

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL

ÉTUDE DE LA FRÉQUENCE DE RÉÉQUILIBRAGE D'UN
PORTEFEUILLE DE COUVERTURE D'UN FONDS DISTINCT EN
PRÉSENCE DE RISQUE DE MODÈLE

MÉMOIRE

PRÉSENTÉ

COMME EXIGENCE PARTIELLE
DE LA MAÎTRISE EN MATHÉMATIQUES

PAR

CHRISTEL JACKSON BOOK BOTOG

DÉCEMBRE 2019

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL
Service des bibliothèques

Avertissement

La diffusion de ce mémoire se fait dans le respect des droits de son auteur, qui a signé le formulaire Autorisation de reproduire et de diffuser un travail de recherche de cycles supérieurs (SDU-522 - Rév.10-2015). Cette autorisation stipule que « conformément à l'article 11 du Règlement no 8 des études de cycles supérieurs, [l'auteur] concède à l'Université du Québec à Montréal une licence non exclusive d'utilisation et de publication de la totalité ou d'une partie importante de [son] travail de recherche pour des fins pédagogiques et non commerciales. Plus précisément, [l'auteur] autorise l'Université du Québec à Montréal à reproduire, diffuser, prêter, distribuer ou vendre des copies de [son] travail de recherche à des fins non commerciales sur quelque support que ce soit, y compris l'Internet. Cette licence et cette autorisation n'entraînent pas une renonciation de [la] part [de l'auteur] à [ses] droits moraux ni à [ses] droits de propriété intellectuelle. Sauf entente contraire, [l'auteur] conserve la liberté de diffuser et de commercialiser ou non ce travail dont [il] possède un exemplaire.»

REMERCIEMENTS

Je tiens à dédier ce mémoire à mon épouse Cyrielle et notre fils Jacy pour tout leur amour. Mon épouse m'a apporté son soutien moral et psychologique durant toutes ces années d'études.

J'envoie mes remerciements à Mathieu Boudreault et Anne Mackay deux professeurs d'actuariat à l'UQAM qui ont été mes superviseurs de recherche pour cette maîtrise. Ils m'ont apporté une aide précieuse pour trouver mon sujet de recherche, pour comprendre les enjeux de l'industrie des fonds distincts et pour démêler les notions complexes des mathématiques financières. À travers leur encadrement, leur orientation et leur disponibilité, j'ai obtenu tout le support nécessaire pour mener à bien mon sujet de recherche.

Je remercie également Maciej Augustyniak professeur de statistiques à l'Université de Montréal que j'ai eu comme professeur pour un cours de maîtrise qui a été déterminant dans mon analyse des séries chronologiques financières liées à ce sujet de recherche.

J'ai une reconnaissance particulière pour les institutions et les professeurs qui m'ont apporté un support financier : le Laboratoire de recherche en mathématiques actuarielles Quantact, la Fondation UQAM, l'International Association of Black Actuaries (IABA), Mathieu Boudreault, Anne Mackay. Sans ce soutien financier, je n'aurais pas pu mener à terme ce stimulant et intellectuellement enrichissant projet de recherche.

TABLE DES MATIÈRES

LISTE DES TABLEAUX	ix
LISTE DES FIGURES	xi
RÉSUMÉ	xv
INTRODUCTION	1
CHAPITRE I PRODUITS DÉRIVÉS ÉTUDIÉS	5
1.1 Option de vente	5
1.1.1 Évaluation	6
1.2 Fonds distinct avec l'option GMAB (Guaranteed Minimum Accumulation Benefit)	7
1.2.1 Évaluation	9
CHAPITRE II MODÈLES FINANCIERS	11
2.1 Modèle de Black-Scholes	16
2.1.1 Estimation des paramètres	17
2.1.2 Simulation sous $\mathbb{P}$	17
2.1.3 Évaluation d'une option de vente	18
2.2 Modèle AR(1)	19
2.2.1 Estimation des paramètres	20
2.2.2 Simulation sous $\mathbb{P}$	20
2.2.3 Évaluation d'une option de vente	21
2.3 Modèle de Merton	21
2.3.1 Estimation des paramètres	22
2.3.2 Simulation sous $\mathbb{P}$	23
2.3.3 Évaluation d'une option de vente	24
2.4 Modèle de Heston	24

2.4.1	Estimation des paramètres	25
2.4.2	Simulation sous $\mathbb{P}$	26
2.4.3	Évaluation d'une option de vente	27
2.5	Modèle SVCJ(Stochastic Volatility with Correlated Jumps)	29
2.5.1	Estimation des paramètres	30
2.5.2	Simulation sous $\mathbb{P}$	30
2.5.3	Évaluation d'une option de vente	32
CHAPITRE III STRATÉGIES DE COUVERTURE		33
3.1	Notions et notations	33
3.2	Couverture quadratique locale	37
3.3	Couverture basée sur le calcul des grecques	39
3.3.1	Présentation des grecques	39
3.3.2	Couverture Delta neutre	44
3.3.3	Couverture Delta-Gamma neutre	45
3.3.4	Couverture Delta-Vega neutre	46
3.3.5	Couverture Delta-Gamma-Vega neutre	48
3.4	Autres facteurs déterminants pour l'efficacité de couverture	50
3.4.1	Fréquence de rééquilibrage du portefeuille de couverture	50
3.4.2	Volatilité	51
3.4.3	Frais de transactions	53
CHAPITRE IV ANALYSE DES RÉSULTATS		55
4.1	Mesures de risque	55
4.2	Hypothèses et procédures de tests	56
4.2.1	Grilles SVCJ	58
4.2.2	Grilles de ratios pour la stratégie de couverture quadratique locale	59
4.3	Résultats des tests	60

4.3.1	Phase 1 - Efficacité de couverture sous les hypothèses de base sous le modèle de Black-Scholes	60
4.3.2	Phase 2 - Efficacité de couverture basée sur les grecques sous le modèle de couverture Black-Scholes	71
4.3.3	Phase 3 - Efficacité de couverture basée sur les grecques sous le modèle de Heston	94
CONCLUSION		109
RÉFÉRENCES		111

LISTE DES TABLEAUX

Tableau	Page
2.1 Récapitulatif des modèles	16
2.2 Paramètres EMV du modèle de Black-Scholes (base annuelle) . .	17
2.3 Paramètres estimés du modèle AR(1) (base annuelle)	20
2.4 Paramètres EMV du modèle de Merton (sur base annuelle)	23
2.5 Paramètres du modèle de Heston (sur base annuelle)	26
2.6 Paramètres estimés du modèle SVCJ tirés de Kaeck et Alexander (2013) (sur base quotidienne et en %)	31
3.1 Grecques d'une option de vente avec Black-Scholes	40
3.2 Grecques d'une option de vente avec Heston	41
4.1 Hypothèses du programme de couverture	57
4.2 Mesures de risque sous les hypothèses de base - Modèle de marché Black-Scholes	62
4.3 Mesures de risque sous les hypothèses de base - Modèle de marché AR1	63
4.4 Mesures de risque sous les hypothèses de base - Modèle de marché Merton	65
4.5 Mesures de risque sous les hypothèses de base - Modèle de marché Heston	67
4.6 Mesures de risque sous les hypothèses de base - Modèle de marché SVCJ	69
4.7 Mesures de risque de l'efficacité de couverture d'une option de vente - Modèle de couverture Black-Scholes - Modèle de marché Black- Scholes	74

4.8	Mesures de risque de l'efficacité de couverture d'un fonds distinct GMAB - Modèle de couverture Black-Scholes - Modèle de marché Black-Scholes	77
4.9	Mesures de risque de l'efficacité de couverture d'une option de vente - Modèle de couverture Black-Scholes - Modèle de marché Heston	81
4.10	Mesures de risque de l'efficacité de couverture d'un fonds distinct GMAB - Modèle de couverture Black-Scholes - Modèle de marché Heston	84
4.11	Mesures de risque de l'efficacité de couverture d'une option de vente - Modèle de couverture Black-Scholes - Modèle de marché SVCJ .	88
4.12	Mesures de risque de l'efficacité de couverture d'un fonds distinct GMAB - Modèle de couverture Black-Scholes - Modèle de marché SVCJ	91
4.13	Mesures de risque de l'efficacité de couverture d'une option de vente - Modèle de couverture Heston - Modèle de marché Heston	98
4.14	Mesures de risque de l'efficacité de couverture d'un fonds distinct GMAB - Modèle de couverture Heston - Modèle de marché Heston	100
4.15	Mesures de risque de l'efficacité de couverture d'une option de vente - Modèle de couverture Heston - Modèle de marché SVCJ	103
4.16	Mesures de risque de l'efficacité de couverture d'un fonds distinct GMAB - Modèle de couverture Heston - Modèle de marché SVCJ	105

LISTE DES FIGURES

Figure	Page
2.1 Indice S&P500 sur la période 1987-01-01 à 2010-04-01 (5863 observations, source : <i>Yahoo ! Finance</i>).	12
2.2 Statistiques descriptives de l'indice S&P500 sur la période 1987-01-01 à 2010-04-01 (5863 observations, source : <i>Yahoo ! Finance</i>). . .	15
4.1 Distributions des erreurs terminales de couverture sous les hypothèses de base - Modèle de marché Black-Scholes	61
4.2 Distributions des erreurs terminales de couverture sous les hypothèses de base - Modèle de marché AR1	64
4.3 Distributions des erreurs terminales de couverture sous les hypothèses de base - Modèle de marché Merton	66
4.4 Distributions des erreurs terminales de couverture sous les hypothèses de base - Modèle de marché Heston	68
4.5 Distributions des erreurs terminales de couverture sous les hypothèses de base - Modèle de marché SVCJ	70
4.6 Distributions des erreurs terminales de couverture d'une option de vente - Couverture Delta neutre - Modèle de couverture Black-Scholes - Modèle de marché Black-Scholes	75
4.7 Distributions des erreurs terminales de couverture d'une option de vente - Couverture Delta-Gamma neutre - Modèle de couverture Black-Scholes - Modèle de marché Black-Scholes	76
4.8 Distributions des erreurs terminales de couverture d'un fonds distinct GMAB - Couverture Delta neutre - Modèle de couverture Black-Scholes - Modèle de marché Black-Scholes	78
4.9 Distributions des erreurs terminales de couverture d'un fonds distinct GMAB - Couverture Delta-Gamma neutre - Modèle de couverture Black-Scholes - Modèle de marché Black-Scholes	79

4.10	Distributions des erreurs terminales de couverture d'une option de vente - Couverture Delta neutre - Modèle de couverture Black-Scholes - Modèle de marché Heston	82
4.11	Distributions des erreurs terminales de couverture d'une option de vente - Couverture Delta-Gamma neutre - Modèle de couverture Black-Scholes - Modèle de marché Heston	83
4.12	Distributions des erreurs terminales de couverture d'un fonds distinct GMAB - Couverture Delta neutre - Modèle de couverture Black-Scholes - Modèle de marché Heston	85
4.13	Distributions des erreurs terminales de couverture d'un fonds distinct GMAB - Couverture Delta-Gamma neutre - Modèle de couverture Black-Scholes - Modèle de marché Heston	86
4.14	Distributions des erreurs terminales de couverture d'une option de vente - Couverture Delta neutre - Modèle de couverture Black-Scholes - Modèle de marché SVCJ	89
4.15	Distributions des erreurs terminales de couverture d'une option de vente - Couverture Delta-Gamma neutre - Modèle de couverture Black-Scholes - Modèle de marché SVCJ	90
4.16	Distributions des erreurs terminales de couverture d'un fonds distinct GMAB - Couverture Delta neutre - Modèle de couverture Black-Scholes - Modèle de marché SVCJ	92
4.17	Distributions des erreurs terminales de couverture d'un fonds distinct GMAB - Couverture Delta-Gamma neutre - Modèle de couverture Black-Scholes - Modèle de marché SVCJ	93
4.18	Instabilité des prix d'une option de vente sous le modèle de Heston	96
4.19	Distributions des erreurs terminales de couverture d'une option de vente - Modèle de couverture Heston - Modèle de marché Heston .	99
4.20	Distributions des erreurs terminales de couverture d'un fonds distinct GMAB - Modèle de couverture Heston - Modèle de marché Heston	101
4.21	Distributions des erreurs terminales de couverture d'une option de vente - Modèle de couverture Heston - Modèle de marché SVCJ .	104

4.22 Distributions des erreurs terminales de couverture d'un fonds distinct GMAB - Modèle de couverture Heston - Modèle de marché SVCJ	106
--	-----

RÉSUMÉ

Les assureurs qui offrent les fonds distincts comme produits financiers adoptent une gestion des risques de marché axée sur la constitution du portefeuille de réplification. Le portefeuille de couverture est constitué d'unités d'actifs financiers déterminées par la stratégie de couverture. Une stratégie de couverture efficace est une stratégie qui permet à l'assureur d'obtenir une valeur de portefeuille identique à celle de la prestation à payer à l'investisseur ; ainsi l'assureur ne fait ni perte ni gain lorsque le contrat de fonds distincts arrive à échéance. L'efficacité de couverture des fonds distincts dépend de plusieurs hypothèses telles que le choix de la stratégie de couverture, la fréquence à laquelle le portefeuille de couverture est rééquilibré, le modèle financier utilisé pour implanter la stratégie de couverture, le modèle financier utilisé pour prédire l'évolution des prix des actifs financiers. Ces deux derniers modèles lorsqu'ils sont différents créent une erreur de modèle qui affecte la qualité de la couverture des risques. Le sujet de ce mémoire est d'étudier la fréquence de rééquilibrage d'un portefeuille de couverture lorsqu'on est en présence d'erreur de modèle. Dans notre étude, on utilise principalement les stratégies de couverture basées sur les grecques dans les modèles de Black et Scholes (1973) et Heston (1993). Nous analysons la qualité de la couverture lorsque le portefeuille est rééquilibré à une fréquence quotidienne, hebdomadaire, mensuelle ou encore lorsque le portefeuille est rééquilibré sur condition de dépassement de seuil. Nous prenons en compte l'existence des frais à déboursier lors des transactions financières. Pour mener nos tests numériques d'évaluation de la qualité de la couverture, nous simulons des scénarios de trajectoires empruntées par l'actif sous-jacent. Nous considérons les modèles financiers tels que Black-Scholes pour sa popularité, Heston pour sa capacité à reproduire les faits stylisés comme le groupement de volatilité, l'asymétrie négative et les queues de distribution plus lourdes que celles de Black-Scholes. Nous considérons aussi le modèle à volatilité stochastique avec sauts (SVCJ) de Nelson (1990) pour sa capacité à reproduire les mêmes faits stylisés que Heston avec en plus l'intégration des sauts dans le prix et dans la volatilité. L'analyse des résultats obtenus nous indique qu'en l'absence des frais de transactions la fréquence optimale de rééquilibrage est la fréquence quotidienne pour la majorité des situations. En présence des frais de transactions c'est la fréquence mensuelle ou encore le rééquilibrage sous condition de dépassement de seuil qui sont les meilleurs. Notre analyse révèle que si le marché financier est décrit comme le fait le modèle SVCJ alors les stratégies de couverture utilisées

laissent encore beaucoup d'erreurs à couvrir et donc des analyses supplémentaires à l'aide de nouvelles hypothèses sont à explorer.

Mots clés : fonds distincts, stratégie de couverture, erreur de modèle, Black-Scholes, Heston, volatilité stochastique.

INTRODUCTION

Un fonds distinct est un produit financier qui associe à la fois investissement et assurance. Le capital est investi dans un instrument financier dont le rendement est lié aux performances boursières. La particularité d'un fonds distinct est que le capital initial est protégé avec possiblement des garanties en cas de décès ou de survie de l'investisseur comme on en trouve dans un contrat traditionnel d'assurance-vie ou de rentes. Une compagnie d'assurance qui offre ce type de produit ne peut pas s'appuyer sur la diversification pour gérer les risques de marché comme elle le fait pour gérer les risques de mortalité ou de longévité, puisqu'en cas de baisse des rendements financiers, les prestations sont à payer à tous les investisseurs. Pour se protéger contre les risques de marché, la compagnie d'assurance construit un portefeuille d'actifs financiers dont le but est de répliquer le passif associé au fonds distinct. Le portefeuille de couverture est rééquilibré à une certaine fréquence afin que sa valeur mime celle du passif; ceci de l'initialisation jusqu'à l'échéance du contrat associé au fonds distinct. L'objectif de l'assureur est qu'à maturité, la différence entre la valeur de la prestation payée à l'investisseur et celle du portefeuille de couverture soit nulle. Cette différence est aussi appelée erreur de couverture.

Théoriquement lorsque le modèle financier de marché et le modèle financier de couverture sont identiques (sans erreur de modèle), pour obtenir une couverture parfaite, Black et Scholes (1973) ont démontré que le rééquilibrage du portefeuille de couverture doit être fait en temps continu si le prix de l'actif sous-jacent évolue de façon continue selon le modèle de Black-Scholes. Mais cela n'est pas possible car les transactions financières ne se déroulent que pendant des intervalles de

temps discrets. Le fait de ne pouvoir réaliser les rééquilibrages du portefeuille de couverture qu'à des instants discrets crée des erreurs dites de discrétisation (passage du temps continu au temps discret). Moins on rééquilibre, plus on génère de l'erreur de couverture du fait de la discrétisation.

Plusieurs études en économétrie ont révélé des modèles qui répliquent mieux la dynamique des indices boursiers que celui de Black-Scholes. Le modèle à volatilité stochastique à temps continu de Heston (1993) est un exemple. Il permet de reproduire les périodes de forte et basse volatilités observées sur les marchés boursiers. Autre exemple, le modèle à volatilité stochastique avec sauts de Nelson (1990) qui permet de reproduire l'asymétrie négative, les queues épaisses et aussi les sauts dans les rendements et dans la volatilité. Dans l'industrie des fonds distincts le modèle lognormal à changement d'état (Regime-Switching Lognormal, RSLN) de Hardy (2001) est répandu. Aucun modèle n'est parfait, en choisir un pour développer sa stratégie de couverture introduit une erreur de modèle. L'erreur de modèle s'ajoute à l'erreur de discrétisation pour former l'erreur de couverture. La question qu'on se pose est de savoir à quelle fréquence faut-il rééquilibrer le portefeuille de couverture afin que l'erreur de couverture soit la moindre possible.

Dans le modèle de Black-Scholes, on fait comme hypothèses que les rendements financiers suivent une distribution normale. Plusieurs analyses sur les rendements dont Fama (1965), Officer (1972) ont montré que ces rendements financiers ne suivent pas une loi normale. Plus la fréquence d'observation est élevée, plus les statistiques descriptives de ces rendements sont éloignées de celles de la loi normale et plus les queues de la distribution de ces rendements sont lourdes. Une erreur de modèle plus importante est commise en stipulant que les rendements journaliers suivent une loi normale qu'en stipulant que les rendements mensuels suivent une loi normale.

En utilisant le modèle de Black-Scholes pour établir le portefeuille de couverture, rééquilibrer plus souvent réduit l'erreur de discrétisation mais augmente l'erreur de modèle tandis que rééquilibrer à plus faible fréquence augmente l'erreur de discrétisation mais réduit l'erreur de modèle. Lequel de ces deux effets dominera ? Quelle est la meilleure fréquence de rééquilibrage d'un portefeuille de couverture en présence d'erreur de modèle ? Tel est le sujet de ce mémoire. De plus, que se passe-t-il si on prend en compte les frais de transactions ? Black et Scholes considèrent que le marché est sans frictions c'est-à-dire entre autres dépourvu de frais de transactions et de taxes, mais dans les faits, les transactions financières ont un coût. Si on estime que les coûts des transactions sont proportionnels au volume d'actifs transigés, alors plus on va rééquilibrer le portefeuille de couverture, plus petit sera le volume moyen d'actifs par transaction, mais la répétition de ces transactions augmentera le coût final. Les fonds distincts sont des produits financiers avec de très longues échéances (plusieurs décennies), ce qui en fait une problématique supplémentaire car il y a une accumulation des erreurs de couverture sur le long terme.

La couverture des risques dans les fonds distincts est un sujet qui a été abordé sous différents angles dans la littérature. Hardy (2000) a comparé trois approches pour gérer le risque du prix de l'actif sous-jacent. Ces approches sont la constitution d'une réserve actuarielle, d'un portefeuille de couverture dynamique et d'un portefeuille de couverture statique. Moller (2001) a utilisé la stratégie de couverture locale dans son étude pour minimiser le risque de mortalité. Coleman *et al.* (2006) ont utilisé la stratégie de couverture locale pour couvrir le risque du prix de l'actif sous-jacent et le risque des taux d'intérêt. Toutefois la question de la fréquence de rééquilibrage a été peu abordée. Augustyniak et Boudreault (2013), Augustyniak et Boudreault (2014a) et Augustyniak et Boudreault (2014b) ont étudié l'efficacité d'une couverture des fonds distincts en considérant des straté-

gies de couverture basées sur le modèle de Black-Scholes ou Heston et envisageant la dynamique du marché décrite par les modèles Regime Switching-Generalized AutoRegressive Conditional Heteroskedasticity (RS-GARCH), Heston ou encore des tests en rétrospectives. Schroeter (2016) a analysé une large gamme de stratégies de couverture sous le modèle de Black-Scholes appliquées à une option de vente de longue maturité.

Le plan de ce mémoire est le suivant. Le chapitre 1 décrit les produits dérivés pour lesquels nous souhaitons évaluer l'efficacité de couverture. Dans ce chapitre on retrouve comment sont évalués les produits indépendamment du modèle de marché. Ensuite le chapitre 2 présente les modèles financiers avec lesquels nous essaierons de répliquer la dynamique du prix de l'actif sous-jacent. Ce chapitre couvre l'estimation des paramètres des modèles. Les stratégies de couverture ainsi que les choix qui sont déterminants pour la qualité de couverture sont exposés au chapitre 3. Enfin au chapitre 4 nous analysons les résultats numériques des tests que nous avons menés.

CHAPITRE I

PRODUITS DÉRIVÉS ÉTUDIÉS

Le but de ce chapitre est de présenter les produits dérivés sur lesquels notre étude s'est portée. Les caractéristiques des produits ainsi que les méthodes utilisées pour les évaluer sont décrits. Deux produits sont considérés : une option de vente, et un fonds distinct avec l'option GMAB (Guaranteed Minimum Accumulation Benefit).

1.1 Option de vente

Une option de vente est un produit dérivé dont la valeur dépend de celle d'un autre actif financier appelé actif sous-jacent (ex : S&P500). L'option de vente est un contrat qui lie deux parties : un émetteur et un acheteur. Le contrat procure à l'acheteur le droit (mais pas l'obligation) de vendre l'actif sous-jacent à l'émetteur au prix d'exercice K défini dans le contrat. Pour une option de vente de type européen, l'exercice du droit se fait à la maturité T du contrat. Pour une option de vente de type américain, l'exercice peut se faire à tout moment jusqu'à la maturité. Pour une option de vente de type bermudéen, l'exercice peut se faire à des instants précis définis dans le contrat. Dans le cadre de ce mémoire, la mention option de vente fait allusion à une option de vente de type européen.

On dénote par $\{S_t, 0 \leq t \leq T\}$ le processus stochastique qui décrit la dynamique poursuivie par l'actif sous-jacent et $\{P_t, 0 \leq t \leq T\}$ la valeur de l'option de vente.

Le paiement à échéance est

$$P_T = \max(0, K - S_T). \quad (1.1)$$

Dans la gestion de risques, l'option de vente peut être utilisée pour se protéger contre la baisse de la valeur de l'actif sous-jacent en dessous d'un certain seuil ou pour répliquer les flux financiers d'un autre produit financier à l'aide d'une stratégie de réplication.

1.1.1 Évaluation

Évaluer un produit dérivé dans un marché financier nécessite de trouver le prix qui empêche les opportunités d'arbitrage. Pour cela, on applique le théorème fondamental d'évaluation des actifs financiers qui stipule qu'en l'absence d'opportunités d'arbitrage, il existe au moins une mesure neutre au risque $\mathbb{Q}$ (aussi appelée mesure martingale équivalente MME) équivalente à $\mathbb{P}$ (mesure de probabilité réelle) telle que sous la mesure $\mathbb{Q}$, la valeur présente de tout actif risqué se comporte comme une martingale.

Ce théorème mentionne certaines notions dont les définitions sont les suivantes.

- 1 - On parle d'opportunités d'arbitrage lorsque pour un investissement initial nul, il est possible d'obtenir un gain sans aucune possibilité de perte.
- 2 - Deux mesures de probabilités sont équivalentes si elles assignent une probabilité nulle aux mêmes événements.
- 3 - La mesure neutre au risque $\mathbb{Q}$ est une mesure de probabilité équivalente à $\mathbb{P}$ sous laquelle les prix actualisés des actifs transigés sont des martingales.
- 4 - Soit $\{X_t, t \geq 0\}$ un processus stochastique adapté et défini sur l'espace proba-

bilisé filtré $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, \mathbb{Q})$. X_t est une martingale¹ si $\forall 0 \leq s \leq t$

$$X_s = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[X_t | \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}_s^{\mathbb{Q}}[X_t]. \quad (1.2)$$

Note : $\mathbb{E}_s^{\mathbb{Q}}[\cdot]$, $\text{Var}_s^{\mathbb{Q}}[\cdot]$ et $\text{Cov}_s^{\mathbb{Q}}[\cdot]$ représentent respectivement l'espérance, la variance et la covariance sous la mesure $\mathbb{Q}$ sachant $\mathcal{F}_s$.

La condition martingale induite par le théorème fondamental d'évaluation des actifs financiers appliquée au prix d'une option de vente est

$$P_t e^{-rt} = \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}}[P_T e^{-rT}]. \quad (1.3)$$

À tout instant t , $0 \leq t \leq T$, la valeur d'une option de vente est

$$\begin{aligned} P_t &= \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}}[P_T e^{-r(T-t)}] \\ &= \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}}[\max(0, K - S_T) e^{-r(T-t)}]. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Dans la littérature, il existe des formules fermées et semi fermées pour évaluer une option de vente dépendamment de l'hypothèse faite au sujet du modèle qui décrit la dynamique de l'actif sous-jacent. P_t est une fonction du prix courant de l'actif sous-jacent S_t , du prix d'exercice K , de la maturité T , du taux d'intérêt r , du taux de dividende r_d et de la volatilité σ_t . Dans la suite du document la notation $P_t(S_t, K, T, r, r_d, \sigma_t)$ fait référence à cette fonction.

1.2 Fonds distinct avec l'option GMAB (Guaranteed Minimum Accumulation Benefit)

Un fonds distinct est un produit financier émis par une compagnie d'assurance qui combine à la fois investissement et assurance, dont la valeur des prestations est reliée aux performances d'un portefeuille d'actifs financiers. Un fonds distinct offre des garanties sur l'investissement initial et les prestations peuvent être liées

1. Pour plus de détails, consulter Shreve (2004)

au décès ou à la survie de l'assuré. Il existe plusieurs types de garanties, nous nous sommes intéressés à la garantie GMAB.

Un fonds distinct avec option GMAB garantit à l'investisseur un taux de rendement minimum annuel. À l'échéance du contrat, l'investisseur recevra au minimum un montant $G = A_0(1+\gamma)^T$ correspondant au montant initial investi A_0 capitalisé au taux de rendement minimum garanti γ . Soit A le compte dans lequel le capital initial est investi, les frais sont déduits et les rendements sont crédités. La valeur de ce compte au temps $t, 0 \leq t \leq T$ est A_t et la garantie s'applique sur la valeur à maturité A_T . En contrepartie de la garantie l'assuré paie une prime de façon continue au taux α . Soit C_t la valeur au temps $t, 0 \leq t \leq T$, du contrat GMAB. Le paiement à échéance de l'assureur à l'assuré a une valeur

$$\begin{aligned} C_T &= \max(A_T, G) \\ &= A_T + \max(0, G - A_T). \end{aligned} \tag{1.5}$$

Ce paiement peut être décomposé en 2 parties :

- La valeur du fonds à maturité A_T .
- La valeur du paiement d'une option de vente ayant pour prix d'exercice G , maturité T et dont l'actif sous-jacent a une valeur A_T avec un taux de dividende α .

La première partie du paiement est certaine, l'assureur paiera à l'investisseur la valeur du fonds A_T ; fonds que possède l'assureur. La deuxième partie du paiement est à risque. Si la valeur du fonds A_T est supérieure au montant garanti G alors la garantie ne s'applique pas, l'assureur n'aura rien à déboursier. Par contre si la valeur du fonds A_T est inférieure à G , alors l'assureur devra verser à l'investisseur la différence $G - A_T$. L'option de vente est donc le passif de l'assureur.

Dans sa gestion des risques, l'assureur doit répliquer les flux financiers d'une option de vente. Cette réplication n'étant pas parfaite à cause des erreurs de discrétisation et des erreurs de modèle, elle va engendrer des gains ou des pertes à maturité.

La prime est aussi exposée au risque de marché car la prime est une fraction de la valeur du fonds. Quand le rendement diminue, la prime diminue également et l'assureur perçoit un revenu moindre. Par conséquent, l'assureur doit couvrir le risque dans les primes en plus du risque dans le paiement à l'échéance. Pour réduire les pertes, l'assureur peut intégrer les primes futures qui seront perçues dans sa stratégie de couverture. Augustyniak et Boudreault (2014a) ont montré qu'à échéance du contrat, les pertes seront moins importantes que si les primes n'avaient pas été intégrées. Cette technique s'appelle couverture du passif net. Le passif net correspond au passif déduit de la valeur présente espérée des primes futures. L'assureur anticipe sur les primes qu'il va recevoir et les inclut dans le portefeuille de couverture. La couverture du passif net a pour avantage de réduire les pertes en cas de marché baissier et pour inconvénient de réduire les profits en cas de marché haussier car la garantie ne s'applique pas et les primes auraient pu être des bénéfices.

1.2.1 Évaluation

Le fonds A_t n'est pas transigé sur les marchés financiers mais sa valeur est liée à la valeur d'un indice boursier (ex : S&P500) par la relation

$$A_t = A_0 \frac{S_t}{S_0} e^{-\alpha t} \quad (1.6)$$

où $\{S_t, t \geq 0\}$ est le processus stochastique qui décrit la dynamique de l'indice boursier. À tout instant t la valeur du contrat GMAB peut être obtenue par le

théorème fondamental d'évaluation des actifs financiers. On a donc

$$\begin{aligned}
C_t &= \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}} \left[C_T e^{-r(T-t)} \right] \\
&= \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}} \left[(A_T + \max(0, G - A_T)) e^{-r(T-t)} \right] \\
&= \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}} \left[A_T e^{-r(T-t)} \right] + \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}} \left[\max(0, G - A_T) e^{-r(T-t)} \right] \\
&= \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}} \left[A_t \frac{S_T}{S_t} e^{-\alpha(T-t)} e^{-r(T-t)} \right] + \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}} \left[\max(0, G - A_T) e^{-r(T-t)} \right] \\
&= A_t e^{-\alpha(T-t)} \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}} \left[\frac{S_T}{S_t} e^{-r(T-t)} \right] + \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}} \left[\max(0, G - A_T) e^{-r(T-t)} \right] \\
&= A_t e^{-\alpha(T-t)} + P_t(A_t, G, T, r, \alpha, \sigma_t)
\end{aligned} \tag{1.7}$$

où $P_t(A_t, G, T, r, \alpha, \sigma_t)$ est la valeur au temps t d'une option de vente ayant pour prix d'exercice G , maturité T et dont l'actif sous-jacent est A_t avec un taux de dividende α .

Soit NL_t la valeur du passif net pour $0 \leq t \leq T$. NL_t est égale à $P_t(A_t, G, T, r, \alpha, \sigma_t)$ moins la valeur présente espérée des primes futures. Ce qui correspond à

$$\begin{aligned}
NL_t &= P_t(A_t, G, T, r, \alpha, \sigma_t) - \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}} \left[\int_t^T \alpha A_s e^{-r(s-t)} ds \right] \\
&= P_t(A_t, G, T, r, \alpha, \sigma_t) - \int_t^T \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}} \left[\alpha A_s e^{-r(s-t)} \right] ds \\
&= P_t(A_t, G, T, r, \alpha, \sigma_t) - \int_t^T \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}} \left[\alpha A_t \frac{S_s}{S_t} e^{-\alpha(s-t)} e^{-r(s-t)} \right] ds \\
&= P_t(A_t, G, T, r, \alpha, \sigma_t) - \int_t^T \alpha A_t e^{-\alpha(s-t)} \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}} \left[\frac{S_s}{S_t} e^{-r(s-t)} \right] ds \\
&= P_t(A_t, G, T, r, \alpha, \sigma_t) - \int_t^T \alpha A_t e^{-\alpha(s-t)} ds \\
&= P_t(A_t, G, T, r, \alpha, \sigma_t) - A_t \int_t^T \alpha e^{-\alpha(s-t)} ds \\
&= P_t(A_t, G, T, r, \alpha, \sigma_t) - A_t \left(-e^{-\alpha(s-t)} \right)_t^T \\
&= P_t(A_t, G, T, r, \alpha, \sigma_t) - A_t (1 - e^{-\alpha(T-t)}).
\end{aligned} \tag{1.8}$$

À l'initialisation du contrat GMAB, l'assureur doit charger une prime équitable α telle que le passif net soit nul, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned}
P_0(A_0, G, T, r, \alpha, \sigma_0) - A_0 (1 - e^{-\alpha T}) &= 0 \\
P_0(A_0, G, T, r, \alpha, \sigma_0) + A_0 e^{-\alpha T} &= A_0.
\end{aligned} \tag{1.9}$$

L'équation (1.9) est cohérente avec l'équation (1.7). En effet, à $t = 0$, la valeur du contrat C_0 est égale au montant initial investi A_0 si la prime α est équitable.

CHAPITRE II

MODÈLES FINANCIERS

Les hypothèses relatives au modèle de marché financier ainsi qu'aux paramètres utilisés comme données en entrée dans ce modèle sont déterminantes dans la mise en place d'un programme de couverture. Le modèle permet de faire des prédictions sur le comportement de l'actif sous-jacent, et ces prédictions gouvernent l'évaluation des produits dérivés ainsi que les différentes opérations du programme de couverture.

Il est impossible d'obtenir un modèle qui reproduit exactement le comportement des rendements financiers, cependant un modèle pertinent est un modèle qui reproduit certaines caractéristiques statistiques qui ont été observées sur plusieurs séries temporelles en finance. Afin de mettre en évidence ces propriétés statistiques dites faits stylisés, nous avons étudié les rendements quotidiens de l'indice S&P500 sur la période 1987-01-01 à 2010-04-01 (5863 observations, source : *Yahoo ! Finance*).

Soit $R_t = \log(\frac{S_t}{S_{t-1}})$ le log-rendement sur la période allant de $t - 1$ à t , R_t peut être exprimé sous la forme

$$R_t = \mu_t + \epsilon_t = \mu_t + \sigma_t \eta_t$$

où η_t , $t = 1, 2, 3 \dots$ est une série de variables aléatoires indépendantes et identi-

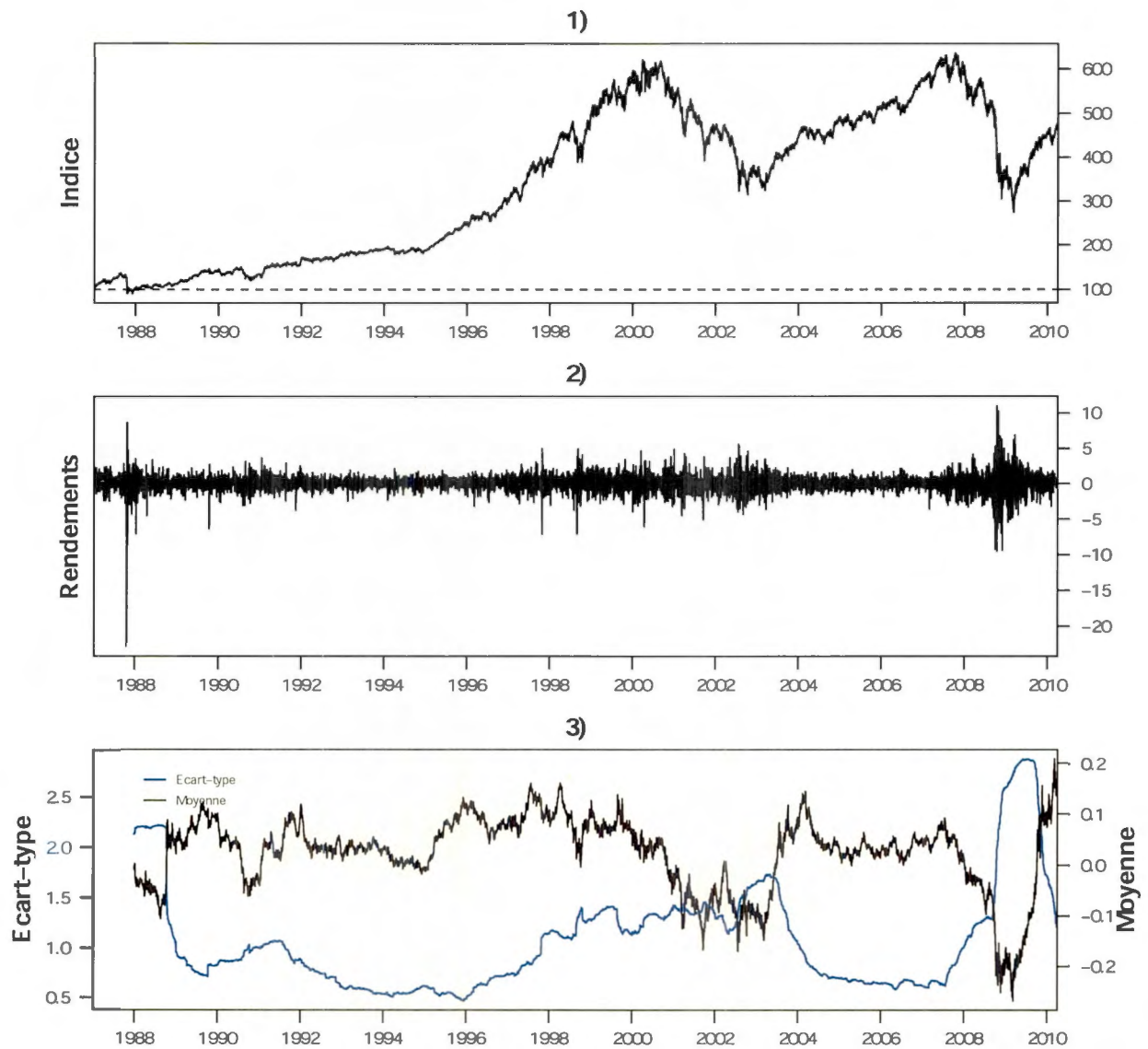


Figure 2.1 Indice S&P500 sur la période 1987-01-01 à 2010-04-01 (5863 observations, source : *Yahoo ! Finance*).

1) Valeur de l'indice (pour un niveau initial de 100). 2) Rendements quotidiens (en %). 3) Moyenne (en %) et écart-type (en %) des rendements quotidiens sur les 250 derniers jours.

quement distribuées de moyenne nulle et de variance unitaire. μ_t et σ_t représentent respectivement la moyenne et la variance de R_t conditionnelles au temps t ,

$$\mu_t = \mathbb{E}[R_t | R_{1:t-1}]$$

$$\sigma_t^2 = \text{Var}[R_t | R_{1:t-1}]$$

où $R_{1:t-1}$ est l'ensemble des rendements allant de R_1 à R_{t-1} .

Cont (2001) a défini les faits stylisés suivants :

1. Variation du taux de rendement moyen et de la volatilité à travers le temps.
Le troisième graphique de la figure 2.1 montre que la moyenne empirique et la variance empirique varient dans le temps lorsqu'on les calcule sur une fenêtre glissante de 250 jours.
2. Groupement de volatilité. Il y a une tendance à observer des périodes durant lesquelles il y a une succession de fortes amplitudes dans les rendements et d'autres périodes de faibles amplitudes. Le deuxième graphique de la figure 2.1 le montre, on peut observer des périodes de volatilité élevée autour des années 1988, 2000 et 2008.
3. Absence d'auto-corrélation empirique dans les rendements (voir le deuxième graphique de la figure 2.2). C'est-à-dire

$$\text{Corr}[R_t, R_{t+h}] \approx 0, \quad h = 1, 2 \dots$$

où $\text{Corr}[]$ est la fonction qui calcule la corrélation entre les rendements R_t et R_{t+h} .

4. Présence d'auto-corrélation empirique positive dans les valeurs absolues des rendements (voir le troisième graphique de la figure 2.2). C'est-à-dire

$$\text{Corr}[|\epsilon_t|, |\epsilon_{t+h}|] > 0, \quad h = 1, 2 \dots$$

5. Effet de levier. Un choc négatif sur le rendement R_t aura plus d'impact sur les volatilités des rendements R_{t+h} , $h = 1, 2 \dots$ qu'un choc positif (voir le quatrième graphique de la figure 2.2). C'est-à-dire

$$\text{Corr}[|\epsilon_{t+h}|, \max(-\epsilon_t, 0)] > \text{Corr}[|\epsilon_{t+h}|, \max(\epsilon_t, 0)].$$

6. Queues épaisses et asymétrie négative. Les rendements sont distribués selon une loi qui a un coefficient d'asymétrie négatif et un coefficient d'aplatissement > 3 , contrairement à une loi normale qui est symétrique et a un coefficient d'aplatissement de 3 (voir le premier graphique de la figure 2.2).

Différents modèles ont été utilisés dans ce projet. L'idée était de partir du modèle classique comme Black-Scholes où l'on suppose la normalité des log-rendements, moyenne et variance constantes ; ensuite de passer à des modèles qui reproduisent mieux les faits stylisés. Ces modèles sont :

- Modèle de Black et Scholes (1973).
- Modèle AR1.
- Modèle de sauts dans les rendements de Merton (1976).
- Modèle à volatilité stochastique de Heston (1993).
- Modèle à volatilité stochastique et des sauts dans les rendements et dans la volatilité SVCJ de Nelson (1990).

Ces cinq modèles ont été utilisés pour les projections du prix de l'actif sous-jacent. Mettre en place un programme de couverture nécessite d'évaluer des options transigées sur le marché et de créer un portefeuille de couverture permettant la réplication. Dans la littérature, il n'existe pas toujours de formule fermée ou semi-fermée pour la tarification d'options et pour le calcul des grecques utiles à la réplication. Le tableau 2.1 présente les modèles que nous avons utilisés pour la projection du prix de l'actif sous-jacent, pour la tarification des options et pour la réplication.

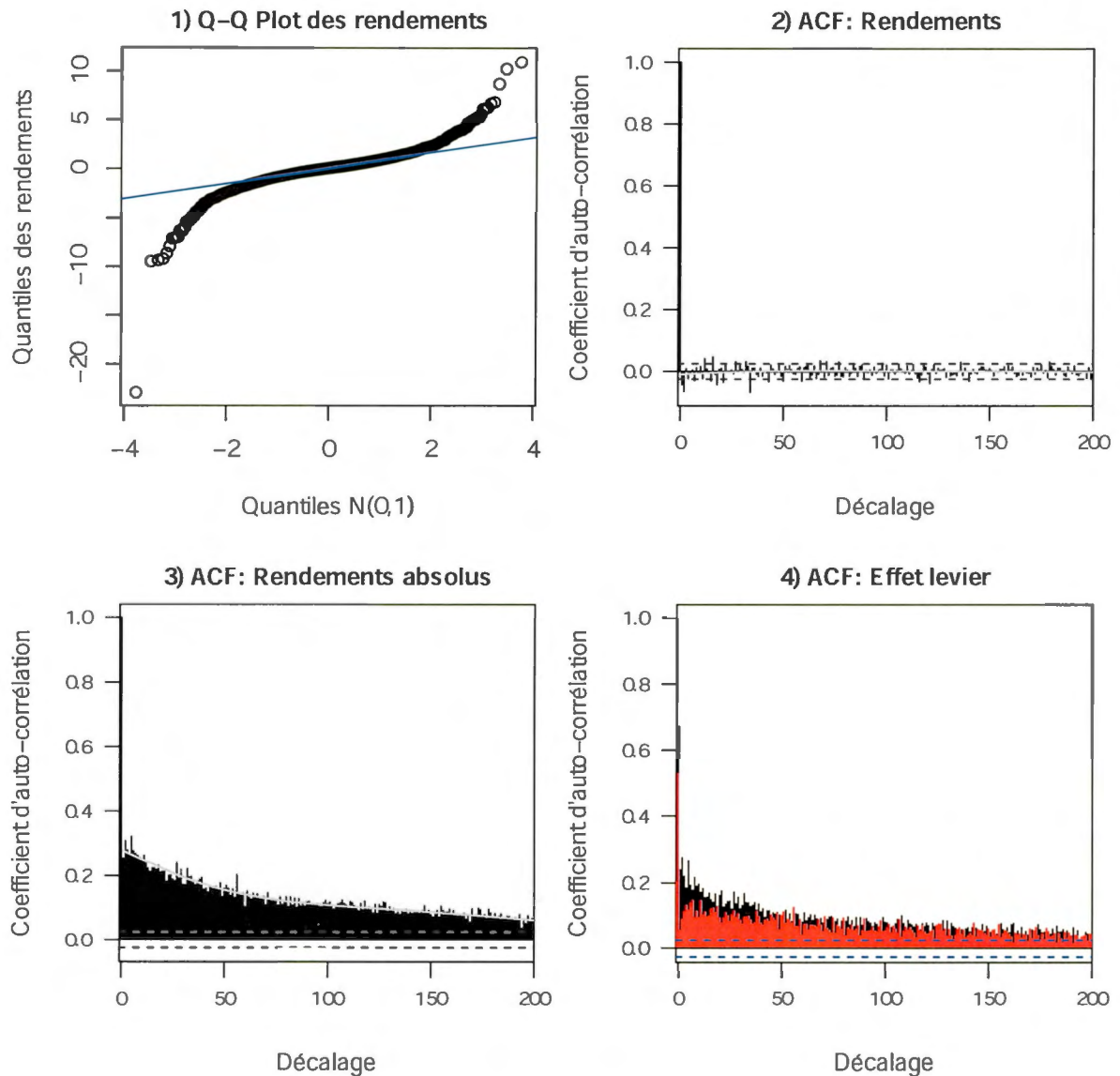


Figure 2.2 Statistiques descriptives de l'indice S&P500 sur la période 1987-01-01 à 2010-04-01 (5863 observations, source : *Yahoo! Finance*).

1) Q-Q Plot des rendements. 2) $\text{Corr}[R_t, R_{t+h}]$. 3) $\text{Corr}[|\epsilon_t|, |\epsilon_{t+h}|]$. 4) $\text{Corr}[|\epsilon_{t+h}|, \max(-\epsilon_t, 0)]$ en noir, $\text{Corr}[|\epsilon_{t+h}|, \max(\epsilon_t, 0)]$ en rouge. $\epsilon_t = R_t - \mu$ où μ est la moyenne échantillonnale.

Tableau 2.1 Récapitulatif des modèles

Modèles	Projection de l'actif	Évaluation d'options	Réplication
Black & Scholes	✓	✓	✓
AR1	✓		
Merton	✓		
Heston	✓	✓	✓
SVCJ	✓	✓	

2.1 Modèle de Black-Scholes

En 1973, Fischer Black et Myron Scholes introduisent ce modèle et définissent un cadre mathématique pour évaluer les produits dérivés. Par la suite ce modèle devient très populaire en finance et en gestion des risques, il est très utilisé pour étudier la dynamique des prix de l'actif sous-jacent et des prix de produits dérivés.

Selon ce modèle, le marché financier est parfait, certaines hypothèses faites sont :

- Pas de frais de transactions, ni taxes.
- Possibilité d'acheter ou de vendre n'importe quelle quantité d'unité d'actifs.
- Possibilité d'emprunter ou de prêter au taux sans risque sans restrictions.
- Les transactions ont lieu en continu.
- Le prix de l'actif sous-jacent suit un mouvement brownien géométrique.

Selon ce modèle, l'évolution du prix de l'actif sous-jacent est décrite par l'équation différentielle stochastique (EDS) suivante :

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t^{\mathbb{P}} \quad (2.1)$$

où $\mu \in \mathbb{R}$ est le coefficient de dérive, $\sigma > 0$ le coefficient de diffusion et $W^{\mathbb{P}} = \{W_t^{\mathbb{P}} : 0 \leq t \leq T\}$ est un mouvement brownien standard dans l'espace probabilisé filtré $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, \mathbb{P})$.

L'équation (2.1) admet une solution exacte qui est

$$S_{t+\Delta} = S_t \exp \left\{ \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) \Delta + \sigma (W_{t+\Delta} - W_t) \right\} \quad (2.2)$$

où $\Delta > 0$.

2.1.1 Estimation des paramètres

Les paramètres qui ont été utilisés pour ce modèle sont présentés dans le tableau 2.2. Ils ont été estimés par la méthode de maximum de vraisemblance sur des données de série temporelle du S&P500 sur la période 1987-01-01 à 2010-04-01. Les paramètres sont sur une base annuelle.

Tableau 2.2 Paramètres EMV du modèle de Black-Scholes (base annuelle)

$\hat{\mu}$	$\hat{\sigma}$
0.08844	0.19518

2.1.2 Simulation sous $\mathbb{P}$

Le modèle de Black-Scholes est un modèle à temps continu, le simuler nécessite de passer à temps discret. Nous utilisons l'équation (2.2) pour simuler l'évolution du prix du titre sous-jacent à temps discret. Pour cela on divise l'intervalle de temps $[0, T]$ en n sous-intervalles de longueur $\Delta = \frac{T}{n}$ (le pas de discrétisation) et nous appliquons l'algorithme récursif suivant pour $k = 1, 2, \dots, n$.

1. Simulation d'une loi normale centrée réduite :

$$Z_{k\Delta} \sim \mathcal{N}(0, 1).$$

2. Obtention du prix $S_{k\Delta}$ sachant $S_{(k-1)\Delta}$:

$$S_{k\Delta} = S_{(k-1)\Delta} \exp \left\{ \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) \Delta + \sigma \sqrt{\Delta} Z_{k\Delta} \right\}.$$

2.1.3 Évaluation d'une option de vente

Le marché financier selon le modèle de Black-Scholes n'offre pas d'opportunités d'arbitrage, donc il existe au moins une mesure martingale équivalente (MME) sous laquelle la valeur présente du prix de l'actif sous-jacent est une martingale. Le théorème de Girsanov nous permet de changer de mesure, de passer de la mesure réelle $\mathbb{P}$ à la mesure risque neutre $\mathbb{Q}$ (se référer à Shreve (2004) pour plus de détails sur la complétude des marchés et le changement de numéraire). La dynamique du prix du titre sous-jacent sous $\mathbb{Q}$ satisfait l'EDS

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t^{\mathbb{Q}} \quad (2.3)$$

où

$$W_t^{\mathbb{P}} = W_t^{\mathbb{Q}} - \lambda t$$

$$\lambda = \frac{\mu - r}{\sigma}$$

où r est le taux d'intérêt sans risque, λ la prime de risque et $W^{\mathbb{Q}} = \{W_t^{\mathbb{Q}} : 0 \leq t \leq T\}$ est un mouvement brownien standard dans l'espace probabilisé filtré $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, \mathbb{Q})$.

Sous cette mesure risque neutre, évaluer une option de vente consiste à calculer

$$P_t(S_t, K, T, r, r_d, \sigma) = \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}}[\max(0, K - S_T)e^{-r(T-t)}].$$

La solution est

$$P_t(S_t, K, T, r, r_d, \sigma) = Ke^{-r(T-t)}N(-d_2) - S_te^{-r_d(T-t)}N(-d_1)$$

avec

$$d_1 = \frac{\log\left(\frac{S_t}{K}\right) + (r - r_d + \sigma^2/2)(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T - t}$$

où $N(x)$ est la fonction de répartition d'une loi normale centrée réduite.

2.2 Modèle AR(1)

En économétrie, ce modèle fait partie de la famille des modèles dits autorégressifs d'ordre p dénotée $AR(p)$. Dans cette famille on considère que les valeurs passées de la série chronologique sont utiles pour prédire le futur. Les p dernières valeurs servent à prédire la prochaine valeur. Dans le cadre de ce projet nous avons utilisé le modèle $AR(1)$.

Soit $R_t = \log(\frac{S_t}{S_{t-1}})$ le log-rendement, le processus $\{R_t\}$ se comporte selon le modèle $AR(1)$ s'il satisfait l'équation

$$R_t = \delta + \epsilon_t + \phi_1 R_{t-1} \quad (2.4)$$

où $\delta \in \mathbb{R}$, $\epsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$, $\sigma > 0$ et ϵ_t est indépendant de R_{t-1} .

Certaines hypothèses faites dans ce modèle sont :

- Il y a une auto-corrélation entre les rendements qui décroît exponentiellement au taux ϕ_1 lorsque le délai entre les rendements augmente.
- Il y a stationnarité de la moyenne et de la variance des rendements à long terme.

La condition de stationnarité pour la moyenne des rendements est

$$\mathbb{E}[R_t] = \mu = \frac{\delta}{1-\phi_1} \quad (2.5)$$

et la condition de stationnarité pour la variance des rendements est

$$\text{Var}[R_t] = \gamma = \frac{\sigma^2}{1-\phi_1^2} \quad (2.6)$$

où $\mu \in \mathbb{R}$, $\gamma > 0$, $-1 < \phi_1 < 1$. ϕ_1 étant le paramètre d'auto-corrélation

$$\phi_1 = \frac{\text{Cov}[R_t, R_{t-1}]}{\text{Var}[R_t]} . \quad (2.7)$$

2.2.1 Estimation des paramètres

Les paramètres qui ont été utilisés pour ce modèle sont présentés dans le tableau 2.3. Ils ont été estimés par la méthode des moments (vu la taille de l'échantillon suffisante pour appliquer la loi des grands nombres et le côté pratique de la méthode) sur des données de série temporelle du S&P500 pour la période 1987-01-01 à 2010-04-01. Les estimateurs $\hat{\mu}$ et $\hat{\gamma}$ sont identiques à la moyenne et la variance obtenues pour le modèle de Black-Scholes car pour une loi normale la méthode des moments et la méthode du maximum de vraisemblance donnent des résultats identiques.

Tableau 2.3 Paramètres estimés du modèle AR(1) (base annuelle)

$\hat{\mu}$	$\hat{\gamma}$	$\hat{\phi}_1$	$\hat{\delta}$	$\hat{\sigma}$
0.06939	0.03810	-0.04264	0.07235	0.19500

2.2.2 Simulation sous $\mathbb{P}$

Pour simuler l'évolution du prix du titre sous-jacent à temps discret, on divise l'intervalle de temps $[0, T]$ en n sous-intervalles de longueur $\Delta = \frac{T}{n}$ (le pas de discrétisation) et nous appliquons l'algorithme récursif suivant pour $k = 1, 2, \dots, n$ avec comme condition initiale $R_0 = \mu$.

1. Simulation d'une loi normale :

$$\epsilon_{k\Delta} \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2).$$

2. Obtention du log-rendement $R_{k\Delta}$ sachant $R_{(k-1)\Delta}$:

$$R_{k\Delta} = \delta + \epsilon_{k\Delta} + \phi_1 R_{(k-1)\Delta}.$$

3. Calcul du prix $S_{k\Delta}$ sachant $S_{(k-1)\Delta}$:

$$S_{k\Delta} = S_{(k-1)\Delta} \exp \{R_{k\Delta}\}.$$

2.2.3 Évaluation d'une option de vente

Nous n'avons pas utilisé le modèle AR(1) pour la tarification d'options car dans la littérature ce modèle n'est pas populaire pour l'évaluation d'options.

2.3 Modèle de Merton

Lorsque Black et Scholes introduisent leur modèle, une de leurs hypothèses est la continuité de la trajectoire du prix de l'actif sous-jacent qui évolue selon un mouvement brownien géométrique. Merton (1976) explique que le prix de l'actif sous-jacent se comporte effectivement comme un mouvement brownien géométrique mais sa trajectoire est discontinue. Merton fait comme hypothèses :

- Une présence des sauts dans les rendements.
- La fréquence des sauts suit une loi Poisson.
- La taille des sauts suit une loi normale.

Selon Merton, sous la mesure réelle de probabilité, le prix de l'actif sous-jacent satisfait l'EDS

$$dS_t = (\alpha - \beta\lambda)S_t dt + \sigma S_t dW_t + S_t^- J dN_t \quad (2.8)$$

où

- $\alpha \in \mathbb{R}$, le taux de rendement moyen du titre ($\mathbb{E}[S_t] = S_0 e^{\alpha t}$).
- $\sigma > 0$, la volatilité des rendements.
- W_t , un mouvement brownien standard.
- $\{N_t, 0 \leq t \leq T\}$, un processus de Poisson d'intensité $\lambda > 0$ avec

$$\Pr(dN_t = 1) = \lambda dt = 1 - \Pr(dN_t = 0).$$

— $J > -1$, la taille d'un saut. J est une variable aléatoire indépendante de N_t avec

$$\log(1 + J) \sim \mathcal{N}(\gamma, \delta^2), \quad \mathbb{E}[J] = \beta, \quad \gamma \in \mathbb{R}, \quad \delta > 0, \quad \beta > -1.$$

L'équation (2.8) admet une solution exacte. Soit $Y_t = \log(S_t)$ le log-prix. À partir de l'EDS (2.8), le lemme d'Ito permet de trouver l'EDS de Y_t qui est

$$\begin{aligned} dY_t &= \left(\alpha - \beta\lambda - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \sigma dW_t + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{k+1}}{k!} J^k \right) dN_t \\ &= \left(\alpha - \beta\lambda - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \sigma dW_t + \log(1 + J) dN_t. \end{aligned} \quad (2.9)$$

En calculant l'intégrale des deux cotés de l'égalité sur un intervalle de temps $[t, t + \Delta]$

$$\int_t^{t+\Delta} dY_s = \int_t^{t+\Delta} \left(\alpha - \beta\lambda - \frac{\sigma^2}{2} \right) ds + \int_t^{t+\Delta} \sigma dW_s + \sum_{i=1}^{n_t} \log(1 + J^{(i)})$$

où n_t est le nombre de sauts sur l'intervalle, on trouve la solution exacte de l'équation (2.9)

$$Y_{t+\Delta} = Y_t + \left(\alpha - \beta\lambda - \frac{\sigma^2}{2} \right) \Delta + \sigma (W_{t+\Delta} - W_t) + \sum_{i=1}^{n_t} \log(1 + J^{(i)}). \quad (2.10)$$

Donc

$$S_{t+\Delta} = S_t \exp \left\{ \left(\alpha - \beta\lambda - \frac{\sigma^2}{2} \right) \Delta + \sigma (W_{t+\Delta} - W_t) \right\} \prod_{i=1}^{n_t} (1 + J^{(i)}). \quad (2.11)$$

2.3.1 Estimation des paramètres

Soit $R_t = \log \left(\frac{S_t}{S_{t-1}} \right)$ le log-rendement,

$$R_t = \left(\alpha - \beta\lambda - \frac{\sigma^2}{2} \right) \Delta + \sigma W_\Delta + \sum_{i=1}^{n_t} \log(1 + J^{(i)}).$$

La distribution de R_t conditionnelle à N_t est une loi normale. La densité conjointe d'une série temporelle composée de N observations de log-rendements $(r_{1:N})$ tous indépendants et identiquement distribués est

$$\begin{aligned} f(r_{1:N}) &= \prod_{t=1}^N f(r_t) \\ &= \prod_{t=1}^N \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} f(r_t, n_t = n) \right\} \\ &= \prod_{t=1}^N \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} f(r_t | n_t = n) \Pr(n_t = n) \right\}. \end{aligned}$$

Soit $\Theta = \{\alpha, \lambda, \sigma, \gamma, \delta\}$ le vecteur des paramètres, sa fonction de log-vraisemblance est

$$\ell(\Theta | r_{1:N}) = \sum_{t=1}^N \log \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} f(r_t | n_t = n, \Theta) \Pr(n_t = n | \Theta) \right\}.$$

Les paramètres ont été estimés par la méthode du maximum de vraisemblance sur des observations journalières d'une série temporelle du S&P500 pour la période 1987-01-01 à 2010-04-01. Pour des raisons pratique, nous avons posé comme hypothèse qu'en une journée il ne pouvait y avoir maximum un saut ($n_t = 1$ avec une probabilité $\lambda\Delta$ sinon 0). Les paramètres sont annualisés, ils sont présentés dans le tableau 2.4.

Tableau 2.4 Paramètres EMV du modèle de Merton (sur base annuelle)

$\hat{\alpha}$	$\hat{\lambda}$	$\hat{\sigma}$	$\hat{\gamma}$	$\hat{\delta}$	$\hat{\beta}$
0.08843	39.08404	0.12266	-0.00248	0.02417	-0.00219

2.3.2 Simulation sous $\mathbb{P}$

Le modèle de Merton est un modèle à temps continu, le simuler nécessite de passer à temps discret. Nous utilisons l'équation (2.11) pour simuler l'évolution du prix du titre sous-jacent à temps discret. Pour cela on divise l'intervalle de temps $[0, T]$ en n sous-intervalles de longueur $\Delta = \frac{T}{n}$ (le pas de discrétisation) et nous appliquons l'algorithme récursif suivant pour $k = 1, 2, \dots, n$.

1. Simulation d'une loi Bernouilli pour l'occurrence ou non d'un saut :

$$\Pr(n_{k\Delta} = 1) = \lambda\Delta = 1 - \Pr(n_{k\Delta} = 0).$$

2. Simulation d'une loi normale centrée réduite pour le saut :

$$Z_{k\Delta}^{(1)} \sim \mathcal{N}(0, 1).$$

3. Calcul du saut :

$$Q_{k\Delta} = \delta\sqrt{n_{k\Delta}}Z_{k\Delta}^{(1)} + \gamma n_{k\Delta}.$$

4. Simulation d'une loi normale centrée réduite :

$$Z_{k\Delta}^{(2)} \sim \mathcal{N}(0, 1).$$

5. Calcul du prix $S_{k\Delta}$ sachant $S_{(k-1)\Delta}$:

$$S_{k\Delta} = S_{(k-1)\Delta} \exp \left\{ \left(\alpha - \beta\lambda - \frac{\sigma^2}{2} \right) \Delta + \sigma\sqrt{\Delta}Z_{k\Delta}^{(2)} + Q_{k\Delta} \right\}.$$

2.3.3 Évaluation d'une option de vente

Le modèle de Merton est assez populaire pour l'évaluation d'options mais nous ne l'avons pas sélectionné, nous avons préféré les modèles de Black-Scholes et Heston.

2.4 Modèle de Heston

Le modèle de Heston (1993) est un modèle à volatilité stochastique qui permet de répliquer certains faits stylisés des rendements financiers tels que les queues épaisses et asymétrie négative, le groupement de volatilité, l'effet de levier. C'est un modèle populaire dans le domaine de la finance car on trouve dans la littérature (se référer à Rouah (2013)) des formules semi fermées utilisées pour l'évaluation des options et autres quantités d'intérêt.

Soient $\{S_t, 0 \leq t \leq T\}$ et $\{v_t, 0 \leq t \leq T\}$ des processus stochastiques décrivant respectivement le prix d'un actif financier et sa variance. Le prix se comporte selon le modèle de Heston s'il satisfait les deux EDS

$$dS_t = \mu S_t dt + \sqrt{v_t} S_t dW_t^{(s)} \quad (2.12)$$

$$dv_t = \kappa(\theta - v_t)dt + \sigma\sqrt{v_t}dW_t^{(v)} \quad (2.13)$$

où

- $W_t^{(s)}$ et $W_t^{(v)}$ sont des mouvements browniens.
- $\text{Corr}[W_t^{(s)}, W_t^{(v)}] = \rho$, $\rho \in [-1, 1]$.
- $\mu \in \mathbb{R}$, est le coefficient de dérive du prix l'actif sous-jacent.
- $\theta > 0$, est la moyenne à long terme de la variance.
- $\kappa > 0$, est la vitesse de retour à la moyenne de la variance.
- $\sigma > 0$, est la volatilité de la variance.
- $v_0 > 0$, est la valeur initiale de la variance.

L'équation (2.12) correspond à un mouvement brownien géométrique comme dans le modèle de Black-Scholes, à la différence que la volatilité est stochastique. L'équation (2.13) correspond à un processus racine carré de Cox *et al.* (1985). La condition de Feller $2\kappa\theta > \sigma^2$ doit être rencontrée afin que la variance soit toujours strictement positive.

2.4.1 Estimation des paramètres

Les prix des actifs financiers sont observés mais la volatilité stochastique ne l'est pas. L'estimation des paramètres du modèle de Heston fait appel à des techniques qui font le lien entre la variable observée et la variable latente. Grégoire (2016) dans ses travaux de maîtrise a étudié plusieurs techniques d'estimation des paramètres du modèle de Heston sous la mesure $\mathbb{P}$. Il est arrivé à la conclusion que lorsqu'on est

en possession d'observations quotidiennes du prix de l'actif sous-jacent, la méthode du filtre non-linéaire discret (DNF) est efficace pour estimer les paramètres. La méthode DNF consiste à approximer et à maximiser la fonction de vraisemblance en discrétisant le domaine de la variable latente en plusieurs intervalles adjacents (se référer à Grégoire (2016) pour plus de détails).

Nous avons utilisé l'algorithme développé par Grégoire pour estimer les paramètres du modèle de Heston via la méthode DNF. Le tableau 2.5 présente les valeurs des paramètres obtenus à partir des observations journalières d'une série temporelle du S&P500 pour la période 1987-01-01 à 2010-04-01.

Tableau 2.5 Paramètres du modèle de Heston (sur base annuelle)

$\hat{\mu}$	$\hat{\kappa}$	$\hat{\theta}$	$\hat{\sigma}$	$\hat{\rho}$
0.0718	3.8566	0.0332	0.3942	-0.6146

2.4.2 Simulation sous $\mathbb{P}$

Le modèle de Heston est un modèle à temps continu, le simuler requiert la discrétisation. Broadie et Kaya (2006) ont proposé une simulation exacte mais cette technique est lente à exécuter. Nous avons choisi d'appliquer le schéma de Milstein pour la variance et le log-prix, cette technique est rapide à exécuter et presque aussi précise que la technique de Broadie et Kaya. La discrétisation du processus pour le log-prix se déroule de la même manière que sous le modèle Black-Scholes. La discrétisation du processus CIR pour la variance peut engendrer des valeurs négatives malgré la condition de Feller, lorsque cela survient on prend la valeur absolue.

Pour simuler l'évolution du prix du titre sous-jacent et sa variance à temps discret, on divise l'intervalle de temps $[0, T]$ en n sous-intervalles de longueur $\Delta = \frac{T}{n}$

(le pas de discrétisation) et nous appliquons l'algorithme récursif suivant pour $k = 1, 2, \dots, n$ avec comme condition initiale $v_0 = \theta$.

1. Simulation d'une loi normale centrée réduite pour la variance :

$$Z_{k\Delta}^{(1)} \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

$$Z_{k\Delta}^{(v)} = Z_{k\Delta}^{(1)}.$$

2. Calcul de la variance $v_{k\Delta}$ sachant $v_{(k-1)\Delta}$:

$$v_{k\Delta} = v_{(k-1)\Delta} + \kappa(\theta - v_{(k-1)\Delta})\Delta + \sigma\sqrt{v_{(k-1)\Delta}}\sqrt{\Delta}Z_{k\Delta}^{(v)} + \frac{1}{4}\sigma^2\Delta\left[(Z_{k\Delta}^{(v)})^2 - 1\right].$$

3. Simulation d'une loi normale centrée réduite pour le prix :

$$Z_{k\Delta}^{(2)} \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

$$Z_{k\Delta}^{(s)} = \rho Z_{k\Delta}^{(1)} + \sqrt{1 - \rho^2} Z_{k\Delta}^{(2)}.$$

4. Calcul du prix $S_{k\Delta}$ sachant $S_{(k-1)\Delta}$:

$$S_{k\Delta} = S_{(k-1)\Delta} \exp \left\{ \left(\mu - \frac{v_{(k-1)\Delta}}{2} \right) \Delta + \sqrt{v_{(k-1)\Delta}} \sqrt{\Delta} Z_{k\Delta}^{(s)} \right\}.$$

2.4.3 Évaluation d'une option de vente

Le marché financier selon le modèle de Heston est incomplet car il existe plusieurs mesures martingales équivalentes (MME) sous lesquelles l'actif sous-jacent rapporte en moyenne le taux sans risque. Dans ce marché, l'actif sous-jacent est transigé mais la variance ne l'est pas. L'application du théorème de Girsanov permet de changer de mesure, de passer de la mesure réelle $\mathbb{P}$ à une mesure risque neutre $\mathbb{Q}$ non unique (se référer à Shreve (2004) pour plus de détails sur la complétude des marchés et le changement numéraire).

Les dynamiques du prix de l'actif sous-jacent et de la variance sous $\mathbb{Q}$ satisfont aux EDS

$$dS_t = rS_t dt + \sqrt{v_t} S_t d\widetilde{W}_t^{(s)} \quad (2.14)$$

$$dv_t = \kappa^*(\theta^* - v_t)dt + \sigma\sqrt{v_t}d\widetilde{W}_t^{(v)} \quad (2.15)$$

où

$$\begin{aligned} \widetilde{W}_t^{(s)} &= W_t^{(s)} + \int_0^t \frac{\mu-r}{\sqrt{v_s}} ds \\ \widetilde{W}_t^{(v)} &= W_t^{(v)} + \int_0^t \frac{\lambda\sqrt{v_s}}{\sigma} ds \\ \kappa^* &= \kappa + \lambda \\ \theta^* &= \frac{\kappa\theta}{\kappa+\lambda} \\ \rho &= \text{Corr}[\widetilde{W}_t^{(s)}, \widetilde{W}_t^{(v)}] = \text{Corr}[W_t^{(s)}, W_t^{(v)}] \end{aligned}$$

où r est le taux d'intérêt sans risque, λ la prime de risque de volatilité, $\widetilde{W}^{(s)} = \{\widetilde{W}_t^{(s)} : 0 \leq t \leq T\}$ et $\widetilde{W}^{(v)} = \{\widetilde{W}_t^{(v)} : 0 \leq t \leq T\}$ sont deux mouvements browniens corrélés dans l'espace probabilisé filtré $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, \mathbb{Q})$.

Pour évaluer le prix d'une option de vente, Albrecher *et al.* (2007) proposent une formule semi fermée faisant appel à la fonction caractéristique de Heston et nécessitant une intégration numérique, cette formule est

$$P_t(S_t, K, T, r, r_d, v_t) = Ke^{-r(T-t)}(1 - P_2) - S_t e^{-r_d(T-t)}(1 - P_1)$$

où

$$\begin{aligned} P_j &= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \text{Re} \left[\frac{e^{-iz \log(k)} f_j(z; y_t; v_t)}{iz} \right] dz \quad j = 1, 2 \\ f_j(z; y_t; v_t) &= \exp \left(C_j(\tau; z) + D_j(\tau; z)v_t + izy_t \right) \\ C_j(\tau; z) &= (r - r_d)iz\tau + \frac{\kappa\theta}{\sigma^2} \left[(b_j - \rho\sigma iz - d_j)\tau - 2 \log \left(\frac{1 - c_j e^{-d_j \tau}}{1 - c_j} \right) \right] \\ D_j(\tau; z) &= \frac{b_j - \rho\sigma iz - d_j}{\sigma^2} \left(\frac{1 - e^{-d_j \tau}}{1 - c_j e^{-d_j \tau}} \right) \\ c_j &= \frac{b_j - \rho\sigma iz - d_j}{b_j - \rho\sigma iz + d_j} \end{aligned}$$

$$d_j = \sqrt{(\rho\sigma iz - b_j)^2 - \sigma^2(2u_j iz - z^2)}$$

$$b_j = \kappa + \lambda + (j - 2)\rho\sigma$$

$$u_j = \frac{1}{2} + 1 - j$$

$$y_t = \log(S_t) \quad \tau = T - t$$

v_t est la variance courante du prix de l'actif sous-jacent.

2.5 Modèle SVCJ(Stochastic Volatility with Correlated Jumps)

Le modèle SVCJ(Stochastic Volatility with Correlated Jumps) est un modèle à volatilité stochastique avec sauts dans les processus de prix et de variance. Les sauts dans le processus du prix surviennent au même moment que les sauts dans le processus de variance et les tailles des sauts sont corrélées.

Dans ce mémoire nous avons choisi d'implanter un processus de variance qui suit le modèle GARCH de Nelson (1990) combiné à un processus de sauts. Ce choix est basé sur l'étude de Kaeck et Alexander (2013) qui ont analysé différentes classes de SVCJ et ont conclu que c'est la classe GARCH de Nelson (1990) qui permet de répliquer le mieux les propriétés de l'indice S&P500.

Soient $\{S_t, 0 \leq t \leq T\}$ et $\{v_t, 0 \leq t \leq T\}$ des processus stochastiques décrivant respectivement les dynamiques du prix du titre et sa variance. Soit $y_t = \log(S_t)$ le log-prix. Le log-prix et la variance satisfont les EDS

$$dy_t = \mu dt + \sqrt{v_t} dW_t^{(y)} + \xi_t^{(y)} dN_t \quad (2.16)$$

$$dv_t = \kappa(\theta - v_t)dt + \sigma v_t dW_t^{(v)} + \xi_t^{(v)} dN_t \quad (2.17)$$

où

- $W_t^{(y)}$ et $W_t^{(v)}$ sont des mouvements browniens.
- $\rho = \text{Corr}[W_t^{(y)}, W_t^{(v)}], \rho \in [-1, 1]$.

- $\mu \in \mathbb{R}$, est le coefficient de dérive de l'actif sous-jacent.
- $\theta > 0$, est la moyenne à long terme de la variance.
- $\kappa > 0$, est la vitesse de retour à la moyenne de la variance.
- $\sigma > 0$, est la volatilité de la variance.
- $\{N_t, 0 \leq t \leq T\}$ un processus de Poisson.

Les processus du log-prix et de la variance ont des sauts simultanés dont le taux d'arrivée est $\lambda_y \geq 0$. Les tailles des sauts du processus de variance sont indépendantes et identiquement distribuées, elles suivent une loi exponentielle de moyenne $\eta_v > 0$

$$\xi_t^{(v)} \sim \exp(\eta_v).$$

Conditionnellement à la taille du saut du processus de variance, la taille du saut du processus de log-prix est normalement distribuée

$$\xi_t^{(y)} \sim \mathcal{N}(\mu_y + \rho_J \xi_t^{(v)}, \sigma_y^2).$$

2.5.1 Estimation des paramètres

Estimer les paramètres du modèle SVCJ est une tâche complexe, pour cette raison nous avons utilisé les valeurs des paramètres obtenues par Kaeck et Alexander (2013). Ces paramètres ont été estimés à partir des données de log-rendements journaliers exprimés en pourcentage d'une série temporelle du S&P500 pour la période 1987-01-01 à 2010-04-01. Le tableau 2.6 présente les valeurs des paramètres.

2.5.2 Simulation sous $\mathbb{P}$

Nous avons besoin de discrétiser les processus de variance et de log-prix pour pouvoir simuler le modèle SVCJ. Au mieux de nos connaissances actuelles il n'existe pas de solution exacte, nous utilisons le schéma de Euler pour simuler la variance

Tableau 2.6 Paramètres estimés du modèle SVCJ tirés de Kaeck et Alexander (2013) (sur base quotidienne et en %)

μ	κ	θ	σ	ρ
0.038	0.008	1.114	0.153	-0.721
λ_y	μ_y	ρ_J	σ_y	η_v
0.009	-0.591	-3.197	1.402	0.707

et le log-prix journalier. Pour simuler l'évolution du prix du titre et sa variance à temps discret, on divise l'intervalle de temps $[0, T]$ en n sous-intervalles de longueur $\Delta = \frac{T}{n}$ (le pas de discrétisation) et nous appliquons l'algorithme récursif suivant pour $k = 1, 2, \dots, n$ avec comme conditions initiales $y_0 = 100 * \log(S_0)$ et $v_0 = \theta$.

1. Simulation d'une loi Bernouilli pour l'occurrence ou non d'un saut :

$$\Pr(N_{k\Delta} = 1) = \lambda_y = 1 - \Pr(N_{k\Delta} = 0).$$

2. Simulation d'une loi exponentielle de moyenne η_v pour la taille du saut du processus de la variance :

$$\xi_{k\Delta}^{(v)} \sim \exp(\eta_v).$$

3. Simulation d'une loi normale pour la taille du saut du processus de log-prix sachant la taille du saut du processus de la variance :

$$\xi_{k\Delta}^{(y)} | \xi_t^{(v)} \sim \mathcal{N}(\mu_y + \rho_J \xi_t^{(v)}, \sigma_y^2).$$

4. Simulation d'une loi normale centrée réduite pour le log-prix :

$$Z_{k\Delta}^{(1)} \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

$$Z_{k\Delta}^{(y)} = Z_{k\Delta}^{(1)}.$$

5. Calcul du log-prix $y_{k\Delta}$ sachant $y_{(k-1)\Delta}$ et $v_{(k-1)\Delta}$:

$$y_{k\Delta} = y_{(k-1)\Delta} + \mu\Delta + \sqrt{v_{(k-1)\Delta}}\sqrt{\Delta}Z_{k\Delta}^{(y)} + \xi_{k\Delta}^{(y)}N_{k\Delta}.$$

6. Obtention du prix $S_{k\Delta}$:

$$S_{k\Delta} = \exp(y_{k\Delta}/100).$$

7. Simulation d'une loi normale centrée réduite pour la variance :

$$Z_{k\Delta}^{(2)} \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

$$Z_{k\Delta}^{(v)} = \rho Z_{k\Delta}^{(1)} + \sqrt{1 - \rho^2} Z_{k\Delta}^{(2)}.$$

8. Calcul de la variance $v_{k\Delta}$ sachant $v_{(k-1)\Delta}$:

$$v_{k\Delta} = v_{(k-1)\Delta} + \kappa(\theta - v_{(k-1)\Delta})\Delta + \sigma\sqrt{\Delta}v_{(k-1)\Delta}Z_{k\Delta}^{(v)} + \xi_{k\Delta}^{(v)}N_{k\Delta}.$$

2.5.3 Évaluation d'une option de vente

Dans la littérature, il n'existe pas de formule fermée ou semi-fermée permettant d'évaluer une option de vente lorsque le prix de l'actif sous-jacent se comporte selon la classe de modèle SVCJ GARCH de Nelson (1990). Pour cette raison, nous avons choisi de mettre en place une grille de prix obtenus par simulations. Le prix d'une option de vente pouvant s'exprimer en fonction du ratio $\frac{S_t}{K}$, nous avons choisi une grille qui fournit un prix en fonction de la volatilité d'une part et du ratio $\frac{S_t}{K}$ d'une autre part. Pour le changement de mesure réelle vers risque neutre, nous avons posé comme hypothèses que tout actif financier rapporte en moyenne le taux sans risque et les primes de risque pour la variance ainsi que pour les sauts sont nulles.

CHAPITRE III

STRATÉGIES DE COUVERTURE

Le but de ce chapitre est de présenter les stratégies de couverture implantées dans le cadre de ce projet. Tout d’abord nous décrivons les notions et notations utilisées dans la présentation des stratégies. Ensuite nous expliquons les stratégies ; deux catégories de stratégie de couverture : couverture quadratique locale, couverture basée sur le calcul des grecques. Finalement nous exposons les choix déterminants dans l’efficacité d’une stratégie de couverture.

3.1 Notions et notations

Les modèles financiers que nous utilisons sont des modèles à temps continu mais les observations des prix des actifs financiers et toutes les transactions financières (achat, vente) se font à temps discret. De ce fait une discrétisation des modèles est requise (se référer aux sous-sections “Simulation sous $\mathbb{P}$ ” de chaque modèle pour obtenir les détails sur la discrétisation).

Soit $\tau = \{t : t = 0, 1, 2, \dots, T\}$, l’ensemble des temps discrets durant lesquels on observe les prix des actifs financiers. Les transactions financières se déroulent à des instants appartenant à cet ensemble. On dénote par Δt l’intervalle de temps qui s’écoule entre $t - 1$ et t .

Soit $\vec{S} = \{\vec{S}_t : t \in \tau\}$, le processus stochastique qui décrit l'évolution des prix des titres disponibles sur le marché. L'ensemble des prix des titres au temps t est représenté par $\vec{S}_t = (S_t^{(0)}, S_t^{(1)}, \dots, S_t^{(n)})$ où $S_t^{(k)} : k \in \{0, \dots, n\}$ est la valeur du titre k au temps t . Dans le cadre de ce projet, les titres transigés sur le marché financier sont :

- Le titre sans risque dont la valeur au temps t est $S_t^{(0)} = e^{rt}$.
- L'indice S&P500 (qui est également l'actif sous-jacent) dont la valeur au temps t est $S_t^{(1)}$.
- Une option de vente à parité¹ écrite sur l'indice S&P500 d'échéance un an dont la valeur au temps t est $S_t^{(2)}$.
- Une option de vente à parité écrite sur l'indice S&P500 d'échéance six mois dont la valeur au temps t est $S_t^{(3)}$.

Soit $\vec{\phi} = \{\vec{\phi}_t : t \in \tau\}$, le processus stochastique qui décrit la stratégie d'investissement. Le portefeuille de couverture au temps t est représenté par $\vec{\phi}_t = (\phi_t^{(0)}, \phi_t^{(1)}, \dots, \phi_t^{(n)})$ où $\phi_t^{(k)} : k \in \{0, \dots, n\}$ correspond au nombre de parts du titre numéro k détenues pendant la période $(t-1, t]$. Le choix des titres à inclure dans le portefeuille dépend de la stratégie de couverture.

Note : Dans la suite du document, le terme portefeuille fait référence au portefeuille de couverture.

On définit par $\vec{A} * \vec{B}$ le produit scalaire entre deux vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$ de même taille.

Soient V_t^- et V_t , les valeurs du portefeuille au temps t , respectivement avant et

1. option dont le prix d'exercice est identique au prix de l'actif sous-jacent

après rééquilibrage. V_t^- et V_t s'obtiennent à partir des formules suivantes :

$$\begin{cases} V_t = \vec{\phi}_{t+1} * \vec{S}_t = \sum_{k=0}^n \phi_{t+1}^{(k)} S_t^{(k)} , & t \in \tau \setminus \{T\} \\ V_t^- = \vec{\phi}_t * \vec{S}_t = \sum_{k=0}^n \phi_t^{(k)} S_t^{(k)} , & t \in \tau \setminus \{0\}. \end{cases}$$

On dénote par

- g_t : le gain d'investissement sur la valeur du marché réalisé sur l'intervalle $(t-1, t]$, on l'évalue de la manière suivante

$$\begin{aligned} g_t &= \sum_{k=1}^n \phi_t^{(k)} \left(\frac{S_t^{(k)}}{S_t^{(0)}} - \frac{S_{t-1}^{(k)}}{S_{t-1}^{(0)}} \right) S_t^{(0)} \\ &= \sum_{k=1}^n \phi_t^{(k)} \left(S_t^{(k)} - S_{t-1}^{(k)} e^{r\Delta t} \right) \\ &= \sum_{k=1}^n \phi_t^{(k)} \left(S_t^{(k)} e^{-r\Delta t} - S_{t-1}^{(k)} \right) e^{r\Delta t} \\ &= \sum_{k=1}^n \phi_t^{(k)} \Delta S_t^{(k)} e^{r\Delta t} \end{aligned} \tag{3.1}$$

où

$$\Delta S_t^{(k)} = S_t^{(k)} e^{-r\Delta t} - S_{t-1}^{(k)}.$$

- p_{t-1} : la prime périodique perçue par l'assureur pour l'intervalle $[t-1, t)$.
- c_t : le coût incrémental versé pour l'intervalle $(t-1, t]$. Ce coût correspond à l'ajout ou au retrait d'argent effectué par l'assureur pour amener la valeur du portefeuille à un certain seuil. Il est égal à

$$c_t = V_t - V_t^- = \sum_{k=0}^n \left(\phi_{t+1}^{(k)} - \phi_t^{(k)} \right) S_t^{(k)}.$$

La valeur du portefeuille à l'instant t correspond à la somme des valeurs capitalisées de toutes les primes perçues, de tous les gains réalisés et de tous les coûts incrémentaux engendrés depuis l'initialisation du contrat jusqu'à l'instant t , c'est-à-dire

$$V_t = \left(\sum_{i=1}^t \frac{c_i}{S_i^{(0)}} \right) S_t^{(0)} + \left(\sum_{i=1}^t \frac{g_i}{S_i^{(0)}} \right) S_t^{(0)} + \left(\sum_{i=0}^{t-1} \frac{p_i}{S_i^{(0)}} \right) S_t^{(0)}. \tag{3.2}$$

Une formule récursive pour obtenir V_t peut être déduite de l'équation (3.2)

$$V_t = V_{t-1}e^{r\Delta t} + c_t + g_t + p_{t-1}e^{r\Delta t}. \quad (3.3)$$

Une stratégie est dite auto-financée s'il n'y a aucun coût incrémental ($c_t = 0 \forall t$), aucun retrait ni injection d'argent n'est permis. Ce qui équivaut aussi à dire qu'à chaque instant t , la valeur du portefeuille avant rééquilibrage est égale à la valeur après rééquilibrage ($V_t^- = V_t$).

Une stratégie vérifie la propriété d'auto-financement en moyenne si le cumul des valeurs présentes des coûts incrémentaux est une martingale sous $\mathbb{P}$, c'est-à-dire

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{t-1}^{\mathbb{P}} \left[\sum_{i=0}^t \frac{c_i}{S_i^{(0)}} \right] &= \sum_{i=0}^{t-1} \frac{c_i}{S_i^{(0)}} \\ \mathbb{E}_{t-1}^{\mathbb{P}} \left[\frac{c_t}{S_t^{(0)}} \right] &= 0. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Dans un contexte de taux d'intérêt déterministe, une stratégie vérifie la propriété d'auto-financement en moyenne, si en moyenne les coûts incrémentaux sont nuls.

On dénote ξ_t l'erreur de couverture évaluée au temps t . L'erreur est la différence entre la valeur du passif net (NL_t introduit au chapitre 1) et la valeur du portefeuille net des coûts incrémentaux, soit

$$\begin{aligned} \xi_t &= NL_t - V_t + \left(\sum_{i=1}^t \frac{c_i}{S_i^{(0)}} \right) S_t^{(0)} \\ &= NL_t - \left(\sum_{i=1}^t \frac{g_i}{S_i^{(0)}} \right) S_t^{(0)} - \left(\sum_{i=0}^{t-1} \frac{p_i}{S_i^{(0)}} \right) S_t^{(0)}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

L'assureur cible une erreur de couverture nulle à maturité du contrat, donc de son point de vue, une stratégie de couverture efficace est une stratégie dont la perte due au passif net est contrebalancée par le cumul des gains générés par le portefeuille d'investissement et le cumul des primes perçues. Dans la suite de ce chapitre nous allons aborder les stratégies de couverture implantées dans le cadre de ce projet.

3.2 Couverture quadratique locale

L'idée de cette approche est de bâtir une stratégie qui, à chaque étape de ré-équilibrage du portefeuille, minimise la valeur présente quadratique espérée du coût incrémental. Cette approche autorise les injections ou retraits d'argent du portefeuille, mais fixe une contrainte : à maturité du contrat, la valeur du portefeuille doit être égale à la valeur du passif. Cette stratégie vérifie la propriété d'auto-financement en moyenne.

Pour la mise en place de cette stratégie de couverture, nous considérons que seuls deux titres sont disponibles sur le marché financier : Le titre sans risque et l'actif sous-jacent.

(1) À chaque instant, on cherche les coefficients $\vec{\phi}_t = (\phi_t^{(0)}, \phi_t^{(1)})$ qui vérifient la propriété

$$\arg \min_{(\phi_t^{(0)}, \phi_t^{(1)})} \left\{ \mathbb{E}_{t-1}^{\mathbb{P}} \left[\left(\frac{c_t}{S_t^{(0)}} \right)^2 \right] \right\} = \arg \min_{(\phi_t^{(0)}, \phi_t^{(1)})} \left\{ \text{Var}_{t-1}^{\mathbb{P}} \left[\frac{c_t}{S_t^{(0)}} \right] + \left(\mathbb{E}_{t-1}^{\mathbb{P}} \left[\frac{c_t}{S_t^{(0)}} \right] \right)^2 \right\}.$$

La stratégie étant auto-financée en moyenne, cela revient à

$$\arg \min_{(\phi_t^{(0)}, \phi_t^{(1)})} \left\{ \text{Var}_{t-1}^{\mathbb{P}} \left[\frac{c_t}{S_t^{(0)}} \right] \right\} = \arg \min_{(\phi_t^{(0)}, \phi_t^{(1)})} \left\{ \text{Var}_{t-1}^{\mathbb{P}} \left[c_t e^{-r\Delta t} \right] \right\}.$$

D'après l'équation (3.3)

$$\begin{aligned} \text{Var}_{t-1}^{\mathbb{P}} [c_t e^{-r\Delta t}] &= \text{Var}_{t-1}^{\mathbb{P}} [V_t e^{-r\Delta t} - V_{t-1} - g_t e^{-r\Delta t} - p_{t-1}] \\ &= \text{Var}_{t-1}^{\mathbb{P}} [V_t e^{-r\Delta t} - g_t e^{-r\Delta t}]. \end{aligned}$$

D'après l'équation (3.1)

$$\begin{aligned} \text{Var}_{t-1}^{\mathbb{P}} [c_t e^{-r\Delta t}] &= \text{Var}_{t-1}^{\mathbb{P}} [V_t e^{-r\Delta t} - \phi_t^{(1)} \Delta S_t^{(1)}] \\ &= \text{Var}_{t-1}^{\mathbb{P}} [V_t e^{-r\Delta t}] + \text{Var}_{t-1}^{\mathbb{P}} [\phi_t^{(1)} \Delta S_t^{(1)}] - 2 \text{Cov}_{t-1}^{\mathbb{P}} [V_t e^{-r\Delta t}, \phi_t^{(1)} \Delta S_t^{(1)}] \\ &= \text{Var}_{t-1}^{\mathbb{P}} [V_t e^{-r\Delta t}] + (\phi_t^{(1)})^2 \text{Var}_{t-1}^{\mathbb{P}} [\Delta S_t^{(1)}] - 2 \phi_t^{(1)} \text{Cov}_{t-1}^{\mathbb{P}} [V_t e^{-r\Delta t}, \Delta S_t^{(1)}]. \end{aligned}$$

Le minimum est atteint où la dérivée partielle par rapport à $\phi_t^{(1)}$ s'annule, ce qui nous permet d'obtenir

$$\phi_t^{(1)} = \frac{\text{Cov}_{t-1}^{\mathbb{P}}[V_t e^{-r\Delta t}, \Delta S_t^{(1)}]}{\text{Var}_{t-1}^{\mathbb{P}}[\Delta S_t^{(1)}]}. \quad (3.6)$$

(2) On exploite la propriété d'auto-financement en moyenne pour obtenir V_{t-1} , donc

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{t-1}^{\mathbb{P}}[c_t e^{-r\Delta t}] &= 0 \\ \mathbb{E}_{t-1}^{\mathbb{P}}[V_t e^{-r\Delta t} - V_{t-1} - g_t e^{-r\Delta t} - p_{t-1}] &= 0 \\ e^{-r\Delta t} \mathbb{E}_{t-1}^{\mathbb{P}}[V_t] - V_{t-1} - \mathbb{E}_{t-1}^{\mathbb{P}}[g_t e^{-r\Delta t}] - p_{t-1} &= 0 \\ e^{-r\Delta t} \mathbb{E}_{t-1}^{\mathbb{P}}[V_t] - V_{t-1} - \mathbb{E}_{t-1}^{\mathbb{P}}[\phi_t^{(1)} \Delta S_t^{(1)}] - p_{t-1} &= 0. \end{aligned} \quad (3.7)$$

L'équation (3.7) permet de déduire

$$V_{t-1} = e^{-r\Delta t} \mathbb{E}_{t-1}^{\mathbb{P}}[V_t] - \phi_t^{(1)} \mathbb{E}_{t-1}^{\mathbb{P}}[\Delta S_t^{(1)}] - p_{t-1}. \quad (3.8)$$

(3) Une fois les variables V_{t-1} et $\phi_t^{(1)}$ connues, on déduit $\phi_t^{(0)}$ à partir de la relation

$$V_{t-1} = \phi_t^{(0)} S_{t-1}^{(0)} + \phi_t^{(1)} S_{t-1}^{(1)}.$$

L'algorithme suivant tiré de Augustyniak *et al.* (2017), résume l'implantation d'une stratégie de couverture quadratique locale. Il y a une répétition des étapes pour $t = T, T-1, \dots, 1$ avec comme condition initiale $V_T = NL_T$.

1. Calculer w_t , x_t , y_t et z_t :

$$\begin{aligned} w_t &= \mathbb{E}_{t-1}^{\mathbb{P}}[(\Delta S_t^{(1)})^2] \\ x_t &= \mathbb{E}_{t-1}^{\mathbb{P}}[\Delta S_t^{(1)}] \\ y_t &= e^{-r\Delta t} \mathbb{E}_{t-1}^{\mathbb{P}}[V_t] \\ z_t &= e^{-r\Delta t} \mathbb{E}_{t-1}^{\mathbb{P}}[V_t \Delta S_t^{(1)}]. \end{aligned}$$

2. Obtenir $\phi_t^{(1)}$:

$$\phi_t^{(1)} = \frac{z_t - x_t y_t}{w_t - x_t^2}.$$

3. Calculer V_{t-1} :

$$V_{t-1} = y_t - \phi_t^{(1)} x_t - p_{t-1}.$$

4. Déduire $\phi_t^{(0)}$:

$$\phi_t^{(0)} = \frac{V_{t-1} - \phi_t^{(1)} S_{t-1}^{(1)}}{S_{t-1}^{(0)}}.$$

3.3 Couverture basée sur le calcul des grecques

Dans cette section, nous expliquons ce que sont les grecques et ensuite exposons les stratégies de couverture basées sur les grecques.

3.3.1 Présentation des grecques

Les grecques mesurent les sensibilités du prix d'un produit dérivé ou d'un portefeuille par rapport aux variations du prix de l'actif sous-jacent ou aux variations de certains paramètres du modèle financier. Ces mesures de sensibilité sont représentées pour la majorité par des lettres grecques, d'où le terme "grecques".

Soit G_t le prix d'un produit dérivé de maturité T et dont le prix de l'actif sous-jacent est $S_t^{(1)}$. Le prix de ce produit dérivé varie en fonction du temps t , du prix de l'actif sous-jacent $S_t^{(1)}$ et des paramètres du modèle financier tels que le taux d'intérêt sans risque r , la volatilité du prix de l'actif sous-jacent σ_t . Donc

$$G_t = f^G(t, S_t^{(1)}, \Theta)$$

où Θ = est le vecteur des paramètres du modèle financier.

Il existe plusieurs grecques (se référer à Bjork (2009)), celles utilisées dans le cadre de ce projet sont :

- Delta, dénoté $\Delta = \frac{\partial f^G}{\partial S_t^{(1)}}$, mesure la sensibilité du prix du produit dérivé par rapport aux variations du prix de l'actif sous-jacent.
- Gamma, dénoté $\Gamma = \frac{\partial^2 f^G}{(\partial S_t^{(1)})^2}$, mesure la sensibilité de la valeur du Delta par rapport aux variations du prix de l'actif sous-jacent.
- Vega, dénoté $\nu = \frac{\partial f^G}{\partial \sigma_t}$, mesure la sensibilité du prix du produit dérivé par rapport aux variations du paramètre de volatilité.

Obtenir les formules des grecques d'un produit dérivé revient à calculer les dérivées partielles du prix de ce produit dérivé par rapport aux variables d'intérêt (prix de l'actif sous-jacent, paramètres du modèle). Les sous-sections suivantes présentent les formules des grecques des produits utilisés dans ce projet.

Option de vente

Les tableaux 3.1 et 3.2 présentent les formules utilisées pour l'obtention des grecques selon le modèle de Black-Scholes et de Heston. Se référer à Bjork (2009) pour les dérivations des formules avec Black-Scholes et à Rouah (2013) pour les formules avec Heston.

Tableau 3.1 Grecques d'une option de vente avec Black-Scholes

Grecques	Formules
Δ	$-N(-d_1)e^{-r_d(T-t)}$
Γ	$\frac{\phi(d_1)}{S_t\sigma\sqrt{T-t}}e^{-r_d(T-t)}$
ν	$S_te^{-r_d(T-t)}\phi(d_1)\sqrt{T-t}$

Tableau 3.2 Grecques d'une option de vente avec Heston

Grecques	Formules
Δ	$(P_1 - 1)e^{-r_d(T-t)}$
Γ	$\frac{e^{-r_d(T-t)}}{\pi S_t} \int_0^\infty \text{Re}[e^{-iz \log(k)} f_1(z; x_t; v_t)] dz$
$\nu = \frac{\partial P_t}{\partial \sqrt{v_0}}$	$S_t e^{-r_d(T-t)} \frac{\partial P_1}{\partial v_0} 2\sqrt{v_0} - K e^{-r(T-t)} \frac{\partial P_2}{\partial v_0} 2\sqrt{v_0}$
	$\frac{\partial P_j}{\partial v_0} = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \text{Re}\left[\frac{e^{-iz \log(k)} f_j(z; x_t; v_t) D_j(T-t; z)}{iz}\right] dz$

Fonds distinct avec garantie GMAB

Les grecques d'un fonds distinct avec garantie GMAB sont exprimées en fonction de celles d'une option de vente étant donné que la valeur du passif net d'un GMAB est

$$NL_t = P_t(A_t, G, T, r, \alpha, \sigma_t) - A_t(1 - e^{-\alpha(T-t)}).$$

1. Delta

Il s'obtient avec la formule

$$\Delta_{NL_t} = \frac{\partial NL_t}{\partial S_t} = \frac{\partial NL_t}{\partial A_t} \frac{\partial A_t}{\partial S_t}. \quad (3.9)$$

Le calcul de la première dérivée donne

$$\begin{aligned} \frac{\partial NL_t}{\partial A_t} &= \frac{\partial P_t(A_t, G, T, r, \alpha, \sigma_t)}{\partial A_t} - (1 - e^{-\alpha(T-t)}) \\ &= \Delta_{P_t(A_t, G, T, r, \alpha, \sigma_t)} - (1 - e^{-\alpha(T-t)}). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Le calcul de la seconde dérivée donne

$$\frac{\partial A_t}{\partial S_t} = \frac{A_0}{S_0} e^{-\alpha t}. \quad (3.11)$$

Finalement si on remplace les équations (3.10) et (3.11) dans (3.9), on obtient

$$\Delta_{NL_t} = \frac{A_0}{S_0} \left(e^{-\alpha t} \Delta_{P_t(A_t, G, T, r, \alpha, \sigma_t)} - (e^{-\alpha t} - e^{-\alpha T}) \right). \quad (3.12)$$

2. Gamma

Il s'obtient avec la formule

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{NL_t} = \frac{\partial^2 NL_t}{\partial S_t^2} &= \frac{\partial \Delta_{NL_t}}{\partial S_t} \\
 &= \frac{\partial \Delta_{NL_t}}{\partial A_t} \frac{\partial A_t}{\partial S_t} \\
 &= \frac{\partial}{\partial A_t} \left(\frac{\partial NL_t}{\partial A_t} \frac{\partial A_t}{\partial S_t} \right) \frac{\partial A_t}{\partial S_t} \\
 &= \frac{\partial^2 NL_t}{\partial A_t^2} \left(\frac{\partial A_t}{\partial S_t} \right)^2 + \frac{\partial NL_t}{\partial A_t} \frac{\partial A_t}{\partial S_t} \frac{\partial^2 A_t}{\partial A_t \partial S_t} \\
 &= \frac{\partial^2 NL_t}{\partial A_t^2} \left(\frac{\partial A_t}{\partial S_t} \right)^2 + \frac{\partial NL_t}{\partial A_t} \frac{\partial A_t}{\partial S_t} * 0 \\
 &= \frac{\partial^2 NL_t}{\partial A_t^2} \left(\frac{\partial A_t}{\partial S_t} \right)^2.
 \end{aligned}$$

Donc

$$\Gamma_{NL_t} = \left(\frac{A_0}{S_0} \right)^2 e^{-2\alpha t} \Gamma_{P_t(A_t, G, T, r, \alpha, \sigma_t)}. \quad (3.13)$$

3. Vega

Il s'obtient avec la formule

$$\begin{aligned}
 \nu_{NL_t} &= \frac{\partial NL_t}{\partial \sigma_t} \\
 &= \frac{\partial P_t(A_t, G, T, r, \alpha, \sigma_t)}{\partial \sigma_t} \\
 &= \nu_{P_t(A_t, G, T, r, \alpha, \sigma_t)}.
 \end{aligned} \quad (3.14)$$

Définition. Soit $f(x)$ une fonction plusieurs fois dérivable de $x \in \mathbb{R}^d$, où $x = (x_1, \dots, x_d)$. La fonction évaluée au voisinage du vecteur $a \in \mathbb{R}^d$ peut être exprimée en expansion de la série de Taylor par

$$\begin{aligned}
 f(x_1, \dots, x_d) &= f(a_1, \dots, a_d) + \sum_{i=1}^d \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} (x_i - a_i) \\
 &+ \frac{1}{2!} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j} (x_i - a_i)(x_j - a_j) \\
 &+ \frac{1}{3!} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d \frac{\partial^3 f(x)}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} (x_i - a_i)(x_j - a_j)(x_k - a_k) \\
 &+ \dots
 \end{aligned}$$

L'approximation de premier ordre de $f(x)$ est

$$f(x_1, \dots, x_d) \approx f(a_1, \dots, a_d) + \sum_{i=1}^d \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} (x_i - a_i).$$

L'approximation de second ordre de $f(x)$ est

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_d) &\approx f(a_1, \dots, a_d) + \sum_{i=1}^d \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} (x_i - a_i) \\ &+ \frac{1}{2!} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j} (x_i - a_i)(x_j - a_j). \end{aligned}$$

Une stratégie de couverture basée sur le calcul des grecques est une stratégie autofinancée avec pour objectif de créer un portefeuille de couverture dont la valeur $V_t = f^V(t, S_t^{(1)}, \Theta)$ subit les mêmes fluctuations que celles subies par la valeur du produit dérivé à couvrir G_t suite aux petites variations des variables d'intérêt. Donc l'objectif est

$$f^V(x) - f^V(a) = f^G(x) - f^G(a) \quad (3.15)$$

où a est le vecteur de variables d'intérêt dont les valeurs courantes sont connues et x est un vecteur dans le voisinage de a .

Ainsi, les fluctuations de la valeur du portefeuille de couverture neutralisent celles de la valeur du produit dérivé. Le portefeuille global (produit dérivé plus portefeuille de couverture) est dit neutre lorsqu'il a les grecques nulles, il est alors insensible aux petits changements des variables d'intérêt.

Le portefeuille de couverture est composé d'unités de l'actif sous-jacent, du titre sans risque et éventuellement d'unités d'autres options écrites sur l'actif sous-jacent. Les quantités d'unité de chaque actif à détenir dans le portefeuille de couverture sont déterminées à partir du calcul des grecques.

À l'initialisation du portefeuille de couverture, sa valeur V_0 doit être égale à la valeur du produit dérivé G_0 . Avec le temps qui passe les prix des actifs évoluent, les valeurs des grecques changent. Maintenir une couverture nécessite le recalcul des grecques et le rééquilibrage du portefeuille de couverture.

Les stratégies de couverture basées sur le calcul des grecques utilisent une approximation de la série de Taylor pour résoudre l'équation (3.15), dépendamment des

grecques utilisées. Pour plus de détails sur les stratégies de couverture basées sur le calcul des grecques, se référer à Shreve (2004). Celles que nous avons utilisées dans ce projet suivent.

3.3.2 Couverture Delta neutre

L'objectif est d'obtenir un portefeuille global insensible aux petites variations du prix de l'actif sous-jacent. Pour cela le portefeuille global doit être Delta neutre, c'est-à-dire avoir un Delta nul. On utilise une approximation de premier ordre de la série de Taylor

$$\begin{aligned} f^V(t, S_{t+\Delta t}^{(1)}) - f^V(t, S_t^{(1)}) &\approx \frac{\partial f^V}{\partial S_t^{(1)}} \cdot (S_{t+\Delta t}^{(1)} - S_t^{(1)}) \\ f^G(t, S_{t+\Delta t}^{(1)}) - f^G(t, S_t^{(1)}) &\approx \frac{\partial f^G}{\partial S_t^{(1)}} \cdot (S_{t+\Delta t}^{(1)} - S_t^{(1)}) \end{aligned}$$

pour évaluer les variations des valeurs du portefeuille de couverture et du produit dérivé et ensuite on égalise, ce qui correspond à

$$\frac{\partial f^V}{\partial S_t^{(1)}} = \frac{\partial f^G}{\partial S_t^{(1)}}.$$

À chaque instant $t \in \tau$, le portefeuille de couverture doit être constitué de $\phi_{t+1}^{(1)}$ unités de l'actif sous-jacent de valeur $S_t^{(1)}$ et de $\phi_{t+1}^{(0)}$ unités du titre sans risque de valeur $S_t^{(0)}$ tel que

$$\frac{\partial}{\partial S_t^{(1)}} [\phi_{t+1}^{(1)} S_t^{(1)} + \phi_{t+1}^{(0)} S_t^{(0)}] = \frac{\partial G_t}{\partial S_t^{(1)}}.$$

Ce qui revient à détenir

$$\phi_{t+1}^{(1)} = \Delta G_t$$

unités de l'actif sous-jacent. Afin que la stratégie soit autofinancée il faut également détenir

$$\phi_{t+1}^{(0)} = \frac{V_t - \phi_{t+1}^{(1)} S_t^{(1)}}{S_t^{(0)}}$$

unités du titre sans risque.

Lorsque les changements du prix de l'actif sous-jacent ne sont pas très petits soit à cause des chocs ou à cause d'une fréquence de rééquilibrage plus grande, l'approximation de premier ordre génère des erreurs qui cumulées peuvent s'avérer importantes sur une grande échéance. La stratégie suivante essaie de pallier à ce problème.

3.3.3 Couverture Delta-Gamma neutre

Ici on utilise une approximation de second ordre de la série de Taylor

$$f^V(t, S_{t+\Delta t}^{(1)}) - f^V(t, S_t^{(1)}) \approx \frac{\partial f^V}{\partial S_t^{(1)}} \cdot (S_{t+\Delta t}^{(1)} - S_t^{(1)}) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f^V}{(\partial S_t^{(1)})^2} \cdot (S_{t+\Delta t}^{(1)} - S_t^{(1)})^2$$

$$f^G(t, S_{t+\Delta t}^{(1)}) - f^G(t, S_t^{(1)}) \approx \frac{\partial f^G}{\partial S_t^{(1)}} \cdot (S_{t+\Delta t}^{(1)} - S_t^{(1)}) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f^G}{(\partial S_t^{(1)})^2} \cdot (S_{t+\Delta t}^{(1)} - S_t^{(1)})^2$$

pour évaluer les variations des valeurs du portefeuille de couverture et du produit dérivé. L'objectif est d'obtenir un portefeuille global insensible aux plus grandes variations du prix de l'actif sous-jacent. Pour cela le portefeuille global doit être Delta-Gamma neutre, c'est-à-dire avoir un Delta et un Gamma nuls, ce qui correspond à résoudre les deux équations

$$\frac{\partial f^V}{\partial S_t^{(1)}} = \frac{\partial f^G}{\partial S_t^{(1)}}$$

$$\frac{\partial^2 f^V}{(\partial S_t^{(1)})^2} = \frac{\partial^2 f^G}{(\partial S_t^{(1)})^2}.$$

Par rapport à la couverture Delta neutre, un actif supplémentaire ayant un Gamma non nul doit être ajouté dans le portefeuille de couverture car le Gamma du prix de l'actif sous-jacent est nul. À chaque instant $t \in \tau$, le portefeuille de couverture doit être constitué de $\phi_{t+1}^{(2)}$ unités de l'option de vente d'échéance un an dont le

prix est $S_t^{(2)}$, de $\phi_{t+1}^{(1)}$ unités de l'actif sous-jacent de valeur $S_t^{(1)}$ et de $\phi_{t+1}^{(0)}$ unités du titre sans risque de valeur $S_t^{(0)}$ tel que

$$\frac{\partial^2}{(\partial S_t^{(1)})^2} [\phi_{t+1}^{(2)} S_t^{(2)} + \phi_{t+1}^{(1)} S_t^{(1)} + \phi_{t+1}^{(0)} S_t^{(0)}] = \frac{\partial^2 G_t}{(\partial S_t^{(1)})^2}$$

et

$$\frac{\partial}{\partial S_t^{(1)}} [\phi_{t+1}^{(2)} S_t^{(2)} + \phi_{t+1}^{(1)} S_t^{(1)} + \phi_{t+1}^{(0)} S_t^{(0)}] = \frac{\partial G_t}{\partial S_t^{(1)}}.$$

Ce qui revient à détenir

$$\phi_{t+1}^{(2)} = \frac{\Gamma_{G_t}}{\Gamma_{S_t^{(2)}}}$$

unités de l'option de vente et

$$\phi_{t+1}^{(1)} = \Delta_{G_t} - \phi_{t+1}^{(2)} \Delta_{S_t^{(2)}}$$

unités de l'actif sous-jacent. Afin que la stratégie soit autofinancée il faut également détenir

$$\phi_{t+1}^{(0)} = \frac{V_t - \phi_{t+1}^{(1)} S_t^{(1)} - \phi_{t+1}^{(2)} S_t^{(2)}}{S_t^{(0)}}$$

unités du titre sans risque.

La couverture Delta-Gamma apporte plus de précision que la couverture Delta mais cela implique plus de frais de transactions. Les couvertures Delta neutre et Delta-Gamma neutre ne se focalisent que sur les sensibilités par rapport aux variations du prix de l'actif sous-jacent. La stratégie suivante prend en compte les variations du prix de l'actif sous-jacent par rapport aux variations de la volatilité. Ce qui peut s'avérer utile si l'on estime que dans le modèle de marché financier la volatilité n'est pas constante.

3.3.4 Couverture Delta-Vega neutre

La stratégie consiste à se protéger contre les fluctuations du prix du produit dérivé dues aux petites variations du prix de l'actif sous-jacent et aux variations de la

volatilité du prix de l'actif sous-jacent. On utilise une approximation de premier ordre à deux variables flottantes de la série de Taylor

$$f^V(t, S_{t+\Delta t}^{(1)}, \sigma_{t+\Delta t}) - f^V(t, S_t^{(1)}, \sigma_t) \approx \frac{\partial f^V}{\partial S_t^{(1)}} \cdot (S_{t+\Delta t}^{(1)} - S_t^{(1)}) + \frac{\partial f^V}{\partial \sigma_t} \cdot (\sigma_{t+\Delta t} - \sigma_t)$$

$$f^G(t, S_{t+\Delta t}^{(1)}, \sigma_{t+\Delta t}) - f^G(t, S_t^{(1)}, \sigma_t) \approx \frac{\partial f^G}{\partial S_t^{(1)}} \cdot (S_{t+\Delta t}^{(1)} - S_t^{(1)}) + \frac{\partial f^G}{\partial \sigma_t} \cdot (\sigma_{t+\Delta t} - \sigma_t)$$

pour évaluer les variations des valeurs du portefeuille de couverture et du produit dérivé. Le portefeuille global doit avoir un Delta et un Vega nuls, ce qui correspond à résoudre les 2 équations

$$\begin{aligned} \frac{\partial f^V}{\partial S_t^{(1)}} &= \frac{\partial f^G}{\partial S_t^{(1)}} \\ \frac{\partial f^V}{\partial \sigma_t} &= \frac{\partial f^G}{\partial \sigma_t}. \end{aligned}$$

Par rapport à la couverture Delta neutre, un actif supplémentaire ayant un Vega non nul doit être ajouté dans le portefeuille de couverture car le Vega du prix de l'actif sous-jacent est nul. À chaque instant $t \in \tau$, le portefeuille de couverture doit être constitué de $\phi_{t+1}^{(2)}$ unités de l'option de vente d'échéance un an dont le prix est $S_t^{(2)}$, de $\phi_{t+1}^{(1)}$ unités de l'actif sous-jacent de valeur $S_t^{(1)}$ et de $\phi_{t+1}^{(0)}$ unités du titre sans risque de valeur $S_t^{(0)}$ tel que

$$\frac{\partial}{\partial \sigma_t} [\phi_{t+1}^{(2)} S_t^{(2)} + \phi_{t+1}^{(1)} S_t^{(1)} + \phi_{t+1}^{(0)} S_t^{(0)}] = \frac{\partial G_t}{\partial \sigma_t}$$

et

$$\frac{\partial}{\partial S_t^{(1)}} [\phi_{t+1}^{(2)} S_t^{(2)} + \phi_{t+1}^{(1)} S_t^{(1)} + \phi_{t+1}^{(0)} S_t^{(0)}] = \frac{\partial G_t}{\partial S_t^{(1)}}.$$

Ce qui revient à détenir

$$\phi_{t+1}^{(2)} = \frac{\nu_{G_t}}{\nu_{S_t^{(2)}}}$$

unités de l'option de vente et

$$\phi_{t+1}^{(1)} = \Delta_{G_t} - \phi_{t+1}^{(2)} \Delta_{S_t^{(2)}}$$

unités de l'actif sous-jacent. Afin que la stratégie soit autofinancée il faut également détenir

$$\phi_{t+1}^{(0)} = \frac{V_t - \phi_{t+1}^{(1)} S_t^{(1)} - \phi_{t+1}^{(2)} S_t^{(2)}}{S_t^{(0)}}$$

unités du titre sans risque.

Comme pour la couverture Delta-neutre, lorsque les changements du prix de l'actif sous-jacent ne sont pas très petits, l'approximation de premier ordre génère des erreurs qui cumulées peuvent s'avérer importantes sur une grande échéance. La stratégie suivante apporte plus de précisions tout en tenant compte de la sensibilité par rapport aux variations de la volatilité.

3.3.5 Couverture Delta-Gamma-Vega neutre

La stratégie consiste à se protéger contre les fluctuations de la valeur du produit dérivé dues aux plus grandes variations du prix de l'actif sous-jacent et aux petites variations de la volatilité. On utilise une approximation de second ordre de la série de Taylor à deux variables flottantes

$$\begin{aligned} f^V(t, S_{t+\Delta t}^{(1)}, \sigma_{t+\Delta t}) - f^V(t, S_t^{(1)}, \sigma_t) &\approx \frac{\partial f^V}{\partial S_t^{(1)}} \cdot (S_{t+\Delta t}^{(1)} - S_t^{(1)}) \\ &+ \frac{\partial f^V}{\partial \sigma_t} \cdot (\sigma_{t+\Delta t} - \sigma_t) \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f^V}{(\partial S_t^{(1)})^2} \cdot (S_{t+\Delta t}^{(1)} - S_t^{(1)})^2 \\ f^G(t, S_{t+\Delta t}^{(1)}, \sigma_{t+\Delta t}) - f^G(t, S_t^{(1)}, \sigma_t) &\approx \frac{\partial f^G}{\partial S_t^{(1)}} \cdot (S_{t+\Delta t}^{(1)} - S_t^{(1)}) \\ &+ \frac{\partial f^G}{\partial \sigma_t} \cdot (\sigma_{t+\Delta t} - \sigma_t) \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f^G}{(\partial S_t^{(1)})^2} \cdot (S_{t+\Delta t}^{(1)} - S_t^{(1)})^2. \end{aligned}$$

pour évaluer les variations des valeurs du portefeuille de couverture et du produit dérivé. Le portefeuille global doit être Delta-Gamma-Vega neutre, c'est-à-dire avoir un Delta, un Gamma et un Vega nuls, ce qui correspond à résoudre les 3

équations

$$\begin{aligned}\frac{\partial f^V}{\partial S_t^{(1)}} &= \frac{\partial f^G}{\partial S_t^{(1)}} \\ \frac{\partial^2 f^V}{(\partial S_t^{(1)})^2} &= \frac{\partial^2 f^G}{(\partial S_t^{(1)})^2} \\ \frac{\partial f^V}{\partial \sigma_t} &= \frac{\partial f^G}{\partial \sigma_t}.\end{aligned}$$

Par rapport à la couverture Delta-neutre, deux actifs supplémentaires ayant tous les deux, un Vega et un Gamma non nuls doivent être ajoutés dans le portefeuille de couverture. À chaque instant $t \in \tau$, le portefeuille de couverture doit être constitué de $\phi_{t+1}^{(3)}$ unités de l'option de vente d'échéance six mois dont le prix est $S_t^{(3)}$, de $\phi_{t+1}^{(2)}$ unités de l'option de vente d'échéance un an dont le prix est $S_t^{(2)}$, de $\phi_{t+1}^{(1)}$ unités de l'actif sous-jacent de valeur $S_t^{(1)}$ et de $\phi_{t+1}^{(0)}$ unités du titre sans risque de valeur $S_t^{(0)}$ tel que

$$\frac{\partial^2}{(\partial S_t^{(1)})^2} [\phi_{t+1}^{(3)} S_t^{(3)} + \phi_{t+1}^{(2)} S_t^{(2)} + \phi_{t+1}^{(1)} S_t^{(1)} + \phi_{t+1}^{(0)} S_t^{(0)}] = \frac{\partial^2 G_t}{(\partial S_t^{(1)})^2}$$

et

$$\frac{\partial}{\partial \sigma_t} [\phi_{t+1}^{(3)} S_t^{(3)} + \phi_{t+1}^{(2)} S_t^{(2)} + \phi_{t+1}^{(1)} S_t^{(1)} + \phi_{t+1}^{(0)} S_t^{(0)}] = \frac{\partial G_t}{\partial \sigma_t}$$

et

$$\frac{\partial}{\partial S_t^{(1)}} [\phi_{t+1}^{(3)} S_t^{(3)} + \phi_{t+1}^{(2)} S_t^{(2)} + \phi_{t+1}^{(1)} S_t^{(1)} + \phi_{t+1}^{(0)} S_t^{(0)}] = \frac{\partial G_t}{\partial S_t^{(1)}}.$$

Ce qui revient à déterminer

$$\phi_{t+1}^{(3)} = \frac{\left(\frac{\Gamma_{G_t}}{\Gamma_{S_t^{(2)}}} \right) \nu_{S_t^{(2)}} - \nu_{G_t}}{\left(\frac{\Gamma_{S_t^{(3)}}}{\Gamma_{S_t^{(2)}}} \right) \nu_{S_t^{(2)}} - \nu_{S_t^{(3)}}}$$

unités de l'option de vente d'échéance six mois,

$$\phi_{t+1}^{(2)} = \frac{\Gamma_{G_t}}{\Gamma_{S_t^{(2)}}} - \left(\frac{\Gamma_{S_t^{(3)}}}{\Gamma_{S_t^{(2)}}} \right) \phi_{t+1}^{(3)}$$

unités de l'option de vente d'échéance un an et

$$\phi_{t+1}^{(1)} = \Delta_{G_t} - \phi_{t+1}^{(2)} \Delta_{S_t^{(2)}} - \phi_{t+1}^{(3)} \Delta_{S_t^{(3)}}$$

unités de l'actif sous-jacent. Afin que la stratégie soit autofinancée il faut également détenir

$$\phi_{t+1}^{(0)} = \frac{V_t - \phi_{t+1}^{(1)} S_t^{(1)} - \phi_{t+1}^{(2)} S_t^{(2)} - \phi_{t+1}^{(3)} S_t^{(3)}}{S_t^{(0)}}$$

unités du titre sans risque.

3.4 Autres facteurs déterminants pour l'efficacité de couverture

L'efficacité de couverture est impactée par la stratégie de couverture mise en place, le choix du modèle financier ainsi que certains autres facteurs tels que la fréquence de rééquilibrage du portefeuille de couverture, le type de volatilité du prix de l'actif sous-jacent, les frais de transactions. Cette section présente les hypothèses que nous avons faites concernant la fréquence de rééquilibrage, la volatilité et les frais de transactions.

3.4.1 Fréquence de rééquilibrage du portefeuille de couverture

Le rééquilibrage d'un portefeuille de couverture consiste à ajuster les positions détenues pour chaque actif inclus dans le portefeuille. Le rééquilibrage peut être basé sur un critère temporel c'est-à-dire à une fréquence fixe. Dans ce mémoire on considère les fréquences de rééquilibrage suivantes :

- Quotidienne dénotée Q. Les positions détenues dans le portefeuille sont mises à jour après chaque observation du prix de l'actif sous-jacent.
- Hebdomadaire dénotée H. Les mises à jour se font toutes les cinq observations du prix de l'actif sous-jacent.

— Mensuelle dénotée M . Ici le rééquilibrage se fait après vingt observations du prix de l'actif sous-jacent.

Le rééquilibrage d'un portefeuille de couverture peut aussi se faire sur un critère dit de "balises". L'idée du rééquilibrage avec balises est de surveiller parallèlement l'évolution de la valeur du portefeuille de couverture et l'évolution de la valeur du passif net, et de mettre à jour ses positions seulement si la valeur absolue de la différence entre les deux valeurs dépasse un seuil prédéfini. Ce seuil est aussi appelé balise. Cette technique autorise l'injection ou le retrait d'argent.

Soit ϵ la balise, le rééquilibrage basé sur les grecques à l'instant t se fait si

$$|NL_t - V_t^-| > \epsilon.$$

Dans ce cas on calcule les quantités d'unité $(\phi_{t+1}^{(k)}, k = 1, \dots, n)$ des actifs risqués dépendamment de la stratégie de couverture adoptée et on injecte l'argent dont la valeur est

$$c_t = NL_t - V_t^-.$$

Ainsi la nouvelle valeur du portefeuille est

$$V_t = V_t^- + c_t.$$

À partir de V_t on obtient la quantité d'unité du titre sans risque

$$\phi_{t+1}^0 = \left(V_t - \sum_{k=1}^n \phi_{t+1}^k S_t^{(k)} \right) \frac{1}{S_t^{(0)}}.$$

3.4.2 Volatilité

Dans le cadre de ce mémoire, le choix de la valeur du paramètre de volatilité dans la stratégie de couverture s'applique uniquement pour le modèle de Black-Scholes, car pour le modèle de Heston, la volatilité est stochastique. Nous avons étudié trois manières de calculer la valeur du paramètre de volatilité :

- Volatilité constante (dénotée VC). On considère que la volatilité reste fixe de l'initialisation jusqu'à maturité du contrat. La valeur du paramètre utilisée lors de la tarification du produit est identique à celle utilisée pour déterminer le portefeuille de couverture tout au long de la durée du contrat. Cette valeur est issue de l'estimation des paramètres du modèle à $t = 0$.
- Volatilité historique (dénotée VH) du prix de l'actif sous-jacent au cours des trois dernières années. On la calcule en se basant sur les 780 dernières observations (3 ans) des log-rendements quotidiens (le log-rendement du jour n'est pas pris en compte). La simulation du prix de l'actif sous-jacent débute donc à $t - 780$, afin de constituer une profondeur adéquate qui est utilisée à partir de $t = 0$. Pour éviter un saut dans les log-rendements historiques causé par le passage de $S_{-1}^{(1)}$ à $S_0^{(1)}$, à $t = 1$ on considère que la dernière observation du log-rendement est nulle ($S_{-1}^{(1)} = S_0^{(1)}$). Ceci permet d'avoir une courbe de log-rendements lissée.
- L'indice de volatilité implicite (dénoté VIX). La volatilité implicite correspond à la valeur du paramètre de volatilité qui permet d'égaliser les prix selon le modèle de Black-Scholes aux prix des options observés sur le marché toutes choses étant égales par ailleurs. Le VIX est un indice de volatilité calculé par CBOE (Chicago Board Options Exchange) qui mesure la volatilité moyenne des prix des options d'achat et de vente écrites sur le S&P500. Le VIX représente la vision qu'ont les investisseurs de ce que sera le marché dans le futur. Kokholm et Stisen (2015) expliquent que le VIX peut être approximé de la manière suivante :

$$VIX_t^2 \approx -\frac{2}{\bar{T} - t} \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}} \left[\log \left(\frac{S_{\bar{T}}^{(1)}}{F_t^{\bar{T}}} \right) \right] \quad (3.16)$$

où $\bar{T} = t + 30$ jours et $F_t^{\bar{T}}$ est le prix forward de l'indice S&P500 avec une maturité de 30 jours. Pour plus de détails sur la volatilité implicite se référer à Gatheral (2006).

3.4.3 Frais de transactions

On considère que chaque rééquilibrage du portefeuille de couverture a un coût qui est égal à

$$T_x \sum_{k=1}^n S_t^{(k)} \left| \phi_{t+1}^{(k)} - \phi_t^{(k)} \right|$$

où T_x est le taux de frais. Ce coût est proportionnel à la variation des quantités d'unités des titres risqués. Plus on va réajuster son portefeuille de couverture, plus on paiera de frais. Plus hautes sont les variations des ratios de couverture, plus élevés sont les frais.

CHAPITRE IV

ANALYSE DES RÉSULTATS

Pour évaluer l'efficacité des différentes stratégies de couverture présentées au chapitre 3, nous avons mené des tests en simulant des scénarios. Le but de ce chapitre est de présenter les résultats numériques obtenus. Tout d'abord nous décrivons les mesures de risque utilisées pour évaluer l'efficacité de couverture, ensuite nous listons les hypothèses posées au cours de nos tests, et enfin nous présentons les résultats.

4.1 Mesures de risque

Pour chaque cas de tests nous avons simulé $W = 100\,000$ trajectoires du prix quotidien de l'actif sous-jacent sur toute la durée du contrat émis par l'assureur. Chaque trajectoire simulée fournit une erreur terminale de couverture (ξ_T). Une erreur positive est une perte pour l'assureur. C'est à partir de l'ensemble des données d'erreurs terminales de couverture que nous avons calculé les trois indicateurs statistiques de mesure de risque suivants.

1. La racine carrée de l'erreur quadratique moyenne (RMSE). Elle représente l'erreur-type, la dispersion de l'erreur de couverture autour de zéro. On

l'obtient avec la formule

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{W} \sum_{\omega=1}^W \left(\xi_T^{(\omega)} \right)^2}.$$

2. La valeur à risque - 95% (VaR-95%). Elle représente la perte qui ne sera pas dépassée par l'erreur de couverture avec une probabilité 0.95.
3. L'espérance conditionnelle unilatérale - 95% (CTE-95%). Elle correspond à la moyenne des 5% pires valeurs de l'erreur de couverture.

Une stratégie de couverture est dite efficace si la distribution des erreurs terminales de couverture est centrée en zéro et si les mesures de risque décrites ci-dessus se rapprochent le plus de zéro.

4.2 Hypothèses et procédures de tests

Nous avons considéré que l'assureur a émis deux produits qui arrivent à maturité dans $T = 10$ ans et dont l'actif sous-jacent est l'indice S&P500 de valeur initiale $S_0 = 100$. Le premier produit est une option de vente avec un prix d'exercice $K = 110$. Le second produit est un fonds distinct avec option GMAB dont le rendement annuel garanti est $\gamma = 0.9807\%$ (ce qui correspond à 95% d'un rendement de 1.5% par an pendant 10 ans). Avec un investissement initial $A_0 = 100$, le montant garanti lors de l'échéance du contrat GMAB est

$$G = 100 \times 0.95 \times (1.015)^{10} = 100 \times (1.009807)^{10} = 110.25.$$

Remarque : L'option de vente et le fonds distinct GMAB sont gérés de manière indépendante. La différence entre les deux produits provient de la couverture de la prime ou non. Prime unique dans un cas et prime payée jusqu'à maturité pour l'autre.

Un cas de tests consiste à :

1. Faire des choix portant sur les hypothèses décrites dans le tableau 4.1.
2. Exécuter le programme de couverture en simulant 100 000 trajectoires du prix quotidien de l'actif sous-jacent sur une durée de dix ans. À chaque trajectoire est associée une erreur terminale de couverture (ξ_T).
3. Calculer les mesures de risque.

Tableau 4.1 Hypothèses du programme de couverture

Hypothèses	Valeurs possibles
Produit	Option de vente, Fonds distinct GMAB
Modèle de couverture	Black-Scholes (BS), Heston (HS)
Modèle de marché	Black-Scholes (BS), AR1, Merton, Heston (HS), SVCJ
Technique de couverture	Quadratique locale (LH), Delta neutre (Δ), Delta-Gamma neutre ($\Delta-\Gamma$), Delta-Vega neutre ($\Delta-\nu$), Delta-Gamma-Vega neutre ($\Delta-\Gamma-\nu$)
Volatilité	Constante (VC), Historique (VH), Implicite (VIX), Stochastique (VS)
Frais de transactions	Avec (taux = 0.1%) ou sans
Fréquence de rééquilibrage	Quotidienne (Q), Hebdomadaire (H), Mensuelle (M), Balise avec seuil $\epsilon = 0.10$

Les tests ont été menés en trois phases. Une première phase au cours de laquelle nous avons posé les hypothèses de base pour le programme de couverture à savoir : modèle de couverture de Black-Scholes, volatilité constante, pas de frais de transactions, pas de balises. Les techniques de couverture utilisées sont celles ne nécessitant que deux actifs (l'actif sous-jacent et le titre sans risque) transigés sur le marché. Ensuite une seconde phase où nous conservons le modèle de couverture de Black-Scholes et testons l'impact des différentes possibilités de volatilité, incluons les frais de transactions et les balises. Enfin, au cours de la dernière phase

nous changeons de modèle de couverture et considérons Heston, avec l'inclusion des frais de transactions et des balises.

4.2.1 Grilles SVCJ

Au mieux de nos connaissances actuelles, le modèle SVCJ sous la forme que nous utilisons dans ce mémoire n'offre pas de formules fermées ou semi-fermées pour évaluer les options ou le VIX. C'est pour cette raison que nous avons mis en place des grilles de prix obtenus par simulation.

Grilles de prix d'options de vente

Soit $\tau = T - t$ et soit R_τ le log-rendement entre t et T , tel que $S_T^{(1)} = S_t^{(1)} e^{R_\tau}$. La relation entre le prix d'une option de vente et R_τ est

$$\begin{aligned} P_t(S_t^{(1)}, K, T, r, r_d, v_t) &= \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}} \left[\max(0, K - S_T^{(1)}) e^{-r(T-t)} \right] \\ &= \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}} \left[\max(0, K - S_t^{(1)} e^{R_\tau}) e^{-r\tau} \right] \\ &= S_t^{(1)} \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}} \left[\max\left(0, \frac{K}{S_t^{(1)}} - e^{R_\tau}\right) e^{-r\tau} \right]. \end{aligned}$$

On peut définir une fonction g qui estime par simulations

$$\mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}} \left[\max\left(0, \frac{1}{\alpha} - e^{R_\tau}\right) e^{-r\tau} \right]$$

au point (α, v_t) , où α est le ratio $\frac{S_t^{(1)}}{K}$ et v_t est la volatilité courante. Les autres informations nécessaires restant fixes à savoir les paramètres du modèle et la durée τ . On estime le prix de l'option avec

$$P_t(S_t^{(1)}, K, T, r, r_d, v_t) \simeq S_t^{(1)} * g(\alpha, v_t). \quad (4.1)$$

La grille est établie en faisant appel à la fonction g pour plusieurs valeurs de α espacées de $\Delta\alpha$ et plusieurs valeurs de v_t espacées de Δv_t . Ainsi pour obtenir le prix d'une option de vente, on fait une interpolation bilinéaire.

τ étant un paramètre fixe pour une grille donnée, il est nécessaire de créer une grille pour chaque valeur possible de τ . À l'instant t , lorsqu'une option de vente est initialement acquise (en position longue ou courte) pour être incluse dans le portefeuille de couverture, elle arrive à échéance dans $\tau = T - t$. Lors du rééquilibrage du portefeuille à l'instant $t + \Delta t$, l'option doit être évaluée et à ce moment le temps restant jusqu'à échéance est $\tau = T - t - \Delta t$.

Grille de VIX

Comme mentionné au chapitre 3, Kokholm et Stisen (2015) expliquent que le VIX peut être approximé de la manière suivante :

$$VIX_t^2 \approx -\frac{2}{\bar{T} - t} \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}} \left[\log \left(\frac{S_{\bar{T}}^{(1)}}{F_t^{\bar{T}}} \right) \right] \quad (4.2)$$

où $\bar{T} = t + 30$ jours et $F_t^{\bar{T}}$ est le prix forward de l'indice S&P500 avec une maturité de 30 jours. La grille que nous avons créée évalue le VIX par simulations pour chaque couple de variables prix de l'actif sous-jacent et volatilité.

4.2.2 Grilles de ratios pour la stratégie de couverture quadratique locale

Nous avons appliqué l'algorithme décrit à la section 3.2 pour implanter des grilles qui reflètent la stratégie de couverture quadratique locale. Il existe une grille par produit (option de vente, fonds distinct GMAB) et par fréquence (quotidienne, hebdomadaire, mensuelle) de rééquilibrage. Chaque grille contient les ratios $(\phi_t^{(0)}, \phi_t^{(1)})$ qui minimisent les coûts à chaque instant t donné et pour un prix de l'actif sous-jacent $S_t^{(1)}$ donné.

4.3 Résultats des tests

4.3.1 Phase 1 - Efficacité de couverture sous les hypothèses de base sous le modèle de Black-Scholes

Les techniques de couverture testées ici sont la couverture quadratique locale (dénnotée LH) et la couverture Delta neutre (dénnotée Δ) sous le modèle de couverture de Black-Scholes. La volatilité est constante et nous n'avons envisagé aucun frais de transactions ni de balise.

L'analyse des résultats dépend du modèle de marché.

Modèle de marché Black-Scholes

On constate qu'en l'absence d'erreur de modèle, la fréquence de rééquilibrage qui offre une meilleure efficacité de couverture est la fréquence quotidienne. Le tableau 4.2 montre que les mesures de risque sont les plus faibles pour la fréquence quotidienne aussi bien pour l'option de vente que pour le fonds distinct GMAB, et ceci quelque soit la stratégie adoptée (Delta neutre ou quadratique locale). On constate aussi que les deux stratégies sont assez semblables en termes de résultats avec un très léger avantage à la couverture quadratique locale qui permet d'obtenir les Var-95% et CTE-95% plus faibles que celles de la couverture delta. Les graphiques de la figure 4.1 nous montrent que les distributions des erreurs terminales de couverture possèdent les queues les plus fines lorsque la fréquence est quotidienne. Ceci est conforme au postulat de départ qui consiste à dire que l'erreur de discrétisation diminue lorsque la fréquence de rééquilibrage augmente.

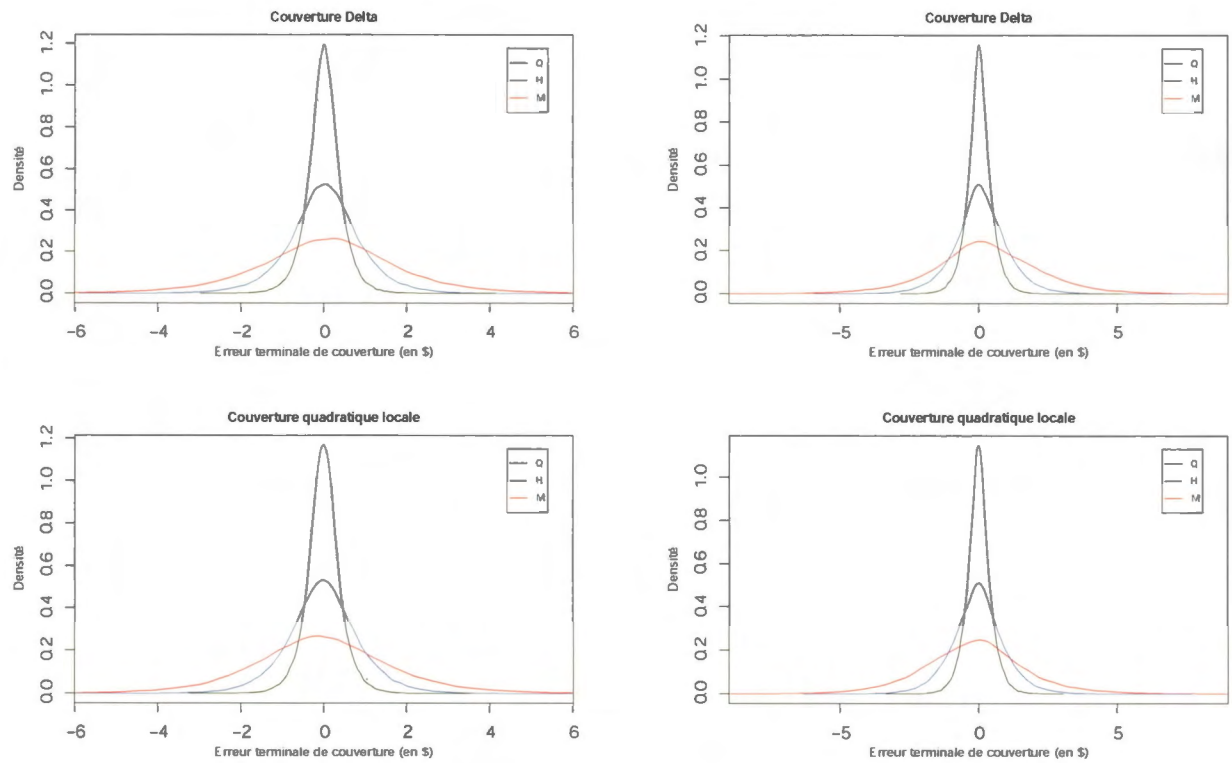


Figure 4.1 Distributions des erreurs terminales de couverture sous les hypothèses de base - Modèle de marché Black-Scholes

Colonne de gauche : Option de vente. Colonne de droite : Fonds distinct GMAB.

Tableau 4.2 Mesures de risque sous les hypothèses de base - Modèle de marché Black-Scholes

		Option de vente			GMAB		
		Q	H	M	Q	H	M
<u>RMSE</u>							
	LH	0.42	0.93	1.86	0.45	1.00	2.02
	Δ	0.42	0.94	1.89	0.45	1.01	2.07
<u>VaR-95%</u>							
	LH	0.67	1.53	3.07	0.72	1.61	3.21
	Δ	0.68	1.54	3.14	0.75	1.72	3.64
<u>CTE-95%</u>							
	LH	0.96	2.16	4.41	1.01	2.28	4.56
	Δ	0.96	2.17	4.43	1.04	2.37	4.92

Modèle de marché AR1

Lors de l'estimation des paramètres du modèle AR1, nous avons trouvé une moyenne et une variance stationnaires respectivement égales à la moyenne et la variance du modèle de Black-Scholes. Avec une distribution des log-rendements gaussienne, le modèle AR1 est assez proche du modèle de Black-Scholes en terme de prédiction. Ceci est confirmé par le tableau 4.3 et la figure 4.2 qui montrent des résultats quasi identiques à ceux obtenus lorsque le modèle de marché est Black-Scholes. La fréquence quotidienne a les mesures de risque les plus proches de zéro, la stratégie de couverture quadratique locale offre sensiblement une meilleure qualité que la couverture Delta neutre. La comparaison de la figure 4.2 à la figure 4.1 indique qu'il n'y a pas d'erreur de modèle.

Tableau 4.3 Mesures de risque sous les hypothèses de base - Modèle de marché AR1

		Option de vente			GMAB		
		Q	H	M	Q	H	M
<u>RMSE</u>							
	LH	0.42	0.93	1.85	0.45	1.00	2.01
	Δ	0.42	0.94	1.89	0.45	1.01	2.05
<u>VaR-95%</u>							
	LH	0.65	1.48	3.04	0.71	1.57	3.14
	Δ	0.65	1.52	3.13	0.72	1.69	3.60
<u>CTE-95%</u>							
	LH	0.93	2.13	4.32	0.99	2.22	4.50
	Δ	0.92	2.15	4.40	1.01	2.33	4.86

Modèle de marché Merton

Le modèle de Merton (1976) rajoute des sauts dans les prix de l'actif sous-jacent qui se comporte comme un mouvement brownien géométrique. L'erreur de modèle provient des sauts. La présence des sauts a un impact plus important sur un rééquilibrage plus fréquent car, plus l'intervalle de temps entre deux rééquilibrages est court, moins il y a de retours du prix à la tendance normale. Si on fixe comme références les résultats obtenus sans erreur de modèle, on constate dans les résultats du tableau 4.4, qu'avec un rééquilibrage quotidien du portefeuille de couverture d'un fonds distinct GMAB, le RMSE passe de 0.45 à 0.90, la VaR-95% passe 0.72 à 1.46, la CTE-95% d'environ 1.01 à 2.10. Alors que dans le même temps pour un rééquilibrage mensuel, le RMSE passe d'environ 2.02 à 2.14, la VaR-95% passe d'environ 3.21 à 3.39 et la CTE-95% de 4.56 à 4.91. Le phénomène observé est le même quelque soit la technique de couverture utilisée ou quelque soit le

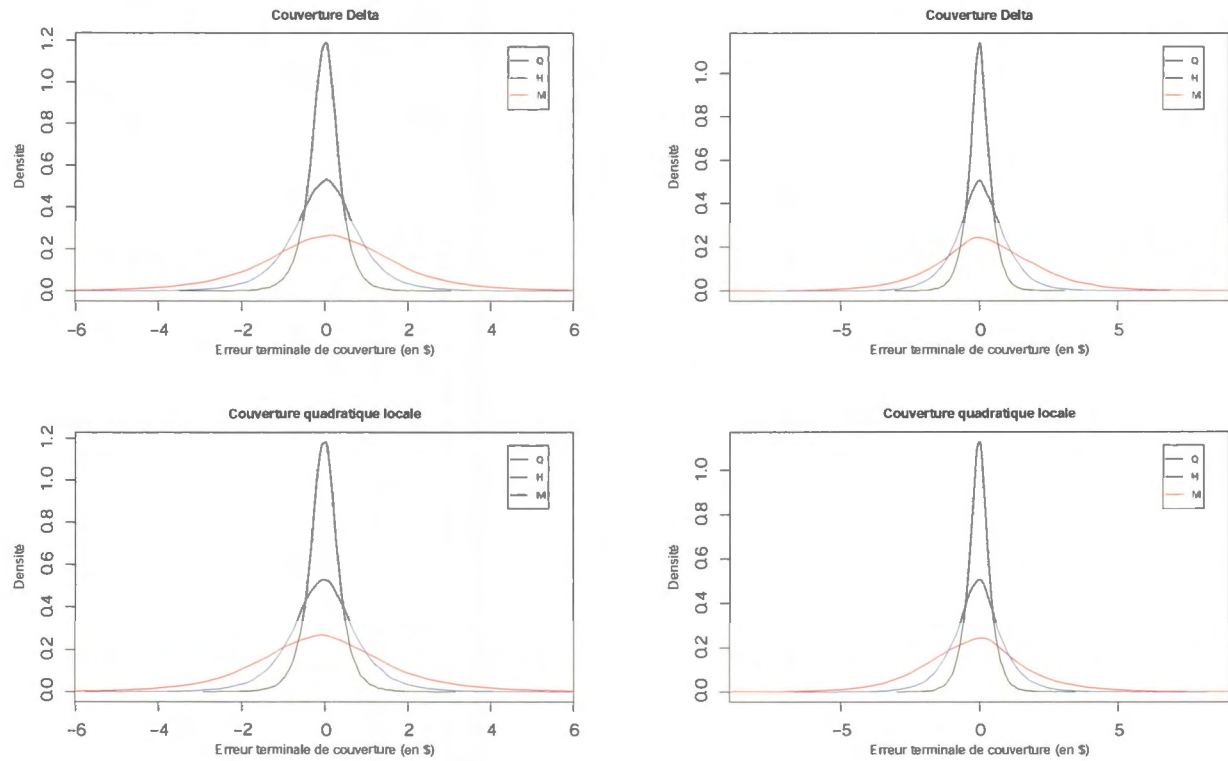


Figure 4.2 Distributions des erreurs terminales de couverture sous les hypothèses de base - Modèle de marché AR1

Colonne de gauche : Option de vente. Colonne de droite : Fonds distinct GMAB.

produit couvert. Sur les graphiques de la figure 4.3, on voit que les queues de la distribution des erreurs terminales de couverture avec rééquilibrage quotidien se rapprochent des queues de la distribution des erreurs terminales de couverture avec rééquilibrage hebdomadaire. Les sauts apportent plus de perturbations lorsque la fréquence de rééquilibrage est quotidienne, néanmoins la fréquence quotidienne demeure optimale et la qualité de couverture reste bonne vu l'échéance. La bonne qualité de couverture peut s'expliquer par le fait que les paramètres du modèle de Merton indiquent qu'en moyenne il y a environ 39 sauts par an et que la taille des sauts affecte la valeur du prix de l'actif sous-jacent d'environ -0.2% , donc les sauts dans le modèle ont un impact mineur. Les impacts seraient différents avec

des sauts plus sévères et moins fréquents.

Tableau 4.4 Mesures de risque sous les hypothèses de base - Modèle de marché Merton

		Option de vente			GMAB		
		Q	H	M	Q	H	M
<u>RMSE</u>							
	LH	0.85	1.18	1.98	0.90	1.27	2.14
	Δ	0.84	1.18	1.99	0.90	1.26	2.18
<u>VaR-95%</u>							
	LH	1.40	1.97	3.34	1.46	2.07	3.39
	Δ	1.39	1.97	3.35	1.48	2.14	3.85
<u>CTE-95%</u>							
	LH	2.02	2.83	4.79	2.10	2.95	4.91
	Δ	2.00	2.82	4.76	2.10	3.00	5.26

Modèle de marché Heston

Le tableau 4.5 présente les mesures de risque de l'efficacité de couverture lorsque l'actif sous-jacent suit une dynamique décrite par le modèle de Heston. On constate que le RMSE est supérieur à la VaR-95% indépendamment du produit couvert et de la technique de couverture. Ce qui signifie qu'en moyenne, le portefeuille de couverture générera plus de gains que de pertes à maturité du contrat. En effet, lorsque l'on observe les graphiques de la figure 4.4, on constate des distributions d'erreurs terminales de couverture non centrées à zéro avec des modes négatifs. Ceci est dû au fait que, la volatilité à long terme sous le modèle de Heston ($\approx 18\%$) est plus faible que la volatilité dans Black-Scholes ($\approx 19\%$). Donc, lorsque l'option de vente et le fonds distinct GMAB sont évalués à l'origine du contrat, les primes

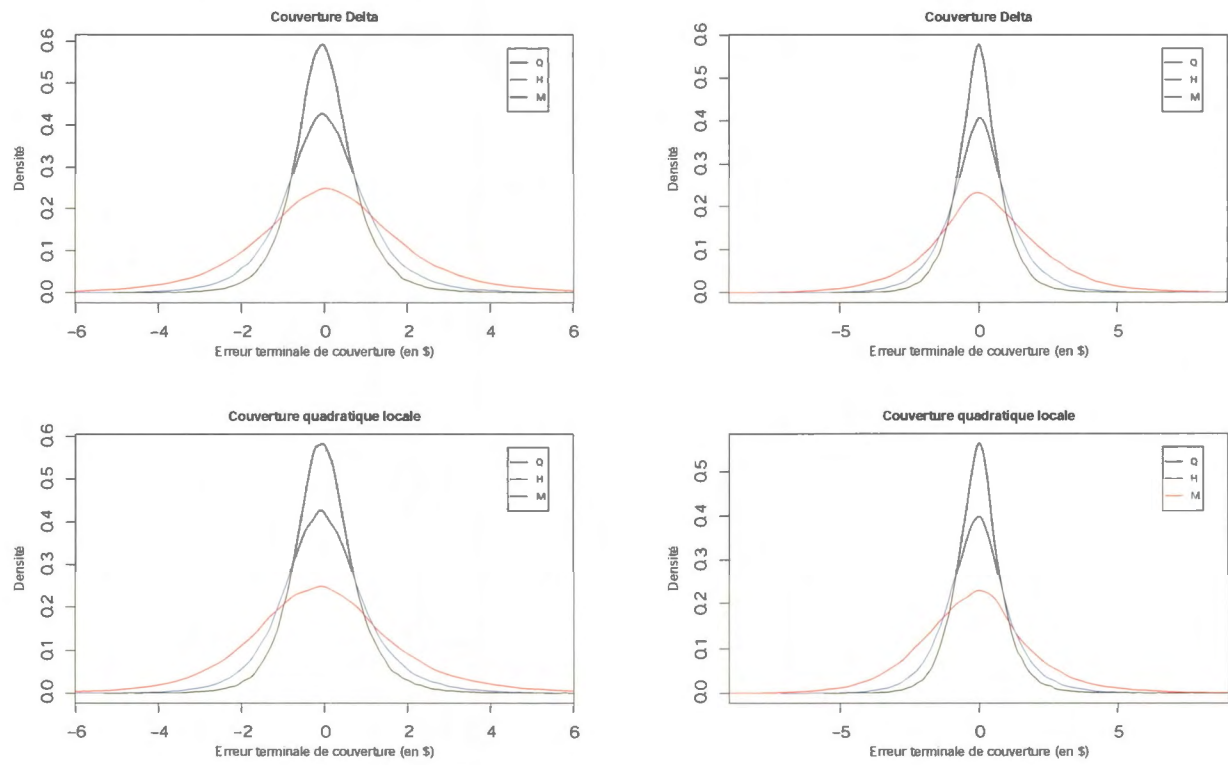


Figure 4.3 Distributions des erreurs terminales de couverture sous les hypothèses de base - Modèle de marché Merton

Colonne de gauche : Option de vente. Colonne de droite : Fonds distinct GMAB.

(respectivement 18.38\$ et 3.93%) chargées avec le modèle de Black-Scholes sont plus élevées que les primes (respectivement 16.70\$ et 3.35%) qui auraient été chargées avec le modèle de Heston. Malgré la probabilité de gains plus élevée que la probabilité de pertes, les 5% pires pertes sont tout de même plus élevées par rapport aux modèles de marché Black-Scholes, AR1 ou Merton. Avec le modèle de Heston la dégradation de la couverture est plus prononcée que la dégradation avec Merton. Le modèle de Heston reproduit l'asymétrie négative, le regroupement de volatilité, l'effet levier. La volatilité courante oscille beaucoup autour de la volatilité à long terme (Le paramètre de volatilité de la variance est d'environ 40%). Toutes ces frictions créent des erreurs de modèle et ébranlent la qualité de

couverture.

La fréquence de rééquilibrage quotidienne demeure la plus efficace, mais on note sur la figure 4.4 que les queues de distribution des erreurs terminales de couverture à rééquilibrage quotidien et hebdomadaire sont de plus en plus confondues. Avec une couverture Delta neutre de l'option de vente, sans erreur de modèle on obtient une RMSE, une VaR-95% et une CTE-95% respectivement de 0.42, 0.68, 0.96 pour une fréquence de rééquilibrage quotidienne et 0.94, 1.54, 2.17 pour une fréquence de rééquilibrage hebdomadaire. Avec le modèle de marché Heston, la RMSE, la VaR-95% et la CTE-95% passent respectivement à 2.45, 2.13, 3.56 pour une fréquence de rééquilibrage quotidienne et 2.61, 2.57, 4.23 pour une fréquence de rééquilibrage hebdomadaire. Le phénomène est le même si on utilise une technique de couverture quadratique locale ou si on couvre les risques d'un fonds distinct GMAB.

Tableau 4.5 Mesures de risque sous les hypothèses de base - Modèle de marché Heston

		Option de vente			GMAB		
		Q	H	M	Q	H	M
<u>RMSE</u>							
	LH	2.44	2.64	3.27	3.02	3.20	3.81
	Δ	2.44	2.63	3.18	3.00	3.13	3.53
<u>VaR-95%</u>							
	LH	2.14	2.67	4.11	1.17	1.56	2.78
	Δ	2.15	2.59	3.82	1.19	1.55	2.72
<u>CTE-95%</u>							
	LH	3.59	4.32	6.47	2.46	3.07	4.89
	Δ	3.61	4.25	6.13	2.49	3.07	4.82

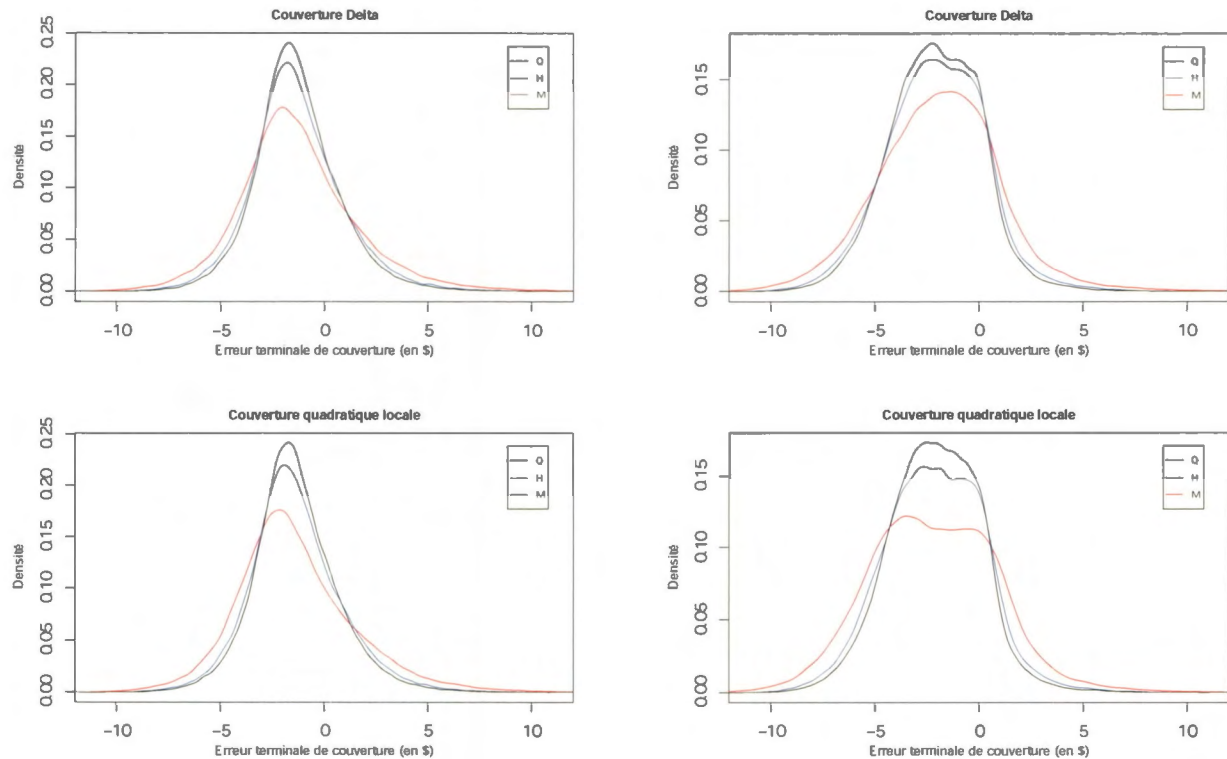


Figure 4.4 Distributions des erreurs terminales de couverture sous les hypothèses de base - Modèle de marché Heston

Colonne de gauche : Option de vente. Colonne de droite : Fonds distinct GMAB.

Modèle de marché SVCJ

Les deux techniques de couverture employées jusqu'ici sous les hypothèses de base ne sont pas efficaces lorsque l'actif sous-jacent se comporte comme décrit sous le modèle de marché SVCJ. Le modèle SVCJ reproduit les mêmes faits stylisés que le modèle de Heston avec en plus la présence des sauts. Donc il est logique d'observer une erreur de couverture plus grande. Le tableau 4.6 nous permet de remarquer le niveau élevé des mesures de risques par rapport aux résultats obtenus précédemment. Pour une option de vente, si l'on met en place une technique de couverture Delta neutre, et si l'on adopte une fréquence de rééquilibrage quotidienne, dans

5% des cas la perte sera supérieure à 14.13\$. La moyenne des 5% pires pertes est de 22.58\$. Pour un fonds distinct GMAB, les pertes probables restent élevées mais dans une moindre mesure par rapport aux pertes probables d'une option de vente. Ceci s'explique par la capacité de la couverture du passif net utilisée pour un fonds distinct GMAB à limiter les pertes en cas de marché baissier et à atténuer les gains en cas de marché haussier, car l'assureur couvre les primes futures qui seront perçues.

Une fois de plus la couverture Delta neutre et la couverture quadratique locale ont des résultats similaires. La fréquence de rééquilibrage quotidienne est celle qui offre une inefficacité de couverture la moins exécrable. La figure 4.5 confirme la tendance observée avec le modèle de Merton et celui de Heston, à savoir un rapprochement entre les queues des distributions des erreurs terminales de couverture à fréquence de rééquilibrage quotidienne et hebdomadaire.

Tableau 4.6 Mesures de risque sous les hypothèses de base - Modèle de marché SVCJ

		Option de vente			GMAB		
		Q	H	M	Q	H	M
<u>RMSE</u>							
	LH	7.06	7.31	8.13	5.00	5.22	6.00
	Δ	7.08	7.75	8.02	5.02	5.23	5.78
<u>VaR-95%</u>							
	LH	14.05	14.58	16.28	8.74	9.09	10.20
	Δ	14.02	14.56	15.77	8.88	9.10	10.16
<u>CTE-95%</u>							
	LH	22.16	22.95	25.48	15.29	15.55	17.66
	Δ	22.18	23.05	25.17	15.23	15.79	17.44

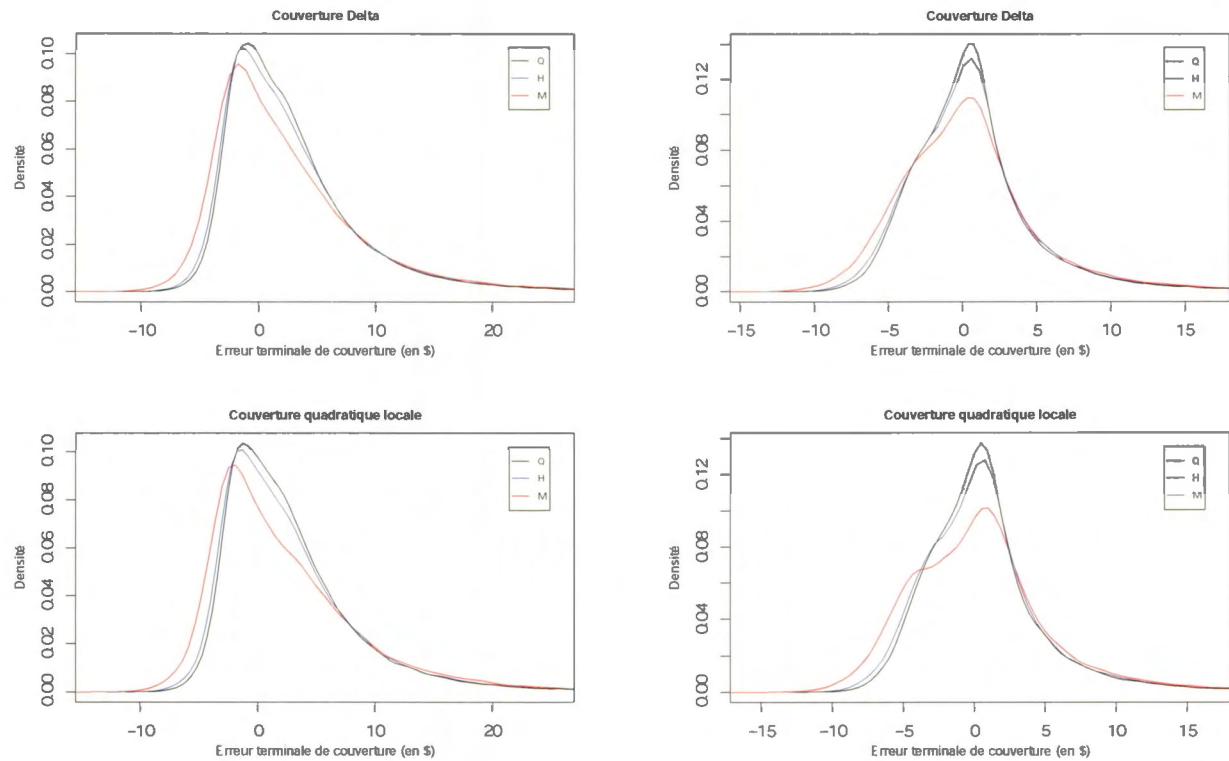


Figure 4.5 Distributions des erreurs terminales de couverture sous les hypothèses de base - Modèle de marché SVCJ

Colonne de gauche : Option de vente. Colonne de droite : Fonds distinct GMAB.

À l'issue de cette première phase de tests, nous avons pu constater que si on considère un modèle de couverture de Black-Scholes avec une volatilité constante, pas de frais de transactions, pas de balise, une technique de couverture Delta neutre ou quadratique locale, la fréquence optimale de rééquilibrage est la fréquence quotidienne et ceci indépendamment du choix du produit à couvrir. Nous avons également remarqué que lorsque nous considérons qu'il y a erreur de modèle, on observe une dégradation plus rapide de la couverture à rééquilibrage quotidien au fur et à mesure que des frictions (sauts, volatilité stochastique) se rajoutent au modèle de marché. Nous avons aussi noté que les stratégies de couverture utilisées ne permettent pas d'obtenir une bonne qualité de couverture lorsque le modèle de

marché est Heston et pire encore lorsque le marché est SVCJ.

Pour la phase suivante, l'enjeu est d'améliorer la qualité de couverture pour les marchés Heston et SVCJ. Nous demeurons sous le modèle de couverture de Black-Scholes. Nous introduisons les frais de transactions, les balises, une volatilité qui peut être historique (dénotée VH), implicite (dénotée VIX) ou constante (dénotée VC). La technique de couverture quadratique locale n'est plus utilisée car elle ne nous permet pas d'intégrer ces nouvelles hypothèses et en plus elle offre une qualité identique à la couverture Delta neutre. On maintient la couverture Delta neutre et on rajoute la couverture Delta-Gamma (dénotée $\Delta\text{-}\Gamma$) neutre. La couverture Delta-Gamma nécessite l'ajout d'un troisième actif dans le portefeuille de couverture, pour cela nous avons choisi une option de vente à parité d'échéance un an dont l'actif sous-jacent est l'indice S&P500. Les modèles de marché utilisés sont Black-Scholes, Heston et SVCJ. Nous avons pu constater que le modèle AR1 est assez semblable au modèle Black-Scholes et le modèle de Merton n'apporte pas plus en terme d'analyse que celui de Heston ou SVCJ. La section suivante présente les résultats de la phase 2.

4.3.2 Phase 2 - Efficacité de couverture basée sur les grecques sous le modèle de couverture Black-Scholes

L'objectif de cette étape est de savoir si on peut améliorer la qualité de couverture pour les modèles de marché Heston et SVCJ et tirer d'autres enseignements en faisant varier les choix des paramètres de volatilité, de frais de transactions, de rééquilibrage conditionnel avec le modèle de couverture de Black-Scholes. Naturellement l'inclusion des frais de transactions dégrade la qualité de couverture car ce sont des coûts supplémentaires pour l'assureur. Globalement nous notons que la fréquence optimale de rééquilibrage reste la fréquence quotidienne dans beaucoup de cas en l'absence de frais de transactions. Avec les frais de transactions

inclus, la fréquence optimale n'est plus quotidienne, elle peut-être mensuelle ou conditionnelle tout dépend du modèle de marché et autres hypothèses de départ.

Modèle de marché Black-Scholes

En absence d'erreur de modèle, on s'intéresse ici à la qualité de couverture des nouvelles stratégies envisagées et à l'impact des frais de transactions. Sans frais de transactions, la stratégie Delta-Gamma neutre est logiquement beaucoup plus efficace que la stratégie Delta neutre car l'apport du Gamma permet de réduire l'erreur de discrétisation pour des plus grandes variations du prix de l'actif sous-jacent. Se couvrir avec une volatilité constante procure également une bien meilleure qualité que se couvrir avec une volatilité historique car il y a une parfaite adéquation avec le marché Black-Scholes qui a une volatilité constante. Les tableaux 4.7 et 4.8 présentent les résultats numériques respectivement pour la couverture d'une option de vente et d'un fonds distinct GMAB. La couverture Delta-Gamma avec volatilité constante à rééquilibrage quotidien est quasi parfaite pour une option de vente et pour un fonds distinct GMAB comme l'illustrent les densités des erreurs de couverture en forme de pic sur les graphiques 4.7 et 4.9.

Avec un actif supplémentaire dans le portefeuille de couverture, la couverture Delta-Gamma n'est pas toujours meilleure que la couverture Delta lorsque l'on prend en compte les frais de transactions. On constate que réajuster le portefeuille quotidiennement avec une stratégie Delta-Gamma en place, engendre la pire qualité de couverture. Pour minimiser les erreurs de couverture en présence des frais de transactions, il faut adopter une couverture Delta-Gamma avec réajustement mensuel. Ceci s'explique par le fait que l'erreur de discrétisation en Delta-Gamma pour une fréquence mensuelle est certes plus élevée que pour une fréquence quotidienne (dans le cas d'une option de vente respectivement 0.26 vs 0.03 pour la

RMSE, 0.28 vs 0.02 pour la VaR-95%, 0.57 vs 0.05 pour la CTE-95%) ; cependant elle reste tout de même faible. Donc lorsque l'on rajoute les frais de transactions qui sont plus faibles pour le réajustement mensuel, on obtient une meilleure qualité de couverture.

En définitive, en absence d'erreur de modèle, la meilleure stratégie parmi tous les choix testés ici, est la couverture Delta-Gamma neutre avec une volatilité constante. C'est celle qui permet de minimiser l'erreur de couverture. Lorsqu'on met en place cette stratégie, le portefeuille doit être rééquilibré quotidiennement si on considère qu'il n'y a pas de frais de transactions et mensuellement si au contraire il y a des frais de transactions.

Modèle de marché Heston

Au cours de la phase 1 nous constatons que les stratégies appliquées ne procuraient pas de satisfaction en termes de qualité de couverture lorsque le modèle de marché est Heston. Dans cette phase l'utilisation de la stratégie Delta-Gamma neutre apporte une nette amélioration de la qualité. En observant les graphiques des figures 4.10, 4.11, 4.12 et 4.13, on constate que les erreurs terminales de couverture ont des queues de distribution moins lourdes lorsque la stratégie employée est Delta-Gamma neutre que lorsqu'elle est Delta neutre. Quelque soit le produit dérivé testé, avec ou sans frais de transactions inclus, il faut un paramètre de volatilité constante à la stratégie Delta-Gamma neutre pour obtenir la couverture la plus efficace selon les indicateurs de mesure de risque (se référer aux tableaux 4.9 et 4.10) exception faite de la RMSE pour laquelle la stratégie Delta-neutre à volatilité constante est légèrement meilleure quand on ne prend pas en compte les frais de transaction.

Avec une stratégie Delta-Gamma neutre à volatilité constante, on ne remarque

Tableau 4.7 Mesures de risque de l'efficacité de couverture d'une option de vente

- Modèle de couverture Black-Scholes - Modèle de marché Black-Scholes

		Sans frais de transactions				Avec frais de transactions			
		Q	H	M	0.1	Q	H	M	0.1
<u>RMSE</u>									
Δ	VC	0.42	0.94	1.89	1.44	1.76	1.23	1.96	1.52
	VH	0.53	1.00	1.91	1.33	1.79	1.28	1.97	1.45
Δ - Γ	VC	0.03	0.09	0.26	1.39	1.86	0.82	0.48	1.48
	VH	0.27	0.28	0.38	1.29	1.87	0.87	0.55	1.40
<u>VaR-95%</u>									
Δ	VC	0.68	1.54	3.14	2.39	3.07	2.50	3.60	2.87
	VH	0.87	1.64	3.19	2.25	3.06	2.54	3.66	2.80
Δ - Γ	VC	0.02	0.08	0.28	2.31	3.63	1.59	0.92	2.79
	VH	0.43	0.45	0.53	2.17	3.65	1.67	1.04	2.70
<u>CTE-95%</u>									
Δ	VC	0.96	2.17	4.43	3.09	3.54	3.24	4.95	3.66
	VH	1.12	2.24	4.40	2.88	3.45	3.27	4.92	3.52
Δ - Γ	VC	0.05	0.19	0.57	2.98	4.14	1.84	1.26	3.56
	VH	0.57	0.60	0.80	2.79	4.19	1.96	1.40	3.43

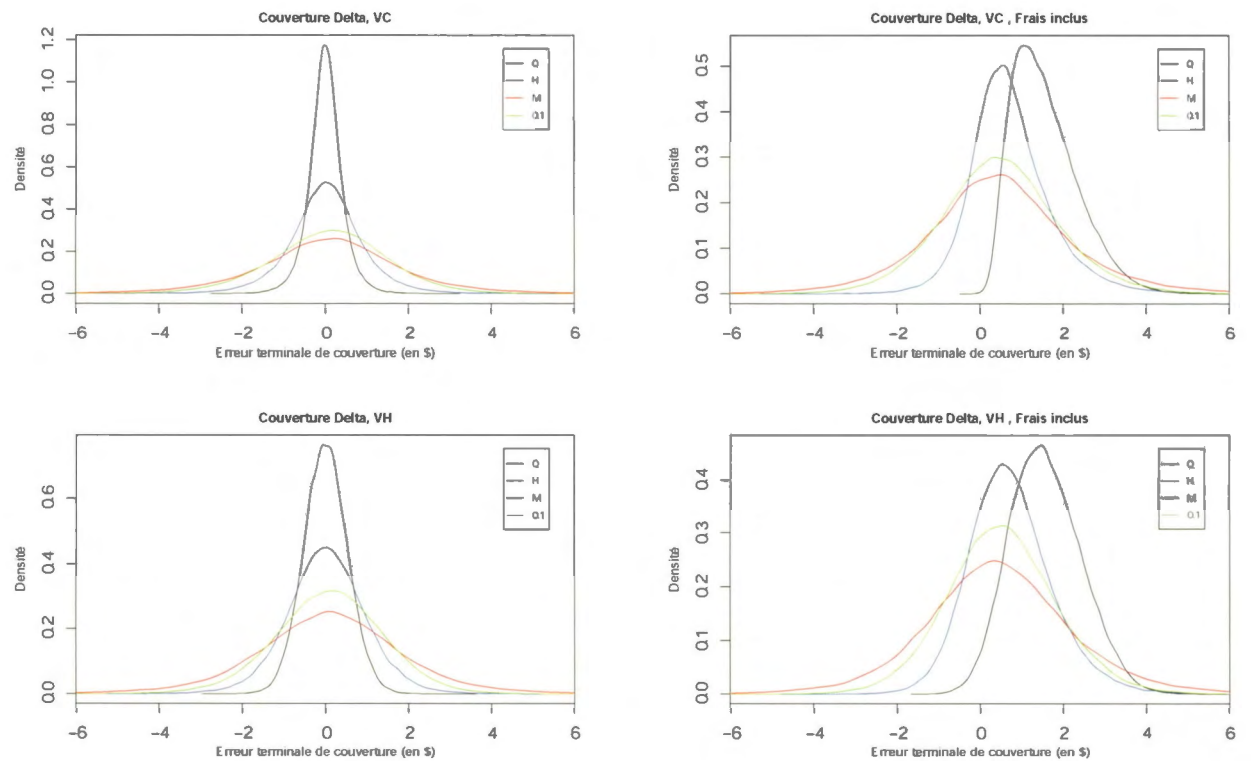


Figure 4.6 Distributions des erreurs terminales de couverture d'une option de vente - Couverture Delta neutre - Modèle de couverture Black-Scholes - Modèle de marché Black-Scholes

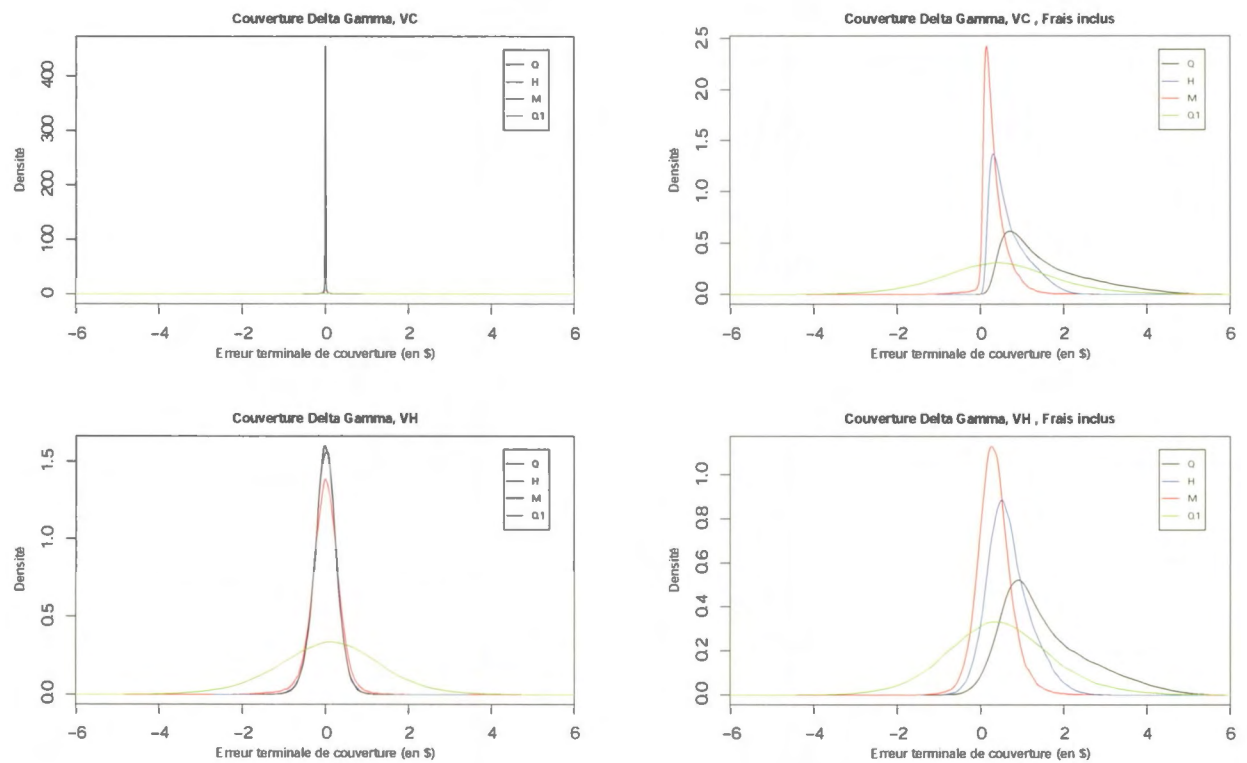


Figure 4.7 Distributions des erreurs terminales de couverture d'une option de vente - Couverture Delta-Gamma neutre - Modèle de couverture Black-Scholes - Modèle de marché Black-Scholes

Tableau 4.8 Mesures de risque de l'efficacité de couverture d'un fonds distinct
GMAB - Modèle de couverture Black-Scholes - Modèle de marché Black-Scholes

		Sans frais de transactions				Avec frais de transactions			
		Q	H	M	0.1	Q	H	M	0.1
<u>RMSE</u>									
Δ	VC	0.45	1.01	2.07	1.56	1.87	1.35	2.18	1.70
	VH	0.53	1.06	2.08	1.46	1.89	1.39	2.19	1.63
Δ - Γ	VC	0.04	0.13	0.42	1.50	2.29	1.05	0.74	1.66
	VH	0.32	0.34	0.53	1.43	2.31	1.10	0.81	1.61
<u>VaR-95%</u>									
Δ	VC	0.75	1.72	3.64	2.80	3.11	2.69	4.13	3.30
	VH	0.90	1.82	3.69	2.61	3.12	2.76	4.17	3.18
Δ - Γ	VC	0.06	0.20	0.69	2.68	3.96	1.75	1.20	3.23
	VH	0.54	0.60	0.93	2.53	4.01	1.89	1.43	3.15
<u>CTE-95%</u>									
Δ	VC	1.04	2.37	4.92	3.48	3.57	3.44	5.45	4.04
	VH	1.16	2.43	4.93	3.28	3.51	3.47	5.46	3.90
Δ - Γ	VC	0.10	0.31	1.01	3.32	4.38	1.98	1.57	3.94
	VH	0.69	0.77	1.28	3.19	4.50	2.18	1.81	3.87

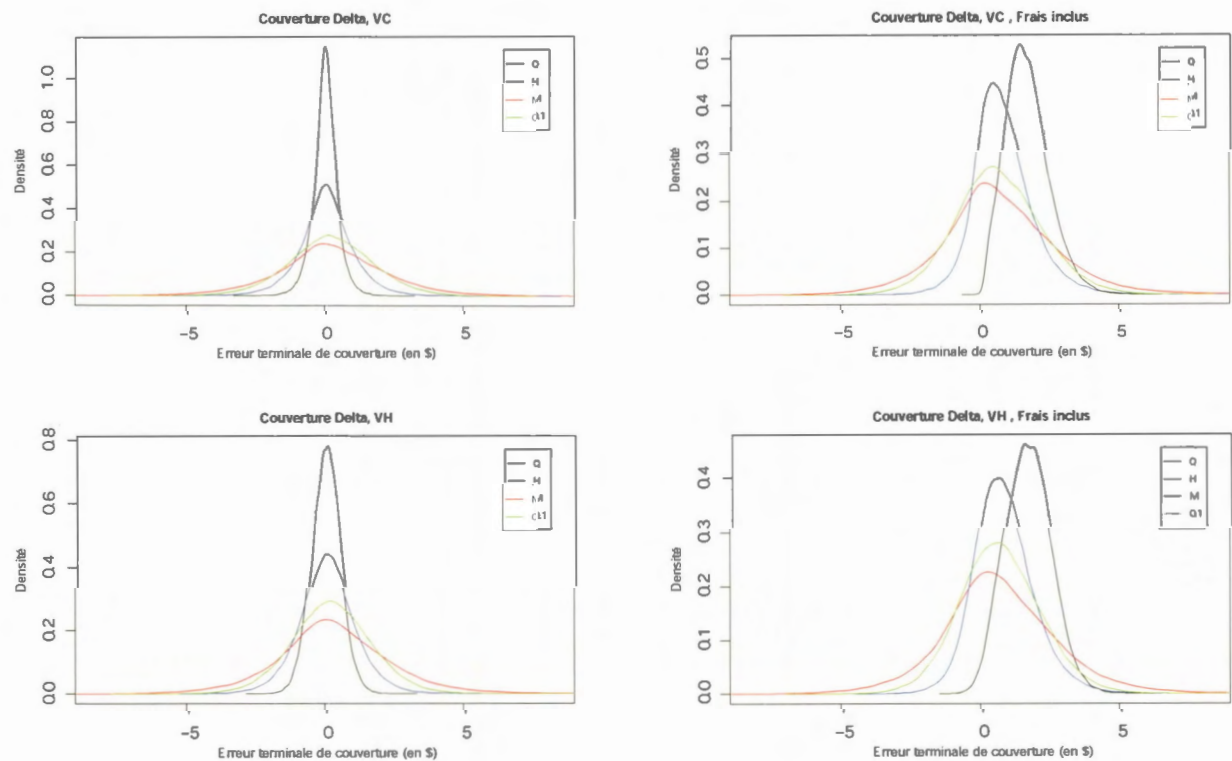


Figure 4.8 Distributions des erreurs terminales de couverture d'un fonds distinct
GMAB - Couverture Delta neutre - Modèle de couverture Black-Scholes - Modèle
de marché Black-Scholes

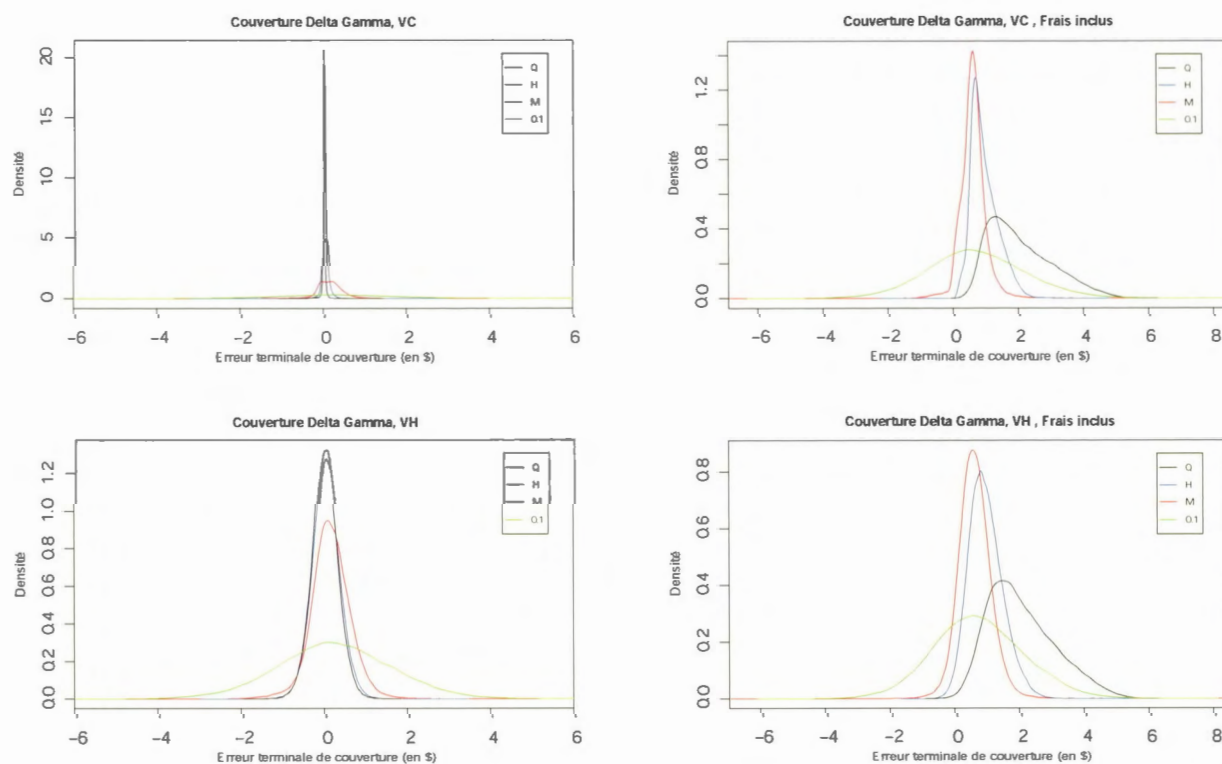


Figure 4.9 Distributions des erreurs terminales de couverture d'un fonds distinct
 GMAB - Couverture Delta-Gamma neutre - Modèle de couverture Black-Scholes
 - Modèle de marché Black-Scholes

pas une fréquence de rééquilibrage optimale qui fasse l'unanimité quelque soit la mesure de risque choisie aussi bien pour la couverture d'une option de vente que d'un fonds distinct GMAB. Sans frais de transactions, la qualité de couverture est meilleure si on rééquilibre le portefeuille de couverture d'une option de vente hebdomadairement selon la RMSE, et quotidiennement selon les VaR-95% et CTE95%. En ce qui concerne le portefeuille de couverture d'un fonds distinct GMAB, la fréquence mensuelle est optimale selon les RMSE et VaR-95% et quotidienne selon la CTE-95%. Toutefois, les mesures de risque obtenues avec la fréquence quotidienne sont meilleures dans l'ensemble car elles sont, soit les valeurs minimums, soit très proches des valeurs minimums. Avec les frais de transactions inclus, la RMSE met en avant la fréquence quotidienne. Si on repose notre choix de décision sur la VaR-95% et la CTE-95%, la fréquence optimale devient mensuelle.

Les tableaux 4.9 et 4.10 nous dévoilent également que, inclure des frais de transactions entraînent une diminution des RMSE. Ceci s'explique par le fait que, sans frais de transactions, les modes des distributions des erreurs terminales sont négatifs (comme on a pu le constater à la sous-section 4.3.1 / Modèle de marché Heston). Ajouter des frais de transactions augmentent les pertes et donc les modes des distributions des erreurs sont plus proches de zéro ce qui entraîne des RMSE plus faibles.

Modèle de marché SVCJ

Lors de la phase 1, nous nous apercevions que SVCJ était le modèle de marché qui engendrait la pire qualité de couverture quelque soit la stratégie testée à ce moment. Au cours de cette seconde phase, l'observation est la même. Avec le modèle SVCJ la technique de couverture Delta-Gamma neutre n'améliore pas systématiquement la qualité de couverture par rapport à la technique Delta comme

Tableau 4.9 Mesures de risque de l'efficacité de couverture d'une option de vente

- Modèle de couverture Black-Scholes - Modèle de marché Heston

		Sans frais de transactions				Avec frais de transactions			
		Q	H	M	0.1	Q	H	M	0.1
<u>RMSE</u>									
Δ	VC	2.44	2.63	3.18	2.63	2.20	2.42	3.09	2.55
	VH	3.40	3.54	3.98	3.44	3.11	3.33	3.88	3.31
	VIX	4.08	4.20	4.58	4.04	3.42	3.76	4.38	3.40
Δ - Γ	VC	2.46	2.45	2.49	2.59	1.29	1.83	2.17	2.18
	VH	3.30	3.30	3.35	3.36	2.51	2.84	3.11	3.02
	VIX	4.05	4.05	4.07	4.01	3.12	3.52	3.81	3.13
<u>VaR-95%</u>									
Δ	VC	2.15	2.59	3.82	2.93	4.10	3.44	4.25	3.47
	VH	2.95	3.29	4.50	3.40	4.81	4.12	4.92	4.06
	VIX	4.08	4.42	5.36	4.13	6.26	5.38	5.85	6.07
Δ - Γ	VC	-0.58	-0.56	-0.50	0.40	1.02	0.09	-0.18	0.97
	VH	0.45	0.46	0.61	1.07	2.37	1.26	1.00	1.83
	VIX	2.09	2.02	2.11	2.06	4.43	3.02	2.59	3.99
<u>CTE-95%</u>									
Δ	VC	3.61	4.25	6.13	4.47	5.81	5.22	6.61	5.12
	VH	4.50	5.02	6.77	5.02	6.38	5.88	7.22	5.71
	VIX	6.65	6.96	8.11	6.62	8.55	7.81	8.58	8.34
Δ - Γ	VC	0.22	0.26	0.46	1.31	2.19	1.00	0.82	2.08
	VH	1.59	1.59	1.86	2.29	3.59	2.38	2.26	3.11
	VIX	4.48	4.31	4.21	4.40	6.68	5.27	4.69	6.22

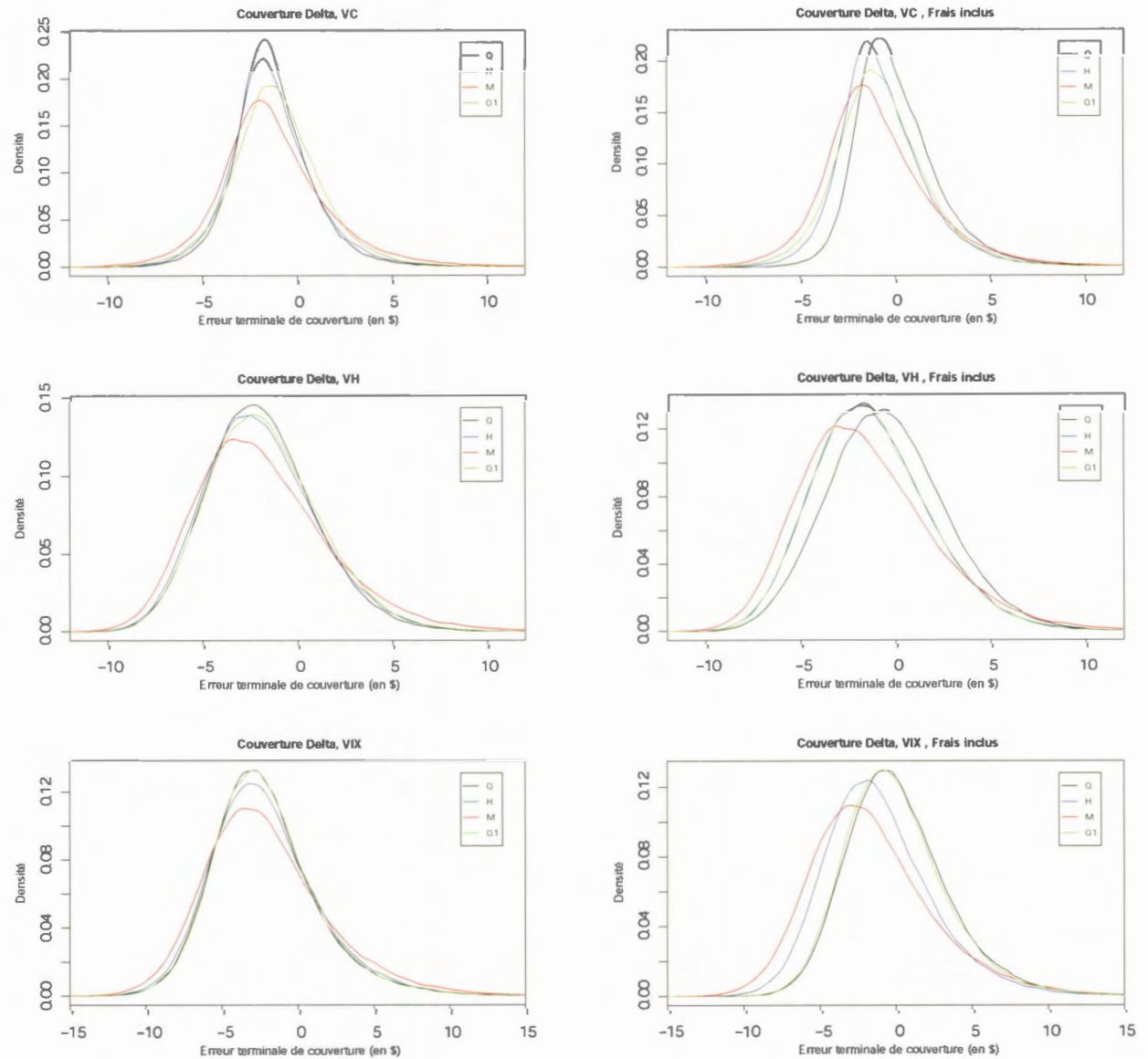


Figure 4.10 Distributions des erreurs terminales de couverture d'une option de vente - Couverture Delta neutre - Modèle de couverture Black-Scholes - Modèle de marché Heston

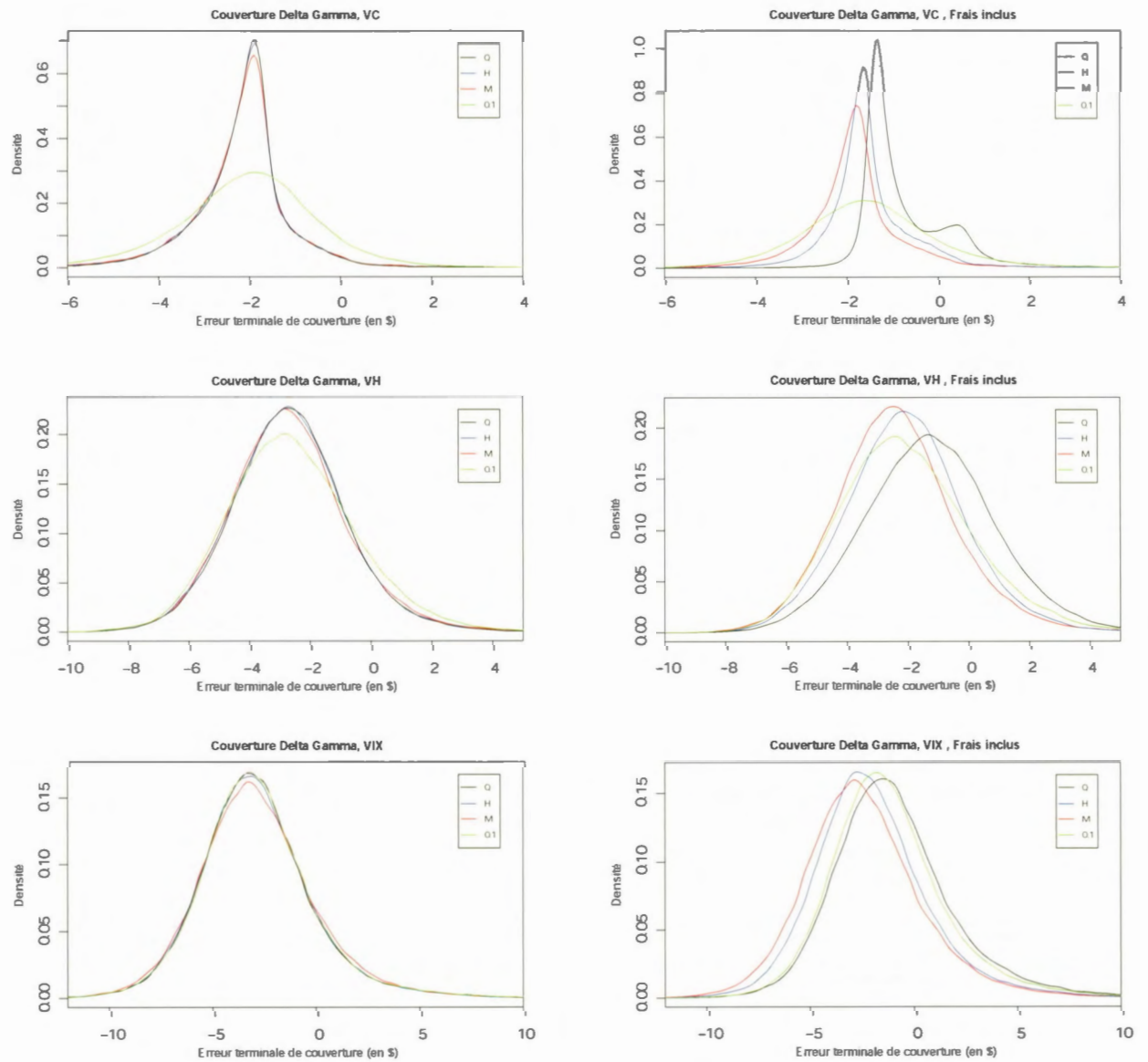


Figure 4.11 Distributions des erreurs terminales de couverture d'une option de vente - Couverture Delta-Gamma neutre - Modèle de couverture Black-Scholes - Modèle de marché Heston

Tableau 4.10 Mesures de risque de l'efficacité de couverture d'un fonds distinct

GMAB - Modèle de couverture Black-Scholes - Modèle de marché Heston

		Sans frais de transactions				Avec frais de transactions			
		Q	H	M	0.1	Q	H	M	0.1
<u>RMSE</u>									
Δ	VC	3.00	3.13	3.53	3.05	2.25	2.73	3.34	2.85
	VH	3.35	3.47	3.83	3.31	2.87	3.17	3.69	3.12
	VIX	4.15	4.25	4.52	4.13	3.58	3.86	4.34	3.58
Δ - Γ	VC	3.27	3.25	3.20	3.24	1.61	2.43	2.77	2.65
	VH	3.49	3.47	3.43	3.47	2.34	2.81	3.08	2.97
	VIX	4.23	4.22	4.14	4.20	3.34	3.60	3.82	3.31
<u>VaR-95%</u>									
Δ	VC	1.19	1.55	2.72	2.09	2.98	2.34	3.14	2.56
	VH	2.63	2.98	4.01	3.11	4.46	3.77	4.43	3.75
	VIX	4.95	5.14	5.83	5.07	6.70	5.92	6.25	6.62
Δ - Γ	VC	-0.59	-0.61	-0.62	0.11	0.34	-0.22	-0.42	0.49
	VH	0.56	0.59	0.72	1.13	2.60	1.42	1.15	1.93
	VIX	3.56	3.46	3.36	3.68	5.84	4.45	3.85	5.52
<u>CTE-95%</u>									
Δ	VC	2.49	3.07	4.82	3.46	4.59	4.01	5.35	4.06
	VH	4.04	4.57	6.29	4.63	6.00	5.45	6.78	5.34
	VIX	7.06	7.29	8.14	7.22	8.64	8.01	8.56	8.62
Δ - Γ	VC	-0.16	-0.16	-0.09	0.74	1.37	0.31	0.15	1.33
	VH	1.57	1.60	1.87	2.27	3.79	2.49	2.32	3.19
	VIX	5.48	5.36	5.08	5.59	7.59	6.25	5.54	7.28

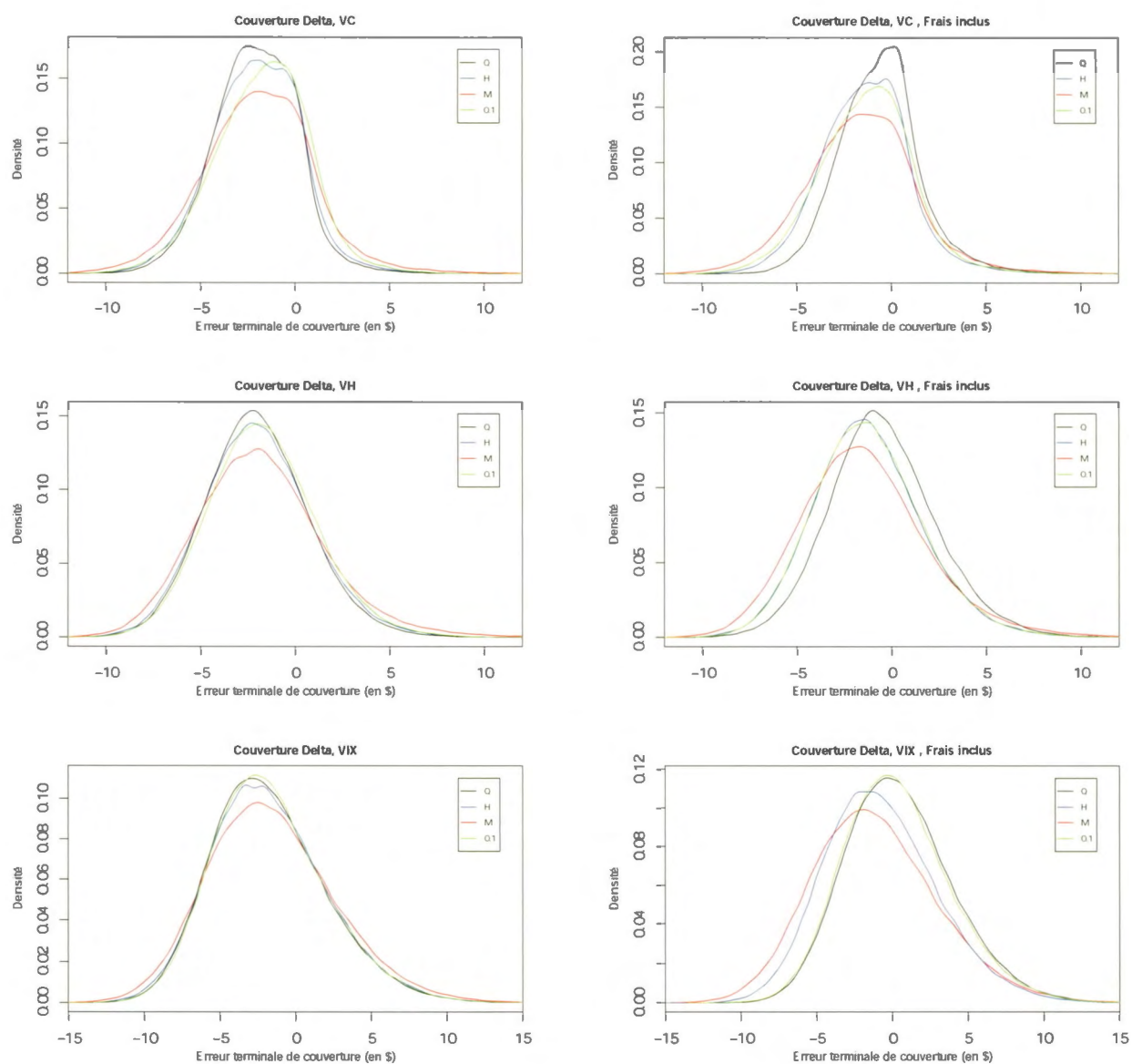


Figure 4.12 Distributions des erreurs terminales de couverture d'un fonds distinct
GMAB - Couverture Delta neutre - Modèle de couverture Black-Scholes - Modèle
de marché Heston

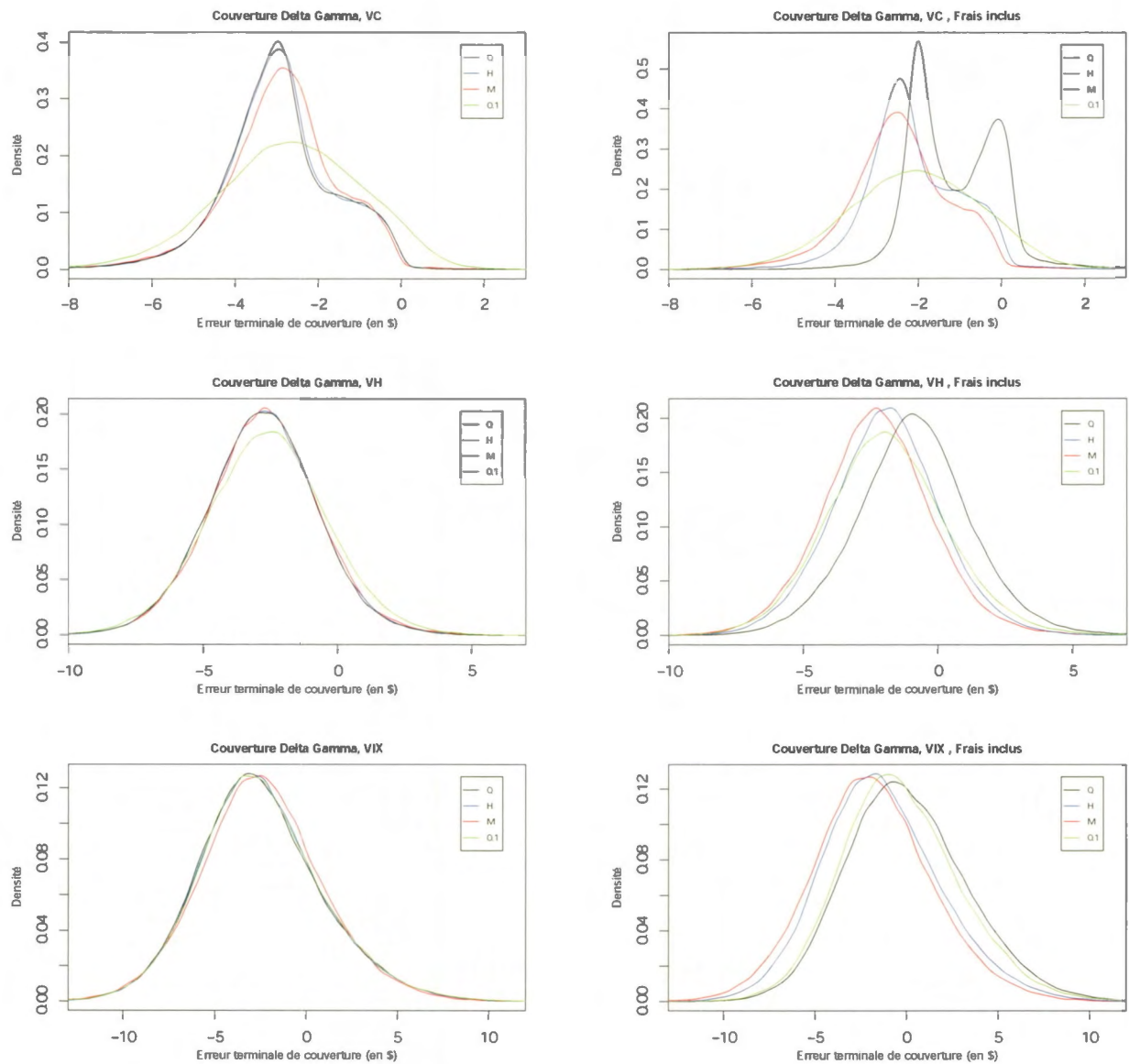


Figure 4.13 Distributions des erreurs terminales de couverture d'un fonds distinct
 GMAB - Couverture Delta-Gamma neutre - Modèle de couverture Black-Scholes
 - Modèle de marché Heston

c'est le cas avec les modèles de marché de Black-Scholes et Heston. Comme le montrent les tableaux 4.11 et 4.12, la qualité empire dans certaines circonstances avec la stratégie Delta-Gamma que ce soit pour couvrir une option de vente ou un fonds distinct GMAB. Le choix entre Delta et Delta-Gamma dépend du produit à couvrir et de la mesure de risque sur laquelle s'appuie notre décision.

On note que, lorsqu'on considère qu'il n'y a pas de frais de transactions, la fréquence optimale est quotidienne. Il faut opter pour une stratégie Delta-Gamma neutre à volatilité historique selon la CTE-95%; et plutôt une stratégie Delta neutre à volatilité constante selon la VaR-95%. La RMSE met en avant la stratégie Delta neutre : à volatilité historique pour couvrir les risques d'une option de vente et à volatilité constante pour couvrir les risques d'un fonds distinct GMAB.

En présence des frais de transactions, la stratégie à préférer est la stratégie Delta neutre avec un rééquilibrage conditionnel. Avec l'utilisation d'une volatilité constante pour limiter les pertes d'un fonds distinct GMAB et d'une volatilité historique pour une option de vente.

On remarque ici, pour la première fois l'utilité de s'appuyer sur des hypothèses comme la volatilité observée des rendements historiques au cours des trois dernières années et/ou du rééquilibrage du portefeuille de couverture sous condition de dépassement de seuil pour obtenir une légère amélioration de la qualité de couverture.

Au cours de cette seconde phase nous avons testé les techniques de couverture Delta neutre et Delta-Gamma neutre, fait varier la volatilité, considéré les frais de transactions et envisagé le rééquilibrage avec balises pour évaluer l'efficacité de couverture. Ce qui en ressort est que la stratégie Delta-Gamma neutre est à privilégier, car c'est celle qui permet de minimiser les erreurs de couverture. Cette stratégie doit être associée à une volatilité constante sauf si on présume que le

Tableau 4.11 Mesures de risque de l'efficacité de couverture d'une option de vente

- Modèle de couverture Black-Scholes - Modèle de marché SVCJ

		Sans frais de transactions				Avec frais de transactions			
		Q	H	M	0.1	Q	H	M	0.1
<u>RMSE</u>									
Δ	VC	7.45	7.67	10.12	7.60	8.43	8.07	10.27	7.94
	VH	6.93	7.12	7.82	7.01	7.62	7.39	7.94	7.29
	VIX	8.49	8.58	8.92	8.48	8.91	8.70	8.96	8.86
Δ - Γ	VC	7.96	11.69	11.07	7.98	9.63	12.50	11.42	8.75
	VH	7.26	10.68	9.24	7.32	8.65	11.41	9.58	7.98
	VIX	8.38	10.63	9.46	8.39	9.36	11.26	9.74	9.22
<u>VaR-95%</u>									
Δ	VC	14.10	14.57	15.72	14.44	16.30	15.55	16.23	15.28
	VH	14.02	14.40	15.78	14.17	15.62	15.14	16.14	14.86
	VIX	16.28	16.48	17.30	16.32	18.08	17.34	17.73	17.96
Δ - Γ	VC	14.52	18.72	16.81	14.76	17.15	19.97	17.39	16.14
	VH	13.64	17.44	15.86	13.93	15.65	18.53	16.33	14.96
	VIX	14.73	17.80	16.53	14.76	16.91	18.93	17.05	16.60
<u>CTE-95%</u>									
Δ	VC	22.63	23.21	25.96	22.95	25.01	24.28	26.49	23.94
	VH	20.78	21.37	23.60	20.98	22.36	22.09	23.98	21.73
	VIX	27.73	27.91	28.48	27.72	29.23	28.60	28.84	29.12
Δ - Γ	VC	20.27	22.72	24.58	20.58	23.05	24.05	25.17	22.17
	VH	17.97	20.39	21.72	18.26	19.88	21.42	22.16	19.33
	VIX	24.72	26.15	26.45	24.74	26.41	27.02	26.86	26.21

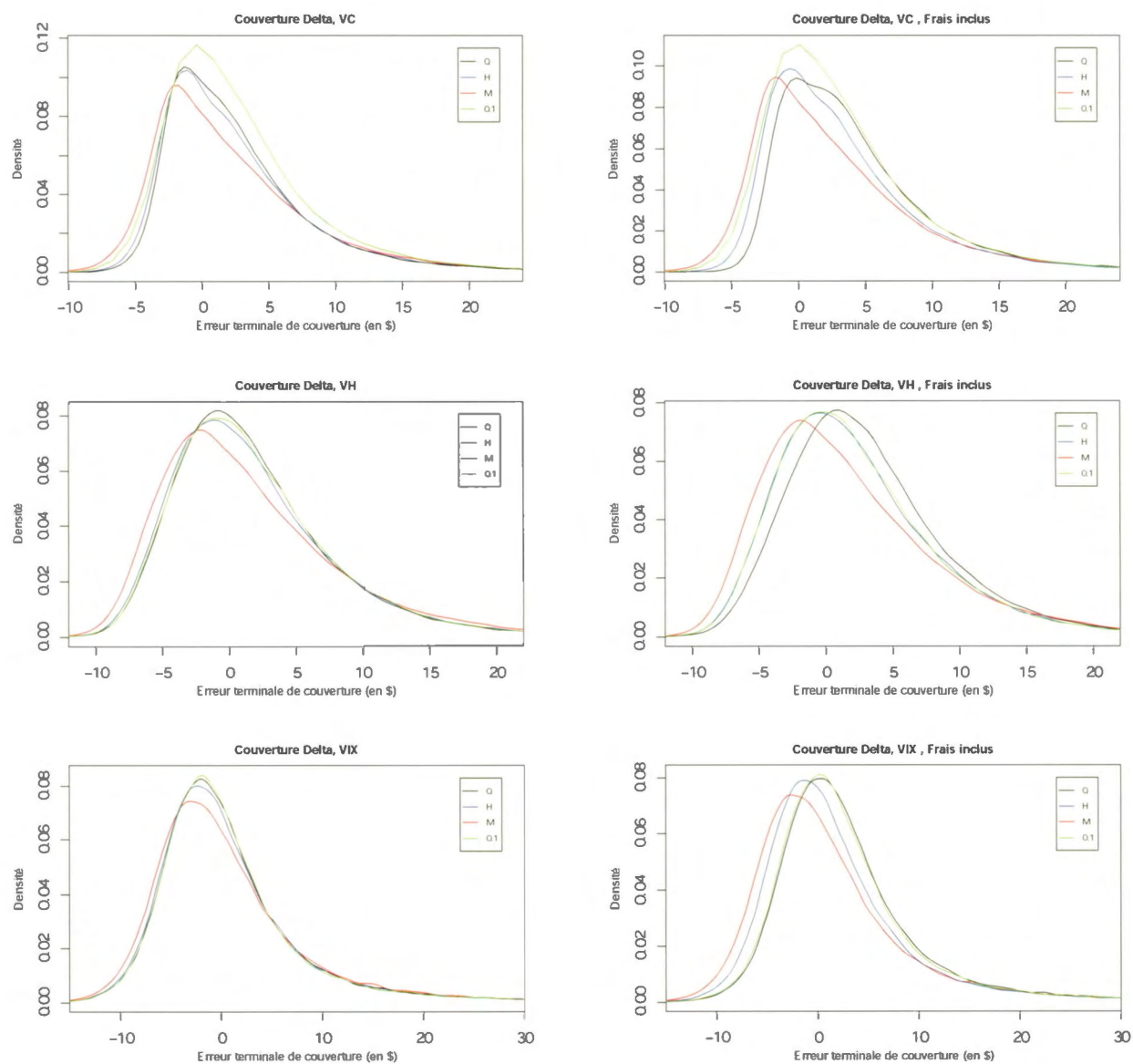


Figure 4.14 Distributions des erreurs terminales de couverture d'une option de vente - Couverture Delta neutre - Modèle de couverture Black-Scholes - Modèle de marché SVCJ

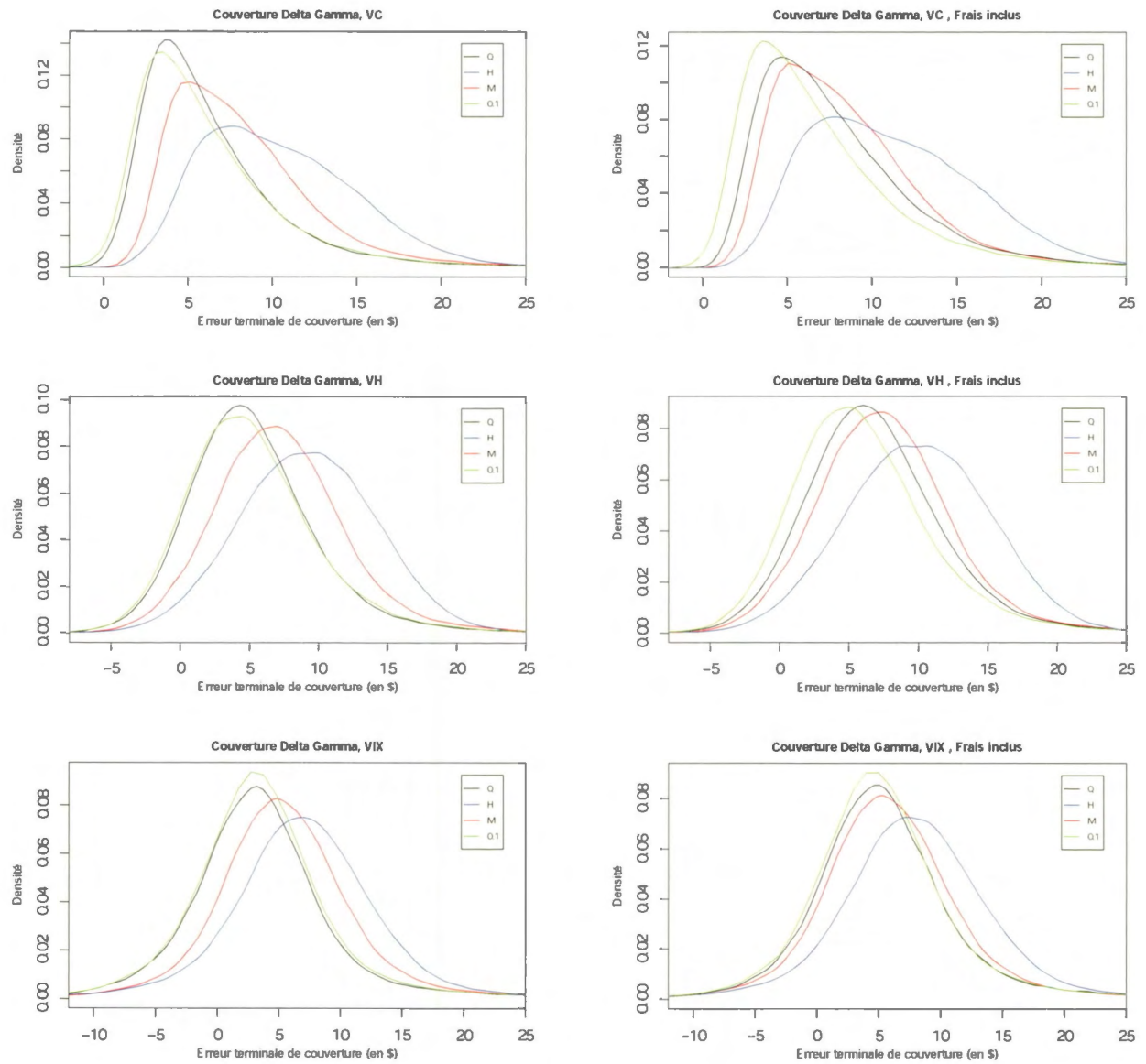


Figure 4.15 Distributions des erreurs terminales de couverture d'une option de vente - Couverture Delta-Gamma neutre - Modèle de couverture Black-Scholes - Modèle de marché SVCJ

Tableau 4.12 Mesures de risque de l'efficacité de couverture d'un fonds distinct

GMAB - Modèle de couverture Black-Scholes - Modèle de marché SVCJ

RMSE

		Sans frais de transactions				Avec frais de transactions			
		Q	H	M	0.1	Q	H	M	0.1
Δ	VC	5.34	5.54	7.45	5.52	5.91	5.74	7.52	5.71
	VH	5.67	5.85	6.41	5.75	5.91	5.90	6.43	5.83
	VIX	8.44	8.47	8.61	8.44	8.19	8.30	8.52	8.21
Δ - Γ	VC	6.21	10.37	9.27	6.24	8.01	11.27	9.66	7.01
	VH	6.05	9.70	7.81	6.05	7.55	10.54	8.20	6.71
	VIX	7.88	9.74	8.63	7.90	8.59	10.39	8.88	8.48

VaR-95%

Δ	VC	8.91	9.18	10.24	9.25	11.03	10.15	10.72	10.01
	VH	9.85	10.19	11.14	10.08	11.42	10.89	11.52	10.73
	VIX	14.13	14.18	14.49	14.19	15.55	14.85	14.83	15.47
Δ - Γ	VC	11.28	16.85	13.77	11.41	14.09	18.17	14.39	12.83
	VH	11.61	16.79	14.05	11.71	13.99	18.00	14.64	12.91
	VIX	13.55	16.76	14.99	13.63	15.67	17.88	15.54	15.41

CTE-95%

Δ	VC	15.50	16.06	18.10	15.90	17.82	17.11	18.63	16.80
	VH	15.30	15.82	17.49	15.54	16.90	16.56	17.89	16.25
	VIX	23.31	23.30	23.39	23.37	24.54	23.87	23.69	24.51
Δ - Γ	VC	15.74	19.97	19.13	16.00	18.72	21.37	19.78	17.62
	VH	14.88	19.19	18.05	15.07	17.26	20.41	18.60	16.32
	VIX	21.41	23.02	22.49	21.49	23.05	23.92	22.91	22.92

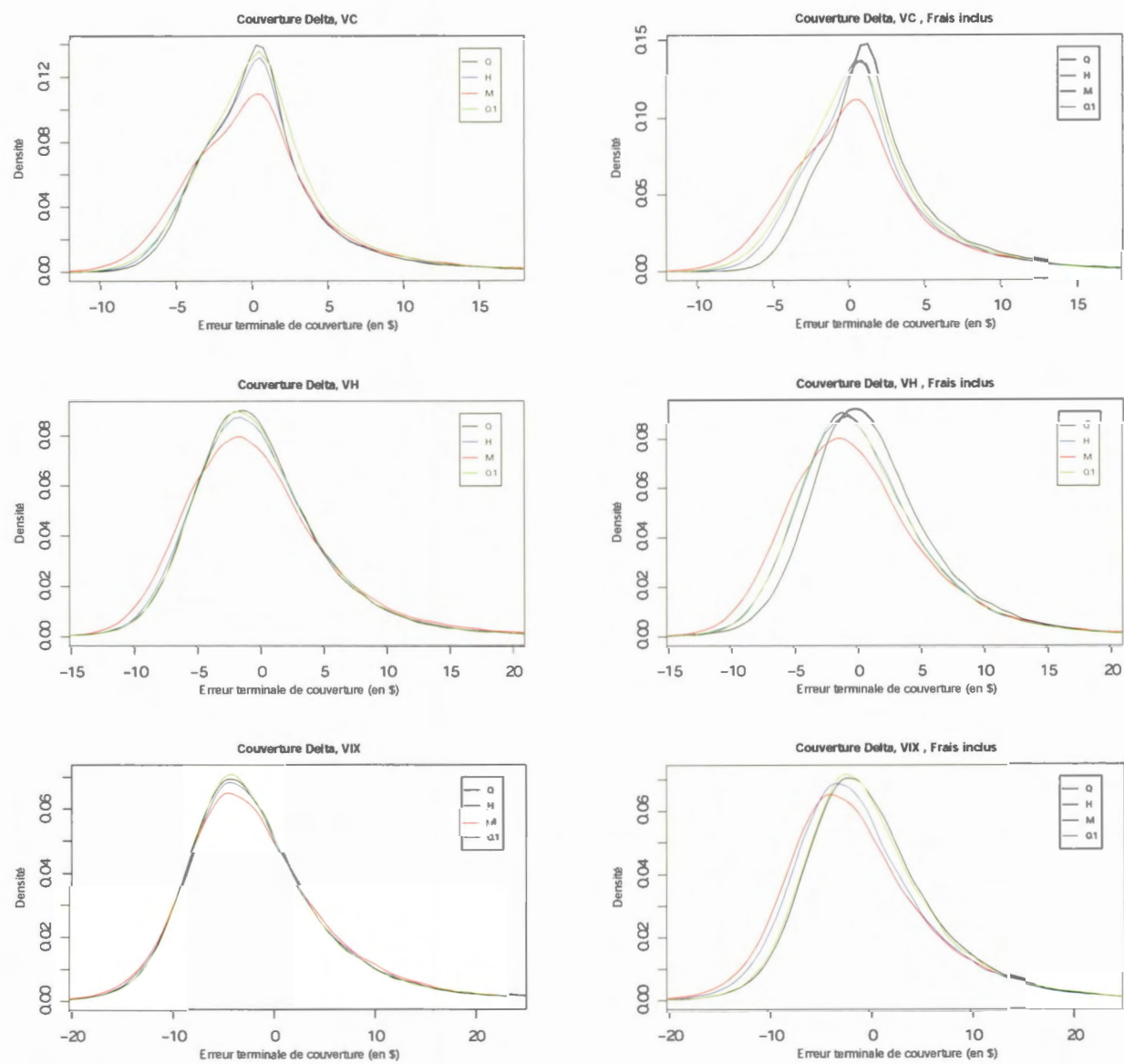


Figure 4.16 Distributions des erreurs terminales de couverture d'un fonds distinct
GMAB - Couverture Delta neutre - Modèle de couverture Black-Scholes - Modèle
de marché SVCJ

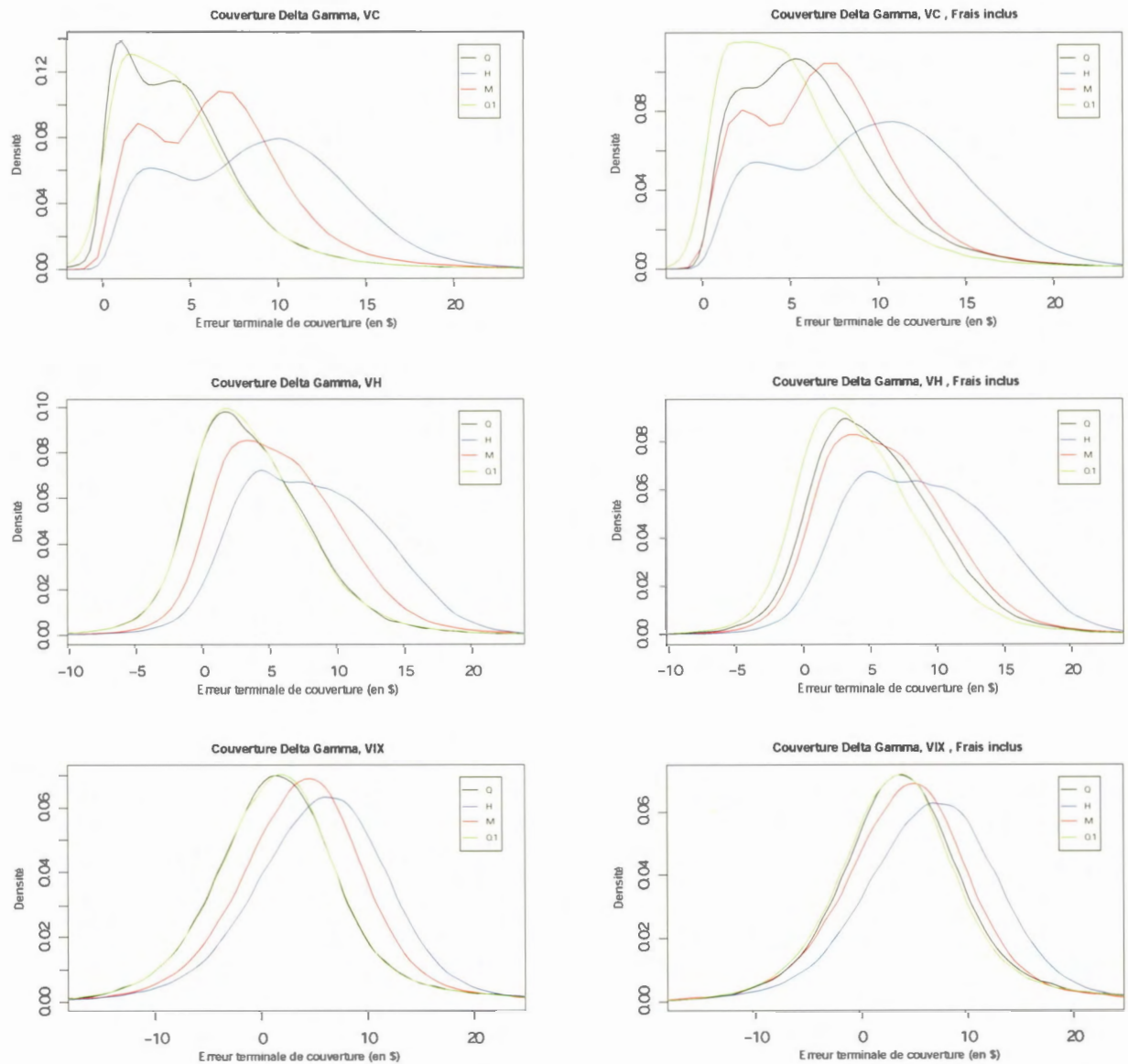


Figure 4.17 Distributions des erreurs terminales de couverture d'un fonds distinct
 GMAB - Couverture Delta-Gamma neutre - Modèle de couverture Black-Scholes
 - Modèle de marché SVCJ

modèle de marché est SVCJ et dans ce cas on utilise une volatilité historique avec la possibilité de se contenter d'une couverture Delta. Tant qu'on juge que les frais de transactions ne sont pas à prendre en compte, le portefeuille de couverture doit être rééquilibré quotidiennement. Si au contraire on envisage les frais de transactions, le portefeuille de couverture doit être réajusté sur une base mensuelle ou sous condition de dépassement de balises.

Au cours de cette phase nous avons pu constater que l'utilisation d'une volatilité implicite n'a pas de réel bénéfice par rapport à une volatilité constante ou volatilité historique.

Pour la phase suivante nous changeons de modèle de couverture et optons pour un modèle de Heston. En plus des techniques Delta neutre et Delta-Gamma neutre, nous testons les techniques Delta-Vega (dénotée $\Delta-\nu$) neutre et Delta-Gamma-Vega neutre (dénotée $\Delta-\Gamma-\nu$) neutre.

4.3.3 Phase 3 - Efficacité de couverture basée sur les grecques sous le modèle de Heston

Le but de cette section est de présenter les résultats numériques obtenus lorsque les grecques sont calculées sous le modèle de Heston. Le choix de la volatilité n'est plus d'actualité puisque la volatilité est stochastique. Nous continuons d'envisager les situations avec ou sans frais de transactions. Les modèles de marché considérés sont Heston et SVCJ. Quatre techniques sont testées Delta, Delta-Gamma, Delta-Vega et Delta-Gamma-Vega.

Avant de présenter les résultats, nous allons tout d'abord expliquer l'ajustement que nous avons mis en place pour le calcul des grecques sous le modèle de Heston. En effet, nous avons constaté que lorsque l'on calcule le prix d'une option de vente selon la formule semi-fermée proposée par Albrecher *et al.* (2007), le prix devient

très instable au fur et à mesure qu'on approche de l'échéance et lorsque le ratio $\frac{S_t}{K}$ est très grand ou très petit. La figure 4.18 illustre ce problème. On note que lorsque $\frac{S_t}{K}$ est plus grand que 3 (premier graphique), le prix de l'option n'est pas nul, il oscille avec de fortes amplitudes autour de zéro. Le prix oscille également avec de fortes amplitudes lorsque $\frac{S_t}{K}$ est plus petit que 0.3 (deuxième graphique) au lieu d'être linéaire. Sur une échéance de 10 ans, plus de 5% des trajectoires simulées se retrouvent dans ces cas de figures ($\frac{S_t}{K} > 3$ ou $\frac{S_t}{K} < 0.3$). Cette instabilité affecte les grecques, ce qui dégrade la qualité de couverture. Nous avons donc choisi de mettre en place l'ajustement suivant lorsque $T - t \leq 3$:

- Si $\frac{S_t}{K} \geq 3$, alors $\Delta = 0$, $\Gamma = 0$, $\nu = 0$.
- Si $\frac{S_t}{K} \leq 0.3$, alors $\Delta = e^{-rd(T-t)}$, $\Gamma = 0$, $\nu = 0$.

Globalement, les résultats de nos tests montrent que le Vega est assez efficace pour couvrir les risques de volatilité, la fréquence quotidienne demeure la plus efficace en absence de frais de transactions. Avec les frais inclus, la fréquence optimale dépend du modèle de marché.

Modèle de marché Heston

Au cours du chapitre 2, nous avons décrit le modèle de Heston comme ayant deux sources de risque, une source pour le prix de l'actif sous-jacent et une autre pour la variance. En utilisant le même modèle pour calculer les grecques et se couvrir contre les variations du prix du titre et les variations de la variance, on s'attend à ce que les techniques de couverture qui incorporent à la fois le Delta et le Vega soient efficaces : c'est ce que nous avons observé. En l'absence d'erreur de modèle, on constate que les techniques de couverture Delta-Gamma-Vega et Delta-Vega permettent d'obtenir une bonne qualité de couverture.

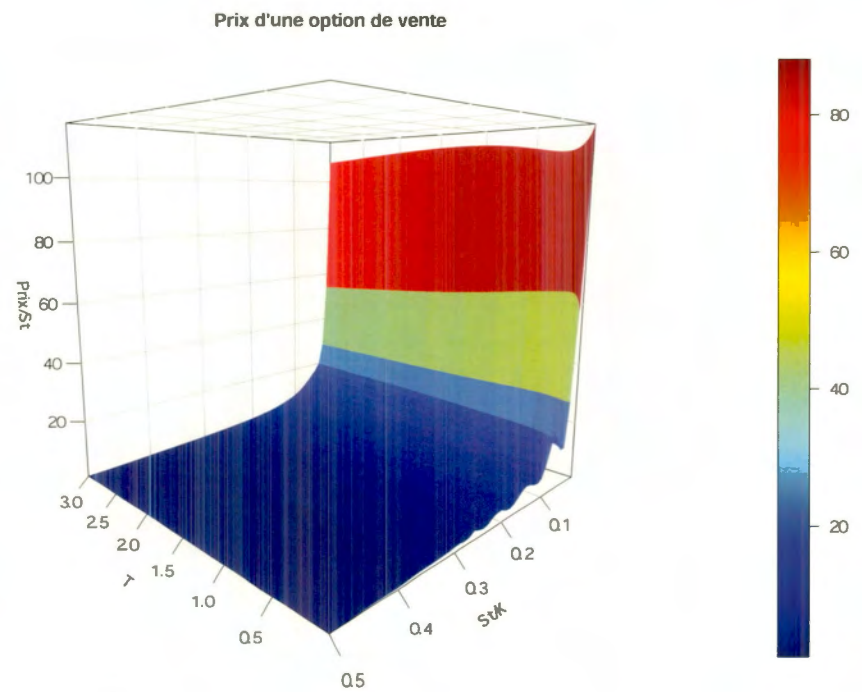
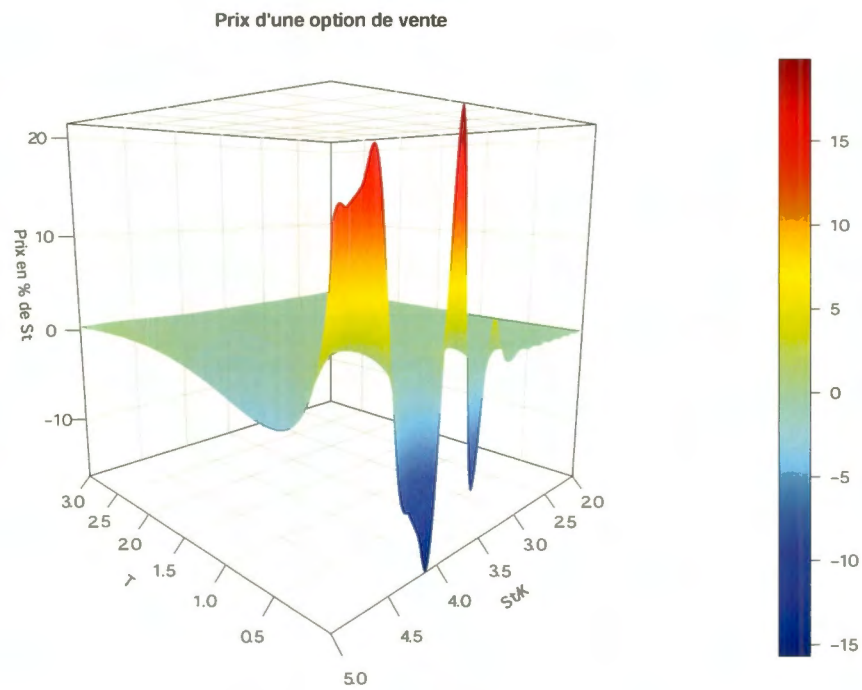


Figure 4.18 Instabilité des prix d'une option de vente sous le modèle de Heston

Sans frais de transactions, la stratégie la plus efficace est logiquement Delta-Gamma-Vega neutre car elle couvre un socle de risques plus large que la stratégie Delta-Vega. Mais l'écart de performances entre les deux stratégies est assez faible. En effet, Avec un rééquilibrage quotidien, les RMSE, VaR-95% et CTE-95% sont respectivement 0.17, 0.22, 0.41 pour la couverture Delta-Vega neutre d'un fonds distinct GMAB et respectivement 0.13, 0.20, 0.29 pour la couverture Delta-Gamma-Vega neutre. Les chiffres pour l'option de vente sont assez similaires, ces chiffres sont présents dans les tableaux 4.13 et 4.14. Les couvertures Delta neutre et Delta-Gamma neutre sont moins efficaces. Les graphiques 4.19 et 4.20 permettent de confirmer que sans frais de transactions, la fréquence optimale de rééquilibrage est la fréquence quotidienne car c'est celle qui a une erreur de discrétisation la plus faible.

En présence des frais de transactions, c'est la stratégie de couverture Delta-Vega qui permet de minimiser l'erreur de couverture. Delta-Gamma-Vega requérant un actif de plus dans le portefeuille de couverture, il est somme toute logique que les frais de transactions pénalisent un peu plus cette stratégie. Pour obtenir la meilleure qualité de couverture il faut que le portefeuille soit rééquilibré mensuellement. Ceci s'explique par des frais de transactions moindres associés à une faible erreur de discrétisation contrairement à un rééquilibrage quotidien qui procure une erreur de discrétisation certes plus faible, mais avec des frais de transactions élevés.

En définitive, en absence d'erreur de modèle, c'est la stratégie Delta-Gamma-Vega neutre couplée à une fréquence de rééquilibrage quotidienne qui permet d'obtenir la meilleure qualité de couverture lorsqu'il n'y a pas de frais de transactions. Si on prend en compte les frais de transactions, c'est la stratégie Delta-Vega neutre avec un rééquilibrage mensuel qui permet de minimiser l'erreur de couverture.

Tableau 4.13 Mesures de risque de l'efficacité de couverture d'une option de vente

- Modèle de couverture Heston - Modèle de marché Heston

		Sans frais de transactions				Avec frais de transactions			
		Q	H	M	0.1	Q	H	M	0.1
<u>RMSE</u>									
Δ		2.37	2.59	3.25	2.45	3.07	2.80	3.33	2.74
Δ - Γ		0.67	0.68	0.82	1.55	1.71	1.01	0.92	1.71
Δ - ν		0.17	0.31	0.58	1.44	1.54	0.76	0.68	1.55
Δ - Γ - ν		0.14	0.25	0.52	1.44	2.47	1.11	0.74	1.68
<u>VaR-95%</u>									
Δ		4.50	4.94	6.28	4.81	6.61	5.87	6.75	5.76
Δ - Γ		0.92	1.05	1.42	2.76	3.46	2.09	1.92	3.33
Δ - ν		0.21	0.37	0.74	2.54	2.88	1.44	1.22	2.99
Δ - Γ - ν		0.20	0.38	0.75	2.54	4.74	2.15	1.50	3.34
<u>CTE-95%</u>									
Δ		5.96	6.63	8.56	6.38	8.28	7.65	9.07	7.44
Δ - Γ		1.85	1.95	2.31	3.69	4.81	3.16	2.85	4.47
Δ - ν		0.39	0.75	1.50	3.27	3.28	1.89	2.02	3.79
Δ - Γ - ν		0.31	0.60	1.35	3.24	5.56	2.59	2.17	4.21

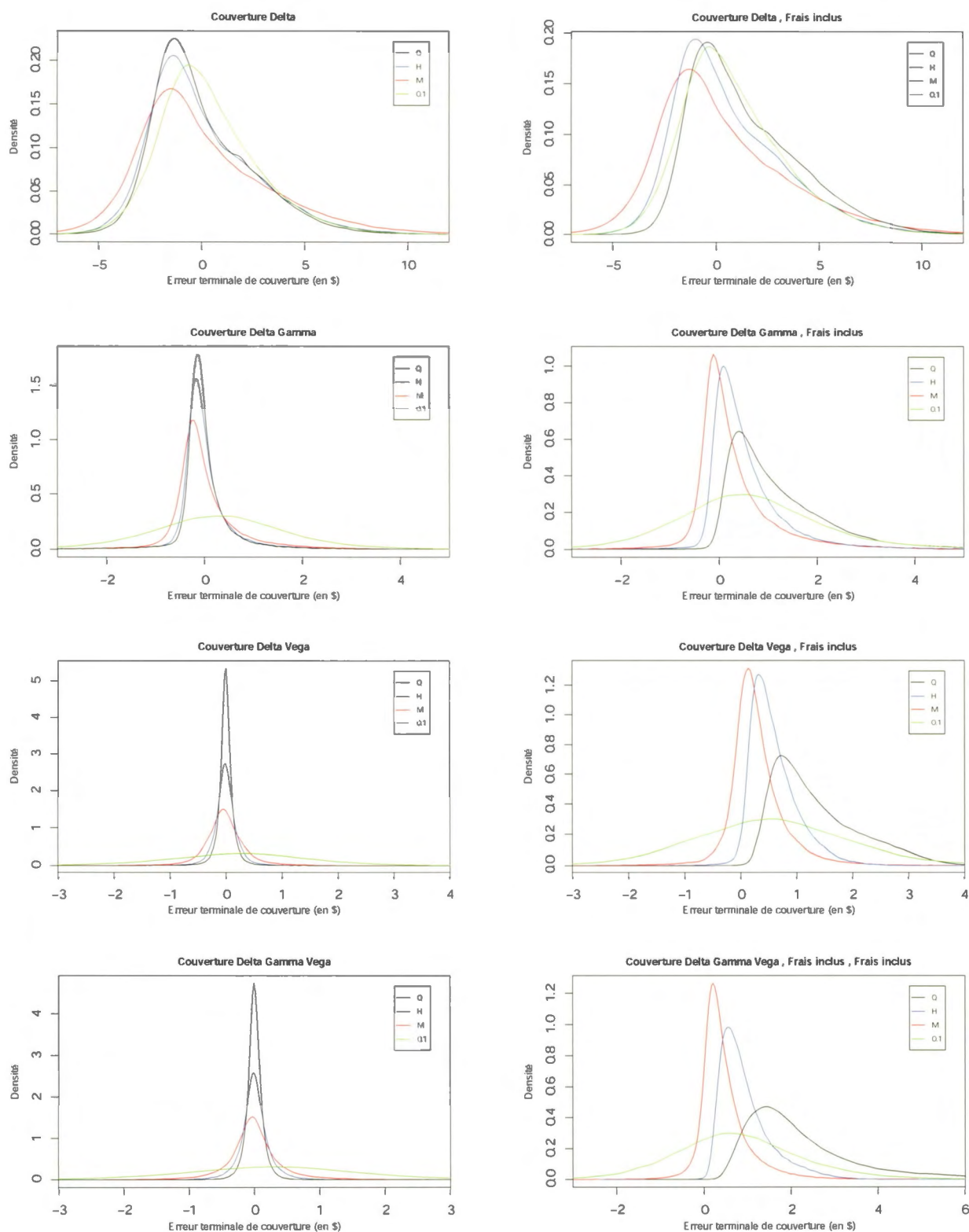


Figure 4.19 Distributions des erreurs terminales de couverture d'une option de vente - Modèle de couverture Heston - Modèle de marché Heston

Tableau 4.14 Mesures de risque de l'efficacité de couverture d'un fonds distinct
GMAB - Modèle de couverture Heston - Modèle de marché Heston

	Sans frais de transactions				Avec frais de transactions			
	Q	H	M	0.1	Q	H	M	0.1
<u>RMSE</u>								
Δ	2.38	2.59	3.21	2.48	2.99	2.75	3.27	2.74
$\Delta-\Gamma$	0.79	0.77	0.93	1.65	2.06	1.18	1.07	1.85
$\Delta-\nu$	0.17	0.33	0.65	1.50	1.84	0.91	0.82	1.66
$\Delta-\Gamma-\nu$	0.13	0.26	0.59	1.49	2.75	1.25	0.89	1.82
<u>VaR-95%</u>								
Δ	4.02	4.49	5.70	4.61	6.11	5.41	6.18	5.52
$\Delta-\Gamma$	1.13	1.23	1.60	2.95	4.00	2.42	2.17	3.61
$\Delta-\nu$	0.22	0.41	0.90	2.72	3.10	1.59	1.44	3.20
$\Delta-\Gamma-\nu$	0.20	0.42	0.91	2.72	5.08	2.30	1.68	3.59
<u>CTE-95%</u>								
Δ	5.39	6.06	7.95	6.07	7.67	7.07	8.46	7.10
$\Delta-\Gamma$	2.18	2.15	2.49	3.87	5.43	3.49	3.09	4.76
$\Delta-\nu$	0.41	0.84	1.72	3.42	3.46	2.07	2.29	3.97
$\Delta-\Gamma-\nu$	0.29	0.64	1.50	3.39	5.77	2.70	2.35	4.43

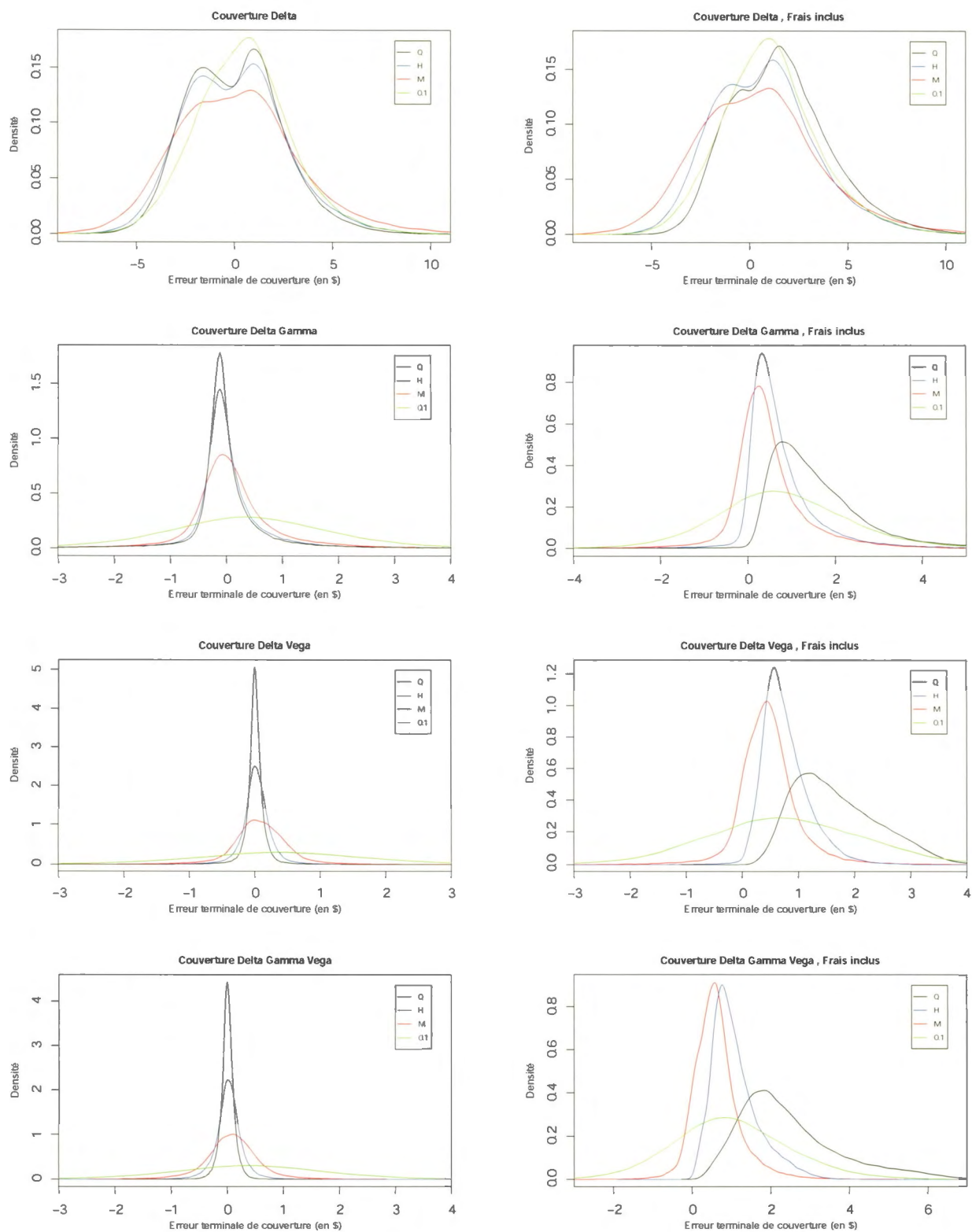


Figure 4.20 Distributions des erreurs terminales de couverture d'un fonds distinct
GMAB - Modèle de couverture Heston - Modèle de marché Heston

Modèle de marché SVCJ

Lors des deux phases précédentes où le modèle de couverture était Black-Scholes, nous nous sommes aperçus qu'il est complexe de se protéger contre les trois sources de risque du modèle SVCJ que sont le prix du titre, la variance et les sauts dans le prix et dans la variance. Il n'est pas illogique de présumer que les similitudes entre le modèle de Heston et le modèle SVCJ pourraient permettre de produire une meilleure qualité de couverture en se couvrant avec le modèle de Heston qu'avec le modèle de Black-Scholes. Nous constatons qu'utiliser le modèle de Heston pour calculer les grecques n'offre pas de meilleurs résultats qu'utiliser le modèle de Black-Scholes. Lorsqu'on scrute les tableaux 4.15 et 4.16 qui présentent les résultats, on note que les valeurs des indicateurs de mesures de risque sont un peu plus élevées avec le modèle de couverture de Heston qu'avec Black-Scholes.

Si on se recentre sur la comparaison entre les quatre techniques de couverture Delta, Delta-Gamma, Delta-Vega et Delta-Gamma-Vega associées aux différentes options de rééquilibrage testées ici, on note que la stratégie Delta neutre est celle qui minimise les erreurs de couverture aussi bien pour une option de vente que pour un fonds distinct et ceci avec ou sans frais de transactions. La stratégie Delta-neutre doit être accompagnée d'un rééquilibrage quotidien lorsqu'il n'y a pas de frais de transactions et d'un rééquilibrage avec balises avec les frais de transactions inclus.

Cette phase 3 nous a permis de constater que les grecques calculées avec le modèle de couverture Heston sont très efficaces pour le modèle de marché Heston et très mauvaises pour le modèle de marché SVCJ. Les techniques à privilégier sont Delta, Delta-vega et Delta-Gamma-Vega selon la situation. Globalement en l'absence de frais de transactions la fréquence optimale est la fréquence quotidienne. En tenant compte des frais de transactions ce sont la fréquence mensuelle et le rééquilibrage

Tableau 4.15 Mesures de risque de l'efficacité de couverture d'une option de vente

- Modèle de couverture Heston - Modèle de marché SVCJ

		Sans frais de transactions				Avec frais de transactions			
		Q	H	M	0.1	Q	H	M	0.1
<u>RMSE</u>									
	Δ	8.35	8.54	9.28	8.44	9.65	9.09	9.52	9.03
	Δ - Γ	9.93	13.57	12.07	9.99	11.79	14.43	12.47	11.08
	Δ - ν	10.29	14.41	26.37	10.33	12.13	15.25	26.54	11.34
	Δ - Γ - ν	14.97	18.40	57.79	14.93	17.44	19.54	57.76	16.30
<u>VaR-95%</u>									
	Δ	16.82	17.30	18.61	17.06	19.23	18.40	19.13	18.27
	Δ - Γ	18.23	23.03	20.85	18.49	21.34	24.49	21.51	20.47
	Δ - ν	17.44	21.82	20.07	17.77	20.28	23.18	20.73	19.44
	Δ - Γ - ν	23.16	24.62	20.10	23.29	27.18	26.43	21.07	25.75
<u>CTE-95%</u>									
	Δ	24.93	25.72	28.25	25.15	27.50	26.87	28.81	26.49
	Δ - Γ	23.89	27.28	28.06	24.29	27.16	28.83	28.72	26.47
	Δ - ν	23.80	26.87	28.36	24.18	26.74	28.27	29.01	26.03
	Δ - Γ - ν	30.56	31.70	30.00	30.72	35.79	33.92	31.03	34.35

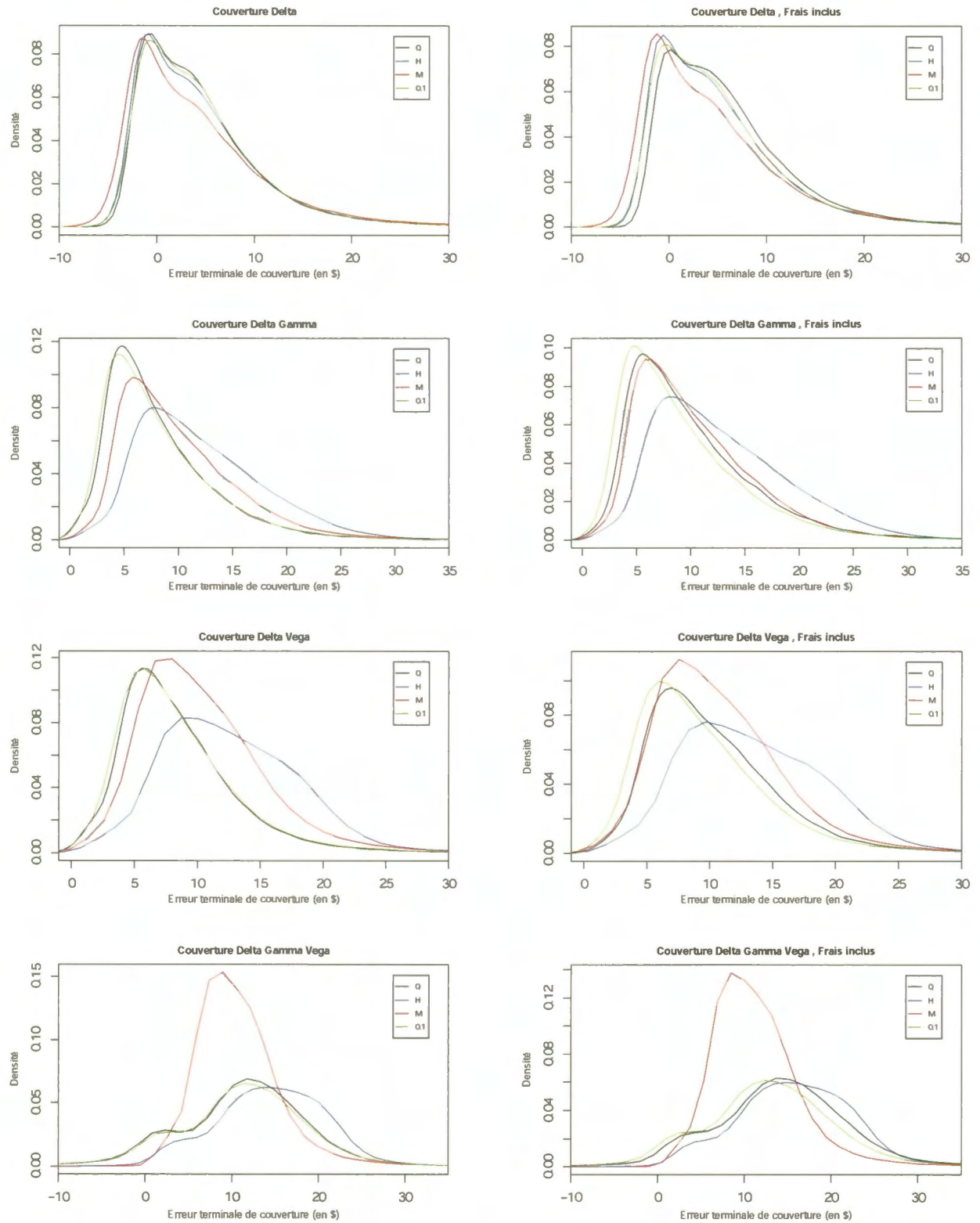


Figure 4.21 Distributions des erreurs terminales de couverture d'une option de vente - Modèle de couverture Heston - Modèle de marché SVCJ

Tableau 4.16 Mesures de risque de l'efficacité de couverture d'un fonds distinct

GMAB - Modèle de couverture Heston - Modèle de marché SVCJ

	Sans frais de transactions				Avec frais de transactions			
	Q	H	M	0.1	Q	H	M	0.1
<u>RMSE</u>								
Δ	6.48	6.68	7.32	6.59	7.70	7.19	7.54	7.12
Δ - Γ	9.24	13.63	11.52	9.25	11.37	14.62	11.99	10.47
Δ - ν	9.44	14.14	22.42	9.43	11.48	15.07	22.65	10.53
Δ - Γ - ν	12.97	17.2	47.70	12.95	15.13	18.28	47.72	14.17
<u>VaR-95%</u>								
Δ	12.87	13.32	14.28	13.08	15.31	14.43	14.80	14.27
Δ - Γ	16.76	22.73	19.35	16.84	20.11	24.28	20.05	18.98
Δ - ν	15.64	21.10	18.34	15.72	18.62	22.51	19.05	17.50
Δ - Γ - ν	20.50	23.12	18.20	20.49	24.36	24.88	19.21	22.83
<u>CTE-95%</u>								
Δ	19.67	20.37	22.16	19.84	22.27	21.54	22.75	21.16
Δ - Γ	21.39	26.28	24.83	21.57	24.94	27.93	25.56	23.93
Δ - ν	20.95	25.35	24.67	21.17	24.07	26.81	25.37	23.1
Δ - Γ - ν	27.29	29.38	26.17	27.35	32.61	31.62	27.27	31.02

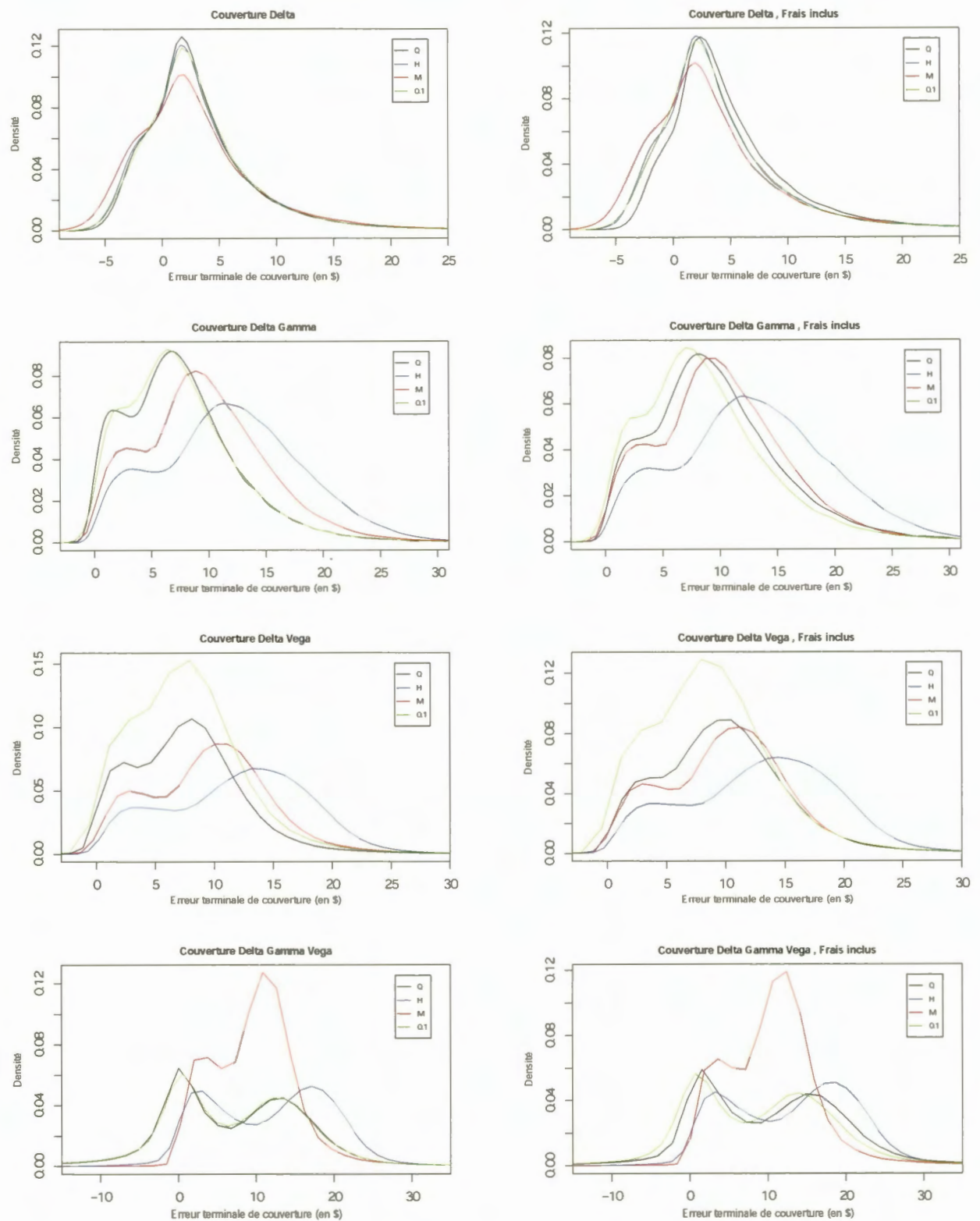


Figure 4.22 Distributions des erreurs terminales de couverture d'un fonds distinct
GMAB - Modèle de couverture Heston - Modèle de marché SVCJ

avec balises qui offrent une meilleure couverture.

CONCLUSION

L'objectif de ce mémoire était d'étudier les fréquences de rééquilibrage d'un portefeuille de couverture en présence d'erreur de modèle. Nous avons analysé les résultats d'exécution de plusieurs programmes de couverture. Un programme de couverture consistait à formuler une série d'hypothèses et à évaluer l'efficacité en se basant sur les mesures de risque que sont la RMSE, la VaR-95% et la CTE-95%. Les hypothèses formulées ont été relatives au produit financier dont les risques sont à couvrir, au modèle de couverture, au modèle de marché, à la stratégie de couverture, à la volatilité, à la fréquence de rééquilibrage et à la présence ou non des frais de transactions. Les enseignements tirés de notre étude sont répartis en trois volets.

L'assureur estime que la dynamique de l'actif sous-jacent est décrite par un modèle financier tel que Black-Scholes, AR1 ou Merton. La stratégie de couverture à adopter est Delta-Gamma neutre à volatilité constante sous le modèle de Black-Scholes. En absence des frais de transactions, il est optimal de rééquilibrer le portefeuille de couverture quotidiennement. Tandis qu'en présence de frais de transactions, c'est la fréquence mensuelle qui est optimale dans la majorité des situations rencontrées.

Si on fait comme hypothèse que le modèle de marché est Heston, alors évidemment le modèle de couverture à utiliser est le modèle de Heston. La stratégie de couverture qui procure la meilleure qualité est la stratégie Delta-Gamma-Vega neutre avec rééquilibrage quotidien s'il n'y a pas de frais de transactions. Avec des frais de transactions inclus, il faut privilégier la stratégie Delta-Vega avec un

rééquilibrage mensuel.

L'assureur estime que SVCJ est le modèle financier qui se rapproche le plus du réel modèle de marché. Dans l'absolu, aucune des stratégies testées ne permet d'assurer une couverture efficace, les pertes ne sont pas centrées en zéro et les queues de leurs distributions sont très lourdes. De manière relative, notre analyse dévoile que le modèle de couverture Black-Scholes fournit des résultats meilleurs que ceux de Heston, de ce fait les grecques doivent être calculées avec Black-Scholes. En absence des frais de transactions, le rééquilibrage optimal se fait quotidiennement. La stratégie la plus adaptée est Delta-Gamma neutre avec volatilité historique pour couvrir les risques d'une option de vente et Delta neutre avec volatilité constante pour couvrir les risques d'un fonds distinct GMAB. En tenant compte des frais de transactions, la fréquence optimale est le rééquilibrage avec balises à associer avec une couverture Delta neutre. L'assureur doit utiliser une volatilité historique pour couvrir les risques d'une option de vente et une volatilité constante pour couvrir les risques d'un fonds distinct GMAB.

Sous la mesure risque neutre du modèle SVCJ nous avons considéré une prime nulle pour le risque de variance et une prime nulle pour le risque de sauts. Les prix des options obtenus par simulation ont peut-être intégré des incohérences par rapport au marché. Un axe de réflexion serait l'amélioration de la qualité de couverture lorsque le modèle de marché est SVCJ en estimant les paramètres sous mesure risque neutre, et en considérant des primes non nulles pour chaque source de risque. Ceci permettrait d'avoir des prix d'options plus cohérents au marché.

RÉFÉRENCES

- Albrecher, H., Mayer, P., Schoutens, W. et Tistaert, J. (2007). The Little Heston Trap. *Wilmott*, 83–92.
- Augustyniak, M. et Boudreault, M. (2013). Analyse de l'efficacité de la couverture en delta de Black-Scholes pour les produits GMMB, GMAB et GMWB. *Autorité des marchés financiers*.
- Augustyniak, M. et Boudreault, M. (2014a). Efficacité des stratégies de couverture Partie i. *Autorité des marchés financiers*.
- Augustyniak, M. et Boudreault, M. (2014b). Efficacité des stratégies de couverture Partie ii. *Autorité des marchés financiers*.
- Augustyniak, M., Godin, F. et Simard, C. (2017). Assessing the effectiveness of local and global quadratic hedging under GARCH models. *Quantitative Finance*, 17(9), 1305–1318.
- Bjork, T. (2009). *Arbitrage Theory in Continuous Time* (third éd.). Oxford University Press (OUP).
- Black, F. et Scholes, M. (1973). The Pricing of Options and Corporate Liabilities. *Journal of Political Economy*, 81(3), 637–654.
- Broadie, M. et Kaya, Ö. (2006). Exact Simulation of Stochastic Volatility and Other Affine Jump Diffusion Processes. *Operations Research*, 54(2), 217–231.
- Coleman, T. F., Li, Y. et Patron, M.-C. (2006). Hedging guarantees in variable annuities under both equity and interest rate risks. *Insurance : Mathematics and Economics*, 38(2), 215–228.
- Cont, R. (2001). Empirical properties of asset returns : stylized facts and statistical issues. *Quantitative Finance*, 1(2), 223–236.
- Cox, J. C., Ingersoll, J. E. et Ross, S. A. (1985). A Theory of the Term Structure of Interest Rates. *Econometrica*, 53(2), 385–407.
- Fama, E. F. (1965). The Behavior of Stock-Market Prices. *The Journal of Business*, 38(1), 34–105.

- Gatheral, J. (2006). *The volatility surface : a Practitioner's guide*. Wiley and Sons, Inc.
- Grégoire, J. (2016). *Estimation des modèles à volatilité stochastique avec applications dans la couverture de fonds distincts*. (Mémoire de maîtrise). Université du Québec à Montréal.
- Hardy, M. R. (2000). Hedging and reserving for single-premium segregated fund contracts. *North American Actuarial Journal*, 4(2), 63–74.
- Hardy, M. R. (2001). A Regime-Switching Model of Long-Term Stock Returns. *North American Actuarial Journal*, 5(2), 41–53.
- Heston, S. L. (1993). A Closed-Form Solution for Options with Stochastic Volatility with Applications to Bond and Currency Options. *Review of Financial Studies*, 6(2), 327–343.
- Kaeck, A. et Alexander, C. (2013). Stochastic Volatility Jump-Diffusions for European Equity index Dynamics. *European Financial Management*, 19(3), 470–496.
- Kokholm, T. et Stisen, M. (2015). Joint pricing of VIX and SPX options with stochastic volatility and jump models. *The Journal of Risk Finance*, 16(1), 27–48.
- Merton, R. C. (1976). Option pricing when underlying stock returns are discontinuous. *Journal of Financial Economics*, 3(1), 125 – 144.
- Moller, T. (2001). Hedging equity-linked life insurance contracts. *North American Actuarial Journal*, 5(2), 79–95.
- Nelson, D. B. (1990). ARCH models as diffusion approximations. *Journal of Econometrics*, 45(1), 7 – 38.
- Officer, R. R. (1972). The Distribution of Stock Returns. *Journal of the American Statistical Association*, 67(340), 807–812.
- Rouah, F. D. (2013). *The Heston Model and Its Extensions in Matlab and C*. Wiley and Sons, Inc.
- Schroeter, J. (2016). *An analysis of the hedging frequency under model error and transaction costs for long-term options*. (Mémoire de maîtrise). ETH Zurich.
- Shreve, S. E. (2004). *Stochastic Calculus for Finance II Continuous-time models*. Springer-Verlag New York.