prises de décision des élèves du 3ᵉ cycle du primaire lors de la résolution de problèmes de proportion : une analyse des contrôles mobilisés* (Thèse de doctorat inédite). Université Laval.

Saboya, M., Bednarz, N. et Hitt, F. (2015). Le contrôle en algèbre : Analyse de ses manifestations chez les élèves, éclairage sur sa conceptualisation. Partie 1 : La résolution de problèmes. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 20,* 61-100.

Saboya, M. (2010). *Élaboration et analyse d'une intervention didactique co-construite entre chercheur et enseignant, visant le développement d'un contrôle sur l'activité mathématique chez les élèves du secondaire*. (Thèse de doctorat). Université du Québec à Montréal.

Saboya, M. et Rhéaume, S. (2015). La résolution d'un problème de comparaison de cinq fractions : quel contrôle exercent les élèves. *Petit x, 99,* 5-31.

Vermersch, P. (1994). L'entretien d'explicitation. *Les cahiers de Beaumont, 52bis-53*, 63-70.

Vermersch, P. (2000). *L'entretien d'explicitation* (3e éd.. ed.). Issy-les-Moulineaux: ESF.

Références dans des dictionnaires

Articulation. Dans J. Rey-Debove et A. Rey (dir.) (2010), *Le nouveau Petit Robert dictionnaire alphabétique et analogique de la langue française*. (p.149). Le Robert.

Contrôle. Dans J. Rey-Debove et A. Rey (dir.) (2010), *Le nouveau Petit Robert dictionnaire alphabétique et analogique de la langue française*. (p.532-533). Le Robert.

Dynamique. Dans J. Rey-Debove et A. Rey (dir.) (2010), *Le nouveau Petit Robert dictionnaire alphabétique et analogique de la langue française*. (p.796). Le Robert.

Interaction. Dans J. Rey-Debove et A. Rey (dir.) (2010), *Le nouveau Petit Robert dictionnaire alphabétique et analogique de la langue française*. (p.1351). Le Robert.Lien. Dans J. Rey-Debove et A. Rey (dir.) *Le nouveau Petit Robert dictionnaire alphabétique et analogique de la langue française*. (p.1455). Le Robert.

Relation. Dans J. Rey-Debove et A. Rey (dir.)(2010), *Le nouveau Petit Robert dictionnaire alphabétique et analogique de la langue française*. (p.2175). Le Robert.

Structuration. Dans R. Legendre (1993), *Dictionnaire actuel de l'éducation*. (p.1267) Guérin.

ANNEXE A

LES TROIS PROBLÈMEX UTILISÉS LORS DE L'EXPÉRIMENTATION

Tâche 1

Il y a 588 passagers à transporter entre 2 villes. On dispose de 2 trains pour le faire. Un des trains a uniquement des wagons à 12 places et l'autre uniquement des wagons à 16 places. En sachant que le train formé de wagons à 16 places ait 8 wagons de plus que l'autre, combien doit-on accrocher de wagons après chacune des locomotive?

Tâche 2

Un expert efficace travaille dans une usine de fabrication de robots. En cinq minutes, un robot construit une copie de lui-même et se déplace ensuite jusque dans une caisse où il est emballé pour être expédié vers l'extérieur. L'expert a une idée géniale et découvre une façon d'augmenter le rendement. Il fabrique un robot capable de construire deux de ses semblables en cinq minutes. Le robot-mère se déplace ensuite dans une caisse où il est emballé pour être expédié vers l'extérieur. L'expert court voir sa supérieure pour lui expliquer qu'il a doublé la production et met en route le robot au préalable pour être à même de lui montrer sa nouvelle invention. Lorsqu'il arrive, sa supérieure est en réunion, et il doit attendre trois heures avant de pouvoir la rencontrer. Quand elle est libre, l'expert lui explique son invention, celle-ci regarde l'horloge et court, alarmée, jusqu'à l'usine. Pourquoi panique-t-elle? Combien de robots l'expert s'attend-il qu'elle trouve?

Tâche 3

Au café du coin, un café et trois croissants ont coûté 2,70$ à Ève-lyne, Émilie a déboursé 3$ pour deux cafés et deux croissants et trois cafés et un croissant ont coûté 3,50$ à Julien. Trouve le prix d'un café, ainsi que le prix d'un croissant.

ANNEXE B

GRILLES D’OBSERVATIONS

Tâche 1

Quel a été votre première idée à la lecture du problème?

Qu’est-ce qui vous a amené à abandonner cette piste de résolution

Comment avez-vous réalisé que cette réponse n’était pas valable?

Qu’est-ce qui vous a amené à abandonner cette piste de résolution?
Comment fais-tu pour t’assurer que ta réponse est bonne?

Qu’est-ce qui vous a mené à utiliser cette démarche?

Pourriez-vous résoudre le problème autrement? Si oui, comment?

Y a-t-il des pistes de résolution auxquelles vous avez pensé, mais que vous n’avez pas utilisée?

Qu’est-ce qui vous a amené a utilisé (ou non)l’algèbre?

Comment avez-vous réagi à la valeur trouvée lors de la résolution?

Est-ce possible qu’un wagon ne soit pas plein

Tâche 2

Quel a été votre première idée à la lecture du problème?

Qu'est-ce qui vous a amené à abandonner cette piste de résolution

Comment avez-vous réalisé que cette réponse n'était pas valable?

Qu'est-ce qui vous a amené à abandonner cette piste de résolution?

Comment fais-tu pour t'assurer que ta réponse est bonne?

Qu'est-ce qui vous a mené à utiliser cette démarche?

Pourriez-vous résoudre le problème autrement? Si oui, comment?

Y a-t-il des pistes de résolution auxquelles vous avez pensé, mais que vous n'avez pas utilisée?

Dans l'éventualité où le problème est reconnu (en lien avec l'échiquier de Sissa), que se passerai-t-il si les robots construisait 3 robots à chaque 9 minute?

Que se passe-t-il avec un robot une fois qu'il a terminé de construire ses deux robots?

À part les robots, qu'est-ce que l'expert peut s'attendre à trouver dans l'entrepôt?

Peut-on trouver le nombre de boîtes dans l'entrepôt?

Tâche 3

Quel a été votre première idée à la lecture du problème?

Qu'est-ce qui vous a amené à abandonner cette piste de résolution

Comment avez-vous réalisé que cette réponse n'était pas valable?

Qu'est-ce qui vous a amené à abandonner cette piste de résolution?

Comment fais-tu pour t'assurer que ta réponse est bonne?

Qu'est-ce qui vous a mené à utiliser cette démarche?

Pourriez-vous résoudre le problème autrement? Si oui, comment?

Y a-t-il des pistes de résolution auxquelles vous avez pensé, mais que vous n'avez pas utilisée?

Calculé 3 des articles d'une des équations inutilisé puis ajusté en ajoutant l'item manquant pour voir l'incohérence.

Comment avez-vous réalisé que la situation ne fonctionnait pas?

Comment avez-vous réagi face à cette incohérence?

Qu'est-ce que cet aspect de la situation vous a amené à faire?

Qu'est-ce qui vous a amener a simplement arrêté la résolution?

ANNEXE C

LE PROBLÈME DES TRAINS,VERSION DE SABOYA (2010)

Il y a 578 passagers à transporter entre 2 villes. On dispose de 2 trains pour le faire. Un des trains a uniquement des wagons de 12 places, et l'autre uniquement des wagons de 16 places. En sachant que les 2 trains ont le même nombre de wagons, combien doit-on accrocher de wagons après chacune des locomotives?

Explique comment tu as fait pour trouver.

ANNEXE D

TRACES MANUSCRITES DE LA RÉSOLUTION DU PROBLÈME DES TRAINS

Nom : **Félix (BEPEP)**

Tâche 1

Il y a 588 passagers à transporter entre 2 villes. On dispose de 2 trains pour le faire. Un des trains a uniquement des wagons à 12 places et l'autre uniquement des wagons à 16 places. En sachant que le train formé de wagons à 16 places ait 8 wagons de plus que l'autre, combien doit-on accrocher de wagons après chacune des locomotive?

A: 1 train à 12 places
B: 1 train à 16 place → 8 wagons de plus
588 passagers

$16 \times 8 = 128$

$A12 + B16 + (8 \cdot 16) = 588$

$A12 + B16 + 128 = 588$

$A12 + B16 = 460$

train à 12 places

$17 \cdot 12 = 204$ places 17 wagons

train à 16 places

$(17 + 8) \cdot 16 = 400$ places 25 wagons

604 places

$17 \times 12 = 204$

$17 \times 16 = 272$

$272 + 128 = 400$

$16 \times 12 = 192$

$16 \times 16 = 256$

$256 + 192 = 448$

Nom : **Francine (BEPEP)**

Tâche 1

Il y a 588 passagers à transporter entre 2 villes. On dispose de 2 trains pour le faire. Un des trains a uniquement des wagons à 12 places et l'autre uniquement des wagons à 16 places. En sachant que le train formé de wagons à 16 places ait 8 wagons de plus que l'autre, combien doit-on accrocher de wagons après chacune des locomotive?

Ce que je sais : 588 passagers

2 trains → x wagons à 12 places → a

x(+8) wagons à 16 places. → b

→ Combien de wagons par locomotive.

$16 \times 8 = 128$

$a12 + 16b + (8 \cdot 16) = 588$

$12a + 16b = 588 - 128$

$12a + 16b = 460$

$\cancel{460 / 12}$

$604 - 28 = \boxed{576}$

28

460 | 28 (16 + 20)

$460 - 28 = 180$, $180 - 140 = 20$

140 120 140

56 28

Wagons à 12 places : 17

wagons à 16 places : 25

$17a + 25b$

$17 \cdot 12 + 25 \cdot 16$

$204 + 400 = \boxed{604}$

$17 \times 12 = 34 + 170 = 204$

$25 \times 16 = 150 + 250 = 400$

Nom : **Pierre BEPEP**

Tâche 1

Il y a 588 passagers à transporter entre 2 villes. On dispose de 2 trains pour le faire. Un des trains a uniquement des wagons à 12 places et l'autre uniquement des wagons à 16 places. En sachant que le train formé de wagons à 16 places ait 8 wagons de plus que l'autre, combien doit-on accrocher de wagons après chacune des locomotive?

588 Passagers

Wagon A: 12 Places

Wagon B: 16 Places

$12A + (16B \cdot 8) =$

$12A + 16B + (8 \cdot 16) = 588$

$12A + 16B + \cancel{128} = 588$

~~12A+16B+~~

$12A + 16B + 128 = 588$

$12A + 16B = 460$

$$\begin{array}{r} 16 \\ \cdot 25 \\ \hline 80 \\ 32 \\ \hline 400 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 12 \\ \cdot 17 \\ \hline 84 \\ 12 \\ \hline 204 \end{array}$$

~~460~~

604

12 → 3 · 4 → 2 · 2

16 → 4 · 4 → 2 · 2 · 2 · 2

460 → 6 · 60 → 2 · 3, 6 · 10 → 2 · 3, 2 · 5

$(12 \cdot 17 + 16 \cdot 25) =$

On doit accrocher **17** wagons à la première ↳ 12 Places et ~~23~~ 25 wagons de 16 Passagers.

Nom **Victor (BES)**

RECTO **Tâche 1**

Il y a 588 passagers à transporter entre 2 villes. On dispose de 2 trains pour le faire. Un des trains a uniquement des wagons à 12 places et l'autre uniquement des wagons à 16 places. En sachant que le train formé de wagons à 16 places ait 8 wagons de plus que l'autre, combien doit-on accrocher de wagons après chacune des locomotive?

2 trains

~~train à 16 places~~ : x : train dont les wagons ~~contient~~ contiennent 16 places

~~train à 12 places~~ : y : train dont les wagons contiennent 12 places

2 trains

$x = y+8$

$16x + 12y = 588$

$16x + 12(x+8) = 588$

$16x + 12x + 96 = 588$

$16 + 12x = 492$

$28x = 492$

$x =$

$16x + 12y = 588$

$16(y+8) + 12y = 588$

$16y + 128 + 12y = 588$

$16y + 12y = 460$

$28y = 460$

$y = 16$ reste 12

492 | 28
− 28 | 017
212
− 196
16

$26 \times 6 = 168$

460 | 28
− 28 | 016
180
− 168
12

$16x + 12y = 588$

$16(y+8) + 12y = 588$

$16 \times 16 + 16 \times 8 + 12 \times 16 \overset{?}{=} 588$

$160 + 96 + 128 + 192 \overset{?}{=} 588$

$96 + 128 + 192 =$

$12 \times 16 = 72 + 120 = 192$

96
128
192
916
+ 160
876

VERSO

$17 = y$

$x = 17+8$

$x = 25$

Donc le train qui

$x = 25$
$y = 17$

~~un~~ train aura

réponse sur feuille à **André**

$x = y-8$

$16x + 12y = 588$

$16(y-8) + 12y = 588$

$16y$

1000 16 places

992 12 places

Nom : **André (BES)**

RECTO **Tâche 1**

Il y a 588 passagers à transporter entre 2 villes. On dispose de 2 trains pour le faire. Un des trains a uniquement des wagons à 12 places et l'autre uniquement des wagons à 16 places. En sachant que le train formé de wagons à 16 places ait 8 wagons de plus que l'autre, combien doit-on accrocher de wagons après chacune des locomotive?

x : wagon à 16 places
y : wagon à 12 places

$y = x + 8$

$16x + 12y = 588$
$16x + 12(x+8) = 588$
$16x + 12x + 96 = 588$
$28x + 96 = 588$
$28x = 492$
$x = \frac{492}{28}$

$492 \div 28$: -28, 212, -196, 016 → 017

Essai
$1 \times 28 = 28$
$2 \times 28 = 56$
$4 \times 28 = 112$
$8 \times 28 = 224$
$7 \times 28 = 196$
$6 \times 28 =$

Considération sur le reste

On arrondit à l'entier supérieur
$\Rightarrow x = 18$

$y = 18 + 8$

VERSO

$y + 8 = x$

$16x + 12y = 588$
$16(y+8) + 12y = 588$
$16y + 128 + 12y = 588$
$28y = 460$

$460 \div 28$: -28, 180, -168, 12 → 016

$16x + 204 = 588$
$16x = 384$

17×12: 34, 170, 204

384

$684 \div 28$: -56, 124, -112, 12 → 024

$$\boxed{\begin{array}{c}17 = y\\ 25 = x\end{array}}$$

Il y a 16 places de disponibles

Nom : **Maude (enseignante)**

Tâche 1

Il y a 588 passagers à transporter entre 2 villes. On dispose de 2 trains pour le faire. Un des trains a uniquement des wagons à 12 places et l'autre uniquement des wagons à 16 places. En sachant que le train formé de wagons à 16 places a 8 wagons de plus que l'autre, combien doit-on accrocher de wagons après chacune des locomotive?

n

17

$\boxed{12}$

A

O

n + 8

25

$\boxed{16}$

B

O

170

~~204~~

604

250

150

~~400~~

25

16

160

32

192

190 ~~16n+8~~

240

144

24

384

392

144

590

$$12n + 16(n+8) = 588$$

$$12n + 16n + 128 = 588$$

$$28n = \frac{460}{28} = \frac{230}{14} = \frac{115}{7}$$

16,4

7

45

30

NOIR : individuel

Nom : **Laurent (enseignant)** ___

460 ⌊28

ou 12P

N 16P

N+8

N ≥ 17

96
192
196

17 × 12

25 + 16

400

Tâche 1

Il y a 588 passagers à transporter entre 2 villes. On dispose de 2 trains pour le faire. Un des trains a uniquement des wagons à 12 places et l'autre uniquement des wagons à 16 places. En sachant que le train formé de wagons à 16 places ait 8 wagons de plus que l'autre, combien doit-on accrocher de wagons après chacune des locomotive?

16,5

N : nb de wagons du train à 12 place par wagon

24,5

N+8 : nb de wagons du train à 16 places par wagon

460 ⌊28
28   16,4
180
168
120

$$12x + 16(x+8) = 588$$

$$12x + 16x + 128 = 588$$

$$28x + 128 = 588$$

$$28x = 460$$

$$x = \frac{460}{28}$$

17 wagons de 12 passager

25 wagons de 16 passager

192
384

24
24,5
× 16
1470
2450
392,0

Nom : **Alexandre (2e cycle)**

1000 . 108

T2 T1

Tâche 1

Il y a 588 passagers à transporter entre 2 villes. On dispose de 2 trains pour le faire. Un des trains a uniquement des wagons à 12 places et l'autre uniquement des wagons à 16 places. En sachant que le train formé de wagons à 16 places ait 8 wagons de plus que l'autre, combien doit-on accrocher de wagons après chacune des locomotive?

588 =

A B

$C_{T_2} = 16 \cdot w_2$

$C_{T_1} = \cdot (w_2 - 8)$

$C_{T_1} + C_{T_2} = 588$

18×9 $180 - 9 = 171$

$17 \times 12 = 204$

T1 T2

1 → 12   9 → 171 + = ~~183~~

10   18

17 → 204 +   25 * 16 = 400

$16w + 12w - 96 = 588$

$28w = 684$

$w = 24$

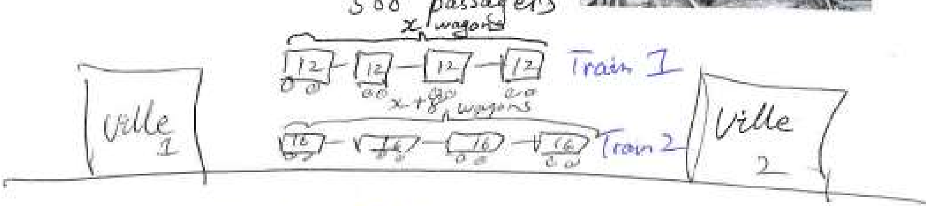
On accroche 17 w à L1

et 25 w à L2

Nom : **Shawn (2e cycle)**

Tâche 1

Il y a 588 passagers à transporter entre 2 villes. On dispose de 2 trains pour le faire. Un des trains a uniquement des wagons à 12 places et l'autre uniquement des wagons à 16 places. En sachant que le train formé de wagons à 16 places ait 8 wagons de plus que l'autre, combien doit-on accrocher de wagons après chacune des locomotive?



Train 1 Train 2

$$12x + 16(x+8) = 588$$

$$12x + 16x + 128 = 588$$

$$28x = 460$$

$$x = 16 \text{ R}12$$

$$28 \overline{)460} = 16, \quad 460 - 28 = 180, \quad 180 - 168 = 12$$

$$x = 16 + 1 = 17$$

$17 \times 12 = 204$

$25 \times 16 = 400$

604

Nb wagons train 1 : 17

Nb wagons train 2 : $17 + 8 = 25$

16

24

$804 - 28 = 576$

RECTO

Nom : **Catherine (1er cycle)**

#9 · 11

Tâche 1

460

Il y a 588 passagers à transporter entre 2 villes. On dispose de 2 trains pour le faire. Un des trains a uniquement des wagons à 12 places et l'autre uniquement des wagons à 16 places. En sachant que le train formé de wagons à 16 places ait 8 wagons de plus que l'autre, combien doit-on accrocher de wagons après chacune des locomotive?

$16 \times 8 = 128$

$588 - 128 = 460$

230 ÷ 16

230 ÷ 12

588 ÷ 12

$17 + 8 = 25$

192

Rép: 17 wagons de 12 personnes et ~~17 w~~ 25 wagons de 16.

VERSO

12

$38 \times 12 = 456$

230 ÷ 12 = 19...

$19 \times 12 = 228$ passagers

19 wagons

588 → 460

$19 \times 16 = 64$

$19 \times 16 = 304$

$304 + 8 = 27$

192 = 16 wagons de 12

256 = 16 wagons de 16

$162 + 270 = 432$

$304 + 228 = 532$

16

128 ÷ 8

RECTO

Nom **Antonia (1er cycle)**

Train 1
Train 2 : 8
128

Tâche 1

Il y a 588 passagers à transporter entre 2 villes. On dispose de 2 trains pour le faire. Un des trains a uniquement des wagons à 12 places et l'autre uniquement des wagons à 16 places. En sachant que le train formé de wagons à 16 places ait 8 wagons de plus que l'autre, combien doit-on accrocher de wagons après chacune des locomotive?

Train 1 Train 2

588

$16 \times 8 = 128$

$588 - 128 = 460 \rightarrow \div 2 = 230$

20 20 15

588 12

460

230 2

276

16 wagons

16 de 16

$588 - 448 = 140$

17 wag → 12 204

17 wag → 16 272 + 128 = 400

25 ×16 =

232 15

VERSO

R: 17 wagons de 12
25 wagons de 16

RECTO

VERSO

Nom : **Nicola (1er cycle)**

Réponce : ∞

Tâche 1

Il y a 588 passagers à transporter entre 2 villes. On dispose de 2 trains pour le faire. Un des trains a uniquement des wagons à 12 places et l'autre uniquement des wagons à 16 places. En sachant que le train formé de wagons à 16 places ait 8 wagons de plus que l'autre, combien doit-on accrocher de wagons après chacune des locomotive?

128 personnes NOW

120

49 wagons de 12

12 places

16 places minimums 8 wagons

19x16=304

10x12=

18x16=

34x12

$128 - 8$

Minimum

460 | 12

588 − 128 = 460

230 | 12

12 24 36 48 60 72 84 96 108

460 | 16

588 | 16
−480 3
108

588 | 12
−480 49
108

460 | 12
−360 3
100

588 | 128

128 256 384 512

112+16=128

$128 \times 2 = 256$

$256 \times 2 = 512$

476 / 604

Train 1 — 12 places

Train 2 — 16

13x12

21x16

14x12=168
22x16=+384
570

15x12=180
23x16=+368
48

24x16=384
16x12 192

17x12=204

460

10x12=120
10x16=160

Nom : **Lilianne (1er cycle)**

Tâche 1

Il y a 588 passagers à transporter entre 2 villes. On dispose de 2 trains pour le faire. Un des trains a uniquement des wagons à 12 places et l'autre uniquement des wagons à 16 places. En sachant que le train formé de wagons à 16 places ait 8 wagons de plus que l'autre, combien doit-on accrocher de wagons après chacune des locomotive?

$16 \times 8 = 128$

588 − 128 = 460

582 − ... 294

588 | 12

460 − 32 = 140 | 16

230 − 16 = 70; 70 − 64 = 6 | 16, 14,5

$16 \times 8 = 128$

588 − 48 = 108 | 16, 3

$16 \times 5 = 80$

$16 \times 7 = 112$

12 places

{16, 32, 48

16 × ? + 12 × ? = 588

16 places

128 personnes

× 76 204 272

16 + 12 = 588

$12 \times 20 = 240$

$25 \times 12 = 300$

300 − 24 = 276

18

ANNEXE E

TRACES MANUSCRITES DE LA RÉSOLUTION DU PROBLÈME DES CAFÉS/CROISSANT

Nom : **Félix (BEPEP)**

Tâche 3

Au café du coin, un café et trois croissants ont coûté 2,70$ à Ève-lyne. Émilie a déboursé 3$ pour deux cafés et deux croissants et trois cafés et un croissant ont coûté 3,50$ à Julien. Trouve le prix d'un café, ainsi que le prix d'un croissant.

Ève-Lyne

Café croissant — 1,5

croissant → 0,60

croissant

2$70

Émilie

Café croissant

Café croissant → 1,50$

3$

Julien

Café croissant — 1,5

café → 1$

café → 1$

3$50

$$\begin{array}{r} 3{,}100 \\ -\ 1{,}20 \\ \hline 1{,}80 \end{array}$$

croissant = 0,60$

0,90$ = café

$$\begin{array}{r} 2{,}7 \\ -\ 1{,}5 \\ \hline 1{,}2 \end{array}$$

Nom : **Francine (BEPEP)**

Tâche 3

Au café du coin, un café et trois croissants ont coûté 2,70$ à Ève-lyne, Émilie a déboursé 3$ pour deux cafés et deux croissants et trois cafés et un croissant ont coûté 3,50$ à Julien. Trouve le prix d'un café, ainsi que le prix d'un croissant.

a: café → ~~90¢~~ 1,00 $

b: croissant → 60¢

Combo café / croissant : 1,50 $

$a + 3b = 2,70\$$

$2a + 2b = 3\$$

$3a + 1b = 3,50\$$

(1) $2a + 2b = 3\$$

$a + b = 1,50\$$

(2) $a + 3b = 2,70$

$2b + (a + b) = 2,70$

$2b = 2,70 - 1,50$

$2b = 1,20$

$b = 60¢$

(3) $a + 3b = 2,70$

$a + 3 \cdot 60 = 2,70$

$a + 1,80 = 2,70$

$a = 2,70 - 1,80$

$a = 0,90¢$

Nom : **Pierre (BEPEP)**

Tâche 3

Au café du coin, un café et trois croissants ont coûté 2,70$ à Ève-lyne, Émilie a déboursé 3$ pour deux cafés et deux croissants et trois cafés et un croissant ont coûté 3,50$ à Julien. Trouve le prix d'un café, ainsi que le prix d'un croissant.

Ève-lyne : 1 C 3 crois = 2,70

Émilie à dibourse : 2C 2 crois = 3$

Julien : 3C + 1 crois = 3,50 $

$1A + 3C = 2,70$

$2A + 2C = 3,$

$3A + 1C = 3,50$

$6A + 5C = 9,20$

2,70

~~$~~ 9,20

le café =

Nom **Victor (BES)**

Tâche 3

Au café du coin, un café et trois croissants ont coûté 2,70$ à Ève-lyne, tandis qu'Émilie a déboursé 3$ pour deux cafés et deux croissants et trois cafés et un croissant ont coûté 3,50$ à Julien. Trouve le prix d'un café, ainsi que le prix d'un croissant.

croissant = x

café = y

$$x\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} + y\underbrace{\begin{bmatrix}3\\2\\1\end{bmatrix}}_{A} = \vec{b}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 3\\2 & 2\\3 & 1\end{bmatrix}\underbrace{\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}}_{\vec{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix}2,7\\3\\3,50\end{bmatrix}}_{\vec{b}}$$

$y+3x=2,7$

$2x+2y=3$

$3y+x=3,50$

$$\left[\begin{array}{cc|c}1 & 3 & 2,7\\2 & 2 & 3\\3 & 1 & 3,5\end{array}\right]\begin{array}{l}\\L_2-2L_1\\L_3-3L_1\end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc}1 & 3 & 2,7\\0 & -4 & -2,4\\0 & -8 & -5,4\end{array}\right]$$

incompatible

$y+x+x+x=2,7$

$y=2,7-3x$

$2x+2(2,7-3x)=3$

$2x+5,4-6x=3$

$2,4=4x$

$0,6=x$

$y=2,7-3(0,6)$

$=2,7-1,8$

$=0,9$

$$\begin{array}{r|l}2,4 & 4\\-24 & 0,6\\ 0 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r}3\\\times 0,6\\\hline 1,8\end{array}$$

$2(0,6)+2(0,9)=3$

$1,2+1,8$

$0,9+3(0,6)\overset{?}{=}2,7$

$0,9+1,8=2,7$ ✓

$3(0,9)+0,6$

$2,7+0,6$

$3,3$

impossible

Nom : **André (BES)**

RECTO

Tâche 3

Au café du coin, un café et trois croissants ont coûté 2,70$ à Ève-lyne, tandis qu'Émilie a déboursé 3$ pour deux cafés et deux croissants et trois cafés et un croissant ont coûté 3,50$ à Julien. Trouve le prix d'un café, ainsi que le prix d'un croissant.

Croissant = x
Café = y

$y + 3x = 2,7$
$2y + 2x = 3$
$3y + x = 3,5$

$2,7 \times 3 = 8,1$ $\quad 3,5 - 8,1 = -5,4$ $\quad 2,7 \times 2 = 5,4$ $\quad 5,4 - 3 = 2,4$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 2,7 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 3,5 \end{array}\right] L_3 \to L_3 - 3L_1 \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 2,7 \\ 2 & 2 & 3 \\ 0 & -8 & -5,4 \end{array}\right] L_2 \to L_2 - 2$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 2,7 \\ 0 & -4 & -2,4 \\ 0 & -8 & -5,4 \end{array}\right] L_3 \to L_3 - 2L_2 \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 2,7 \\ 0 & -4 & -2,4 \\ 0 & 0 & -1,4 \end{array}\right]$$

$-2,4 \times -2 = +4,8$ $\quad 4,8 - 5,4 = -1,4$

Système incompatible

VERSO

$x = 3,5 - 3y$
$y + 3(3,5 - 3y) = 2,7$
$y + 10,5 - 9y = 2,7$
$-8y = -8,2$
$y = \frac{-8,2}{-8}$
$y = 1,02$

$2,7 - 10,5 = -8,2$

$8,2 \div 8 = 1,02$; $8,2 - 8 = 20$; $20 - 16 = 40$

$x = 3,5 - 3y$
$x = 3,5 - 3(1,02)$
$x = 3,5 - 3,06$
$x = 0,44$

Nom : **Maude (enseignante)**

Tâche 3

Au café du coin, un café et trois croissants ont coûté 2,70$ à Ève-lyne, tandis qu'Émilie a déboursé 3$ pour deux cafés et deux croissants et trois cafés et un croissant ont coûté 3,50$ à Julien. Trouve le prix d'un café, ainsi que le prix d'un croissant.

1 

6,50 $

$f + 3c = 2,7$

$2f + 2c = 3$

$3f + 1c = 3,5$

$f = 2,7 - 3c$

$2(2,7 - 3c) + 2c = 3$

$5,4 - 6c + 2c = 3$

$-4c = -2,4$

$c = 0,6$

$f = 2,7 - 3 \cdot 0,6$

$f = 0,9$

$2 \cdot 0,9 + 2 \cdot 0,6$

$1,8 + 1,2 = 3$ ✓

$3 \cdot 0,9 + 1 \cdot 0,6$

$2,7 + 0,6 =$

$3,3$

Nom : **Laurent (enseignant)**

RECTO

Julien

Tâche 3

Au café du coin, un croissant et trois cafés ont coûté 3,50$ à [redacted] tandis qu'Émilie a déboursé 3$ pour deux cafés et deux croissants et un café et trois croissants ont coûté 2,70$ à [redacted]. Trouve le prix d'un café, ainsi que le prix d'un croissant.

x : prix d'un croissant
y : prix d'un café

$x + 3y = 3,50$
$2x + 2y = 3$ $\Leftrightarrow$ $x + y = 1,50$
$x = 1,50 - y$

$y + 3x = 2,70$

$1,50 - y + 3y = 3,50$
$2y = 2,00$
$y = 1\$$
$x = 0,50\$$

VERSO

$y + 3x = 2,70\$$ ①

$5y + 3x = 6,50$ (2×③)

$4y = 3,80$

$y = 0,95$

$x = \frac{1,75}{3}$

Nom : **Alexandre (2e cycle)**

$3{,}5 = 3x + 1$

$-(2{,}7 = x + 3y)$

$70¢ + 2x - 2y$

$2y + 70 = 2x$

$35 - x$

$7{,}70 = x + 3(x - 0{,}35)$

$2{,}7 = x + 3x + 1{,}05$

Tâche 3

Au café du coin, un café et trois croissants ont coûté 2,70$ à Ève-lyne, tandis qu'Émilie a déboursé 3$ pour deux cafés et deux croissants et trois cafés et un croissant ont coûté 3,50$ à Julien. Trouve le prix d'un café, ainsi que le prix d'un croissant.

$7{,}7$

$-1{,}05$

$= 4x$

$3{,}50 = 3 \text{ caf} + 1 \text{ crois}$

$3{,}00 = 2 \text{ caf} + 2 \text{ crois}$ $x - 0{,}5$

$3{,}70 = 1 \text{ caf} + 3 \text{ croiss}$

$2{,}7 = x + \frac{1}{2} + 3x$

$7{,}2 = 4x$

$\frac{2{,}2}{4} = x$

$\frac{1}{2} \approx x$

$3{,}5 = 3x + y$

$-(2{,}7 = 2x + 3y)$

$0{,}5 = 2x - 2y$

$y + 0{,}5 = x$

$x + 3x = 20¢$

$4x = 20¢$

$3 = 2x + 2(x - \frac{1}{2})$ $x = \frac{20}{4} =$

$3 = 2x + 2x - 1$

$4 = 4x$

1\$ = café mais +5¢ pour ge

0,50¢ = croiss. mais +5¢ pour

noms composés

Nom : **Shawn (2e cycle)**

Tâche 3

Au café du coin, un café et trois croissants ont coûté 2,70$ à Ève-lyne, tandis qu'Émilie a déboursé 3$ pour deux cafés et deux croissants et trois cafés et un croissant ont coûté 3,50$ à Julien. Trouve le prix d'un café, ainsi que le prix d'un croissant.

x : nb de café

y : nb de croissant

$3x + y = 3,5$

$\begin{cases} x + 3y = 2,7 \\ 2x + 2y = 3 \end{cases}$

$2x + 6y = 5,4$

$- \; 2x + 2y = 3$

$4y = 2,4$

$y = 0,6 \$$

$x + 3 \cdot 0,6 = 2,7$

$x + 1,8 = 2,7$

$x = 0,9$

$\boxed{\begin{aligned} 9x + 3y &= 10,5 \\ 8x &= 7,8 \\ x &= 0,97 \end{aligned}}$

Rép : 1 café coûte 0,90 $ et 1 croissant coûte 0,60$ pour les fill mais, pour les garçons, un croissant coûte 0,80$

$x + y = 3$

$2x + 3y = 9$

$x + 2y = 5$

Nom : **Catherine (1er cycle)**

Tâche 3

Au café du coin, un café et trois croissants ont coûté $\boxed{2{,}70\$}$ à Ève-lyne, tandis qu'Émilie a déboursé $\boxed{3\$}$ pour deux cafés et deux croissants et trois cafés et un croissant ont coûté $\boxed{3{,}50\$}$ à Julien. Trouve le prix d'un café, ainsi que le prix d'un croissant.

café	croissant	prix
1	3	2,70$
2	2	3$
3	1	3,50$

GUESS

$\boxed{1}$ 0.54$

90 60 $\boxed{2}$ 0.60$

$\boxed{3}$ 0.70$

54 2,70$

Nom :_ **Antonia (1er cycle)**

1 café + 3 croissants

Tâche 3

Au café du coin, un café et trois croissants ont coûté 2,70$ à Ève-lyne, tandis qu'Émilie a déboursé 3$ pour deux cafés et deux croissants et trois cafés et un croissant ont coûté 3,50$ à Julien. Trouve le prix d'un café, ainsi que le prix d'un croissant.

	Café No	Café $ tout	Croissants No	Croissants $ tout
Julien :	~~3~~ 3	3,50 ~~2,70~~	1 ~~3~~ 1	
Ève-lyne :	1 1	3,70 2,70	3 3	
Émilie :	2	3	2	

95

90 60

5

95 55

50¢ = 1 café

80¢ = 1 croissant

Nom	café	croissant	$
Emilie	2	2	3$
Eve lyne	1	3	2,70$
Julien	3	1	3,50$

2,10
1,40

3,50 − 25 = 3,25
325 × 2

324

0,26¢ croissant

1,08 $ café

75 × 2 = 1,50

80 × 2 = 1,60

50 × 2 = 1$

80 × 3 = 240

1,60 + 1,50

50 × 3

1,50 + 80 = 2,30

26 × 3 = ,68

1,08 + ,68

Nom : Nicola (1er cycle)

Tâche 3

Au café du coin, un café et trois croissants ont coûté 2,70$ à Ève-lyne, tandis qu'Émilie a déboursé 3$ pour ~~deux cafés et deux~~ croissants et ~~trois cafés~~ et un croissant ont coûté 3,50$ à Julien. Trouve le prix d'un café, ainsi que le prix d'un croissant.

1,00 270 300 350

2,70
− 1,10
1,60 ÷ 2 = 80¢
100 ÷ 3

1,20 = café
,50 = croissant

1,30
1,40

1,10 × 2 = 2,20 + 80 × 2

x = croissant
y = café

90 = café
60 = croissant

x + x + x + y = 2,70$
x + x + y + y = 3,00$
x + y + y + y = 3,50$

1,50 = café
95 = croissant
85 = café
90 =

2,9
270 300
350
2,5,10
300 L

5	2	10
60	150	30
54	135	27
70	175	35

—Avec taxe À ESSAYER

95
+ 165
2,60

95	190	285
55	110	165

Nom : **Lilianne (1er cycle)**

Tâche 3

Au café du coin, un café et trois croissants ont coûté 2,70$ à Ève-lyne, tandis qu'Émilie a déboursé 3$ pour deux cafés et deux croissants et trois cafés et un croissant ont coûté 3,50$ à Julien. Trouve le prix d'un café, ainsi que le prix d'un croissant.

2,70$	1 ca	3 cr
3$	2 ca	2 cr
3,50$	3 ca	1 cr

70 80
90 60
60 70

~~80~~ ~~70~~ 30 80

100 ~~50~~ 50 14
4 12,5 130
10 63
− 8 115
20

~~85~~ ~~75~~