UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL

MESURES DYNAMIQUES DE RISQUE

MÉMOIRE PRÉSENTÉ COMME EXIGENCE PARTIELLE DE LA MAÎTRISE EN MATHÉMATIQUES

PAR FLORENCE LAROSE

NOVEMBRE 2019

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL Service des bibliothèques

Avertissement

La diffusion de ce mémoire se fait dans le respect des droits de son auteur, qui a signé le formulaire *Autorisation de reproduire et de diffuser un travail de recherche de cycles supérieurs* (SDU-522 – Rév.07-2011). Cette autorisation stipule que «conformément à l'article 11 du Règlement no 8 des études de cycles supérieurs, [l'auteur] concède à l'Université du Québec à Montréal une licence non exclusive d'utilisation et de publication de la totalité ou d'une partie importante de [son] travail de recherche pour des fins pédagogiques et non commerciales. Plus précisément, [l'auteur] autorise l'Université du Québec à Montréal à reproduire, diffuser, prêter, distribuer ou vendre des copies de [son] travail de recherche à des fins non commerciales sur quelque support que ce soit, y compris l'Internet. Cette licence et cette autorisation n'entraînent pas une renonciation de [la] part [de l'auteur] à [ses] droits moraux ni à [ses] droits de propriété intellectuelle. Sauf entente contraire, [l'auteur] conserve la liberté de diffuser et de commercialiser ou non ce travail dont [il] possède un exemplaire.»

REMERCIEMENTS

Merci à mon directeur, François Watier. J'aimerais également remercier les professeurs du département pour m'avoir fait découvrir différents aspects de la statistique à travers les cours, séminaires et autres projets.

J'aimerais aussi remercier mes amis, Joëlle, Patrick, Anthony, Renaud, pour avoir rendu ma maîtrise beaucoup plus amusante. Un merci particulier à Joëlle, avec qui j'ai partagé un bureau, de nombreux fous rires et une grande complicité.

Finalement, je tiens à remercier mes parents qui ont été présents tout au long de mon parcours. Merci pour vos encouragements, votre soutien et de me pousser à devenir une meilleure personne.

TABLE DES MATIÈRES

LIST	TE DES FIGURES	vii
LIST	TE DES TABLEAUX	ix
RÉS	UMÉ	xi
INT	RODUCTION	1
CHA	APITRE I MESURES DE RISQUE STATIQUES	3
1.1	Mesures de risque monétaires	4
1.2	Mesures de risque cohérentes	8
	1.2.1 Définition et exemples	8
	1.2.2 Région de risques acceptables	16
1.3	Mesures de risque convexes	20
1.4	Inégalités	23
CHA	APITRE II MESURES DE RISQUE DYNAMIQUES	27
2.1	Mesures monétaires, convexes et cohérentes	28
2.2	Conséquence temporelle (time consistency)	32
CHA	APITRE III ANALYSE COMPARATIVE DE PORTEFEUILLES	43
3.1	Stratégies de placement	43
	3.1.1 Notation	43
	3.1.2 Buy-and-hold	44
	3.1.3 Constant-mix	46
	3.1.4 Mean-variance	48
3.2	Modèle	51
3.3	Comparaison de portefeuilles	53
	3.3.1 Scénarios étudiés	53
	3.3.2 Choix de la stratégie de placement	53

	3.3.3	Choix du type de mesure	57
	3.3.4	Choix de α	58
	3.3.5	Corrélation entre les actifs	60
	3.3.6	Choix de ϵ	61
		E IV ESTIMATION DES MESURES D' <i>EXPECTED SHORT-</i> AMIQUES	63
4.1	Donné	es	63
4.2	Estima	ation du paramètre p	64
4.3	Résult	ats	65
	4.3.1	Sensibilité à l'estimation de p	65
	4.3.2	Sensibilité au choix de α	67
	4.3.3	Sensibilité à la période d'investissement étudiée	68
CON	NCLUS!	ION	71
ANN	NEXE	A CODE MATLAB	73
A.1	Codes	pour l'analyse comparative de portefeuilles	73
	A.1.1	Initialisation des paramètres pour le modèle de référence	73
	A.1.2	Calcul de la richesse pour la méthode buy-and-hold	76
	A.1.3	Calcul de la richesse pour la méthode constant-mix	78
	A.1.4	Calcul de la richesse pour la méthode mean-variance	80
	A.1.5	Calcul de l'expected shortfall itérée	81
	A.1.6	Calcul de l'expected shortfall recalculée	83
A.2	Codes	pour l'estimation des mesures d'expected shortfall dynamiques	84
	A.2.1	Paramètres utilisés dans la simulation des données	84
	A.2.2	Calcul des mesures théoriques et estimées	86

LISTE DES FIGURES

Page		Figure
32	Arbres binomiaux représentant les valeurs actualisées (en unités monétaires) des positions X et Y (en gras) aux différents pas	2.1
54	Évolution des valeurs pour les actifs risqués pour trois scénarios possibles.	3.1
56	Impact de la stratégie de placement sur l'évolution de l'expected shortfall itérée	3.2
58	Évolution de la valeur de l' <i>expected shortfall</i> recalculée et itérée pour le troisième scénario	3.3
59	Impact du choix de α sur la valeur de l'expected shortfall itérée pour le troisième scénario	3.4
60	Impact de la corrélation entre les actifs sur la valeur de l'expected shortfall itérée pour le troisième scénario	3.5
61	Impact du choix de ϵ sur la valeur de l'expected shortfall itérée pour le troisième scénario	3.6

		•		
		•		
·				
 •				
 •				
•				

LISTE DES TABLEAUX

Tableau	P	age
1.1	Valeurs possibles (en unités monétaires) des positions X, Y et $X+Y$. 8
2.1	Valeurs de l'expected shortfall recalculée aux temps $t=0$ et $t=1$ pour les positions X et Y	32
2.2	Valeurs de l'expected shortfall itérée aux temps $t=0$ et $t=1$ pour les positions X et Y	38
3.1	Distributions marginales des facteurs de rendement du portefeuille fictif pour un trimestre	52
3.2	Paramètres du modèle de référence	52
4.1	Paramètres utilisés pour simuler les données	64
4.2	Estimations de p	66
4.3	Erreurs d'estimation de l'expected shortfall recalculée et itérée au niveau $\alpha=0,10$ et au temps 0 pour les différentes valeurs de \hat{p}	66
4.4	Erreur d'estimation de l'expected shortfall recalculée pour différentes valeurs de \hat{p} et de α	67
4.5	Erreur d'estimation absolue de l'expected shortfall itérée pour différentes valeurs de \hat{p} et de α	68
4.6	Erreurs d'estimation de l'expected shortfall recalculée et itérée pour différentes périodes d'investissement avec α =0,10 et $\hat{p}=0,825.$	68

RÉSUMÉ

Dans ce mémoire, nous étudions le comportement de l'expected shortfall évaluée de façon dynamique. Tout d'abord, nous présentons la théorie sur les mesures de risque statiques lorsque l'espace des variables est fini. Nous définissons une mesure de risque monétaire, convexe et cohérente et donnons quelques exemples. Par la suite, nous adaptons cette théorie au cadre dynamique et présentons deux exemples de mesures de risque dynamiques : la mesure recalculée et la mesure itérée. Nous comparons ensuite l'évolution de l'évaluation de l'expected shortfall dynamique lorsque nous faisons varier des paramètres dans un portefeuille où les actifs risqués suivent un modèle binomial. Finalement, nous évaluons la sensibilité de l'estimation de l'expected shortfall dynamique aux différents paramètres pour un modèle binomial.

Mots-clés : mesure de risque cohérente, mesure de risque convexe, mesure de risque dynamique, time consistency, expected shortfall.

INTRODUCTION

Durant les dernières années, beaucoup de développements ont été faits dans la théorie de la mesure du risque. En effet, l'augmentation de la volatilité des marchés ainsi que les crises financières ont amené les institutions à vouloir mesurer le risque auquel elles sont exposées.

Plusieurs méthodes ont été explorées afin de quantifier ce risque. Les méthodes actuelles s'intéressent surtout à la perte financière potentielle d'une position. Dans les années 90, la banque JP Morgan a popularisé une mesure appelée value-at-risk, évaluée à un certain niveau α . Cette mesure représente la perte maximale que peut engendrer une position lorsqu'on retire les $100\alpha\%$ pires scénarios possibles. Simple à comprendre et à implémenter, cette mesure est largement utilisée.

Par contre, beaucoup de critiques ont été émises par rapport à la value-at-risk puisqu'elle ne respecte pas certaines propriétés désirables pour une mesure de risque. À la fin des années 90, Artzner et~al.~(1999) ont défini un ensemble d'axiomes définissant une mesure de risque cohérente. Plusieurs mesures cohérentes ont été développées, notamment l'expected shortfall. Pour un certain niveau α , cette mesure représente l'espérance de la perte potentielle d'une position pour les $100\alpha\%$ pires scénarios.

Certains auteurs ont également critiqué les mesures cohérentes, les considérant trop restrictives. Föllmer et Schied (2002) ont présenté un cadre axiomatique plus général, les mesures de risque convexes, englobant les mesures cohérentes.

Ces mesures s'appliquent toutes dans un cadre statique, c'est-à-dire pour une seule

période de temps. En réalité, de la nouvelle information sur une position est disponible à travers le temps. La question suivante devient donc pertinente : comment adapter l'évaluation du risque d'une position à la nouvelle information disponible, tout en demeurant conséquent avec l'évaluation initiale? Afin de répondre à cette question, Riedel (2004) a utilisé une approche axiomatique définissant une mesure de risque dynamique.

Suite à la crise économique de 2007-2008, l'accord de Bâle III, signé en 2010, recommande l'utilisation de l'expected shortfall comme mesure de risque. Il serait donc intéressant d'analyser l'évaluation du risque en utilisant cette mesure de façon dynamique.

Dans le premier chapitre, nous présenterons la théorie concernant les mesures de risque statiques. De plus, nous définirons différentes mesures de risque monétaires, cohérentes et convexes. Dans le second chapitre, nous verrons comment adapter cette théorie au cadre dynamique. Dans le chapitre III, nous comparerons différentes positions à l'aide de l'expected shortfall calculée de façon dynamique. Nous analyserons comment évolue l'évaluation du risque lorsque nous faisons varier les paramètres. Finalement, au chapitre IV, nous nous intéresserons à l'estimation de l'expected shortfall dans le cadre dynamique.

CHAPITRE I

MESURES DE RISQUE STATIQUES

Dans ce chapitre, nous présenterons la théorie reliée aux mesures de risque statiques.

Lorsqu'une entité, par exemple une institution financière, investit dans les marchés financiers, elle ne connaît pas la valeur que prendront les actifs dans le futur. Il est donc pertinent pour celle-ci de quantifier cette incertitude afin de connaître l'exposition au risque liée à sa position financière et ainsi s'assurer d'être en mesure de faire face à des scénarios défavorables. On peut définir le risque comme le gain (ou la perte) relié à une position sur une certaine période donnée. Nous noterons cette période (0,T). Nous supposons donc que l'entité souhaite mesurer une seule fois, au temps 0, le risque auquel elle est exposée jusqu'à la fin de la période étudiée, qui correspond au temps T.

Nous supposerons que l'ensemble de tous les états possibles, que nous noterons Ω , est connu et fini. Nous nous concentrerons ainsi sur les résultats montrés par Artzner et al. (1999). Posons $X:\Omega\to\mathbb{R}$ une variable aléatoire représentant la valeur (actualisée) d'un flux de trésorerie, c'est-à-dire le risque tel que défini ci-dessus. En d'autres termes, X représente la différence entre la valeur future (actualisée) et la valeur initiale d'une position. Dans ce cas, une valeur positive implique que l'entité a fait un gain et une valeur négative implique une perte.

Notons \mathcal{G} l'ensemble de tous les risques sur Ω , c'est-à-dire l'ensemble des fonctions à valeurs réelles sur Ω .

Voyons maintenant comment mesurer ce risque.

1.1 Mesures de risque monétaires

Le but de mesurer le risque est de s'assurer d'avoir le capital nécessaire afin de pouvoir pallier la perte encourue si un scénario néfaste avait lieu. Ainsi, une première intuition d'une mesure de risque serait le montant minimal de capital à investir dans une position afin de rendre celle-ci « acceptable ». Nous donnerons une définition plus détaillée de ce qu'est une position acceptable un peu plus loin dans ce chapitre.

Nous représenterons la mesure de risque pour la position X par $\rho(X)$. Afin de quantifier le risque convenablement, une mesure devrait respecter certaines propriétés. Tout d'abord, prenons le cas d'une position pour laquelle le gain serait toujours plus faible que pour une autre, peut importe l'état des choses. Il serait souhaitable que la première soit évaluée comme plus risquée que la seconde. De plus, comme une mesure de risque s'interprète comme un capital à investir, ajouter un montant sûr à une position devrait réduire le risque qui lui est associé de ce même montant. Par exemple, si nous considérons qu'une position est acceptable si $\rho(X) \leq 0$, alors le montant minimal à ajouter à une position serait $\rho(X)$ et par conséquent $\rho(X + \rho(X)) = 0$.

Définissons une mesure de risque de façon plus formelle.

Définition 1.1.1 (Mesure de risque monétaire). Une mesure de risque monétaire est une application $\rho: \mathcal{G} \to \mathbb{R}$ qui respecte les axiomes suivants. Soient $X, Y \in \mathcal{G}$ et $a \in \mathbb{R}$.

- 1. Monotonicité : Si $X \leq Y$, alors $\rho(X) \geq \rho(Y)$.
- 2. Invariance par translation : $\rho(X + a) = \rho(X) a$.

Voyons quelques exemples de mesures monétaires.

Exemple 1.1.1 (Value at risk). Une des mesures les plus largement utilisées est la value at risk, que l'on pourrait traduire par « valeur au risque ». Cette mesure a été popularisée par la banque JP Morgan dans les années 90. Il s'agit d'une façon intuitive et facilement interprétable d'aborder l'évaluation du risque. Cette mesure correspond tout simplement au quantile d'ordre α , soit le niveau de risque. Nous pouvons l'interpréter comme la perte maximale lorsque les $100\alpha\%$ pires scénarios possibles sont retirés. La value at risk permet donc de couvrir les pertes associées à la position X avec une probabilité de $1-\alpha$.

Plus formellement, nous pouvons exprimer la value at risk de la façon suivante.

Soit $\alpha \in (0,1)$, la value at risk au niveau α pour la position X est définie comme suit :

$$\operatorname{VaR}_{\alpha}(X) = -\inf \{ x | \operatorname{P}(X \leq x) > \alpha \}.$$

Vérifions qu'il s'agit bien d'une mesure monétaire.

Soient
$$X, Y \in \mathcal{G}, a \in \mathbb{R}$$
 et $\alpha \in (0,1)$.

1. Monotonicité

Si
$$X \leq Y$$
, alors

$$\{x|P(X \le x) > \alpha\} \supset \{y|P(Y \le y) > \alpha\}.$$

Conséquemment,

$$VaR_{\alpha}(X) = -\inf\{x | P(X \le x) > \alpha\}$$
$$\ge -\inf\{y | P(Y \le y) > \alpha\}$$
$$= VaR_{\alpha}(Y).$$

2. Invariance par translation

$$VaR_{\alpha}(X + a) = -\inf\{x + a | P(X + a \le x + a) > \alpha\}$$
$$= -\inf\{x | P(X \le x) > \alpha\} - a$$
$$= VaR_{\alpha}(X) - a.$$

Par contre, plusieurs ont soulevé des problèmes avec l'utilisation de la VaR, notamment, le fait que cette mesure ne tient pas compte du comportement de la perte au-delà du quantile d'ordre α . Ainsi, elle ne permettrait pas de détecter une position où les $100\alpha\%$ pires scénarios engendreraient une perte énorme. Bien que peu probables, ceux-ci sont tout de même possibles. De plus, nous verrons plus loin que cette mesure pourrait amener un investisseur à prendre des décisions incohérentes.

Exemple 1.1.2 (Tail conditional expectation). Pour pallier certains problèmes de la value at risk, certains auteurs ont proposé une mesure appelée la tail conditional expectation. L'idée est de mesurer l'espérance de la perte au-delà du quantile α . Nous présentons ici la définition donnée par Artzner et al. (1999).

Soit $\alpha \in (0,1)$, la tail conditional expectation au niveau α de X est définie comme suit :

$$TCE_{\alpha}(X) = -E[X|X \le -VaR_{\alpha}(X)].$$

Vérifions si cette mesure est monétaire.

Soient $X, Y \in \mathcal{G}, a \in \mathbb{R}$ et $\alpha \in (0,1)$.

1. Monotonicité

Si $X \leq Y$, alors

$$TCE_{\alpha}(X) = -E[X|X \le -VaR_{\alpha}(X)]$$
$$\ge -E[Y|Y \le -VaR_{\alpha}(Y)]$$
$$= TCE_{\alpha}(Y).$$

2. Invariance par translation

$$TCE_{\alpha}(X+a) = -E[X+a|X+a \le -VaR_{\alpha}(X+a)]$$
$$= -E[X|X \le -VaR_{\alpha}(X)] - a$$
$$= TCE_{\alpha}(X) - a.$$

Il est bien connu qu'un portefeuille diversifié engendre un risque moins élevé. En effet, lorsqu'on regroupe différentes positions, le risque global devrait être moins élevé que lorsqu'on les considère individuellement. Une propriété intéressante d'une mesure de risque serait donc d'encourager une position diversifiée par rapport à une autre. Mathématiquement, on pourrait traduire cette propriété par la sous-additivité, c'est-à-dire que $\rho(X+Y) \leq \rho(X) + \rho(Y)$.

La value at risk et la tail conditional expectation présentées ci-dessus dans les exemples 1.1.1 et 1.1.2 ne respectent pas la propriété de sous-additivité. Utilisons un cas simple afin de démontrer cette affirmation.

Prenons Ω , l'ensemble des états possibles avec $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$. Soient X et Y, deux variables aléatoires représentant chacune la valeur actualisée d'un flux de trésorerie possible sur Ω . Tel que mentionné précédemment, ces variables représentent donc la différence entre la valeur future et la valeur initiale (toutes deux actualisées) d'une position financière. Ces variables aléatoires sont exprimées en

unités monétaires (par exemple, en dollars). Prenons a > 0. Le tableau 1.1 présente les valeurs possibles que peuvent prendre ces deux variables.

	prob.	X	Y	X+Y
ω_1	0,09	-a	0	-a
ω_2	0,09	0	-a	-a
ω_3	0,82	0	0	0

Tableau 1.1: Valeurs possibles (en unités monétaires) des positions X, Y et X+Y.

Prenons $\alpha = 0.10$.

Calculons la value at risk pour chaque des positions X et Y individuellement et lorsqu'elles sont regroupées. Nous obtenons $\operatorname{VaR}_{\alpha}(X) = \operatorname{VaR}_{\alpha}(Y) = 0$ et que $\operatorname{VaR}_{\alpha}(X+Y) = a$. Nous observons donc que $\operatorname{VaR}_{\alpha}(X) + \operatorname{VaR}_{\alpha}(Y) = 0 \le a = \operatorname{VaR}_{\alpha}(X+Y)$.

Similairement,
$$TCE_{\alpha}(X) = TCE_{\alpha}(Y) = 0,09a$$
 et $TCE_{\alpha}(X + Y) = a$. Par conséquent, $TCE_{\alpha}(X) + TCE_{\alpha}(Y) = 0,18a \le a = TCE_{\alpha}(X + Y)$.

La value at risk et la tail conditional expectation ne sont donc pas sous-additives. Le fait d'utiliser ces mesures pourrait engendrer des évaluations incohérentes du risque.

1.2 Mesures de risque cohérentes

1.2.1 Définition et exemples

Comme nous l'avons remarqué dans l'exemple ci-dessus, une mesure de risque monétaire n'a pas nécessairement toutes les propriétés souhaitables d'une mesure de risque. Il est donc important de raffiner notre définition. Il serait logique d'ajouter la propriété de sous-additivité mentionnée précédemment. Par contre, il est important de considérer le fait qu'augmenter l'exposition à un même risque ne

constitue pas de la diversification.

Artzner et al. (1999) ont établi un ensemble d'axiomes afin d'englober ces propriétés. Une mesure respectant tous ces axiomes est appelée cohérente.

Définition 1.2.1 (Mesure de risque cohérente). Une mesure de risque monétaire est dite cohérente si elle respecte les axiomes de sous-additivité et d'homogénéité positive. Soient $X, Y \in \mathcal{G}$.

- 1. Sous-additivité : $\rho(X+Y) \le \rho(X) + \rho(Y)$
- 2. Homogénéité positive : $\rho(\lambda X) = \lambda \rho(X)$, $\lambda \geq 0$

Comme nous l'avons démontré plus haut, la *VaR* et la *TCE* ne sont pas des mesures cohérentes puisqu'elles ne respectent pas l'axiome de sous-additivité. Voyons quelques mesures cohérentes.

Exemple 1.2.1 (Worst conditional expectation). Soit $\alpha \in (0,1)$, la worst conditional expectation au niveau α de X est définie comme suit :

$$WCE_{\alpha}(X) = -\inf \{ E[X|A] | A \in \mathcal{F}, \ P(A) > \alpha \}$$

où ${\mathcal F}$ est la σ -algèbre générée par $\Omega.$ Vérifions qu'il s'agit d'une mesure cohérente.

Soient
$$X, Y \in \mathcal{G} \ \alpha \in (0,1)$$
 et $A \in \mathcal{F}$.

1. Monotonicité

Si
$$X \leq Y$$
, alors

$$E[X|A] \le E[Y|A]$$

$$\Rightarrow -\inf \{ E[X|A] | P(A) > \alpha \} \ge -\inf \{ E[Y|A] | P(A) > \alpha \}$$

$$\Rightarrow WCE_{\alpha}(X) \ge WCE_{\alpha}(Y).$$

2. Invariance par translation

$$WCE_{\alpha}(X + a) = -\inf \{ E[X + a|A] | P(A) > \alpha \}$$
$$= -\inf \{ E[X|A] | P(A) > \alpha \} - a$$
$$= WCE_{\alpha}(X) - a$$

pour $a \in \mathbb{R}$.

3. Sous-additivité

$$\begin{aligned} \operatorname{WCE}_{\alpha}(X+Y) &= -\inf\{\operatorname{E}[X+Y|A]|P(A) > \alpha\} \\ &= -\inf\{\operatorname{E}[X|A] + \operatorname{E}[Y|A]|P(A) > \alpha\} \\ &\leq -\inf\{\operatorname{E}[X|A]|P(A) > \alpha\} - \inf\{\operatorname{E}[Y|A]|P(A) > \alpha\} \\ &= \operatorname{WCE}_{\alpha}(X) + \operatorname{WCE}_{\alpha}(Y). \end{aligned}$$

4. Homogénéité positive

$$WCE_{\alpha}(\lambda X) = -\inf \{ E[\lambda X | A] | P(A) > \alpha \}$$
$$= -\lambda \inf \{ E[X | A] | P(A) > \alpha \}$$
$$= \lambda WCE_{\alpha}(X)$$

pour $\lambda > 0$.

Bien que cohérente, cette mesure est difficilement applicable car elle demande une connaissance approfondie de l'espace probabiliste.

Exemple 1.2.2 (Expected Shortfall). Comme nous l'avons montré précédemment, la tail conditional expectation n'est pas une mesure cohérente. Le problème est qu'elle est mal définie lorsque le quantile α n'est pas unique. Nous introduisons donc une autre mesure, l'expected shortfall, que l'on peut interpréter comme la perte moyenne pour les $100\alpha\%$ pires scénarios. Le terme expected shortfall est utilisé par plusieurs auteurs. Cette mesure est également appelée average value

at risk ou conditional value at risk par certains. Nous utiliserons ici la définition donnée par Acerbi et al. (2001).

Soit $\alpha \in (0,1)$, l'expected shortfall au niveau α de X est définie comme suit :

$$\mathrm{ES}_{\alpha}(X) = -\frac{1}{\alpha} \left(\mathrm{E}[X \mathbb{1}_{\left\{ X \le x_{(\alpha)} \right\}}] + x_{(\alpha)} [\alpha - \mathrm{P}(X \le x_{(\alpha)})] \right)$$

où $x_{(\alpha)} = \inf\{x | P(X \le x) \ge \alpha\}$ est le quantile inférieur d'ordre α de X.

Montrons qu'il s'agit d'une mesure de risque cohérente.

Soient $X, Y \in \mathcal{G}$ et $\alpha \in (0,1)$.

1. Monotonicité

Si
$$X \leq Y$$
, alors $x_{(\alpha)} \leq y_{(\alpha)}$ et $\mathrm{E}[X\mathbb{1}_{\{X \leq x_{(\alpha)}\}}] \leq \mathrm{E}[Y\mathbb{1}_{\{Y \leq y_{(\alpha)}\}}]$.
De plus, comme X et Y sont définies sur le même espace Ω , $\mathrm{P}(X \leq x_{(\alpha)}) = \mathrm{P}(Y \leq y_{(\alpha)})$. Donc,

$$\begin{split} \mathrm{ES}_{\alpha}(X) &= -\frac{1}{\alpha} \left(\mathrm{E}[X \mathbb{1}_{\left\{ X \leq x_{(\alpha)} \right\}}] + x_{(\alpha)} [\alpha - \mathrm{P}(X \leq x_{(\alpha)})] \right) \\ &\geq -\frac{1}{\alpha} \left(\mathrm{E}[Y \mathbb{1}_{\left\{ Y \leq y_{(\alpha)} \right\}}] + y_{(\alpha)} [\alpha - \mathrm{P}(Y \leq y_{(\alpha)})] \right) \\ &= \mathrm{ES}_{\alpha}(Y). \end{split}$$

2. Invariance par translation

$$\operatorname{ES}_{\alpha}(X+a) = -\frac{1}{\alpha} \left(\operatorname{E}[(X+a)\mathbb{1}_{\left\{X+a \leq x_{(\alpha)}+a\right\}}] + (x_{(\alpha)}+a) \left[\alpha\right] - \operatorname{P}(X+a \leq x_{(\alpha)}+a) \right]$$

$$= -\frac{1}{\alpha} \left(\operatorname{E}[X\mathbb{1}_{\left\{X \leq x_{(\alpha)}\right\}}] + x_{(\alpha)}[\alpha - \operatorname{P}(X \leq x_{(\alpha)})] + a\alpha \right)$$

$$= \operatorname{ES}_{\alpha}(X) - a$$

pour $a \in \mathbb{R}$.

3. Sous-additivité

Posons
$$\mathbb{1}_{\{X \leq x\}}^{(\alpha)} = \begin{cases} \mathbb{1}_{\{X \leq x\}}, & P(X = x) = 0 \\ \mathbb{1}_{\{X \leq x\}} + \frac{\alpha - P(X \leq x)}{P(X = x)} \mathbb{1}_{\{X = x\}}, & P(X = x) > 0. \end{cases}$$
Alors $\mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{\{X \leq x_{(\alpha)}\}}^{(\alpha)}\right) = \alpha$ et la formule de l'expected shortfall s'exprime de

$$ES_{\alpha}(X) = -\frac{1}{\alpha} E\left[X \mathbb{1}_{\left\{X \le x_{(\alpha)}\right\}}^{(\alpha)}\right]. \tag{1.1}$$

Posons Z = X + Y. Alors, en utilisant l'équation 1.1, nous obtenons que

$$\alpha[\mathrm{ES}_{\alpha}(X) + \mathrm{ES}_{\alpha}(Y) - \mathrm{ES}_{\alpha}(Z)]$$

$$= \mathrm{E}\left[Z\mathbb{1}_{\{Z \leq z_{(\alpha)}\}}^{(\alpha)}\right] - \mathrm{E}\left[X\mathbb{1}_{\{X \leq x_{(\alpha)}\}}^{(\alpha)}\right] - \mathrm{E}\left[Y\mathbb{1}_{\{Y \leq y_{(\alpha)}\}}^{(\alpha)}\right]$$

$$= \mathrm{E}\left[(X + Y)\mathbb{1}_{\{Z \leq z_{(\alpha)}\}}^{(\alpha)} - X\mathbb{1}_{\{X \leq x_{(\alpha)}\}}^{(\alpha)} - Y\mathbb{1}_{\{Y \leq y_{(\alpha)}\}}^{(\alpha)}\right]$$

$$= \mathrm{E}\left[X\left(\mathbb{1}_{\{Z \leq z_{(\alpha)}\}}^{(\alpha)} - \mathbb{1}_{\{X \leq x_{(\alpha)}\}}^{(\alpha)}\right) + Y\left(\mathbb{1}_{\{Z \leq z_{(\alpha)}\}}^{(\alpha)} - \mathbb{1}_{\{Y \leq y_{(\alpha)}\}}^{(\alpha)}\right)\right]$$

$$\geq x_{(\alpha)} \, \mathrm{E}\left[\mathbb{1}_{\{Z \leq z_{(\alpha)}\}}^{(\alpha)} - \mathbb{1}_{\{X \leq x_{(\alpha)}\}}^{(\alpha)}\right] + y_{(\alpha)} \, \mathrm{E}\left[\mathbb{1}_{\{Z \leq z_{(\alpha)}\}}^{(\alpha)} - \mathbb{1}_{\{Y \leq y_{(\alpha)}\}}^{(\alpha)}\right]$$

$$= x_{(\alpha)}(\alpha - \alpha) + y_{(\alpha)}(\alpha - \alpha)$$

$$= 0.$$

$$\begin{cases} \mathbb{1}_{\left\{Z \leq z_{(\alpha)}\right\}}^{(\alpha)} - \mathbb{1}_{\left\{X \leq x_{(\alpha)}\right\}}^{(\alpha)} \geq 0 & \text{si } X > x_{(\alpha)} \\ \mathbb{1}_{\left\{Z \leq z_{(\alpha)}\right\}}^{(\alpha)} - \mathbb{1}_{\left\{X \leq x_{(\alpha)}\right\}}^{(\alpha)} \leq 0 & \text{si } X < x_{(\alpha)}. \end{cases}$$

4. Homogénéité positive

$$\operatorname{ES}_{\alpha}(\lambda X) = -\frac{1}{\alpha} \left(\operatorname{E}[(\lambda X) \mathbb{1}_{\left\{\lambda X \leq \lambda x_{(\alpha)}\right\}}] + \lambda x_{(\alpha)} [\alpha - \operatorname{P}(\lambda X \leq \lambda x_{(\alpha)})] \right)$$
$$= -\frac{1}{\alpha} \left(\lambda \operatorname{E}[(X) \mathbb{1}_{\left\{X \leq x_{(\alpha)}\right\}}] + \lambda x_{(\alpha)} [\alpha - \operatorname{P}(X \leq x_{(\alpha)})] \right)$$
$$= \lambda \operatorname{ES}_{\alpha}(X)$$

pour $\lambda > 0$.

Exemple 1.2.3 (Conditional value at risk). Une autre mesure est la conditional value at risk. Ce terme revient souvent dans la littérature mais nous utiliserons la définition donnée par Pflug (2000).

Soit $\alpha \in (0,1)$, la conditional value at risk au niveau α de X est définie de la façon suivante :

$$\text{CVaR}_{\alpha}(X) = \inf \left\{ \frac{\text{E}[(s-X)^+]}{\alpha} - s \middle| s \in \mathbb{R} \right\}$$

où
$$(s - X)^+ = \max(s - X, 0)$$
.

Encore une fois, vérifions qu'il s'agit d'une mesure cohérente.

Soient $X, Y \in \mathcal{G}$ et $\alpha \in (0,1)$.

1. Monotonicité

Si
$$X \leq Y$$
 alors

$$(s - X)^{+} \ge (s - Y)^{+}$$

$$\Rightarrow \inf \left\{ \frac{\mathrm{E}[(s - X)^{+}]}{\alpha} \middle| s \in \mathbb{R} \right\} \ge \inf \left\{ \frac{\mathrm{E}[(s - Y)^{+}]}{\alpha} \middle| s \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\Rightarrow \mathrm{CVaR}_{\alpha}(X) \ge \mathrm{CVaR}_{\alpha}(Y).$$

2. Invariance par translation

$$\operatorname{CVaR}_{\alpha}(X+a) = \inf \left\{ \frac{\operatorname{E}[(s-X-a)^{+}]}{\alpha} - s \middle| s \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \inf \left\{ \frac{\operatorname{E}[(s-X-a)^{+}]}{\alpha} - (s-a) - a \middle| s \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \inf \left\{ \frac{\operatorname{E}[(s-X)^{+}]}{\alpha} - s \middle| s \in \mathbb{R} \right\} - a$$

$$= \operatorname{CVaR}_{\alpha}(X) - a.$$

pour $a \in \mathbb{R}$.

3. Sous-additivité

$$\operatorname{CVaR}_{\alpha}(X+Y) = \inf \left\{ \frac{\operatorname{E}[(s-X-Y)^{+}]}{\alpha} - s \middle| s \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \inf \left\{ \frac{\operatorname{E}[(s_{1}-X)^{+}] + \operatorname{E}[(s_{2}-Y)^{+}]}{\alpha} - s_{1} - s_{2} \middle| s_{1}, s_{2} \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\leq \inf \left\{ \frac{\operatorname{E}[(s_{1}-X)^{+}]}{\alpha} - s_{1} \middle| s_{1} \in \mathbb{R} \right\}$$

$$+ \inf \left\{ \frac{\operatorname{E}[(s_{2}-Y)^{+}]}{\alpha} - s_{2} \middle| s_{2} \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \operatorname{CVaR}_{\alpha}(X) + \operatorname{CVaR}_{\alpha}(Y).$$

4. Homogénéité positive

$$\lambda \operatorname{CVaR}_{\alpha}(X) = \lambda \inf \left\{ \frac{\operatorname{E}[(s-X)^{+}]}{\alpha} - s \middle| s \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \inf \left\{ \frac{\lambda \operatorname{E}[(s-X)^{+}]}{\alpha} - \lambda s \middle| s \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \inf \left\{ \frac{\operatorname{E}[(s-\lambda X)^{+}]}{\alpha} - s \middle| s \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \operatorname{CVaR}_{\alpha}(\lambda X).$$

Exemple 1.2.4. Ensemble de scénarios généralisés

Prenons \mathcal{P} , un sous-ensemble de mesures de probabilité sur Ω . Il est possible de construire une mesure de risque à partir de ce sous-ensemble. En effet, une mesure s'écrivant de la façon suivante

$$\rho(X) = \sup\{\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[-X] | \mathbb{P} \in \mathcal{P}\}$$
(1.2)

est une mesure de risque cohérente. Si nous interprétons une mesure de probabilité comme étant un scénario possible, alors \mathcal{P} représente un ensemble de scénarios généralisés.

Vérifions cette affirmation.

Soient $X, Y \in \mathcal{G}$ et $\alpha \in (0,1)$.

1. Monotonicité

Si
$$X \leq Y$$
, alors

$$E_{\mathbb{P}}[-X] \ge E_{\mathbb{P}}[-Y]$$

$$\Rightarrow \sup\{E_{\mathbb{P}}[-X]|\mathbb{P} \in \mathcal{P}\} \ge \sup\{E_{\mathbb{P}}[-Y]|\mathbb{P} \in \mathcal{P}\}$$

$$\Rightarrow \rho(X) \ge \rho(Y).$$

2. Invariance par translation

$$\rho(X + a) = \sup \{ \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[-(X + a)] | \mathbb{P} \in \mathcal{P} \}$$
$$= \sup \{ \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[-X] | \mathbb{P} \in \mathcal{P} \} - a$$
$$= \rho(X) - a$$

pour $a \in \mathbb{R}$.

3. Sous-additivité

$$\begin{split} \rho(X+Y) &= \sup\{\mathrm{E}_{\mathbb{P}}[-X-Y] | \mathbb{P} \in \mathcal{P}\} \\ &= \sup\{\mathrm{E}_{\mathbb{P}}[-X] + \mathrm{E}_{\mathbb{P}}[-Y] | \mathbb{P} \in \mathcal{P}\} \\ &\leq \sup\{\mathrm{E}_{\mathbb{P}}[-X] | \mathbb{P} \in \mathcal{P}\} + \sup\{\mathrm{E}_{\mathbb{P}}[-Y] | \mathbb{P} \in \mathcal{P}\} \\ &= \rho(X) + \rho(Y). \end{split}$$

4. Homogénéité positive

$$\rho(\lambda X) = \sup\{ \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[-\lambda X] | \mathbb{P} \in \mathcal{P} \}$$
$$= \lambda \sup\{ \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[-X] | \mathbb{P} \in \mathcal{P} \}$$
$$= \lambda \rho(X)$$

pour $\lambda \geq 0$.

Remarque 1. Plus il y a de scénarios considérés, plus la mesure sera conservatrice.

Remarque 2. Il est également possible de démontrer que pour toute mesure de risque cohérente, il existe un sous-ensemble \mathcal{P} tel que l'équation 1.2 est vraie. La preuve fait appel à des notions dépassant le cadre de ce mémoire. Le lecteur est invité à se référer à Artzner et al. (1999) (proposition 4.1) et Huber (1981) (proposition 2.1, chapitre 10) pour la preuve détaillée.

1.2.2 Région de risques acceptables

Précédemment, nous avons défini une mesure de risque comme étant le montant à ajouter à une position afin de la rendre acceptable. Nous pouvons définir une position comme étant acceptable si elle fait partie de la région de risques acceptables, que nous noterons \mathcal{A} .

D'abord, nous présenterons quelques propiétés souhaitables pour cet ensemble A.

Soit L_{+} le cône formé des éléments non-négatifs de \mathcal{G} .

Axiome 1.2.1. L'ensemble A contient L_+ .

Car une position qui a toujours une valeur non-négative n'a pas besoin de capital additionnel et devrait donc faire partie de la région de risques acceptables.

Axiome 1.2.2. A n'a pas d'intersection avec l'ensemble L_{-} où $L_{-} = \{X | \forall \omega \in \Omega, \ X(\omega) < 0\}.$

Car une position qui a toujours une valeur strictement négative a nécessairement besoin de capital additionnel et ne fait donc pas partie de l'ensemble d'acceptation.

Axiome 1.2.3. A est convexe.

Axiome 1.2.4. A est un cône positivement homogène.

Nous pouvons maintenant établir le lien entre la région de risques acceptables et une mesure de risque. Tout d'abord, si nous avons une telle région \mathcal{A} , nous pouvons induire une mesure de risque associée à cette région.

Définition 1.2.2. La mesure de risque induite par la région de risques acceptables \mathcal{A} est une application $\rho_{\mathcal{A}}(X): \mathcal{G} \to \mathbb{R}$, et est définie par

$$\rho_{\mathcal{A}}(X) = \inf \left\{ m | m + X \in \mathcal{A} \right\}.$$

Cela correspond à notre définition initiale du risque qui est le capital minimal à ajouter à une position afin de la rendre acceptable. Inversement, lorsque nous avons une mesure de risque ρ , il est possible de générer une région de risques acceptables pour cette mesure.

Définition 1.2.3. La région de risques acceptables associée à une mesure de risque ρ , notée A_{ρ} est définie par

$$\mathcal{A}_{\rho} = \{ X \in \mathcal{G} | \rho(X) \le 0 \} . - - -$$

Maintenant que nous avons défini une région de risques acceptables, nous pouvons faire le lien avec la notion de mesure cohérente.

Proposition 1.2.4. Si l'ensemble A respecte les axiomes 1.2.1 à 1.2.4, alors la mesure ρ_A est cohérente.

 $D\'{e}monstration$. Soit \mathcal{A} une région de risques acceptables satisfaisant les axiomes 1.2.1 à 1.2.4.

- 1. $\rho_{\mathcal{A}}$ est fini par axiomes 1.2.2 et 1.2.3.
- 2. Monotonicité

Soient $X \in \mathcal{A}$ et $Y \in \mathcal{G}$ tels que $X \leq Y$. Si $X + m \in \mathcal{A}$ alors par l'axiome 1.2.1, $Y + m \in \mathcal{A}$. Ainsi, $\{m|m + X \in \mathcal{A}\} \subseteq \{m|m + Y \in \mathcal{A}\}$ et donc $\rho(X) \geq \rho(Y)$.

3. Invariance par translation

$$\inf\{m|m+X+a\in\mathcal{A}\}=\inf\{m|m+X\in\mathcal{A}\}-a.$$

Donc
$$\rho(X + a) = \rho(X) - a$$
.

4. Sous-additivité

Par la définition 1.2.2, $X + \rho(X) \in \mathcal{A}$ et $Y + \rho(Y) \in \mathcal{A}$. Par les axiomes 1.2.3 et 1.2.4, $X + \rho(X) + Y + \rho(Y) \in \mathcal{A}$. Par la définition 1.2.3, on déduit que $\rho(X + \rho(X) + Y + \rho(Y)) \leq 0$ et par l'invariance par translation, on obtient que $\rho(X + Y) \leq \rho(X) + \rho(Y)$.

5. Homogénéité positive

Prenons $m > \rho(X)$. Par la définition 1.2.2 et l'axiome 1.2.4, $X + m \in \mathcal{A}$ et $\lambda(X + m) \in \mathcal{A}$. Par la définition 1.2.3 et l'invariance par translation, $\rho(\lambda(X + m)) \leq 0$ d'où $\rho(\lambda X) \leq \lambda m$.

Prenons maintenant $m < \rho(X)$. Dans ce cas, $X + m \notin A$ et $\lambda(X + m) \notin A$. Ainsi, $\rho(\lambda(X + m)) > 0$ d'où $\rho(\lambda X) > \lambda m$.

On peut donc conclure que $\rho(\lambda X) = \lambda \rho(X)$.

Proposition 1.2.5. Si une mesure de risque ρ est cohérente, alors l'ensemble d'acceptation \mathcal{A}_{ρ} est fermé et satisfait les axiomes 1.2.1 à 1.2.4. De plus, $\rho = \rho_{\mathcal{A}_{\rho}}$.

Démonstration. Soit ρ une mesure de risque cohérente.

1. Axiome 1.2.1

Par l'homogénéité positive, on a que $\rho(0) = 0$. Ainsi, par monotonicité, pour tout $X \geq 0$, $\rho(X) \leq 0$. A contient donc L_+ .

2. Axiome 1.2.2

Soit $X \in L_{-}$ tel que $\rho(X) < 0$. Dans ce cas, X < 0 et ainsi par monotonicité, $\rho(0) \leq 0$, ce qui est une contradiction.

Maintenant, soit $\rho(X) = 0$ et prenons une constante a > 0 telle que $X + a \in L_-$. On a déduit plus haut que $0 \le \rho(X + a)$ et par l'invariance par translation, on obtient $0 \le -a$, ce qui est une contradiction.

Ainsi, $\rho(X) > 0$ et par la définition 1.2.3, $X \notin \mathcal{A}$, donc \mathcal{A} n'a pas d'intersection avec L_{-} .

3. Axiome 1.2.3

Soient $X, Y \in \mathcal{A}$. Par la définition 1.2.3, $\rho(X) \leq 0$ et $\rho(Y) \leq 0$. Par la

sous-additivité et l'homogénéité positive, on a que pour $0 \le \lambda \le 1$,

$$\rho(\lambda X + (1 - \lambda)Y) \le \lambda \rho(X) + (1 - \lambda)\rho(Y) \le \lambda 0 + (1 - \lambda)0 \le 0.$$

Donc, $\lambda X + (1 - \lambda)Y \in \mathcal{A}$. Ainsi, \mathcal{A} est convexe.

4. Axiome 1.2.4

Soient $X \in \mathcal{A}$ et $\lambda \geq 0$. Par l'homogénéité positive et la définition 1.2.3, $\rho(\lambda X) = \lambda \rho(X) \leq 0$. Donc, $\lambda X \in \mathcal{A}$. Ainsi, \mathcal{A} est un cône positivement homogène.

1.3 Mesures de risque convexes

Jusqu'à présent, nous avons étudié les propriétés des mesures de risque cohérentes. Certains auteurs ont critiqué ce type de mesure, le jugeant inapproprié pour certains cas. Dans cette section, nous étudierons une classe plus générale, les mesures de risque convexes.

Avec les mesures cohérentes, nous sous-entendons que le risque augmente de façon linéaire avec la taille de la position. Par contre, ce n'est pas toujours le cas. Par exemple, si un investisseur détient une grande quantité d'un même actif, il peut être beaucoup plus difficile pour lui de les vendre en entier qu'un investisseur qui en possède moins. Il y a donc un risque de liquidité additionnel lié à la taille d'une position. C'est pourquoi Föllmer et Schied (2002) ont introduit la notion de mesure convexe.

Définition 1.3.1 (Mesure de risque convexe). Une mesure de risque monétaire est dite convexe si elle respecte l'axiome suivant :

 $Convexit\'e: Soit \ 0 \le \lambda \le 1$

$$\rho(\lambda X + (1 - \lambda)Y) \le \lambda \rho(X) + (1 - \lambda)\rho(Y).$$

Ainsi, si deux positions sont acceptables, une combinaison convexe des deux l'est également.

Notons qu'une mesure de risque cohérente est également convexe. En effet, une mesure monétaire satisfaisant les axiomes de convexité et d'homogénéité positive est nécessairement sous-additive.

Voyons un exemple de mesure convexe.

Exemple 1.3.1 (Entropic risk measure). Une des mesures de risque convexe les plus connues et utilisées est la mesure de risque entropique.

Soit $\beta > 0$,

$$\rho_{ent}(X) = \frac{1}{\beta} \log \mathbb{E} \left[\exp(-\beta X) \right].$$

Vérifions si cette mesure est convexe.

Soient $X, Y \in \mathcal{G}$ et $\alpha \in (0,1)$.

1. Monotonicité

Si $X \leq Y$, alors

$$\exp(-\beta X) \ge \exp(-\beta Y)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\beta} \log \mathbb{E}[\exp(-\beta X)] \ge \frac{1}{\beta} \log \mathbb{E}[\exp(-\beta X)]$$

$$\Rightarrow \rho_{ent}(X) \ge \rho_{ent}(Y).$$

2. Invariance par translation

$$\rho_{ent}(X+a) = \frac{1}{\beta} \log \mathbb{E}[\exp(-\beta(X+a))]$$

$$= \frac{1}{\beta} \log \exp(-\beta a) \mathbb{E}[\exp(-\beta X)]$$

$$= \frac{1}{\beta} \log \mathbb{E}[\exp(-\beta X)] - a$$

$$= \rho_{ent}(X) - a$$

pour $a \in \mathbb{R}$.

3. Convexité

Le résultat s'obtient en utilisant l'inégalité de Hölder avec $1/p = \lambda$ et $1/q = 1 - \lambda$, 1/p + 1/q = 1. Notons que la fonction exponentielle est toujours positive.

$$\rho(\lambda X + (1 - \lambda)Y) = \frac{1}{\beta} \log \mathbb{E} \left[\exp(-\beta(\lambda x + (1 - \lambda)Y)) \right]$$

$$= \frac{1}{\beta} \log \mathbb{E} \left[\exp(-\beta X \lambda) \exp(-\beta y (1 - \lambda)) \right]$$

$$\leq \frac{1}{\beta} \log(\mathbb{E} \left[\exp(-\beta x) \right]^{\lambda} \mathbb{E} \left[\exp(-\beta Y) \right]^{(1 - \lambda)})$$

$$= \frac{1}{\beta} (\lambda \log \mathbb{E} \left[\exp(-\beta X) \right] + (1 - \lambda) \log \mathbb{E} \left[\exp(-\beta y) \right])$$

$$= \lambda \rho(X) + (1 - \lambda) \rho(Y).$$

Exemple 1.3.2 (Ensemble de scénarios généralisés). Il est possible de généraliser l'exemple 1.2.4 afin de générer des mesures de risque convexes.

Soit \mathcal{Q} , l'ensemble de toutes les mesures de probabilité sur Ω et $\gamma(\cdot)$ une fonction de pénalité $\gamma:\mathcal{Q}\to (-\infty,\infty]$. Alors

$$\rho(X) = \sup_{Q \in \mathcal{Q}} \left\{ \mathbb{E}_Q[-X] - \gamma(Q) \right\}$$

est une mesure de risque convexe.

1. Monotonicité

Soient
$$X, Y \in \mathcal{G}$$
 et $X \leq Y$. Alors,

$$\sup_{Q \in \mathcal{Q}} \left\{ \mathbb{E}_{Q}[-X] - \gamma(Q) \right\} \ge \sup_{Q \in \mathcal{Q}} \left\{ \mathbb{E}_{Q}[-Y] - \gamma(Q) \right\}$$
$$\Rightarrow \rho(X) \ge \rho(Y).$$

2. Invariance par translation

$$\begin{split} \rho(X+a) &= \sup_{Q \in \mathcal{Q}} \left\{ \mathbf{E}_Q[-X-a] - \gamma(Q) \right\} \\ &= \sup_{Q \in \mathcal{Q}} \left\{ \mathbf{E}_Q[-X] - \gamma(Q) \right\} - a = \rho(X) - a \end{split}$$

pour $a \in \mathbb{R}$.

3. Convexité

Soit $\lambda \in [0,1]$

$$\rho(\lambda X + (1 - \lambda)Y) = \sup_{Q \in \mathcal{Q}} \left\{ \mathbb{E}_Q[-\lambda X - (1 - \lambda)Y] - \lambda \gamma(Q) - (1 - \lambda)\gamma(Q) \right\}$$

$$\leq \lambda \sup_{Q \in \mathcal{Q}} \left\{ \mathbb{E}_Q[-X] - \gamma(Q) \right\} + (1 - \lambda) \sup_{Q \in \mathcal{Q}} \left\{ \mathbb{E}_Q[-Y] - \gamma(Q) \right\}$$

$$= \lambda \rho(X) + (1 - \lambda)\rho(Y).$$

Remarque 3. Il est également possible de démontrer l'implication inverse. Le lecteur est invité à se référer à Föllmer et Schied (2002) (théorème 5) pour la preuve détaillée.

1.4 Inégalités

Jusqu'à maintenant, nous avons présenté plusieurs mesures de risque. Une entité souhaitant évaluer son exposition au risque a donc l'embarras du choix quant à la mesure qu'elle peut choisir, dépendamment de sa situation ou de sa tolérance au risque. Il est donc intéressant de savoir si une mesure est plus conservatrice qu'une autre. Dans cette section, nous comparerons quelques mesures présentées plus haut.

Proposition 1.4.1. *Soit* $\alpha \in (0,1)$.

$$VaR_{\alpha}(X) \leq TCE_{\alpha}(X) \leq WCE_{\alpha}(X) \leq ES_{\alpha}(X)$$

Démonstration.

1. Première inégalité

$$\begin{aligned} \mathrm{TCE}_{\alpha}(X) &= -\operatorname{E}[X|X \leq -\operatorname{VaR}_{\alpha}(X)] \\ &= \frac{-\operatorname{E}[X\mathbb{1}_{\{X \leq \operatorname{VaR}_{\alpha}(X)\}}]}{\operatorname{P}(X \leq -\operatorname{VaR}_{\alpha}(X))} \\ &\geq \frac{-\operatorname{E}[-\operatorname{VaR}_{\alpha}(X)\mathbb{1}_{\{X \leq \operatorname{VaR}_{\alpha}(X)\}}]}{\operatorname{P}(X \leq -\operatorname{VaR}_{\alpha}(X))} \\ &= \operatorname{VaR}_{\alpha}(X). \end{aligned}$$

2. Deuxième inégalité

— Si
$$P(X \le -VaR_{\alpha}(X)) > \alpha$$
.
Posons $A = \{X \le -VaR_{\alpha}(X)\}$. Par définition, $P(A) > \alpha$

$$TCE_{\alpha}(X) = -E[X|X \le -VaR_{\alpha}(X)]$$

$$= -E[X|A]$$

$$\le -\inf\{E[X|A]|P(A) > \alpha\}$$

$$= WCE_{\alpha}(X).$$

— Si
$$P(X \le -VaR_{\alpha}(X)) = \alpha$$
.

 $\forall \epsilon > 0$ on a que $P(X \leq -VaR_{\alpha}(X) + \epsilon) > \alpha$. Posons $A = \{X \leq -VaR_{\alpha}(X) + \epsilon\}$, alors $P(A) > \alpha$.

$$TCE(X) = \lim_{\epsilon \to 0} - \mathbb{E}[X|X \le -\operatorname{VaR}_{\alpha}(X) + \epsilon]$$
$$\le -\mathbb{E}[X|A]$$
$$\le -\inf \{\mathbb{E}[X|A]|\operatorname{P}(A) > \alpha\}$$
$$= \operatorname{WCE}_{\alpha}(X).$$

3. Troisième inégalité

Soit $A \in \mathcal{F}$ tel que $P(A) > \alpha$. En utilisant l'équation 1.2.2, nous obtenons ce qui suit.

$$\begin{aligned} \operatorname{ES}_{\alpha}(X) + \operatorname{E}[X|A] &= -\frac{1}{\alpha} \operatorname{E} \left[X \mathbb{1}_{\{X \leq x_{(\alpha)}\}}^{(\alpha)} \right] + \left(\operatorname{E}[X|A] \right) \\ &= -\operatorname{E} \left[X \left(\frac{1}{\alpha} \mathbb{1}_{\{X \leq x_{(\alpha)}\}}^{(\alpha)} - \frac{1}{\operatorname{P}(A)} \mathbb{1}_{\{X \in A\}} \right) \right] \\ &= \frac{1}{\alpha \operatorname{P}(A)} \operatorname{E} \left[X \left(\alpha \mathbb{1}_{\{X \in A\}} - \operatorname{P}(A) \mathbb{1}_{\{X \leq x_{(\alpha)}\}}^{(\alpha)} \right) \right] \\ &= \frac{1}{\alpha \operatorname{P}(A)} \left(x_{(\alpha)} \operatorname{E} \left[\alpha \mathbb{1}_{\{X \in A\}} - \operatorname{P}(A) \mathbb{1}_{\{X \leq x_{(\alpha)}\}}^{(\alpha)} \right] \right) \\ &+ \operatorname{E} \left[\left(X - x_{(\alpha)} \right) \left(\alpha \mathbb{1}_{\{X \in A\}} - \operatorname{P}(A) \mathbb{1}_{\{X \leq x_{(\alpha)}\}}^{(\alpha)} \right) \right] \right) \\ &= \frac{1}{\alpha \operatorname{P}(A)} \operatorname{E} \left[\left(X - x_{(\alpha)} \right) \left(\alpha \mathbb{1}_{\{X \in A\}} - \operatorname{P}(A) \mathbb{1}_{\{X \leq x_{(\alpha)}\}}^{(\alpha)} \right) \right] \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

car

$$\alpha \mathbb{1}_{\{X \in A\}} - P(A) \mathbb{1}_{\{X \le x_{(\alpha)}\}}^{(\alpha)} \begin{cases} \le 0 & \text{si } X < x_{(\alpha)} \\ \ge 0 & \text{si } X > x_{(\alpha)}. \end{cases}$$

Ainsi, $ES_{\alpha}(X) \geq WCE_{\alpha}(X)$.

Dans le cas où $x_{(\alpha)} = \operatorname{VaR}_{\alpha}(X)$, nous obtenons que $P(X \leq x_{(\alpha)}) = \alpha$. Alors,

$$\operatorname{ES}_{\alpha}(X) = -\frac{1}{\alpha} \left(\operatorname{E}[X \mathbb{1}_{\left\{X \leq x_{(\alpha)}\right\}}] + x_{(\alpha)} (\alpha - \operatorname{P}(X \leq x_{(\alpha)})) \right)$$

$$= -\frac{1}{\alpha} \operatorname{E}[X \mathbb{1}_{\left\{X \leq x_{(\alpha)}\right\}}]$$

$$= -\operatorname{E}[X | X \leq -\operatorname{VaR}_{\alpha}(X)]$$

$$= \operatorname{TCE}_{\alpha}(X)$$

Avec la proposition 1.4.1, nous pouvons conclure que $TCE_{\alpha}(X) = WCE_{\alpha}(X) = ES_{\alpha}(X)$.

Remarque 4. Une propriété voulue d'une mesure de risque est l'invariance en loi. Mathématiquement, nous pouvons l'exprimer ainsi : si $X \stackrel{\mathcal{L}}{=} Y$, alors $\rho(X) = \rho(Y)$. Les mesures que nous avons présentées dans ce chapitre sont toutes invariantes en loi.

Remarque 5. Dans le cadre de ce mémoire, nous avons présenté les résultats lorsque nous supposons que l'ensemble des états possibles Ω est fini. Les résultats peuvent également s'étendre à des espaces plus généraux. Pour plus de détails, le lecteur est invité à se référer à Delbaen (2002) et Föllmer et Schied (2002).

CHAPITRE II

MESURES DE RISQUE DYNAMIQUES

Dans le chapitre précédent, nous avons présenté des mesures de risque dans un cadre statique, soit pour une seule période de temps (0,T). Dans la réalité, les marchés sont dynamiques et de la nouvelle information est disponible avec le temps. Par exemple, prenons le cas où une institution considère un horizon d'un an. Elle calcule le risque de sa position au début de la période et s'assure d'avoir le capital nécessaire afin de faire face aux situations néfastes pour l'année au complet. Après un mois, elle constate que le risque a évolué de façon favorable. Le capital gardé est donc peut-être trop élevé par rapport à l'évolution du risque. Cette situation n'est pas souhaitable puisque ce montant pourrait être utilisé à d'autres fins. Dans ce chapitre, nous verrons donc comment quantifier le risque à différents points dans le temps. Nous adapterons les notions vues précédemment au cadre dynamique. Nous utiliserons l'approche définie par Riedel (2004).

Dans ce chapitre, au lieu de considérer seulement une seule période (0,T), nous nous intéresserons plutôt à $\mathcal{T} = \{0,\ldots,T\}$, une séquence de périodes de temps. De plus, posons $\mathcal{T}^- = \{0,\ldots,T-1\}$. Nous nous concentrerons sur les mesures dynamiques à temps discret. Comme dans le chapitre précédent, Ω représente l'ensemble des gains possibles et nous considérerons encore une fois que cet ensemble est fini. Soit $D_t: \Omega \to \mathbb{R}, t \in \mathcal{T}$ l'information connue au temps t

et $\mathcal{F}_t = \sigma(D_1, \dots, D_t)$, $t = 1, \dots, T$ et $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ la filtration associée. Soit $X = (X_0, \dots, X_T)$, un processus adapté à la filtration \mathcal{F}_t correspondant à un flux de trésorerie. En d'autres termes, X_t représente le gain associé à la position au temps t. Nous supposons que-tous-les-montants-sont actualisés. Finalement, notons \mathcal{G} l'ensemble des positions.

2.1 Mesures monétaires, convexes et cohérentes

Tout d'abord, il serait important de définir certaines propriétés de base que devrait avoir une mesure dynamique. Revenons à la définition d'une mesure monétaire. Évidemment, une mesure dynamique devrait également être monotone et invariante par translation. Il faudrait donc adapter la définition 1.1.1 afin de tenir compte du temps et de l'information connue.

Définition 2.1.1 (Mesure de risque dynamique). Une mesure de risque dynamique $\rho = (\rho_t)_{t \in \mathcal{T}^-}$ est formée d'applications $\rho_t : \mathcal{G} \times \Omega \to \mathbb{R}$ ayant les propriétés suivantes :

1. Indépendance du passé : Soient $X,Y \in \mathcal{G}$ et $t \in \mathcal{T}$ tels que $X(s,\omega) = Y(s,\omega) \ \forall s \geq t \ et \ \omega \in \Omega \ alors$

$$\rho_t(X,\omega) = \rho_t(Y,\omega).$$

- 2. $\forall t \in \mathcal{T}^-$ et $X \in \mathcal{G}$, $\rho_t(X,\cdot)$ est adapté à \mathcal{F}_t
- 3. Monotonicité : Soient $X,Y \in \mathcal{G}$ tels que $X \leq Y$ alors

$$\rho_t(X,\omega) \ge \rho_t(Y,\omega).$$

4. Invariance par translation : Soient $t \in \mathcal{T}^-$ et $X,Z \in \mathcal{G}$ tel que Z=

$$(0,\ldots,0,Z_t,\ldots,Z_T)$$
 et $\sum_{n=t}^T Z_n$ est \mathcal{F}_t – mesurable alors

$$\rho_t(X+Z,\omega) = \rho_t(X,\omega) - \sum_{n=t}^T Z_n(\omega).$$

Les gains passés sont déjà reçus et absorbés. Ils ne devraient donc pas influencer l'évaluation du risque futur. C'est pourquoi une mesure de risque dynamique doit être indépendante du passé. De plus, l'évaluation du risque doit se faire avec l'information disponible au moment où elle est faite. Une mesure dynamique est donc adaptée à la filtration. Les propriétés de monotonicité et d'invariance par translation sont similaires au cadre statique. Si une position est toujours plus risquée qu'une autre dans le futur, l'évaluation de son risque sera plus élevée. Finalement, si un flux de paiements futurs est connu d'avance, la mesure de risque devrait être réduite de la valeur totale actualisée de ces paiements.

Dans le chapitre précédent, nous avons vu les notions de mesures convexe et cohérente. Voyons maintenant comment adapter ces définitions au cadre dynamique.

Définition 2.1.2 (Mesure de risque convexe). Une mesure dynamique $\rho = (\rho_t)_{t \in \mathcal{T}^-}$ est dite convexe si $\forall X, Y \in \mathcal{G}; \lambda > 0; t \in \mathcal{T}^-$ et $\omega \in \Omega$, elle respecte l'axiome suivant :

1. Convexité:

$$\rho_t(\lambda X + (1 - \lambda Y), \omega) \le \lambda \rho_t(X, \omega) + (1 - \lambda)\rho_t(Y, \omega).$$

Définition 2.1.3 (Mesure de risque cohérente). Une mesure dynamique convexe $\rho = (\rho_t)_{t \in \mathcal{T}^-}$ est dite cohérente si $\forall X, Y \in \mathcal{G}$; $\lambda > 0$; $t \in \mathcal{T}^-$ et $\omega \in \Omega$, elle respecte l'axiome suivant :

1. Homogénéité positive :

$$\rho_t(\lambda X,\omega) = \lambda \rho_t(X,\omega).$$

Nous pouvons maintenant construire des mesures dynamiques.

Exemple 2.1.1 (Mesure de risque recalculée). Une première idée qui vient naturellement à l'esprit serait de recalculer une mesure de risque de façon statique à chaque début de période, tout en considérant l'évolution du risque de la position. C'est dans cette optique que Hardy et Wirch (2004) ont présenté la mesure recalculée.

Une mesure de risque recalculée $R_t(X)_{t\in\mathcal{T}^-}$ est un processus défini comme suit :

$$R_t(X) = \rho \left(\sum_{n=t}^T X_n \middle| \mathcal{F}_t \right)$$

où $\rho(X)$ est une mesure de risque monétaire.

Vérifions qu'il s'agit bien d'une mesure dynamique.

Soient $X, Y \in \mathcal{G}$ et $t \in \mathcal{T}^-$.

1. Indépendance du passé

Si
$$X_s = Y_s$$
 pour tout $s \ge t$, alors

$$R_t(X) = \rho\left(\sum_{n=t}^T X_n \middle| \mathcal{F}_t\right) = \rho\left(\sum_{n=t}^T Y_n \middle| \mathcal{F}_t\right) = R_t(Y).$$

- 2. $R_t(X)$ est adapté à \mathcal{F}_t
- 3. Monotonicité

Si
$$X \leq Y$$
, alors

$$\sum_{n=t}^{T} X_n \le \sum_{n=t}^{T} Y_n$$

et

$$R_t(X) = \rho\left(\left.\sum_{n=t}^T X_n\right| \mathcal{F}_t\right) \ge \rho\left(\left.\sum_{n=t}^T Y_n\right| \mathcal{F}_t\right) = R_t(Y)$$

car ρ est monotone.

4. Invariance par translation:

Soit
$$Z \in \mathcal{G}$$
 tel que $Z = (0, \dots, 0, Z_t, \dots, Z_T)$ et $\sum_{n=t}^T Z_n$ est \mathcal{F}_t mesurable.

$$R_t(X+Z) = \rho \left(\sum_{n=t}^T X_n + \sum_{n=t}^T Z_n \middle| \mathcal{F}_t \right)$$
$$= \rho \left(\sum_{n=t}^T X_n \middle| \mathcal{F}_t \right) - \sum_{n=t}^T Z_n$$
$$= R_t(X) - \sum_{n=t}^T Z_n$$

car ρ est invariant par translation.

Si la mesure de risque ρ est convexe ou cohérente, les propriétés de convexité et d'homogénéité positive, selon le cas, sont également conservées.

Voyons avec un exemple simple comment appliquer cette mesure. Supposons un modèle d'arbre binomial à deux pas (T=2) où $\Omega=\{UU,UD,DU,DD\}$. Prenons deux positions X et Y, définies sur Ω mais prenant des valeurs différentes, telles que représentées par la figure 2.1 et supposons que p=0.85. De plus, supposons que toutes les valeurs sont actualisées. Déterminons les valeurs de la mesure de risque recalculée lorsque $\rho(\cdot)=\mathrm{ES}_{\alpha}(\cdot)$, que nous noterons $\mathrm{RES}_{\mathrm{t}}^{\alpha}(\cdot)$.

Pour $\alpha = 0,10$, on obtient les valeurs présentées dans le tableau 2.1.

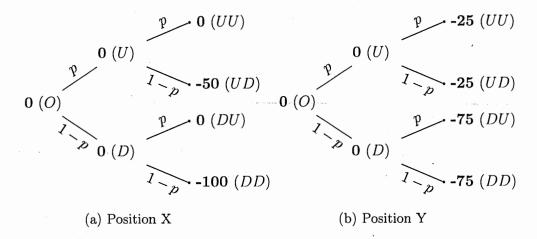


Figure 2.1: Arbres binomiaux représentant les valeurs actualisées (en unités monétaires) des positions X et Y (en gras) aux différents pas.

Noeud	$\operatorname{RES}^{\alpha}_{\mathrm{t}}(X)$	$\mathrm{RES}^{lpha}_{\mathbf{t}}(Y)$
O(t=0)	61,25	75
U(t=1)	50	25
D(t=1)	100	75

Tableau 2.1: Valeurs de l'expected shortfall recalculée aux temps t=0 et t=1 pour les positions X et Y.

Lorsque nous observons les valeurs de la mesure recalculée, nous pouvons voir qu'au temps t=0 l'évaluation du risque est plus élevée pour la position Y que pour la position X. Par contre, au temps t=1, la position Y est évaluée comme moins risquée que X, peu importe l'état des choses. Notre évaluation du risque dans le temps est donc contradictoire.

2.2 Conséquence temporelle (time consistency)

Dans le cadre dynamique, il est important d'éviter les contradictions lorsque nous évaluons le risque d'une position à différents moments dans le temps. Il est donc important de nous intéresser à la façon dont les différentes évaluations temporelles du risque sont inter-reliées. C'est pourquoi nous introduisons la notion de conséquence temporelle (traduction libre de *time consistency*). Dans le cadre des mesures de risque, cette propriété peut également être appelée *dynamic consistency*.

L'idée est que si l'on sait qu'une position est préférable à une autre à un point dans le futur, peu importe l'état des choses, alors elle doit également l'être au temps présent. Sinon, cela peut entraîner des décisions incohérentes. Comme il a été démontré plus haut, la mesure de risque recalculée ne respecte cette propriété.

Définition 2.2.1 (Time consistency). Une mesure de risque dynamique $\rho = (\rho_t)_{t \in \mathcal{T}^-}$ est dite time consistent si, pour tout $X, Y \in \mathcal{G}$ et $\omega \in \Omega$,

$$X_t = Y_t$$
 et $\rho_{t+1}(X,\omega) \le \rho_{t+1}(Y,\omega)$

impliquent que

$$\rho_t(X,\omega) \le \rho_t(Y,\omega).$$

Voyons maintenant comment construire une mesure ayant cette propriété.

Exemple 2.2.1 (Iterated risk measure). Afin de construire une mesure *time* consistent, il faut s'assurer que l'évaluation du risque est conséquente à chaque temps. Pour ce faire, nous pouvons utiliser l'itération à reculons et calculer la mesure de risque en se basant sur la valeur de celle-ci au temps suivant. Cette mesure a été appelée *iterated risk measure* par Hardy et Wirch (2004).

Nous pourrions exprimer cette idée comme suit :

$$\rho_t(X) = \rho_t \left(-\rho_{t+1} \left(\dots \left(-\rho_T \left(\sum_{n=t}^T X_n \middle| \mathcal{F}_t \right) \right) \dots \right) \right). \tag{2.1}$$

En utilisant l'invariance par translation, et l'équation 2.1, nous définissons la me-

sure de risque itérée, $I_t(X)_{t\in\mathcal{T}^-}$, qui est un processus défini comme suit :

$$I_t(X) = \rho(-I_{t+1}(X)|\mathcal{F}_t) - X_t$$

où $t=0,\ldots,T-1,\,\rho(X)$ est une mesure de risque monétaire et $I_T(X)=-X_T.$

Si ρ est une mesure de risque cohérente, alors $I_t(X)_{t\in\mathcal{T}}$ est une mesure de risque dynamique cohérente. Vérifions cette affirmation en utilisant l'induction à reculons.

Soient $X, Y \in \mathcal{G}$ et $t \in \mathcal{T}^-$.

Vérifions si les propriétés sont respectées lorsque t = T - 1.

1. Indépendance du passé

Si
$$X_T = Y_T$$
 alors $I_{T-1}(X) = \rho(X_T) = \rho(Y_T) = I_{T-1}(Y)$.

- 2. $I_{T-1}(X)$ est adapté à \mathcal{F}_{T-1} .
- 3. Monotonicité

Si $X \leq Y$ alors

$$I_{T-1}(X) = \rho(X_T | \mathcal{F}_{T-1}) - X_{T-1} \ge \rho(Y_T | \mathcal{F}_{T-1}) - Y_{T-1} = \rho_{T-1}(Y).$$

4. Invariance par translation

Soit
$$Z \in \mathcal{G}$$
 tel que $Z = (0, \dots, 0, Z_{T-1}, \dots, Z_T)$ et $\sum_{n=T-1}^T Z_n$ est \mathcal{F}_{T-1} -mesurable.

$$I_{T-1}(X+Z) = \rho(X_T + (0, \dots, 0, Z_T) | \mathcal{F}_{T-1}) - X_{T-1} - Z_{T-1}$$

$$= \rho(X_T | \mathcal{F}_{T-1}) - Z_T - X_{T-1} - Z_{T-1}$$

$$= I_{T-1}(X) - \sum_{n=T-1}^{T} Z_n.$$

5. Sous-additivité

$$I_{T-1}(X+Y) = \rho(X_T + Y_T | \mathcal{F}_{T-1}) - X_{T-1} - Y_{T-1}$$

$$\leq \rho(X_T | \mathcal{F}_{T-1}) + \rho(Y_T | \mathcal{F}_{T-1}) - X_{T-1} - Y_{T-1}$$

$$= I_{T-1}(X) + I_{T-1}(Y).$$

6. Homogénéité positive

Soit $\lambda > 0$

$$I_{T-1}(\lambda X) = \rho(\lambda X_T | \mathcal{F}_{T-1}) - \lambda X_{T-1}$$
$$= \lambda \rho(X_T | \mathcal{F}_{T-1}) - \lambda X_{T-1}$$
$$= \lambda I_{T-1}(X).$$

Supposons que $I_{t+1}(X)$ est une mesure dynamique cohérente. Montrons que cette affirmation est vraie aussi pour $I_t(X)$, $t \in \{0, \dots, T-2\}$.

1. Indépendance du passé

Si $X_s = Y_s$ pour tout $s \ge t$, alors

$$I_t(X) = \rho(-I_{t+1}(X)|\mathcal{F}_t) - X_t$$
$$= \rho(-I_{t+1}(Y)|\mathcal{F}_t) - Y_t$$
$$= I_t(Y).$$

- 2. $I_t(X)$ est adapté à \mathcal{F}_t
- 3. Monotonicité

Si $X \leq Y$, alors

$$I_t(X) = \rho(-I_{t+1}(X)|\mathcal{F}_t) - X_t$$

$$\geq \rho(-I_{t+1}(Y)|\mathcal{F}_t) - Y_t$$

$$= I_t(Y).$$

4. Invariance par translation:

Soit $Z \in \mathcal{G}$ tel que $Z = (0, \dots, 0, Z_t, \dots, Z_T)$ et $\sum_{n=t}^T Z_n$ est \mathcal{F}_t mesurable.

$$I_{t}(X+Z) = \rho(-I_{t+1}(X+(0,\ldots,0,Z_{t+1},\ldots,Z_{T}))|\mathcal{F}_{t}) - X_{t} - Z_{t}$$

$$\leq \rho \left(-I_{t+1}(X) + \sum_{n=t+1}^{T} Z_{n} \middle| \mathcal{F}_{t}\right) - X_{t} - Z_{t}$$

$$= \rho(-I_{t+1}(X)|\mathcal{F}_{t}) - \sum_{n=t}^{T} Z_{n} - X_{t}$$

$$= I_{t}(X) - \sum_{n=t}^{T} Z_{n}.$$

5. Sous-additivité

$$I_{t}(X + Y) = \rho(-I_{t+1}(X + Y)|\mathcal{F}_{t}) - X_{t} - Y_{t}$$

$$\leq \rho(-I_{t+1}(X) - I_{t+1}(Y)|\mathcal{F}_{t}) - X_{t} - Y_{t}$$

$$\leq \rho(-I_{t+1}(X)|\mathcal{F}_{t}) + \rho(-I_{t+1}(Y)|\mathcal{F}_{t}) - X_{t} - Y_{t}$$

$$= I_{t}(X) + I_{t}(Y).$$

6. Homogénéité positive

Soit $\lambda > 0$.

$$I_{t}(\lambda X) = \rho(-I_{t+1}(\lambda X)|\mathcal{F}_{t}) - \lambda X_{t}$$

$$= \rho(-\lambda I_{t+1}(X)|\mathcal{F}_{t}) - \lambda X_{t}$$

$$= \lambda \rho(-I_{t+1}(X)|\mathcal{F}_{t}) - \lambda X_{t}$$

$$= \lambda I_{t}(X).$$

Vérifions maintenant que cette mesure est time consistent.

Soient $X, Y \in \mathcal{G}$. Si $X_t = Y_t$ et $I_{t+1}(X) \leq I_{t+1}(Y)$, alors par monotonicité,

$$I_t(X) = \rho(-I_{t+1}(X)|\mathcal{F}_t) - X_t$$
$$= \rho(-I_{t+1}(X)|\mathcal{F}_t) - Y_t$$
$$\leq \rho(-I_{t+1}(Y)|\mathcal{F}_t) - Y_t = I_t(Y).$$

Voyons comment appliquer cette mesure à l'aide d'un exemple simple. Reprenons le contexte de la figure 2.1. Encore une fois, supposons que p=0.85 et que les valeurs sont actualisées. Déterminons les valeurs à chaque temps pour la mesure itérée lorsque $\rho(\cdot) = \mathrm{ES}_{\alpha}(\cdot)$. Nous noterons cette mesure $\mathrm{IES}_{\mathrm{t}}^{\alpha}(\cdot)$.

Prenons $\alpha = 0.10$. Lorsque t = 1, nous obtenons que

$$IES_1(X(\omega)) = \begin{cases} 50 & \omega \in \{UU, UD\} \\ 100 & \omega \in \{DU, DD\} \end{cases}.$$

Nous utilisons maintenant ces valeurs afin de calculer la mesure au temps t = 0. Ainsi, nous obtenons que $\text{IES}_0(X) = 100$.

Le tableau 2.2 présente les valeurs de l'expected shortfall itérée aux différents temps pour les positions X et Y.

Noeud	$\operatorname{IES^{lpha}_{t}}(X)$	$\mathrm{IES}^{\alpha}_{\mathrm{t}}(Y)$
O(t=0)	100	75
U(t=1)	50	25
D(t=1)	100	75

Tableau 2.2: Valeurs de l'expected shortfall itérée aux temps t=0 et t=1 pour les positions X et Y.

Nous observons que, contrairement à la mesure recalculée, la position Y est toujours préférable à la position X.

Exemple 2.2.2 (Scénarios généralisés). Comme dans le cadre statique, il est possible de générer des mesures de risques dynamiques cohérentes et ayant la propriété de *time consistency*.

Avant d'énoncer cette représentation, quelques définitions sont nécessaires.

Soit $\xi_t = (x_1, \dots, x_t)$ une séquence des t réalisations de X_s , $s = 1, \dots, t$ qu'on peut désigner comme l'historique jusqu'à t. L'ensemble de tous les historiques au temps t est dénoté $\mathcal{H}_t = range(X_1, \dots, X_t)$. $\Omega(\xi_t) := \{\omega \in \Omega : (X_1, \dots, X_t)(\omega) = \xi_t\}$ représente tous les chemins possibles après un certain historique ξ_t et $\Delta(\xi_t)$ est l'ensemble des mesures de probabilité sur $\Omega(\xi_t)$.

Définition 2.2.2 (Famille de mesures de probabilités conditionnelles). Si pour tout t = 0, ..., T-1 et $\xi_t \in \mathcal{H}_t$, $\mathcal{Q}^{\xi_t} \subset \Delta(\xi_t)$ est un ensemble fermé et convexe de mesures de probabilités, alors \mathcal{Q}^{ξ_t} est une famille de mesures de probabilités conditionnelles.

1. Posons $\xi_t \in \mathcal{H}_t$. Pour tout x_{t+1} tel que $(\xi_t, x_{t+1}) \in \mathcal{H}_{t+1}$, prenons une mesure $Q^{(\xi_t, x_{t+1})} \in \mathcal{Q}^{(\xi_t, x_{t+1})}$ et $R^{\xi_t} \in \mathcal{Q}^{\xi_t}$. Pour un ensemble $A \subset \Omega(\xi_t)$, la mesure composée $Q^{(\xi_t, X_{t+1})} R^{\xi_t} \in \Delta(\xi_t)$ est définie comme suit :

$$Q^{(\xi_t, X_{t+1})} R^{\xi_t}(A) := \sum_{x_{t+1}} Q^{(\xi_t, x_{t+1})} (A \cap \{X_{t+1} = x_{t+1}\}) R^{\xi_t} (X_{t+1} = x_{t+1}).$$

2. Une famille de mesures de probabilités conditionnelles Q^{ξ_t} est « consistent » si et seulement si

$$\mathcal{Q}^{\xi_t} = \mathcal{Q}^{(\xi_t, X_{t+1})} \mathcal{Q}^{\xi_t}$$

pour tout $\xi_t \in \mathcal{H}_t$ et $t = 0, \dots, T - 1$.

 Un ensemble de mesures de probabilité P ⊂ ∆ est « consistent » si et seulement si, pour tout t, la famille de mesures de probabilités conditionnelles induite (P^{ξt}) avec

$$\mathcal{P}^{\xi_t} = \{ P(\cdot | (X_1, \dots, X_t) = \xi_t) : P \in \mathcal{P}, P[(X_1, \dots, X_t) = \xi_t] > 0 \}$$

est « consistent ».

De cette définition, on peut déduire le lemme suivant.

Lemme 2.2.3. Un ensemble de mesures de probabilité $\mathcal{P} \subset \Delta$ est « consistent » si et seulement si, pour tout t et pour toute variable aléatoire $Z: \Omega \to \mathbb{R}$, la relation suivante est vraie

$$\min_{P \in \mathcal{P}} \mathbf{E}^P[Z|\mathcal{F}_t] = \min_{P \in \mathcal{P}} \mathbf{E}^P \left[\min_{Q \in \mathcal{P}} \mathbf{E}^Q[Z|\mathcal{F}_{t+1}] | \mathcal{F}_t \right].$$

Pour la preuve, le lecteur est invité à se référer à Riedel (2004), lemme 1.

Nous avons maintenant les définitions nécessaires afin de construire une mesure dynamique. Soit $\mathcal{P} \subset \Delta$ un ensemble de mesures de probabilités fermé, convexe, consistent et de plein support. Alors,

$$\rho_t(X) = \max_{P \in \mathcal{P}} E_P \left[-\sum_{s=t}^T X_s \middle| \mathcal{F}_t \right]$$

est une mesure de risque dynamique cohérente et time consistent.

1. Indépendance du passé

Si $X_s = Y_s$ pour tout $s \ge t$, alors

$$\rho_t(X) = \rho_t(X) = \max_{P \in \mathcal{P}} E^P \left[-\sum_{s=t}^T X_s \middle| \mathcal{F}_t \right]$$
$$= \rho_t(X) = \max_{P \in \mathcal{P}} E^P \left[-\sum_{s=t}^T Y_s \middle| \mathcal{F}_t \right]$$
$$= \rho_t(Y).$$

- 2. $\rho_t(X)$ est adapté à \mathcal{F}_t
- 3. Monotonicité

Prenons $X,Y \in \mathcal{G}$ tel que $X \leq Y$. Alors,

$$E^{P}\left[\sum_{s=t}^{T} X_{s} \middle| \mathcal{F}_{t}\right] \leq E^{P}\left[\sum_{s=t}^{T} Y_{s} \middle| \mathcal{F}_{t}\right]$$

$$\Rightarrow E^{P}\left[-\sum_{s=t}^{T} X_{s} \middle| \mathcal{F}_{t}\right] \geq E^{P}\left[-\sum_{s=t}^{T} Y_{s} \middle| \mathcal{F}_{t}\right]$$

$$\Rightarrow \max_{P \in \mathcal{P}} E^{P}\left[-\sum_{s=t}^{T} X_{s} \middle| \mathcal{F}_{t}\right] \geq \max_{P \in \mathcal{P}} E^{P}\left[-\sum_{s=t}^{T} Y_{s} \middle| \mathcal{F}_{t}\right]$$

$$\Rightarrow \rho_{t}(X) \geq \rho_{t}(Y).$$

4. Invariance par translation

Soit $Z \in \mathcal{G}$ tel que $Z = (0, \dots, 0, Z_t, \dots, Z_T)$ et $\sum_{n=t}^T Z_n$ est \mathcal{F}_t mesurable.

$$\rho_t(X+Z) = \max_{P \in \mathcal{P}} \mathbf{E}_P \left[-\sum_{s=t}^T X_s - \sum_{s=t}^T Z_s \middle| \mathcal{F}_t \right]$$
$$= \max_{P \in \mathcal{P}} \mathbf{E}_P \left[-\sum_{s=t}^T X_s \middle| \mathcal{F}_t \right] - \sum_{s=t}^T Z_s$$
$$= \rho_t(X) - \sum_{s=t}^T Z_s.$$

5. Sous-additivité

Soient $X,Y \in \mathcal{G}$

$$\rho_{t}(X+Y) = \max_{P \in \mathcal{P}} \mathbb{E}_{P} \left[-\sum_{s=t}^{T} X_{s} + Y_{s} \middle| \mathcal{F}_{t} \right]$$

$$= \max_{P \in \mathcal{P}} \mathbb{E}_{P} \left[-\sum_{s=t}^{T} X_{s} - \sum_{s=t}^{T} Y_{s} \middle| \mathcal{F}_{t} \right]$$

$$= \max_{P \in \mathcal{P}} \left(\mathbb{E}_{P} \left[-\sum_{s=t}^{T} X_{s} \middle| \mathcal{F}_{t} \right] + \mathbb{E}_{P} \left[-\sum_{s=t}^{T} Y_{s} \middle| \mathcal{F}_{t} \right] \right)$$

$$\leq \max_{P \in \mathcal{P}} \mathbb{E}_{P} \left[-\sum_{s=t}^{T} X_{s} \middle| \mathcal{F}_{t} \right] + \max_{P \in \mathcal{P}} \mathbb{E}_{P} \left[-\sum_{s=t}^{T} Y_{s} \middle| \mathcal{F}_{t} \right]$$

$$= \rho_{t}(X) + \rho_{t}(Y).$$

6. Homogénéité positive

Soit $\lambda > 0$

$$\rho_t(\lambda X) = \max_{P \in \mathcal{P}} \mathbb{E}_P \left[-\sum_{s=t}^T \lambda X_s \middle| \mathcal{F}_t \right]$$
$$= \lambda \max_{P \in \mathcal{P}} \mathbb{E}_P \left[-\sum_{s=t}^T X_s \middle| \mathcal{F}_t \right]$$
$$= \lambda \rho_t(X).$$

7. Time consistency

Soient $X,Y \in \mathcal{G}$ et posons (sans perte de généralité) l'hypothèse $X_t = Y_t =$

0. Supposons que $\rho_{t+1}(X,\omega) = \rho_{t+1}(Y,\omega) \ \forall \omega \in \Omega$. Alors,

$$\max_{Q \in \mathcal{P}} \mathbf{E}_{Q} \left[-\sum_{s=t+1}^{T} X_{s} \middle| \mathcal{F}_{t+1} \right] = \max_{Q \in \mathcal{P}} \mathbf{E}_{Q} \left[-\sum_{s=t+1}^{T} Y_{s} \middle| \mathcal{F}_{t+1} \right]$$

$$\Leftrightarrow \min_{Q \in \mathcal{P}} \mathbf{E}_{Q} \left[\sum_{s=t+1}^{T} X_{s} \middle| \mathcal{F}_{t+1} \right] = \min_{Q \in \mathcal{P}} \mathbf{E}_{Q} \left[\sum_{s=t+1}^{T} Y_{s} \middle| \mathcal{F}_{t+1} \right]$$

Comme $X_t = Y_t = 0$, alors

$$\min_{P \in \mathcal{P}} \mathbf{E}_{P} \left[\min_{Q \in \mathcal{P}} \mathbf{E}_{Q} \left[\sum_{s=t}^{T} X_{s} \middle| \mathcal{F}_{t+1} \right] \middle| \mathcal{F}_{t} \right]$$

$$= \min_{P \in \mathcal{P}} \mathbf{E}_{P} \left[\min_{Q \in \mathcal{P}} \mathbf{E}_{Q} \left[\sum_{s=t}^{T} Y_{s} \middle| \mathcal{F}_{t+1} \right] \middle| \mathcal{F}_{t} \right]$$

Comme \mathcal{P} est consistent, nous pouvons appliquer le lemme 2.2.3 et nous obtenons

$$\min_{P \in \mathcal{P}} \mathbf{E}_{P} \left[\sum_{s=t}^{T} X_{s} \middle| \mathcal{F}_{t} \right] = \min_{P \in \mathcal{P}} \mathbf{E}_{P} \left[\sum_{s=t}^{T} Y_{s} \middle| \mathcal{F}_{t} \right]$$
$$\Rightarrow \rho_{t}(X, \omega) = \rho_{t}(Y, \omega)$$

Remarque 1. Il est possible de démontrer que, pour toute mesure de risque dynamique cohérente et time consistent, il existe un tel ensemble \mathcal{P} . Pour la preuve, le lecteur peut se référer à Riedel (2004), théorème 1.

Remarque 2. Comme dans le chapitre précédent, nous avons supposé que Ω est fini. Il est possible de généraliser la théorie pour des ensembles plus généraux.

CHAPITRE III

ANALYSE COMPARATIVE DE PORTEFEUILLES

Dans les chapitres précédents, nous avons présenté différentes mesures de risque, tant dans le cadre statique que dans le cadre dynamique. Dans l'accord de Bâle III, signé en 2010, la recommandation est d'utiliser l'expected shortfall comme mesure de risque (plutôt que la value at risk) afin d'évaluer le capital nécessaire pour faire face à des situations défavorables. Dans ce chapitre, nous étudierons le comportement de l'exepcted shortfall calculée de façon dynamique pour différents portefeuilles. Nous nous intéresserons à l'impact des paramètres sur l'évaluation du risque.

3.1 Stratégies de placement

Nous allons d'abord expliquer les stratégies de placement que nous comparerons dans ce chapitre. Nous en avons sélectionné trois : buy-and-hold, constant-mix (ou fixed-weight) et mean-variance.

3.1.1 Notation

Considérons un marché comportant n+1 actifs, soit n risqués et un sans risque. Nous noterons (0,T) la période totale d'investissement. Nous nous intéresserons à une séquence de périodes $\mathcal{T} = \{0, \dots, T\}$ et nous supposerons qu'un rebalancement, selon le cas, sera fait à chaque début de période $t, t = 0, 1, \dots, T - 1$.

Notons x_t la richesse de l'investisseur au début de la période t, x_0 étant la richesse initiale. Le vecteur $\mathbf{e_t} = [s_t, e_{1,t}, \dots, e_{n,t}]^{\mathsf{T}}$ représente les facteurs de rendement pour la période t, $e_{i,t}$ étant le facteur de rendement aléatoire de l'actif i pour la période t et s_t le facteur de rendement de l'actif sans risque pour la période t. Nous supposons que chaque vecteur $\mathbf{e_t}$ est statistiquement indépendant et identiquement distribué. De plus, nous supposons que leurs espérances et covariances sont connues. $\mathbf{E}[e_i]$ est l'espérance de l'actif i et σ_{ij} la covariance entre les actifs i et j, $i,j=1,\ldots,n$.

Finalement, considérons $\mathbf{u}_t = [u_{1,t}, u_{2,t}, \dots, u_{n,t}]^{\mathsf{T}}$ le vecteur d'allocation de la richesse au début de la période t, $u_{i,t}$ étant le montant investi dans l'actif i à ce moment. Le montant investi dans l'actif 0 (l'actif sans risque) au début de la période t est tout simplement $x_t - \sum_{i=1}^n u_{i,t}$.

La richesse à chaque fin de période t s'obtient comme suit

$$x_{t+1} = s_t x_t + \mathbf{P_t}^{\mathsf{T}} \mathbf{u_t} \qquad t = 0, 1, \dots, T-1$$
 (3.1)

où
$$\mathbf{P_t} = [P_{1,t}, \dots, P_{n,t}]^{\mathsf{T}} = [(e_{1,t} - s_t), \dots, (e_{n,t} - s_t)]^{\mathsf{T}}.$$

3.1.2 Buy-and-hold

La méthode buy-and-hold, que nous pourrions traduire par « acheter et conserver » est une approche passive qui consiste, comme l'indique son nom, à acheter des actifs et à les conserver pour toute la période d'investissement, sans rebalancement. L'idée est que, sur le long terme, la valeur des actifs sur le marché augmente globalement. Selon les adeptes de cette stratégie, « time in the market is better

than timing in the market ». Ainsi, il est généralement plus avantageux pour un investisseur de conserver ses actifs longtemps (« time in the market ») que de tenter d'acheter à bas prix et de vendre à prix élevé (« timing in the market »). Un des avantages de cette méthode est qu'elle est moins coûteuse en frais de gestion comparativement à d'autres stratégies. Par contre, elle n'est pas nécessairement appropriée si l'on considère seulement une courte période d'investissement.

Un investisseur utilisant cette méthode doit donc choisir la répartition initiale de sa richesse. Posons $\boldsymbol{\beta_0} = [\beta_{1,0},\ldots,\beta_{n,0}]^{\top}$ le vecteur des poids attribués à chaque actif risqué au début de la période d'investissement. Le poids attribué à l'actif sans risque sera donc $1 - \sum_{i=1}^{n} \beta_i$. Ainsi, l'allocation initiale de la richesse s'exprime de la façon suivante $\boldsymbol{u_0} = x_0 \boldsymbol{\beta_0}$. Nous souhaitons déterminer $\boldsymbol{u_0}$ afin d'atteindre ϵ , la cible de richesse finale. Ce problème comporte plusieurs solutions. Nous avons choisi d'utiliser le vecteur $\boldsymbol{u_0}$ minimisant la variance de la richesse finale.

Nous pouvons exprimer la richesse finale d'un investisseur utilisant la stratégie buy-and-hold comme suit

$$x_T = x_0 \left[\sum_{i=1}^n \beta_{i,0} \left(\prod_{t=1}^T e_{i,t} \right) + \left(1 - \sum_{i=1}^n \beta_{i,0} \right) \prod_{t=0}^T s_t \right].$$
 (3.2)

En calculant les deux premiers moments de x_T , nous obtenons

$$E[x_T] = x_0 \left[\sum_{i=1}^n \beta_{i,0} E[e_i]^T + \left(1 - \sum_{i=1}^n \beta_{i,0} \right) s^T \right]$$
 (3.3)

et

$$\operatorname{Var}(x_{T}) = \operatorname{E}[x_{T}^{2}] - \operatorname{E}[x_{T}]^{2}$$

$$= x_{0}^{2} \left[\sum_{i,j=1}^{n} \beta_{i,0} u_{j,0} (\operatorname{E}[e_{i}] E[e_{j}] + \sigma_{ij})^{T} + \sum_{i=1}^{n} \beta_{i,0} \left(1 - \sum_{i=1}^{n} \beta_{i,0} \right) (\operatorname{E}[e_{i}] s)^{T} - \left(\sum_{i=1}^{n} \beta_{i,0} \operatorname{E}[e_{i}]^{T} + \left(1 - \sum_{i=1}^{n} \beta_{i,0} \right) s^{T} \right)^{2} \right].$$

$$(3.4)$$

En utilisant les équations 3.3 et 3.4, nous pouvons déterminer u_0 , l'allocation initiale de la richesse pour laquelle la variance de la richesse finale sera minimale.

L'annexe A.1.2 présente le code utilisé dans ce mémoire afin de calculer la richesse d'un investisseur utilisant la méthode buy-and-hold. Nous avons utilisé la fonction fmincon dans Matlab afin de trouver une solution numérique pour l'allocation initiale de la richesse (x_0) . Nous avons ensuite calculé la richesse à chaque temps avec l'équation 3.1.

3.1.3 Constant-mix

Le but de la méthode constant-mix consiste à maintenir constante la proportion investie dans chaque actif d'un portefeuille. Cette stratégie encourage un investisseur à acheter des actifs lorsque leur valeur baisse et à en vendre lorsqu'elle augmente. Il existe plusieurs façons de déterminer à quel moment le rebalancement doit être fait, par exemple à date fixe ou lorsque la proportion d'un actif s'éloigne trop de la cible établie.

Dans le cas présent, nous considérerons que le rebalancement sera fait à date fixe, soit à chaque début de période. L'avantage de la méthode à date fixe est qu'elle

est simple à appliquer. Par contre, elle ne tient pas compte de la volatilité des actifs entre les rebalancements.

Nous désignerons le vecteur des poids attribués à chaque actif risqué par $\boldsymbol{\beta} = [\beta_1, \dots, \beta_n]^{\mathsf{T}}$, le poids accordé à l'actif sans risque étant simplement $1 - \sum_{i=1}^n \beta_i$. Ainsi, l'allocation de la richesse au début de la période t est $\boldsymbol{u_t} = x_t \boldsymbol{\beta}$.

Dans le cas où un investisseur souhaiterait utiliser la méthode de constant-mix afin de faire fructifier sa richesse, il est nécessaire de déterminer un vecteur de poids β . Encore une fois, nous déterminerons le vecteur β permettant d'atteindre la cible d'espérance de richesse finale ϵ et pour lequel la variance de la richesse finale est minimale.

Sous cette stratégie de placement, le facteur de rendement global du portefeuille pour la période t, que nous noterons $e_{p,t}$ s'exprime comme suit

$$e_{p,t} = \beta_1 e_{1,t} + \dots + \beta_n e_{n,t} + (1 - \beta_1 - \dots - \beta_n) s_t$$

$$= s_t + \sum_{i=1}^n \beta_i (e_{i,t} - s_t)$$

$$= s_t + \sum_{i=1}^n \beta_i P_{i,t}$$
(3.5)

où β_i , $i=1,\ldots,n$ représente le poids de l'actif i.

Nous pouvons donc exprimer la richesse finale de la façon suivante

$$x_T = x_0 \prod_{t=1}^{T} \left(s_t + \sum_{i=1}^{n} \beta_i P_{i,t} \right).$$
 (3.6)

En calculant les deux premiers moments de x_T , nous obtenons

$$E[x_T] = x_0 \left(s + \sum_{i=1}^n \beta_i E[P_i] \right)^T$$
(3.7)

et

$$\operatorname{Var}(x_T) = \operatorname{E}[x_T^2] - \operatorname{E}[x_T]^2$$

$$= x_0^2 \left\{ \left(\sum_{i,j=1}^n \beta_i \beta_j \sigma_{ij} + \left[s + \sum_{i=1}^n \beta_i \operatorname{E}[P_i] \right]^2 \right)^T - \left(s + \sum_{i=1}^n \beta_i \operatorname{E}[P_i] \right)^{2T} \right\}.$$

$$(3.8)$$

Nous pouvons maintenant utiliser les équations 3.7 et 3.8 afin de trouver le vecteur β minimisant la variance de la richesse finale. Encore une fois, nous avons utilisé la fonction fmincon dans Matlab afin d'obtenir une solution numérique pour le vecteur des poids β . Avec ce β , nous avons ensuite calculé la richesse à chaque fin de période t, notée x_{t+1} . L'annexe A.1.3 présente le code utilisé.

3.1.4 Mean-variance

L'idée de la stratégie mean-variance (ou « moyenne-variance ») a d'abord été introduite par Markowitz dans les années 50. Elle consiste à déterminer, à chaque rebalancement, la répartition optimale de la richesse à chaque rebalancement, sans contrainte sur la façon de répartir celle-ci. En d'autres termes, il s'agit d'établir l'allocation permettant soit de maximiser l'espérance de la richesse finale en maintenant la variance sous un certain seuil, soit de minimiser la variance de la richesse finale en maintenant l'espérance au-dessus d'une cible établie. Nous étudierons le

deuxième cas. En d'autres termes, nous cherchons

$$\min \operatorname{Var}(x_T)$$
tel que $\operatorname{E}[x_T] \ge \epsilon$ (3.9)

où x_T est la valeur finale de la richesse.

Un investisseur utilisant la méthode *mean-variance* aura donc tendance à investir de façon plus risquée au début afin de pouvoir atteindre la cible fixée. En s'approchant de la cible, il sera amené à allouer une plus grande part du portefeuille à des actifs moins volatiles afin de réduire la variance.

Encore une fois, nous considérerons qu'un rebalancement est fait à chaque début de période. Afin de déterminer l'allocation optimale, nous utiliserons les résultats montrés par Li et Ng (2000).

Le problème 3.9 présenté plus haut peut être reformulé de la façon suivante.

$$\max \mathbf{E}[x_T] - w \operatorname{Var}(x_T)$$
tel que $x_{t+1} = s_t x_t + \mathbf{P_t}^{\mathsf{T}} \mathbf{u_t}$ $t = 0, 1, \dots, T-1$ (3.10)

où $w \ge 0$.

Malgré cela, le problème reste difficile à résoudre directement. Li et Ng (2000) ont démontré que l'ensemble des solutions du problème 3.10 est un sous-ensemble de l'ensemble des solutions du problème auxiliaire suivant (théorèmes 1 et 2) :

$$\max \mathbf{E}[-wx_T^2 + \lambda x_T]$$
tel que $x_{t+1} = s_t x_t + \mathbf{P_t}^\top \mathbf{u_t}$ $t = 0, 1, \dots, T-1$ (3.11)

En utilisant la programmation dynamique, il est possible de dériver analytiquement la solution du problème 3.11. En utilisant ce résultat, il est possible de démontrer que l'allocation optimale de la richesse, $\mathbf{u}_{\mathbf{t}}^*$ à chaque début de période t pour notre problème initial 3.9 est obtenue de la façon suivante

$$\mathbf{u}_{t}^{*} = -s_{t} \,\mathbf{E}^{-1}(\mathbf{P}_{t} \mathbf{P}_{t}^{\mathsf{T}}) \,\mathbf{E}(\mathbf{P}_{t}) x_{t} + \left[x_{0} \prod_{k=0}^{T-1} s_{k} + \frac{1}{2w^{*} \left(\prod_{k=0}^{T-1} (1 - B_{k}) \right)} \right] \left(\prod_{k=t+1}^{T-1} \frac{1}{s_{k}} \right) \mathbf{E}^{-1}(\mathbf{P}_{t} \mathbf{P}_{t}^{\mathsf{T}}) \,\mathbf{E}(\mathbf{P}_{t}) t = 0, 1, \dots, T - 2$$
(3.12)

$$\mathbf{u_{T-1}^{*}} = -s_{T-1} \,\mathbf{E}^{-1} (\mathbf{P_{T-1}} \mathbf{P_{T-1}^{\top}}) \,\mathbf{E}(\mathbf{P_{T-1}}) x_{T-1} + \left[x_{0} \prod_{k=0}^{T-1} s_{k} + \frac{1}{2w^{*} \left(\prod_{k=0}^{T-1} (1 - B_{k}) \right)} \right] \,\mathbf{E}^{-1} (\mathbf{P_{T-1}} \mathbf{P_{T-1}^{\top}}) \,\mathbf{E}(\mathbf{P_{T-1}})$$
(3.13)

οù

$$B_{t} = E(\mathbf{P_{t}}^{\top}) E^{-1}(\mathbf{P_{t}} \mathbf{P_{t}}^{\top}) E(\mathbf{P_{t}}); \text{ et}$$

$$w^{*} = \frac{1 - \prod_{t=0}^{T-1} (1 - B_{t})}{2 \left(\epsilon - x_{0} \prod_{t=0}^{T-1} s_{t}\right) \left(\prod_{t=0}^{T-1} (1 - B_{T})\right)}.$$

Nous pouvons donc déterminer l'allocation optimale de la richesse à chaque début de période en uitlisant les équation 3.12 et 3.13. Par la suite, nous pouvons calculer la richesse à la fin de la période t, dénotée x_{t+1} en utilisant l'équation 3.1. L'annexe A.1.4 contient la fonction Matlab utilisé afin de calculer la richesse à chaque fin

de période pour cette stratégie d'investissement.

Remarque 1. Dans les trois stratégies présentées, nous n'avons pas imposé de contraintes sur la façon d'allouer la richesse. Cela implique qu'un investisseur pourrait, par exemple, emprunter le double de son investissement initial, ce qui est assez peu réaliste. Il existe d'autres méthodes afin de déterminer une allocation de la richesse respectant des contraintes supplémentaires. Elles sont généralement plus complexes et nous avons choisi de ne pas les utiliser. Nous fixerons plutôt une cible de richesse raisonnable afin de pallier à ce problème.

3.2 Modèle

Nous avons choisi un portefeuille contenant deux actifs risqués et un actif sans risque. Nous supposons que les facteurs de rendement des actifs risqués sont distribués selon un modèle d'arbre binomial. À chaque pas, la valeur d'un actif peut soit augmenter ou diminuer. Nous supposons que chaque pas est indépendant. Pour chacun, nous avons choisi une valeur correspondant à un rendement positif, l'autre à un rendement négatif ainsi qu'une probabilité que le rendement soit positif.

Ce type de modèle est souvent utilisé dans la théorie car il est facile à comprendre et à programmer. Il a également l'avantage que nous pouvons calculer les valeurs des mesures de risque dynamiques de façon analytique.

Nous considérerons une période d'investissement d'un an. Au cours de cette période, un rebalancement (s'il y a lieu) sera fait à chaque trimestre, donc quatre fois au cours de l'année. La mesure de risque sera calculée à chaque rebalancement.

Le tableau 3.1 présente les valeurs possibles des facteurs de rendement pour les actifs de notre portefeuille fictif pour un trimestre. Notons que l'actif sans risque

a un facteur de rendement de 1. Nous supposons ainsi que toutes les valeurs sont actualisées.

	Actif risqué 1	Actif risqué 2	Actif sans risque
Valeur « up »	1,025	1,07	1,00
Probabilité « up »	0,8	0,65	n/a
Valeur « down »	0,98	0,96	n/a
Probabilité « down »	0,3	0,35	n/a

Tableau 3.1: Distributions marginales des facteurs de rendement du portefeuille fictif pour un trimestre.

Afin d'analyser l'impact de chacun des paramètres, nous nous baserons sur un modèle de référence. Le tableau 3.2 présente les paramètres de ce modèle.

Nous considérerons qu'un investisseur a une richesse initiale d'une unité monétaire et souhaite atteindre une richesse de 1,08 unités monétaires à la fin d'une année (donc quatre trimestres). Nous avons choisi une cible atteignable afin de situer le problème dans un cadre plus réaliste. Nous supposerons également que les deux actifs risqués sont non-corrélés. Nous utiliserons la stratégie passive buy-and-hold dans le modèle de base puisqu'il s'agit de la méthode la plus simple. Nous calculerons l'expected shortfall au niveau $\alpha=0,1$ de façon itérée puisque cette mesure est time consistent.

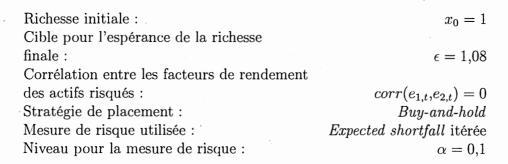


Tableau 3.2: Paramètres du modèle de référence.

3.3 Comparaison de portefeuilles

3.3.1 Scénarios étudiés

Le comportement d'une mesure de risque dynamique varie selon l'information connue. Ainsi, afin de pouvoir l'observer, nous avons choisi de représenter trois scénarios représentant des situations diverses. Nous avons sélectionné un scénario « optimiste », où, globalement, les valeurs des actifs risqués augmentent. Nous étudierons également un cas « pessimiste » où les valeurs des actifs ont diminué à la fin de la période d'investissement. Finalement, nous analyserons un scénario où les valeurs oscillent pour être finalement légèrement au-dessus de leur valeur initiale. Rappelons que la valeur de l'actif sans risque reste stable puisque nous avons assumé que tous les montants sont actualisés.

La figure 3.1 présente l'évolution du rendement par scénario pour chacun des actifs risqués.

Dans l'annexe A.1.1, nous montrons le code Matlab utilisé afin de calculer la richesse à chaque temps ainsi que les mesures de risque pour le modèle de base. Les fonctions utilisées afin de calculer l'expected shortfall itérée et reclaculée se trouvent dans les annexes A.1.5 et A.1.6 respectivement.

3.3.2 Choix de la stratégie de placement

L'exposition au risque peut varier selon la stratégie de placement choisie. À la section 3.1, nous en avons présenté trois, soit *buy-and-hold*, *constant-mix*, et *mean-variance*. Dans cette section, nous nous intéressons à l'impact du choix d'une de ces stratégies sur l'évaluation du risque.

La figure 3.2 présente les évaluations du risque à travers le temps. Pour chacun

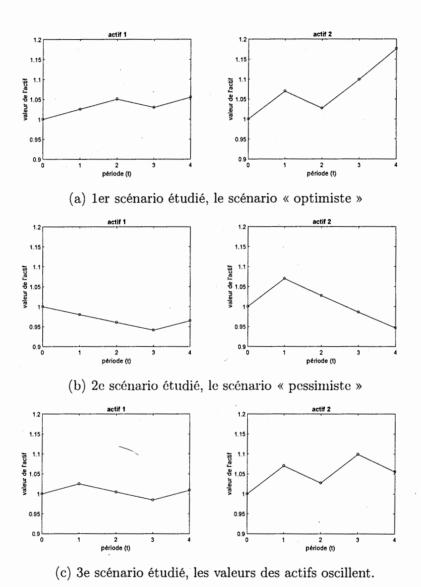


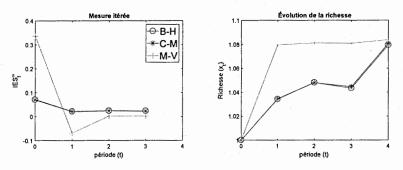
Figure 3.1: Évolution des valeurs pour les actifs risqués pour trois scénarios possibles.

des scénarios présentés plus haut, le graphique de gauche montre l'évolution de l'expected shorfall itérée et le graphique de droite, l'évolution de la richesse. Nous avons comparé les trois stratégies présentées précédemment.

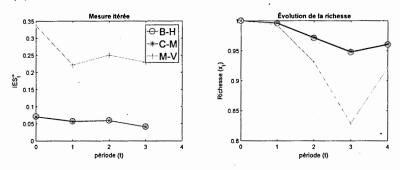
Tout d'abord, nous observons que pour les stratégies de buy-and-hold et constantmix, la richesse évolue de façon assez similaire. Cela peut s'expliquer entre autres par le fait que la répartition initiale obtenue pour la stratégie buy-and-hold et l'allocation des poids pour constant-mix sont très similaires. Comme la période étudiée est assez courte, la différence entre ces deux stratégies est minime. C'est pourquoi l'évaluation du risque est semblable pour les deux. Il serait possible de voir plus de différence si nous observions une très longue période.

De plus, nous pouvons observer que l'évaluation initiale du risque est plus élevée lorsqu'on utilise la stratégie mean-variance. Ceci est logique puisqu'un investisseur utilisant cette méthode aura tendance à prendre plus de risque au départ afin de s'assurer d'atteindre le seuil fixé. Notons que la stratégie mean-variance peut entraîner de plus grandes variations dans l'évaluation du risque car l'allocation de la richesse peut différer grandement d'une période à l'autre en fonction de l'écart qu'il reste à combler avec l'objectif final.

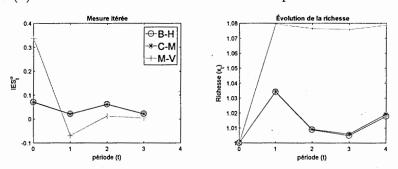
Pour les premier et troisième scénarios, la situation est favorable dès le début. Dans ces deux cas, la stratégie mean-variance engendre donc une richesse supérieure aux autres puisqu'elle utilise l'allocation « optimale » de la richesse à chaque période. Un investisseur optant pour cette stratégie aura donc obtenu un très bon rendement dès le début et diminuera la proportion de la richesse investie dans les actifs risqués afin de conserver les gains obtenus. Ainsi, bien qu'elle soit évaluée plus risquée au temps 0, elle est considérée comme moins risquée que les autres stratégies à partir du temps t=1. Notons que l'expected shortfall itérée est tout de même time consistent puisqu'au début de la première période, la position utilisant



(a) Évolution de la mesure et de la richesse pour le 1er scénario.



(b) Évolution de la mesure et de la richesse pour le 2e scénario.



(c) Évolution de la mesure et de la richesse pour le 3e scénario.

Figure 3.2: Impact de la stratégie de placement sur l'évolution de l'expected short-fall itérée

la stratégie *mean-variance* n'est pas considérée comme plus risquée que les deux autres pour tous les états possibles.

Par contre, dans un scénario « catastrophe » comme le second, l'investisseur utilisant cette stratégie aura tendance à s'exposer plus au risque afin d'augmenter le potentiel de rendement et ainsi rattraper les pertes subies. L'évaluation du risque demeure donc plus élevée pour la stratégie *mean-variance* que pour les deux autres.

3.3.3 Choix du type de mesure

Dans le chapitre II, nous avons présenté deux types de mesures dynamiques : la mesure de risque recalculée et itérée. Nous sommes intéressés à étudier l'impact du choix du type de mesure dynamique sur l'évaluation du risque.

La figure 3.3 montre l'évolution de l'expected shortfall recalculée et itérée pour le modèle de référence pour le troisième scénario ainsi que l'évolution de la richesse. Nous avons présenté seulement celui-ci afin d'éviter de la redondance car nous avons obtenu des résultats similaires pour les deux autres. Notons que le choix du type de mesure n'a pas d'impact sur l'évolution de la richesse puisque ce n'est pas un paramètre qui entre en ligne de compte dans pour déterminer l'allocation de la richesse, et ce, pour toutes les mesures présentées dans ce chapitre.

Évidemment, au temps T-1 les deux types de mesures sont égales puisque pour les deux méthodes, nous calculons l'expected shortfall de façon statique sur une seule période.

Nous pouvons remarquer que la mesure itérée est toujours plus élevée que la mesure recalculée. Cela correspond à l'intuition que nous avions. En effet, pour la mesure de type itérée, nous calculons la valeur de l'expected shorfall sur toutes

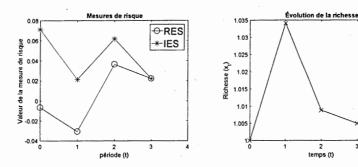


Figure 3.3: Évolution de la valeur de l'expected shortfall recalculée et itérée pour le troisième scénario.

les valeurs de l'expected shortfall au temps suivant. Il s'agit donc d'une mesure assez conservatrice (rappelons la proposition 1.4.1 du chapitre I) calculée sur des valeurs qui correspondent aussi à des mesures conservatrices.

Nous avons démontré dans le chapitre précédent que la mesure itérée est time consistent mais que ce n'est pas le cas pour la mesure recalculée et cela pourrait engendrer des décisions inconséquentes. Par contre, il est plus compliqué de calculer la mesure itérée. En effet, pour cette mesure, il faut spécifier les différentes évaluations du risque conditionnelles à l'information connue pour chaque pas dans le futur. De plus, la valeur ainsi obtenue n'est plus facilement interprétable comparativement à la mesure recalculée. En effet, celle-ci correspond simplement à l'expected shortfall, dans le cas présent, calculée de façon statique et représente donc l'espérance de la perte globale pour les $100\alpha\%$ pires scénarios à partir du temps t jusqu'à la fin de la période d'investissement.

3.3.4 Choix de α

Lorsque nous calculons une mesure, nous devons choisir α , le niveau de risque. Ce choix dépend entre autres de la tolérance au risque de l'investisseur. Nous voulons donc voir quel est l'impact de ce paramètre sur l'évaluation de l'exposition au

risque.

La figure 3.4 présente la variation de la valeur de l'expected shortfall itérée dans le modèle de base selon différentes valeurs de α pour le troisième scénario étudié.

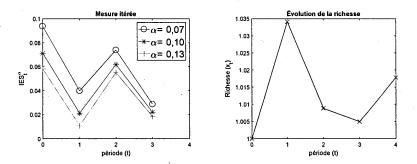


Figure 3.4: Impact du choix de α sur la valeur de l'expected shortfall itérée pour le troisième scénario.

Nous pouvons voir que α ne fait pas varier significativement la forme de la trajectoire de la mesure. Selon la valeur, elle est simplement translatée vers le haut ou vers le bas. Comme attendu, plus la valeur de α est élevée, plus la mesure est faible. Rappelons que l'expected shortfall peut être interprétée comme l'espérance de la perte pour les $100\alpha\%$ pires scénarios. Donc, en augmentant la valeur de α , nous considérons des scénarios où la perte est plus faible. L'inverse est également vrai.

Notons encore une fois que le choix de α n'a pas d'impact sur l'évolution de la richesse puisque ce paramètre n'influence pas le calcul de l'allocation de la richesse, et ce, pour toutes les mesures présentées dans ce chapitre.

Les conclusions étaient similaires pour les premier et deuxième scénarios.

3.3.5 Corrélation entre les actifs

Lorsque nous choisissons un portefeuille contenant plusieurs actifs, il est intéressant d'évaluer la corrélation entre ceux-ci. En effet, des actifs corrélés positivement auront tendance à évoluer de façon similaire. Cela peut entraîner plus de risque par rapport à des actifs non corrélés car l'effet de la diversification est diminué.

Lorsque la corrélation entre deux actifs est négative, si l'un a un rendement qui diminue dramatiquement, l'autre a plus de chances de mieux performer. Ainsi, le risque d'un scénario « catastrophe » est moins grand. Les chances d'un scénario optimiste sont moins grandes également. Par contre, comme la mesure de risque s'intéresse seulement aux « pires scénarios », nous devrions arriver à un risque plus faible que pour un portefeuille où les actifs sont indépendants.

La figure 3.5 montre l'impact de l'ajout de corrélation entre les facteurs de rendement des actifs risqués pour le troisième scénario.

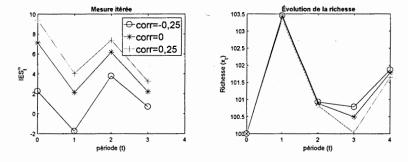


Figure 3.5: Impact de la corrélation entre les actifs sur la valeur de l'expected shortfall itérée pour le troisième scénario.

Tel qu'attendu, l'évaluation du risque est plus élevée lorsque la corrélation entre les actifs est positive et plus basse lorsque la corrélation est négative par rapport à un portefeuille où les actifs seraient non corrélés.

Encore une fois, nous avons représenté seulement le troisième scénario afin d'éviter

de la redondance.

3.3.6 Choix de ϵ

Le seuil d'espérance de rendement minimal est représenté par ϵ . Plus ce seuil est élevé, plus un investisseur devra prendre des risques afin d'augmenter le potentiel de rendement et atteindre ainsi la cible choisie. Intuitivement, nous pouvons donc penser qu'augmenter la valeur de ϵ devrait faire augmenter la valeur de la mesure de risque.

La figure 3.6 montre l'impact du choix du seuil minimal pour l'espérance de la richesse finale, ϵ sur l'*expected shortfall* itérée pour le troisième scénario, les résultats étant similaires pour les deux autres.

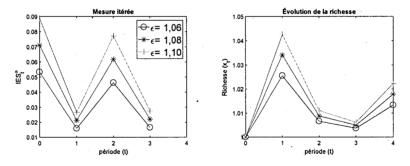


Figure 3.6: Impact du choix de ϵ sur la valeur de l'expected shortfall itérée pour le troisième scénario.

Conformément à notre intuition, la valeur de la mesure de risque augmente avec la valeur de ϵ . Dans ce cas également, le choix du seuil ϵ a peu d'impact sur la forme de la trajectoire de la mesure de risque.

Nous avons observé l'impact de divers paramètres sur l'évaluation du risque d'une position. Certains, comme le niveau de risque α , la corrélation entre les actifs ou la cible de richesse finale ϵ ont peu d'impact sur la façon dont l'évaluation

du risque évolue. Selon le cas, ils font augmenter ou diminuer l'exposition au risque. Par contre, le choix de la stratégie de placement a un effet marqué sur le comportement de la mesure de risque dans le temps. En effet, selon la stratégie choisie, l'exposition au risque peut varier à chaque rebalancement et ainsi modifier la valeur de la mesure de risque. Le choix du type de mesure a également une influence importante sur l'évaluation du risque. Bien que la mesure itérée soit time consistent, elle engendre une évaluation du risque plus conservatrice que la mesure recalculée. Cela pourrait inciter un investisseur à conserver plus de capital que nécessaire afin de faire face au risque. Ainsi, lors du choix des paramètres analysés dans ce chapitre, plusieurs facteurs sont à prendre en compte tels que la tolérance au risque, les ressources disponibles et la législation en vigueur. L'impact sur l'exposition au risque est également un facteur important à considérer.

CHAPITRE IV

ESTIMATION DES MESURES D'EXPECTED SHORTFALL DYNAMIQUES

Dans le chapitre précédent, nous avons étudié le comportement de l'expected short-fall calculée de façon dynamique. Nous avons supposé que la valeur des actifs risqués évoluait selon un modèle d'arbre binomial dont nous connaissions les paramètres et nous avons calculé les valeurs théoriques des mesures. Dans ce chapitre, nous nous intéressons plutôt à l'estimation de l'expected shortfall dynamique lors-qu'on soupçonne ce type de modèle. Nous souhaitons évaluer à quel point cette estimation est sensible à divers paramètres.

4.1 Données

Prenons le cas d'un portefeuille contenant deux actifs, un sans risque et un risqué. Nous supposons que nous avons récolté des données sur la valeur de l'actif à chaque trimestre, sur une période de 10 ans, soit 40 valeurs observées.

La valeur de l'actif risqué a été simulée selon un modèle d'arbre binomial en utilisant la méthode d'inversion. À chaque période, la valeur de l'actif peut soit augmenter avec une probabilité p ou diminuer avec une probabilité 1-p. Les paramètres indiqués dans le tableau 4.1 ont été utilisés afin de simuler les données. Notons que nous avons choisi un facteur de rendement de 1,00 pour l'actif sans risque, ce qui signifie que nous considérons que les valeurs sont toutes actualisées.

Richesse initiale:	$x_0 = 1$
Facteur de rendement de l'actif sans risque :	1,00
Valeur « up » pour l'actif risqué :	1,025
Probabilité « up » :	p = 0.8
Valeur « down » pour l'actif risqué :	0,98

Tableau 4.1: Paramètres utilisés pour simuler les données.

Nous supposerons qu'un investisseur détenant ce portefeuille souhaite mesurer son exposition au risque pour un investissement initial d'une unité monétaire. Afin de déterminer l'allocation de sa richesse, nous avons supposé que l'investisseur utilise la stratégie mean-variance avec un seuil $\epsilon=1,06$. Nous avons choisi de présenter cette stratégie car, après des analyses préliminaires, nous avons remarqué qu'elle engendrait des écarts d'estimation plus marqués par rapport à buy-and-hold et constant-mix. Le rebalancement est fait à chaque trimestre.

4.2 Estimation du paramètre p

Dans le cas présent, nous supposons que la valeur de l'actif risqué suit un modèle d'arbre binomial, elle a donc deux états possibles : elle augmente ou elle diminue. Nous posons également l'hypothèse que chaque pas est indépendant. La valeur de l'actif risqué à un certain temps est une chaîne de Markov à temps discret puisqu'elle dépend seulement de sa valeur au temps précédent. Notons que nous avons posé l'hypothèse que chaque pas est indépendant. Ainsi, nous pouvons estimer p, la probabilité de transition de n'importe quel état vers l'état « la valeur de l'actif augmente » et 1-p la probabilité de transition de n'importe quel état vers l'état « la valeur de l'actif diminue ». Sachant la matrice des états observés, l'estimateur du maximum de vraisemblance pour la probabilité de passer d'un état i à un état j, \hat{p}_{ij} est

$$\hat{p}_{ij} = \frac{n_{ij}}{\sum_{k=1}^{m} n_{ik}}$$

où n_{ij} est le nombre de transitions de l'état i vers l'état j observées.

Nous utiliserons la méthode du maximum de vraisemblance afin d'estimer p, la probabilité que la valeur de l'actif risqué augmente.

4.3 Résultats

Nous avons ciblé certains paramètres qui peuvent influencer l'estimation de l'expected shortfall dynamique. Tout d'abord, nous étudierons l'influence de l'estimation du paramètre p, la probabilité que la valeur de l'actif augmente. Ensuite, nous observerons comment le choix du niveau de risque α fait varier l'estimation de nos mesures. Finalement, nous évaluerons la sensibilité de nos estimations au choix de la période étudiée.

Le code Matlab est présenté dans l'annexe A.2. Afin de simuler la valeur du portefeuille, nous avons utilisé la méthode d'inversion. Nous avons ensuite estimé les mesures d'expected shortfall recalculée et itérée et nous les avons comparées avec leurs valeurs théoriques.

4.3.1 Sensibilité à l'estimation de p

Nous souhaitons d'abord évaluer à quel point l'estimation de l'expected shortfall dynamique est sensible à l'estimation du paramètre p, la probabilité que l'actif risqué augmente. Pour ce faire, nous avons utilisé les données des 10 années précédentes afin d'estimer p selon la méthode du maximum de vraisemblance. Nous avons répété l'expérience sur 10 ans. Ainsi, nous avons obtenu 10 répétitions de l'estimation de ce paramètre, tel que montré dans le tableau 4.2.

Pour chacune des valeurs de \hat{p} , nous avons estimé les mesures d'expected shortfall recalculée et itérée initiales pour une période d'investissement de quatre trimestres

Année			-							
\hat{p}	0.825	0.800	0.850	0.825	0.825	0.825	0.825	0.775	0.775	0.775

Tableau 4.2: Estimations de p.

\hat{p} Mesure	0.775	0.800	0.825	0.850
Recalculée	0.0118	0.0000	-0.0093	-0.0164
Itérée	-0.0173	0.0000	0.0207	0.0448

Tableau 4.3: Erreurs d'estimation de l'expected shortfall recalculée et itérée au niveau $\alpha = 0,10$ et au temps 0 pour les différentes valeurs de \hat{p} .

au niveau $\alpha = 0.10$. Le tableau 4.3 présente les erreurs d'estimation.

Rappelons qu'à chaque pas, la valeur de l'actif risqué a deux états possibles, soit elle augmente ou elle diminue. Conséquemment, la valeur globale du portefeuille a également ces deux états comme possibilités. La mesure itérée est calculée sur un seul pas, la mesure au début d'une période étant calculée à partir des valeurs possibles de la mesure au début de la période suivante. Ainsi, lorsque $\alpha < 1 - \hat{p}$, le quantile inférieur correspond à la valeur minimale et l'espérance en-deçà du quantile est tout simplement la valeur de celui-ci. L'erreur sur l'estimation de la mesure est donc due à la variation de la valeur de la richesse finale. En effet, la répartition du portefeuille à chaque période dépend de notre estimation de l'espérance de la valeur de l'actif risqué pour la période suivante, qui elle dépend de l'estimation de p. Dans le cas présent, pour toutes les valeurs de \hat{p} , $\alpha < 1 - \hat{p}$.

L'expected shortfall recalculée, quant à elle, correspond à la mesure calculée de façon statique à chaque début de période. Lorsque nous l'évaluons au temps 0, il faut considérer quatre périodes, soit 2⁴ états finaux possibles. L'erreur d'estimation est due à la variation de la valeur de la richesse finale et à l'estimation du quantile.

4.3.2 Sensibilité au choix de α

Nous souhaitons déterminer quelles valeurs de α entraînent une erreur d'estimation plus élevée. Toujours en utilisant les données des 10 années précédentes, nous avons estimé p et évalué le risque du portefeuille au temps 0 pour une période d'investissement de quatre trimestres, soit une année.

Le tableau 4.4 présente les erreurs d'estimation lorsque nous avons mesuré le risque à l'aide de l'expected shortfall recalculée pour plusieurs niveaux α .

\hat{p} α	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30
0.775	0.0225	0.0118	0.0082	0.0076	0.0070	0.0055
0.80	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.825	-0.0172	-0.0093	-0.0070	-0.0068	-0.0052	-0.0041
0.850	-0.0300	-0.0164	-0.0138	-0.0117	-0.0089	-0.0070

Tableau 4.4: Erreur d'estimation de l'expected shortfall recalculée pour différentes valeurs de \hat{p} et de α .

Nous remarquons que, pour toutes les valeurs de p, l'erreur d'estimation est plus importante lorsque $\alpha=0.05$. Cela est dû en partie au fait que l'erreur dans l'estimation du quantile est plus significative lorsque $\alpha=0.05$.

Nous avons répété l'exercice en mesurant le risque avec l'expected shortfall itérée. Le tableau 4.5 présente les erreurs d'estimation relatives pour plusieurs valeurs de α .

Dans ce cas, l'erreur d'estimation reste stable lorsque $\alpha < 1 - \hat{p}$. En effet, comme nous l'avons expliqué précédemment, la valeur de la mesure à un pas correspond au quantile d'ordre α . Ainsi, l'erreur est principalement due à la différence dans la répartition de la richesse. Au contraire, plus la valeur de α est élevée par rapport à \hat{p} , plus la valeur de l'expected shortfall pour un pas dépend de l'estimation de

\hat{p} α	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30
0.775	-0.0173	-0.0173	-0.0173	-0.0173	0.0746	0.0435
0.80	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.825	0.0207	0.0207	0.0207	-0.1225	-0.0611	-0.0351
0.850	0.0448	0.0448	0.0448	-0.2192	-0.1085	-0.0621

Tableau 4.5: Erreur d'estimation absolue de l'expected shortfall itérée pour différentes valeurs de \hat{p} et de α .

p. C'est pourquoi l'erreur d'estimation est plus importante dans ce cas.

4.3.3 Sensibilité à la période d'investissement étudiée

Nous nous sommes questionnés à savoir si la période d'investissement sur laquelle nous estimons les mesures a un impact sur l'erreur. Nous avons fixé $\alpha=0,10$. Nous avons estimé p à l'aide des données récoltées lors des 10 dernières années et avons obtenu $\hat{p}=0,825$. Nous avons fait varier la période d'investissement de un à huit trimestres et avons calculé l'expected shortfall recalculée et itérée au début de chaque période d'investissement. Le tableau 4.6 présente les erreurs d'estimation obtenues.

0.00.00	
-0.0049	-0.0049
-0.0114	-0.0020
-0.0117	0.0054
-0.0070	0.0207
-0.0052	0.0498
-0.0038	0.1028
-0.0026	0.1969
-0.0015	0.3615
	-0.0117 -0.0070 -0.0052 -0.0038 -0.0026

Tableau 4.6: Erreurs d'estimation de l'expected shortfall recalculée et itérée pour différentes périodes d'investissement avec $\alpha = 0.10$ et $\hat{p} = 0.825$.

Lorsque nous considérons seulement une période d'investissement, les deux mé-

thodes sont équivalentes à mesurer l'expected shortfall de façon statique. C'est pourquoi leur erreur d'estimation est la même.

Pour la mesure recalculée, nous remarquons que l'erreur augmente graduellement jusqu'à t=3 et diminue progressivement par la suite. Cela s'explique par le fait que lorsque nous considérons une très courte fenêtre, par exemple un seul trimestre, il y a peu d'erreur dans l'évaluation du quantile. L'erreur augmente donc avec la largeur de la fenêtre étudiée. À partir d'un certain point, lorsque le nombre de périodes devient plus élevé, le gain final a de plus en plus de valeurs possibles et l'erreur reliée à une mauvaise estimation du quantile diminue en importance.

Pour la mesure itérée, comme nous calculons toujours la mesure sur un seul pas, plus la période d'investissement étudiée est grande, plus l'erreur d'estimation gagne en importance. Cela peut s'expliquer par le fait que l'on reproduit une erreur à chaque itération.

Au cours de ce chapitre, nous avons pu constater que pour le modèle étudié, l'erreur d'estimation des mesures d'expected shortfall dynamiques est sensible à l'estimation de \hat{p} , au choix de α ainsi qu'à la période d'investissement. Comme le gain final est une variable aléatoire discrète ayant peu de valeurs possibles, surtout lorsque la période d'investissement est courte, l'erreur d'estimation de la mesure est sensible à une mauvaise estimation du quantile de niveau α .

•

CONCLUSION

Dans ce mémoire, nous avons abordé la théorie concernant les mesures de risque dynamique et nous avons étudié le comportement de l'expected shortfall évaluée de façon dynamique.

Dans le premier chapitre, nous avons présenté la théorie relativement aux mesures de risque monétaires statiques lorsque l'espace des variables aléatoires est fini. Nous avons d'abord défini une mesure de risque cohérente à l'aide de l'approche axiomatique de Artzner et al. (1999). Nous avons ensuite élargi cette définition pour des mesures convexes. Nous avons également présenté plusieurs exemples de mesures monétaires, convexes et cohérentes. De plus, nous avons donné une forme générale permettant de générer des mesures convexes et, dans un cas plus particulier, cohérentes.

Au chapitre II, nous avons adapté ces notions au cadre dynamique. Nous avons présenté une première mesure dynamique, la mesure recalculée. Nous avons remarqué que cette mesure n'était pas *time consistent*. Nous avons donc défini la mesure itérée, qui respecte cette propriété. Finalement, nous avons donné une forme générale permettant de générer des mesures dynamiques *time consistent*.

Par la suite, au chapitre III, nous avons comparé l'exposition au risque de différents portefeuilles, où les actifs risqués étaient modélisés par un arbre binomial, à l'aide de l'expected shortfall dynamique. Nous avons étudié l'impact de certains facteurs sur l'évaluation du risque comme le type de stratégie de placement, la corrélation entre les actifs composant le portefeuille ou le niveau de risque. Il s'agit d'un aspect important à considérer lorsque vient le temps de construire un portefeuille.

Finalement, au chapitre IV, nous avons étudié la sensibilité de l'estimation de l'expected shortfall dynamique pour un modèle d'arbre binomial. Nous avons remarqué que la mesure recalculée était beaucoup plus sensible à l'estimation du paramètre p que la mesure itérée.

Dans un projet futur, il serait intéressant de trouver un estimateur pour l'expected shortfall dynamque moins sensible à l'estimation de p. De plus, nous avons seulement étudié le cas où les variables aléatoires étaient modélisées selon un arbre binomial. L'exercice pourrait être refait pour d'autres types de variables aléatoires.

ANNEXE A

CODE MATLAB

A.1 Codes pour l'analyse comparative de portefeuilles

Dans le chapitre III, nous avons calculé les mesures d'expected shortfall itérée et recalculée. Nous présentons le code Matlab utilisé pour faire ces calculs.

A.1.1 Initialisation des paramètres pour le modèle de référence

Nous présenterons les paramètres du modèle de référence. Les fonctions utilisées afin de calculer la richesse et les mesures seront présentées dans les sections suivantes.

```
% Informations a entrer

% 4 etats possibles : 1=u1u2 ; 2=u1d2 ; 3=d1u2 ; 4=d1d2 (
    ui : valeur de

% l'actif i augmente; di : valeur de l'actif i dimunue)
cas = [1,4,3,2];%scenario pour lequel on veut calculer la
    mesure
n_act=2; %nombre d'actifs risques
```

```
T=4; % nombre de periodes etudiees
x0=1; % richesse initiale
epsilon = 1.08; %seuil minimal pour la valeur de E(x T)
s=1; %facteur d'interet
alpha=0.1; %niveau pour la mesure de risque
%1er actif
u1 = 1.025; %valeur "up"
d1=0.98; %valeur "down"
p1=0.8; %probabilite d'aller "up"
%2e actif
u2=1.07; %valeur "up"
d2=0.96; %valeur "down"
p2=0.65; %probabilite d'aller "up"
corr_12=0;% correlation entre les 2 actifs risques
% Calculs de parametres de base
% esperance et covariance des actifs
esp e1=u1*p1+d1*(1-p1);
var e1=p1*(1-p1)*(u1-d1)^2;
esp e2=u2*p2+d2*(1-p2);
var_e2=p2*(1-p2)*(u2-d2)^2;
```

```
esp e=[esp e1 esp e2]; %vecteur des esperances des
%actifs risques
cov_12= corr_12*sqrt(var_e1*var_e2);%covariance_entre
%les actifs risques
cov_e=[var_e1 cov_12; cov_12 var_e2]; %matrice de
   covariance
% Probabilite de chaque etat
p11=cov_12/((u1-d1)*(u2-d2))+p1*p2; \%etat 1
p10=p1-p11; %etat 2
p01=p2-p11; %etat 3
p00=1-p11-p10-p01; %etat 4
probs=[p11,p10,p01,p00]; %matrice des probabilites de
   passer
% chaque etat
etats = [u1, u1, d1, d1, u2, d2, u2, d2]; % valeurs des facteurs
%de rendement pour chaque etat
p_mat=etats-s; %matrice P_t
chem=unique(nchoosek(repmat([1,2,3,4], 1,T), T), 'rows');
%tous les chemins possibles (etats 1 a 4 pour T pas)
nb=length(chem); %nombre de chemins possibles
%probabilite pour chaque chemin
g = @(j) probs(chem(j,:));
prob=cell2mat(arrayfun(g, 1:nb, 'UniformOutput', false)');
```

```
\label{eq:calcular_control_control} % Calcul \ de \ l'expected \ shortfall \ itere \ et \ recalcule \ pour \ la \\ % methode \ buy-and-hold \\ [x_bh,z_bh,y_bh]=bh(x0,T,esp_e1,esp_e2,s,epsilon,var_e1,var_e2,\\ cov_12,etats,chem,nb,cas(i,:);\\ RES_bh(j,:)=recal_es(x_bh,z_bh,x0,T,prob,alpha,chem,cas);\\ IES_bh(j,:)=iter_es(x_bh,x0,T,prob,alpha,chem,nb,cas);\\ % Calcul \ de \ l'expected \ shortfall \ itere \ et \ recalcule \ pour \ la \\ % methode \ buy-and-hold \ [x_bh,z_bh,x_0,T,esp_e2,s,epsilon,var_e1,esp_e2,s,epsilon,var_e1,esp_e2,s,epsilon,var_e1,esp_e2,s,epsilon,var_e1,esp_e2,s,epsilon,var_e1,esp_e2,s,epsilon,var_e1,esp_e2,s,epsilon,var_e1,esp_e2,s,epsilon,var_e1,esp_e2,s,epsilon,var_e1,esp_e2,s,epsilon,var_e1,esp_e2,s,epsilon,var_e1,esp_e2,s,epsilon,var_e1,esp_e2,s,epsilon,var_e1,esp_e2,s,epsilon,var_e1,esp_e2,s,epsilon,var_e1,esp_e2,s,epsilon,var_e1,esp_e2,s,epsilon,var_e1,esp_e2,s,epsilon,var_e1,esp_e2,s,epsilon,var_e1,esp_e2,s,epsilon,var_e1,esp_e2,s,epsilon,var_e1,esp_e2,s,epsilon,var_e1,esp_e2,s,epsilon,var_e1,esp_e2,s,epsilon,var_e1,esp_e2,s,epsilon,var_e1,esp_e2,s,epsilon,var_e1,esp_e2,s,epsilon,var_e1,esp_e2,s,epsilon,var_e1,esp_e2,s,epsilon,var_e1,esp_e2,s,epsilon,var_e1,esp_e2,s,epsilon,var_e1,esp_e2,s,epsilon,var_e1,esp_e2,s,epsilon,var_e1,esp_e2,s,epsilon,var_e1,esp_e2,s,epsilon,var_e1,esp_e2,s,epsilon,var_e1,esp_e2,s,epsilon,var_e1,esp_e2,s,epsilon,var_e1,esp_e2,s,epsilon,var_e1,esp_e2,s,epsilon,var_e1,esp_e2,s,epsilon,var_e1,esp_e2,s,epsilon,var_e1,esp_e2,s,epsilon,var_e1,esp_e2,s,epsilon,var_e1,esp_e2,s,epsilon,var_e1,esp_e2,s,epsilon,var_e1,esp_e2,s,epsilon,var_e1,esp_e2,s,epsilon,var_e1,esp_e2,s,epsilon,var_e1,esp_e2,s,epsilon,var_e1,esp_e2,s,epsilon,var_e1,esp_e2,s,epsilon,var_e1,esp_e2,s,epsilon,var_e1,esp_e2,s,epsilon,var_e1,esp_e2,s,epsilon,var_e1,esp_e2,s,epsilon,var_e1,esp_e2,s,epsilon,var_e1,esp_e2,s,epsilon,var_e1,esp_e2,s,epsilon,var_e1,esp_e2,s,epsilon,var_e1,esp_e2,s,epsilon,var_e1,esp_e2,s,epsilon,var_e1,esp_e2,s,epsilon,var_e1,esp_e2,s,epsilon,var_e1,esp_e2,s,epsilon,var_e1,esp_e2,s,
```

A.1.2 Calcul de la richesse pour la méthode buy-and-hold

Ces fonctions permettent de calculer la richesse à chaque temps d'un investisseur utilisant la stratégie buy-and-hold. Nous déterminons d'abord l'allocation initiale de la richesse minimisant la variance en respectant la contrainte de l'espérance de la richesse finale due au choix de la stratégie buy-and-hold. Avec cette allocation, nous calculons ensuite la richesse de l'investisseur.

% Calcul de la repartition initiale

```
function [x,z,y]=bh(x0,T,esp\ e1,esp\ e2,s,epsilon,var\ e1,
   var e2, cov 12, etats, chem, nb, cas)
%
%variance de la richesse finale
f = @(b0) b0(1)*(esp e1^T-s^T)+b0(2)*(esp e2^T-s^T)+s^T;
g = @(b0) \times 0^2 * (b0(1)^2 * (esp e1^2 + var e1)^T + b0(2)^2 * (esp e2)
   ^2+var = 2)^T+(1-b0(1)-b0(2))^2*s^(2*T)+2*b0(1)*b0(2)*(
   esp e1*esp e2+cov 12) ^T+2*b0(1)*(1-b0(1)-b0(2))*(esp e1*
   s)^T+2*b0(2)*(1-b0(1)-b0(2))*(esp e2*s)^T-f(b0)^2;
%parametres
A = []; b = []; Aeq = []; beq = []; lb = []; ub = []; x0=x0; esp_e1=esp_e1;
esp e2=esp e2; s=s; epsilon=epsilon; T=T;
%vecteur de la repartition de la richesse initiale
b0 = (fmincon(g, [0.5, 0.5], A, b, Aeq, beq, lb, ub, @(b0))
   constraint bh(b0,x0,esp e1,esp e2,s,epsilon,T)));
% Calcul de la richesse a chaque temps
sprod=ones(1,T)*s;
 f = @(j) x0*(sum(b0.*cumprod(etats(:,chem(j,:)),2),1)+(1-
    sum(b0))*cumprod(sprod));
%vecteur des richesses pour tous les chemins possibles
x=cell2mat(arrayfun(f, 1:nb, 'UniformOutput', false)');
%richesse pour le scenario etudie
```

A.1.3 Calcul de la richesse pour la méthode *constant-mix*

Nous répétons l'exercice pour un investisseur utilisant la stratégie constant-mix.

```
g = @(beta) x0^2*((beta(1)^2*var e1+beta(2)^2*var_e2+2*beta)
   (1)*beta(2)*cov 12+f(beta)^2)^T-f(beta)^(2*T);
%parametres
A = []; b = []; Aeq = []; beq = []; lb = []; ub = []; x0=x0; esp_e1=esp_e1;
esp_e2=esp_e2; s=s; epsilon=epsilon; T=T;
%vecteur des poids a mettre dans chaque actif
beta = (fmincon(g, [0.5, 0.5], A, b, Aeq, beq, lb, ub, @(beta))
   constraint_cm(beta, x0, esp_e1, esp_e2, s, epsilon, T)))';
% Calcul de la richesse a chaque temps
f = @(j) x0*cumprod(s+beta'*p_mat(:,chem(j,:)));
%vecteur des richesses pour tous les chemins possibles
x=cell2mat(arrayfun(f, 1:nb, 'UniformOutput', false)');
%richesse pour le scenario etudie
C = intersect (chem, cas, 'rows');
ind= find (ismember (chem, C, 'rows'));
z = [x0, x(ind,:)];
y = [0, cell2mat(arrayfun(@(i) z(:, i+1)-z(:, i), 1:T, ')]
   UniformOutput', false))]; %gain a chaque temps
end
```

A.1.4 Calcul de la richesse pour la méthode mean-variance

Cette fonction calcule la richesse d'un investisseur utilisant la stratégie meanvariance.

 $\label{eq:function} \begin{array}{ll} \text{function} & [\,x\,,z\,\,,y\,] = mv(\,x0\,\,,T\,,s\,\,,\,\text{epsilon}\,\,,\,\text{esp_e}\,,\,\text{cov_e}\,,\,\text{etats}\,\,,\text{chem}\,,\\ & \text{nb}\,,\,\text{cas}\,) \end{array}$

%_____

% Calcul de l'allocation de la richesse a chaque temps

$$\begin{split} & \exp_{P} = \exp_{e-s}; \; \% esperance \;\; de \;\; P_t \\ & \exp_{P} + \exp_{P} + \exp_{P} ; \% esperance \;\; de \;\; P_t * (P_t) \; ; \end{split}$$

 $B=esp_P'*inv(esp_PPt)*esp_P;$

% valeur de w*
w=(1-(1-B)^T)/(2*(epsilon-(s^T*x0))*(1-B)^T);

%on exprime le montant investi dans chaque actif comme $\%u_t=-K_t*x_t+v_t$

K=s*inv(esp_PPt)*esp_P;

$$\begin{split} v = & \text{cell2mat} \, (\, \text{arrayfun} \, (@(\,i\,) \, \ ((\,s\,^*T*x0\,) + (2*w*(1-B)\,^*T)\,^* - 1) * (\,s\,) \\ & \hat{} - (T-i\,) \, . \, z * \textbf{inv} \, (\,\text{esp_PPt}\,) * \text{esp_P} \, , \quad 1 : T , \quad 'UniformOutput' \, , \\ & \text{false} \,) \,) \, ; \end{split}$$

/6

% Calcul de la richesse a chaque temps

 $\%vecteur\ des\ richesses\ pour\ tous\ les\ chemins\ possibles$

```
x = [ones(nb,1)*x0, zeros(nb,T)];
for j=1:nb
    for i=1:T
        P t=etats(:,chem(j,i))-s;
        u = K*x(j,i)+v(:,i);
        x(j, i+1)=x(j, i)*s+P t'*u t;
    end
end
%richesse pour le scenario etudie
C = intersect (chem, cas, 'rows');
ind= find (ismember (chem, C, 'rows'));
z=x(ind,:);
x=x(:,2:end); %vecteur des richesses a chaque temps pour
   tous
%les scenarios, on l'exprime comme pour b-h et c-m
y = [0, cell2mat(arrayfun(@(i) z(:, i+1)-z(:, i), 1:T, '
   UniformOutput', false)); %gain a chaque temps
end
```

A.1.5 Calcul de l'expected shortfall itérée

Cette fonction calcule la mesure d'expected shortfall itérée à chaque temps pour une richesse et un scénario donnés.

```
function IES=iter_es(x,x0,T,prob,alpha,chem,nb,cas)
IES=zeros(1,T);
%
Pour les temps t=1 a T-1
```

```
yy = \{x(:,1) - x0, cell2 mat(arrayfun(@(i) x(:,i+1) - x(:,i),1:T)\}
   -1, 'UniformOutput', false)); %gains
IES_neg=[zeros(nb,T),yy(:,T)]; \%-1*IES pour tous les
%scenarios possibles
for i=T-1:-1:1
    for j=1:nb
        C = intersect(chem(:, 1:i), chem(j, 1:i), 'rows');
         ind= find (ismember (chem (:, 1:i), C, 'rows'));
         if j = \min(ind);
        y=unique (sortrows ([IES_neg(ind, i+2), prob(ind, i+1)
            ],1), 'rows');
        y(:,3) = cumsum(y(:,2));
        %ligne ou se trouve le quantile alpha
        a = find(y(:,3) > = alpha,1);
        quant=y(a,1);
        IES_neg(j, i+1)=1/alpha*(sum(y(1:a,1).*y(1:a,2))+
            quant*(alpha-y(a,3))+yy(j,i);
         else IES_{neg}(j, i+1)=IES_{neg}(min(ind), i+1);
        end
    end
end
%
% Pour t=0
y=unique(sortrows([IES_neg(:,2),prob(:,1)],1),'rows');
y(:,3) = cumsum(y(:,2));
a=find(y(:,3))=alpha,1); %ligne ou se trouve le quantile
   alpha
```

A.1.6 Calcul de l'expected shortfall recalculée

Cette fonction calcule la mesure d'expected shortfall recalculée à chaque temps pour une richesse et un scénario donnés.

```
% Pour les temps t=1 a T-1
for i=1:T-1
C = intersect(chem(:,1:i), cas(1:i), 'rows');
ind= find (ismember (chem (:, 1:i), C, 'rows'));
y=round(sortrows([x(ind,T)-z(i),prod(prob(ind,i+1:T),2)
   |,1),10);
y(:,3)=cumsum(y(:,2)); %gains pour chaque scenario
%et probabilite accociee
a=find(y(:,3))=alpha,1); %ligne ou se trouve le quantile
   alpha
quant=y(a,1);
a=sum(y(:,1) <= quant);
RES(i+1)=-1/alpha*(sum(y(1:a,1).*y(1:a,2))+quant*(alpha-y(
   a,3)));
end
end
```

A.2 Codes pour l'estimation des mesures d'expected shortfall dynamiques

Au chapitre IV, nous avons estimé les mesures d'expected shortfall itérée et recalculée. Nous présentons le code Matlab utilisé pour obtenir nos résultats.

A.2.1 Paramètres utilisés dans la simulation des données

Nous présenterons les paramètres du modèle de référence. Les prix ont été simulés par la méthode d'inversion.

```
% Informations a entrer
rng (123456)
n1=10; %nombre d'annees passees observees
n2=10; %nombre d'annees futures ou on estime la mesure
n=n1+n2;
T=4; % nombre de periodes etudiees
x0=1; % richesse initiale
alpha=0.1; %niveau pour la mesure de risque
t=4; % nombre de periodes estimees
s=1.00; %facteur de rendement de l'actif sans risque
epsilon = 1.06; %cible de richesse finale (pour 4 periodes)
%1er actif
u1=1.025; %valeur "up"
d1=0.98; %valeur "down"
p1=0.8; %probabilite d'aller "up"
%Simuation des prix
%methode d'inversion
U=rand(1,n*T);
success=reshape(U \le p1, [n,T]);
e=ones(n,T)*d1;
e(success)=u1;
%Calcul des mesures
```

```
[phat, RESth, RESth, IESth, IESth, IESthat] = calcul (x0, n1, n2, T, alpha, t
   u1, d1, p1, s, epsilon, success)
%Erreurs d'estimation
RESmat abs=(REShat-RESth);
IESmat abs=(IEShat-IESth);
A.2.2
        Calcul des mesures théoriques et estimées
Cette fonction calcule \hat{p} ainsi que les valeurs théoriques et estimées des mesures
d'expected shortfall reclaculée et itérée.
%Fonction pour calculer les estimations de p ainsi que les
    mesures
%d'expected shortfall recalculee et iteree theoriques et
   estimees.
function [phat, RESth, RESth, IESth, IESth] = calcul(x0, n1, n2,
   T, alpha, t, u1, d1, p1, s, epsilon, success)
eps=epsilon^(t/T);%cible de richesse finale
n=n1+n2; %nombre total d'observations
xini=x0;
% Tous les chemins possibles pour t periodes
chem=unique(nchoosek(repmat([0,1], 1,t), 'rows');
nb=length (chem);
ee=ones(nb,t)*d1;
ee (chem == 1) = u1;
```

```
RESth=zeros(n2,1);
IESth=zeros(n2,1);
REShat=zeros(n2,1);
IEShat=zeros(n2,1);
phat=zeros(n2,1);
%probabilites theoriques pour chaque scenario
pth=chem*p1;
pth (chem = = 0) = 1 - p1;
% Valeur theorique
%---
%Richesse methode de moyenne-variance
esp e=u1*p1+d1*(1-p1);
var = p1*(1-p1)*(u1-d1)^2;
esp P=esp e-s;
esp_PPt=var_e+esp_P*esp_P';
B=esp P'*inv(esp PPt)*esp P;
% valeur de w*
w=(1-(1-B)^t)/(2*(epsilon - (s^t*xini))*(1-B)^t);
%on exprime le montant investi dans chaque actif comme
\%u t=-K t*x t+v t
K=s*inv(esp_PPt)*esp_P;
```

```
v = cell2mat(arrayfun(@(i) ((s^t*xini)+(2*w*(1-B)^t)^-1)*(s))
                   -(t-i).*inv(esp_PPt)*esp_P, 1:t, 'UniformOutput', false
                .));
 xth = [xini*ones(nb,1), zeros(nb,t)];
 for k=1:nb
                            for j=1:t
                                                      P_t = ee(k, j) - s;
                                                      u_t=-K*xth(k,j)+v(:,j);
                                                       xth(k, j+1)=xth(k, j)*s+P_t'*u_t;
                           end
end
%Expected shortfall recalculee
y=round(sortrows([xth(:,t+1)-xini,prod(pth,2)],1),10);
 y(:,3) = cumsum(y(:,2));
 a=find (y(:,3)>=alpha,1); % ligne ou se trouve
%le quantile alpha
 quant=y(a,1);
 a=sum(y(:,1) \le quant);
RESth = -1/alpha * (sum(y(1:a,1).*y(1:a,2)) + quant * (alpha - y(a)) 
                     ,3)));
\%RES theorique a t=0
%Expected shortfall iteree
yy = [xth(:,1)-xini, cell2mat(arrayfun(@(i) xth(:,i+1)-xth(:,i+1)-xth(:,i+1)-xth(:,i+1)-xth(:,i+1)-xth(:,i+1)-xth(:,i+1)-xth(:,i+1)-xth(:,i+1)-xth(:,i+1)-xth(:,i+1)-xth(:,i+1)-xth(:,i+1)-xth(:,i+1)-xth(:,i+1)-xth(:,i+1)-xth(:,i+1)-xth(:,i+1)-xth(:,i+1)-xth(:,i+1)-xth(:,i+1)-xth(:,i+1)-xth(:,i+1)-xth(:,i+1)-xth(:,i+1)-xth(:,i+1)-xth(:,i+1)-xth(:,i+1)-xth(:,i+1)-xth(:,i+1)-xth(:,i+1)-xth(:,i+1)-xth(:,i+1)-xth(:,i+1)-xth(:,i+1)-xth(:,i+1)-xth(:,i+1)-xth(:,i+1)-xth(:,i+1)-xth(:,i+1)-xth(:,i+1)-xth(:,i+1)-xth(:,i+1)-xth(:,i+1)-xth(:,i+1)-xth(:,i+1)-xth(:,i+1)-xth(:,i+1)-xth(:,i+1)-xth(:,i+1)-xth(:,i+1)-xth(:,i+1)-xth(:,i+1)-xth(:,i+1)-xth(:,i+1)-xth(:,i+1)-xth(:,i+1)-xth(:,i+1)-xth(:,i+1)-xth(:,i+1)-xth(:,i+1)-xth(:,i+1)-xth(:,i+1)-xth(:,i+1)-xth(:,i+1)-xth(:,i+1)-xth(:,i+1)-xth(:,i+1)-xth(:,i+1)-xth(:,i+1)-xth(:,i+1)-xth(:,i+1)-xth(:,i+1)-xth(:,i+1)-xth(:,i+1)-xth(:,i+1)-xth(:,i+1)-xth(:,i+1)-xth(:,i+1)-xth(:,i+1)-xth(:,i+1)-xth(:,i+1)-xth(:,i+1)-xth(:,i+1)-xth(:,i+1)-xth(:,i+1)-xth(:,i+1)-xth(:,i+1)-xth(:,i+1)-xth(:,i+1)-xth(:,i+1)-xth(:,i+1)-xth(:,i+1)-xth(:,i+1)-xth(:,i+1)-xth(:,i+1)-xth(:,i+1)-xth(:,i+1)-xth(:,i+1)-xth(:,i+1)-xth(:,i+1)-xth(:,i+1)-xth(:,i+1)-xth(:,i+1)-xth(:,i+1)-xth(:,i+1)-xth(:,i+1)-xth(:,i+1)-xth(:,i+1)-xth(:,i+1)-xth(:,i+1)-xth(:,i+1)-xth(:,i+1)-xth(:,i+1)-xth(:,i+1)-xth(:,i+1)-xth(:,i+1)-xth(:,i+1)-xth(:,i+1)-xth(:,i+1)-xth(:,i+1)-xth(:,i+1)-xth(:,i+1)-xth(:,i+1)-xth(:,i+1)-xth(:,i+1)-xth(:,i+1)-xth(:,i+1)-xth(:,i+1)-xth(:,i+1)-xth(:,i+1)-xth(:,i+1)-xth(:,i+1)-xth(:,i+1)-xth(:,i+1)-xth(:,i+1)-xth(:,i+1)-xth(:,i+1)-xth(:,i+1)-xth(:,i+1)-xth(:,i+1)-xth(:,i+1)-xth(:,i+1)-xth(:,i+1)-xth(:,i+1)-xth(:,i+1)-xth(:,i+1)-xth(:,i+1)-xth(:,i+1)-xth(:,i+1)-xth(:,i+1)-xth(:,i+1)-xth(:,i+1)-xth(:,i+1)-xth(:,i+1)-xth(:,i+1)-xth(:,i+1)-xth(:,i+1)-xth(:,i+1)-xth(:,i+1)-xth(:,i+1)-xth(:,i+1)-xth(:,i+1)-xth(:,i+1)-xth(:,i+1)-xth(:,i+1)-xth(:,i+1)-xth(:,i+1)-xth(:,i+1)-xth(:,i+1)-xth(:,i+1)-xth(:,i+1)-xth(:,i+1)-xtth(:,i+1)-xtth(:,i+1)-xtth(:,i+1)-xtth(:,i+1)-xtth(:,i+1)-xtth(:,i+1)-xtth(:,i+1)-xtth(:,i+1)-x
                     i),1:t, 'UniformOutput', false))]; %gains
IES_neg=[zeros(nb,t),yy(:,t+1)];
```

```
for k=t-1:-1:0
    for j=1:nb
       C = intersect(chem(:,1:k),chem(j,1:k),'rows');
        ind= find (ismember (chem (:, 1:k), C, 'rows'));
        if j = \min(ind);
        z=unique(sortrows([IES_neg(ind,k+2),pth(ind,k+1)
          ],1), 'rows');
        z(:,3) = cumsum(z(:,2));
       a=find(z(:,3))=alpha,1); %ligne ou se trouve
       %le quantile alpha
        quant=z(a,1);
        IES neg(j, k+1)=1/alpha*(sum(z(1:a,1).*z(1:a,2))+
           quant*(alpha-z(a,3)))+yy(j,k+1);
        else IES_{neg}(j, k+1)=IES_{neg}(min(ind), k+1); end
    end
end
IESth=-unique(IES\_neg(:,1)); \% IES theorique a t=0
% Valeur estimee
for i=1:n2
%calcul du p chapeau
phat (i)=sum(sum(success(i:n1+i-1,:)))/(n1*T);
prob=chem*phat(i);
prob(chem==0)=1-phat(i);
```

```
%Richesse methode de moyenne-variance
esp e=u1*phat(i)+d1*(1-phat(i));
var_e = phat(i)*(1-phat(i))*(u1-d1)^2;
esp P=esp e-s;
esp_PPt=var_e+esp_P*esp_P';
B=esp P'*inv(esp_PPt)*esp_P;
% valeur de w*
w=(1-(1-B)^t)/(2*(epsilon-(s^t*xini))*(1-B)^t);
%on exprime le montant investi dans chaque actif comme
%u_t = K_t + x_t + v_t
K=s*inv(esp_PPt)*esp_P;
v = cell2mat(arrayfun(@(i) ((s^t*xini)+(2*w*(1-B)^t)^--1)*(s)
   -(t-i).*inv(esp_PPt)*esp_P, 1:t, 'UniformOutput', false
   ));
xest = [xini * ones(nb, 1), zeros(nb, t)];
for k=1:nb
\quad \mathbf{for} \quad j = 1:t
    P t=ee(k,j)-s;
    u t=-K*xest(k,j)+v(:,j);
    xest(k, j+1)=xest(k, j)*s+P_t'*u_t;
end
end
```

%

```
%Expected shortfall recalculee
y=round(sortrows([xest(:,t+1)-xini,prod(prob,2)],1),10);
y(:,3) = cumsum(y(:,2));
a=find(y(:,3)>=alpha,1); %ligne ou se trouve le quantile
   alpha
quant=y(a,1);
a=sum(y(:,1) \le quant);
REShat(i)=-1/alpha*(sum(y(1:a,1).*y(1:a,2))+quant*(alpha-y)
   (a,3));
\%RES\ estime\ a\ t=0
%Expected shortfall iteree
yy = [xest(:,1)-xini, cell2mat(arrayfun(@(i) xest(:,i+1)-xest
   (:,i),1:t, 'UniformOutput', false)); %gains
IES neg=[zeros(nb,t),yy(:,t+1)];
for k=t-1:-1:0
    for j=1:nb
        C = intersect(chem(:,1:k),chem(j,1:k),'rows');
        ind = find(ismember(chem(:,1:k),C,'rows'));
        if j = \min(ind);
        z=unique(sortrows([IES_neg(ind,k+2),prob(ind,k+1)
           ],1), 'rows');
        z(:,3) = cumsum(z(:,2));
        a=find(z(:,3))=alpha,1); %ligne ou se trouve le
        %quantile alpha
        quant=z(a,1);
```

```
\begin{split} IES\_neg(j\ ,k+1) = & 1/alpha*(sum(z\ (1:a\ ,1)\ .*z\ (1:a\ ,2)\ ) + \\ & quant*(alpha-z\ (a\ ,3)\ )) + yy(j\ ,k+1); \\ & else\ IES\_neg(j\ ,k+1) = & IES\_neg(min(ind)\ ,k+1); end \\ & end \\ & end \\ IEShat(i) = & -unique(IES\_neg(:\ ,1)\ ); \% IES\ estime\ a\ t = 0 \\ & end \\ \end{split}
```

RÉFÉRENCES

- Acciaio, B. et Penner, I. (2011). Dynamic risk measures. In Advanced Mathematical Methods for Finance 1–34. Springer.
- Acerbi, C., Nordio, C. et Sirtori, C. (2001). Expected shortfall as a tool for financial risk management. arXiv preprint cond-mat/0102304.
- Acerbi, C. et Tasche, D. (2002). On the coherence of expected shortfall. *Journal* of Banking & Finance, 26(7), 1487–1503.
- Artzner, P. (1999). Application of coherent risk measures to capital requirements in insurance. *North American Actuarial Journal*, 3(2), 11–25.
- Artzner, P., Delbaen, F., Eber, J.-M. et Heath, D. (1999). Coherent measures of risk. *Mathematical Finance*, 9(3), 203–228.
- Delbaen, F. (2002). Coherent risk measures on general probability spaces. In Advances in finance and stochastics 1–37. Springer.
- Detlefsen, K. et Scandolo, G. (2005). Conditional and dynamic convex risk measures. Finance and Stochastics, 9(4), 539–561.
- Föllmer, H. (2004). Stochastic finance: an introduction in discrete time (2nd rev. and extended ed., éd.). De Gruyter studies in mathematics; 27. Berlin: Walter de Gruyter.
- Föllmer, H. et Schied, A. (2002). Convex measures of risk and trading constraints. Finance and Stochastics, 6(4), 429–447.

- Hardy, M. R. et Wirch, J. L. (2004). The iterated cte: a dynamic risk measure.

 North American Actuarial Journal, 8(4), 62–75.
- Huber, P. J. (1981). *Robust Statistics*. Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics. New York; Toronto: J. Wiley.
- Li, D. et Ng, W.-L. (2000). Optimal dynamic portfolio selection: Multiperiod mean-variance formulation. *Mathematical Finance*, 10(3), 387–406.
- Pflug, G. C. (2000). Some remarks on the value-at-risk and the conditional value-at-risk. In *Probabilistic Constrained Optimization* 272–281. Springer.
- Riedel, F. (2004). Dynamic coherent risk measures. Stochastic Processes and Their Applications, 112(2), 185–200.