

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL

POLYHOMOGENÉITÉ DES MÉTRIQUES COMPATIBLES AVEC UNE
STRUCTURE DE LIE À L'INFINI LE LONG DU FLOT DE RICCI

THÈSE

PRÉSENTÉE

COMME EXIGENCE PARTIELLE

DU DOCTORAT EN MATHÉMATIQUES

PAR

MAHDI AMMAR

JUILLET 2019

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL
Service des bibliothèques

Avertissement

La diffusion de cette thèse se fait dans le respect des droits de son auteur, qui a signé le formulaire *Autorisation de reproduire et de diffuser un travail de recherche de cycles supérieurs* (SDU-522 – Rév.07-2011). Cette autorisation stipule que «conformément à l'article 11 du Règlement no 8 des études de cycles supérieurs, [l'auteur] concède à l'Université du Québec à Montréal une licence non exclusive d'utilisation et de publication de la totalité ou d'une partie importante de [son] travail de recherche pour des fins pédagogiques et non commerciales. Plus précisément, [l'auteur] autorise l'Université du Québec à Montréal à reproduire, diffuser, prêter, distribuer ou vendre des copies de [son] travail de recherche à des fins non commerciales sur quelque support que ce soit, y compris l'Internet. Cette licence et cette autorisation n'entraînent pas une renonciation de [la] part [de l'auteur] à [ses] droits moraux ni à [ses] droits de propriété intellectuelle. Sauf entente contraire, [l'auteur] conserve la liberté de diffuser et de commercialiser ou non ce travail dont [il] possède un exemplaire.»

REMERCIEMENT

Je tiens vivement à remercier le Professeur Frédéric Rochon mon directeur de thèse qui a supervisé ce travail avec beaucoup de vision et de rigueur. Il a dirigé ma thèse avec patience et il a dédié beaucoup de temps à mon travail en étant toujours très disponible. Je le remercie sincèrement pour ses conseils directifs qui m'ont été fournis tout au long de ma thèse, et m'ayant permis de faire l'acquisition de précieuses compétences et savoir faire.

Je suis également très redevable aux professeurs Steven Lu, Vestislav Apostolov et Eric Bahuaud pour la haute qualité des cours que j'ai suivis avec eux. Je leur dédie une sincère reconnaissance, ainsi que l'expression de mes sentiments les plus distingués.

Je remercie aussi les membres du département de Mathématiques et de Statistiques de l'Université de Québec à Montréal qui m'ont réservé un accueil chaleureux, avec également beaucoup de support et de conseils.

Enfin, je dédie également cette thèse à mes parents et ma femme, qui ont toujours été présents pour m'encourager tout au long de ces années de thèse sans oublier. À ma petite fille Larine que j'embrasse très fort.



TABLE DES MATIÈRES

| | |
|---|-----|
| RÉSUMÉ | vii |
| INTRODUCTION | 1 |
| CHAPITRE I VARIÉTÉ À COINS ET STRUCTURES DE LIE À L'INFINI | 7 |
| 1.1 Variétés à coins | 7 |
| 1.2 Algèbre de Lie structurale et Algébroïde de Lie | 11 |
| 1.3 Structure de Lie à l'infini | 17 |
| 1.4 Structure de Lie fibrée à l'infini | 22 |
| 1.5 Variété riemannienne avec une structure de Lie à l'infini | 26 |
| 1.6 Connexion et courbure | 29 |
| CHAPITRE II ÉQUATION PARABOLIQUE ET POLYHOMOGÉNÉITÉ DES SOLUTIONS | 33 |
| 2.1 Espaces de Hölder | 33 |
| 2.2 Expansion polyhomogène | 36 |
| 2.3 Ellipticité et polyhomogénéité des opérateurs différentielles | 40 |
| 2.4 Polyhomogénéité des solutions des équations paraboliques | 43 |
| CHAPITRE III POLYHOMOGÉNÉITÉ DES SOLUTIONS DES ÉQUATIONS PARABOLIQUES QUASI-LINÉAIRES | 61 |
| 3.1 L'existence et l'unicité des solutions des équations ordinaires non linéaires | 61 |
| 3.2 L'existence et l'unicité des solutions des équations quasi-linéaires paraboliques | 63 |
| 3.3 Polyhomogénéité des solutions des équations quasi-linéaires paraboliques | 68 |
| CHAPITRE IV POLYHOMOGÉNÉITÉ DES SOLUTIONS DU FLOT DE RICCI-DETURCK | 75 |
| 4.1 Flot de Ricci-DeTurck | 75 |

| | | |
|-----|--|----|
| 4.2 | Polyhomogénéité locale des métriques le long du flot de Ricci-DeTurck | 81 |
| 4.3 | Polyhomogénéité globale des métriques asymptotiquement Einstein le long du flot de Ricci-DeTurck | 82 |
| | RÉFÉRENCES | 87 |

RÉSUMÉ

Le long du flot de Ricci, on étudie la polyhomogénéité des métriques pour des variétés riemanniennes non-compactes ayant « une structure de Lie fibrée à l'infini », c'est-à-dire une classe de structures Lie à l'infini qui induit dans un sens précis des structures de fibrés sur les bords d'une certaine compactification par une variété à coins. Lorsque cette compactification est une variété à bord, cette classe de métriques contient notamment les b-métriques de Melrose, les métriques à bord fibré de Mazzeo-Melrose et les métriques edge de Mazzeo. On montre alors que la polyhomogénéité à l'infini des métriques compatibles avec une structure de Lie fibrée à l'infini est préservée localement par le flot de Ricci-DeTurck. Si la métrique initiale est asymptotiquement Einstein, on obtient la polyhomogénéité des métriques tant que le flot existe. De plus, si la métrique initiale est « lisse jusqu'au bord », alors il en sera de même pour les solutions du flot de Ricci normalisé et du flot de Ricci-DeTurck.

Mots clés : Géométrie Différentielle, Équations aux dérivées partielles, Polyhomogénéité, Flot de Ricci, Variétés non-compactes, Structures Lie à l'infini.



INTRODUCTION

L'objet principal de cette thèse est l'étude du comportement à l'infini des solutions du flot de Ricci sur des variétés non-compactes. Le flot de Ricci est en quelque sorte une version non-linéaire de l'équation de la chaleur, qui, au lieu d'uniformiser la température, tend plutôt à uniformiser la courbure. Il a été introduit en 1982 par Hamilton dans son article (Hamilton, 1982) et s'est révélé être un outil très utile dans la compréhension de la topologie des variétés. En particulier, il a joué un rôle central dans la preuve de Grigory Perelman de la conjecture de géométrisation de Thurston, dont la conjecture de Poincaré (Morgan et Tian, 2007) est un cas particulier. Pour des variétés compactes, Hamilton a prouvé l'existence locale et l'unicité du flot de Ricci. Par suite, DeTurck (DeTurck, 1983) a introduit une astuce élégante afin de donner une preuve simplifiée de l'existence locale.

Cependant, le comportement du flot pour les variétés non-compactes est plus délicat et dépend de la géométrie à l'infini. Plusieurs recherches ont porté sur des extensions naturelles du flot de Ricci sur des variétés complètes non-compactes. L'existence d'une solution au flot a été établie par Shi (Shi, 1989) pour des variétés riemanniennes complètes ayant une courbure bornée. De plus, la solution existe tant que la courbure reste bornée. Par conséquent, pour estimer le temps maximal d'existence du flot de Ricci, il suffit de contrôler la courbure. Plus tard, Chen et Zhu (Chen et Zhu, 2006) ont repris le travail de Shi et ont montré l'unicité de la solution. Sous des hypothèses techniques supplémentaires, Albert Chau (Chau, 2004) a prouvé l'existence et la convergence d'une solution globale pour certaines variétés kählériennes non-compactes. Récemment, il y a eu une intense activité pour

comprendre dans quelle mesure le flot de Ricci préserve d'autres conditions géométriques sur des variétés complètes non-compactes. Dans les résultats de beaucoup de recherches, les métriques considérées sont non seulement approximées par le modèle géométrique à l'infini, mais elles admettent aussi une expansion asymptotique lisse, ou plus généralement une expansion polyhomogène, à savoir une expansion constituée de termes de la forme $\rho^\alpha(\log \rho)^k$, où ρ est la distance par rapport à un point fixé, α est un nombre réel (pas nécessairement entier) et $k \in \mathbb{N}_0$. Une question naturelle est donc la suivante :

Quel type de géométrie à l'infini sur des variétés complètes non-compactes sera préservé par le flot de Ricci ? De plus, lorsque la métrique initiale a une expansion polyhomogène à l'infini, en est-il de même pour les métriques ultérieures le long du flot ?

Lott et Zhang (Lott et Zhang, 2011) ont étudié le flot de Kähler-Ricci pour des métriques kählériennes à pointes fibrées (ou de type Poincaré) sur des variétés quasi-projectives et ont montré que de telles métriques, le long du flot de Ricci, préservent des comportements asymptotiques spatiaux standards. Ces résultats peuvent être compris comme étant le terme d'ordre 0 du développement asymptotique des métriques à l'infini. Ultérieurement, ces développements asymptotiques ont été développés dans l'article (Rochon et Zhang, 2012) de Rochon et Zhang en montrant que la solution admet une expansion asymptotique complète tant que le flot existe. Un autre résultat de Lott et Zhang (Lott et Zhang, 2016) considère trois types différents de comportements asymptotiques spatiaux (cylindrique, bombé et conique) préservés par le flot de Kähler-Ricci. Albin, Aldana et Rochon (Albin *et al.*, 2013) ont travaillé sur des surfaces munies de métriques complètes approximées par des pointes (cusps en anglais) ou des entonnoirs à l'infini et ont montré que le flot de Ricci converge vers une métrique avec une courbure constante et que le déterminant du laplacien augmente tant que le flot existe. Ils ont notamment eu besoin de montrer que l'expansion asymptotique à l'infini de ces métriques est

préservée le long du flot. Isenberg, Mazzeo et Sesum (Isenberg *et al.*, 2013) ont étudié le comportement du flot sur des surfaces à bouts asymptotiquement euclidiens de caractéristique d'Euler négative. Pour les métriques asymptotiquement hyperboliques, la persistance le long du flot de Ricci d'un développement asymptotique lisse a été obtenue par Bahuaud (Bahuaud, 2011). Rochon (Rochon, 2015) a obtenu un résultat similaire pour les métriques complexes asymptotiquement hyperboliques. Dans la plupart de ces travaux, une compactification a été introduite pour obtenir une variété à bord compacte, de sorte que le comportement du flot à l'infini puisse être décrit en termes du bord. Dans ce contexte, nous allons étendre ce problème de régularité pour des types de géométrie plus généraux. Nous nous intéressons aux variétés non-compactes admettant une compactification par une variété compacte non seulement à bord mais aussi plus généralement à coins. Nous supposons que cette compactification induit une structure de Lie à l'infini compatible avec les métriques au sens de (Ammann *et al.*, 2004). Pour pouvoir étudier le comportement asymptotique des métriques à l'infini, nous devons imposer certaines conditions sur les structures de Lie à l'infini considérées. Plus précisément, nous introduirons les structures de Lie « fibrées » à l'infini, une certaine classe de structures de Lie à l'infini induisant sur chaque face de la variété à coins un fibré naturel. Notre théorème peut s'énoncer comme suit (voir les Théorème 4.2.1 et Théorème 4.3.5) :

Théorème 0.0.1. *Soit (M, g_0) une variété riemannienne complète de dimension n compatible avec une structure de Lie fibrée à l'infini (M, \mathcal{V}_{SF}) dont le rayon d'injectivité est strictement positif. Si la métrique g_0 admet une expansion polyhomogène à l'infini compatible avec (M, \mathcal{V}_{SF}) , alors la solution du flot de Ricci-DeTurck préserve l'expansion polyhomogène à l'infini dans un court laps de temps. De plus, si la métrique g_0 est asymptotiquement Einstein, alors la solution du flot de Ricci-DeTurck préserve l'expansion polyhomogène à l'infini tant que le flot existe.*

Dans le premier chapitre, nous commençons par introduire la notion de variétés à coins au sens de Melrose (Melrose, 1996). Ensuite, en se référant à l'article de (Ammann *et al.*, 2004), nous présentons la notion d'algèbre de Lie structurale et la notion équivalente d'un algébroïde de Lie bordant, ce qui permet de définir une structure de Lie à l'infini. Elle détermine des métriques complètes dont les dérivées contravariantes du tenseur de courbure sont bornées. Nous introduisons alors la notion de structures de Lie fibrées à l'infini, la classe de structures de Lie à l'infini pour laquelle notre résultat s'applique. Bien que cette classe ne couvre pas toutes les structures de Lie à l'infini, par exemple celles associées à des métriques feuilletées au bord au sens de (Rochon, 2012), il n'en demeure pas moins qu'un très large éventail de métriques complètes sont compatibles avec une structure de Lie fibrée à l'infini. Voici quelques exemples à titre indicatif : les b-métriques (Melrose, 1993), les métriques de diffusion (Melrose, 1995) (incluant les métriques asymptotiquement localement euclidiennes (Joyce, 2001a)), les métriques edges (Mazzeo, 1991) (incluant les 0-métriques (Mazzeo et Melrose, 1987)), les Φ -métriques de Mazzeo-Melrose (Mazzeo et Melrose, 1998) (incluant les métriques asymptotiquement localement plates (Gibbons et Pope, 1979)) ainsi que leur généralisation à des métriques quasi-asymptotiquement coniques (QAC) ou quasi-fibrées au bord (QFB) de (Conlon *et al.*, 2016).

Au deuxième chapitre, nous traitons de la polyhomogénéité globale des solutions d'équations paraboliques linéaires déterminées par une structure de Lie fibrée à l'infini. Plus précisément, nous montrons que la solution admet un développement asymptotique polyhomogène complet à l'infini pourvu que ce soit le cas initialement.

Le troisième chapitre concerne les équations paraboliques quasi-linéaires déterminées par une structure de Lie fibrée à l'infini. Nous établissons l'existence et l'unicité des solutions de telles équations en s'inspirant de l'article de Bahuaud (Ba-

huaud, 2011) d'une part. D'autre part, nous déterminons les critères qui nous permettent d'assurer que la polyhomogénéité sera préservée pour un court laps de temps.

Au dernier chapitre, nous présentons notre résultat principal en se basant sur les deux chapitres précédents. En premier lieu, nous prouvons la polyhomogénéité locale des métriques compatibles avec une structure de Lie fibrée à l'infini le long du flot de Ricci-DeTurck. Remarquons ici que ce résultat s'applique aux métriques asymptotiquement coniques ou cylindriques pour lesquelles le terme d'ordre 0 de l'expansion a été déjà établi dans (Lott et Zhang, 2016) lorsque la métrique est Kähler. Ensuite, nous établissons la polyhomogénéité globale pour des métriques asymptotiquement Einstein le long du flot. Enfin, lorsqu'initialement la métrique admet un développement lisse, nous montrons qu'il en sera de même pour les métriques le long du flot. Dans ce cas particulier, nos résultats sont valides non seulement pour le flot de Ricci-DeTurck, mais aussi pour le flot de Ricci.

CHAPITRE I

VARIÉTÉ À COINS ET STRUCTURES DE LIE À L'INFINI

Les variétés riemanniennes non-compactes avec une structure de Lie à l'infini ont été introduites par Ammann, Lauter et Nistor dans leur article (Ammann *et al.*, 2004). Toute structure de Lie à l'infini détermine une classe de métriques complètes qui sont de géométrie bornée lorsque le rayon d'injectivité est strictement positif. Cette structure englobe une large classe de variétés complètes non-compactes comme on le verra plus-bas. En particulier, nous allons définir une nouvelle notion : celle de « structure de Lie fibrée à l'infini ». Cette dernière forme une classe de structures Lie à l'infini qui induisent dans un sens précis des structures de fibrés au bord.

1.1 Variétés à coins

L'analyse globale sur les variétés à coins a été développée par Melrose dans plusieurs ouvrages, notamment (Melrose, 1993) et (Melrose, 1996). Nous donnerons un aperçu général du concept de variétés à coins afin de développer les quelques notions de la géométrie des variétés avec une structure de Lie à l'infini qui nous seront nécessaires. Pour plus détails, on réfère aussi le lecteur à (Grieser, 2017). Pour $k \in \{0, \dots, n\}$, on note par \mathbb{R}_k^n l'espace donné par

$$\mathbb{R}_k^n = ([0, +\infty])^k \times \mathbb{R}^{n-k}.$$

L'ensemble des ouverts de \mathbb{R}_k^n est $\{\Omega' \cap \mathbb{R}_k^n \mid \Omega' \text{ ouvert de } \mathbb{R}^n\}$. Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}_k^n . Une fonction $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ est dite lisse s'il existe un ouvert Ω' de \mathbb{R}^n avec $\Omega = \Omega' \cap \mathbb{R}_k^n$ et une fonction lisse $F : \Omega' \rightarrow \mathbb{C}$ tel que $F|_{\Omega} = f$. Soient deux ouverts Ω_i de $\mathbb{R}_{k_i}^n$, où $i \in \{1, 2\}$. On dit que $f : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ est un difféomorphisme si elle est un homéomorphisme qui admet un inverse $g : \Omega_2 \rightarrow \Omega_1$ tel que chaque composante de coordonnées de f ou g soit une application lisse.

Maintenant, soit M un espace topologique, séparé et paracompact.

Définition 1.1.1. Une carte à coins de M est un couple (U, φ) constitué d'un ouvert U de M et d'un homéomorphisme sur un ouvert de \mathbb{R}_k^n , $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}_k^n$. Elle est dite centrée en $m \in U$ si $\varphi(m) = 0$. Une C^∞ structure à coins est déterminée par la donnée d'une famille $\mathfrak{A} = \{(U_i, \varphi_i), i \in I\}$ de cartes à coins de M ayant les propriétés suivantes :

1. $(U_i)_{i \in I}$ est un recouvrement ouvert de M .
2. Si $i \neq j$, alors U_i et U_j sont compatibles, c'est-à-dire que si $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, alors $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$ est un difféomorphisme lisse de $\varphi_i(U_i \cap U_j)$ sur $\varphi_j(U_i \cap U_j)$.
3. Si $\mathfrak{B} \supset \mathfrak{A}$ est une famille de cartes à coins ayant les propriétés 1 et 2 alors $\mathfrak{B} = \mathfrak{A}$. L'ensemble \mathfrak{A} est l'atlas maximal de M .

Si M a une C^∞ structure à coins, alors on note par

$$C^\infty(M) = \{f : M \rightarrow \mathbb{R} \mid f \circ \varphi^{-1} \text{ est lisse sur } \varphi(U) \text{ pour chaque carte } (U, \varphi) \in \mathfrak{A}\}.$$

Définition 1.1.2. Une pré-variété à coins est un couple (M, \mathfrak{F}) , où M est un espace topologique, séparé et paracompact et $\mathfrak{F} = C^\infty(M)$ pour une certaine C^∞ structure à coins.

Définitions 1.1.3. Soient M une pré-variété à coins et

$$\partial_i M = \{m \in M \text{ tel qu'il existe une carte } \varphi : U \rightarrow \mathbb{R}_i^n \text{ centrée en } m\},$$

pour $l \in \{0, \dots, k\}$ appelée la *codimension*, ou la *profondeur* de m . L'espace $\partial_l M$ consiste en l'ensemble des points de profondeur l qui se décompose en une réunion de composantes connexes appelées les *faces ouvertes*. La fermeture d'une face ouverte est une *face fermée*. On appelle une *hypersurface bordante* de M une face fermée de codimension 1. L'ensemble des hypersurfaces bordantes est noté par $\mathcal{M}_1(M)$.

Remarque 1.1.4. L'ensemble $\partial_l M$ est indépendant du choix des cartes à coins. Le bord de M , noté ∂M , peut s'écrire comme l'union $\bigcup_{l=1}^k \partial_l M$. Ainsi l'intérieur de M est défini par $\overset{\circ}{M} := M \setminus \partial M$.

Définition 1.1.5. On dit qu'un sous-ensemble $S \subset M$ est une *sous-variété*, si $\forall s \in S, \exists G \in Gl_n(\mathbb{R})$ et $\exists \varphi : U \rightarrow \mathbb{R}_k^n$ une carte à coins centrée en s tels que

$$\varphi_{|S \cap U} : S \cap U \rightarrow (G \cdot \mathbb{R}_k^{n-n'} \times \{0\}^{n'}) \cap \varphi(U)$$

est un homéomorphisme, où $k' \in \{0, \dots, k\}$ et $n' \in \{0, \dots, n\}$ avec $k' \leq n - n'$.

Lorsque $k = k' = 0$ et G est l'identité, cela coïncide avec la définition d'une sous-variété d'une variété sans bord.

Exemple 1.1.6. Le diagonal $\Delta = \{(x, x) \mid x \in [0, +\infty)\}$ est une sous-variété de \mathbb{R}_2^2 car $\Delta = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \{(x, 0) \mid x \in [0, +\infty)\}$.

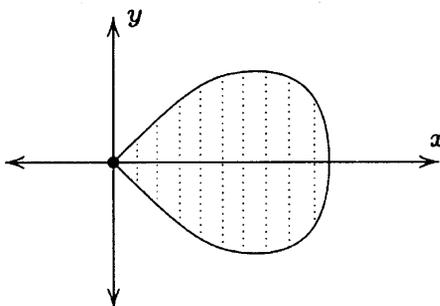
Définition 1.1.7. Une variété à coins M est une *pré-variété à coins* telle que toutes les hypersurfaces bordantes sont des sous-variétés, ou de manière équivalente, telle que chaque hypersurface bordante H admette une fonction de définition, à savoir une fonction lisse positive $\rho \in C^\infty(M)$ qui s'annule sur H et seulement sur H , et dont la différentielle soit non-nulle partout sur H .

Remarque 1.1.8. Si F est une face fermée connexe de M de profondeur l , alors F est une composante connexe de l'intersection des hypersurfaces bordantes conte-

nant F . Autrement dit, si $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_l$ sont des fonctions de définition des hypersurfaces bordantes contenant F , alors F est une composante connexe de

$$\{m \in M \mid \rho_1(m) = \rho_2(m) \dots = \rho_l(m) = 0\}.$$

Exemple 1.1.9. Le carré $[0, 1] \times [0, 1]$ est une variété à coins. Par contre, la goutte $T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y^2 \leq x^2 - x^4\}$, voir la figure ci-dessous, est une pré-variété à coins qui n'est pas une variété à coins car son hypersurface bordante s'intersecte avec elle-même.



Définition 1.1.10. Un fibré est un quadruplet (E, S, Z, ϕ) , où E, S, Z sont des variétés à coins et $\phi : E \rightarrow S$ est une application lisse telle que pour tout $s \in S$, il existe un voisinage ouvert $U \subset S$ de s , appelé ouvert trivialisant, tel qu'on a un difféomorphisme $\Psi : \phi^{-1}(U) \rightarrow U \times Z$ induisant le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \phi^{-1}(U) & \xrightarrow{\Psi} & U \times Z \\ & \searrow \phi & \downarrow \text{pr}_1 \\ & & U \end{array}$$

où pr_1 est la projection sur le premier facteur. On dira que (E, S, Z, ϕ) est d'espace total E , de base S , de fibre Z et de projection ϕ . L'application Ψ est appelée trivialisation. Enfin $E_s := \phi^{-1}(s)$ est la fibre au-dessus de s .

Définition 1.1.11. Si Z est un espace vectoriel réel (ou complexe) et si les identifications $\phi^{-1}(U) \simeq U \times Z$ sont linéaires dans chaque fibre, alors (E, S, Z, ϕ) est un fibré vectoriel réel (ou complexe).

Exemple 1.1.12. Soit M une variété à coins. Pour $m \in M$, on considère l'idéal $I_m = \{f \in C^\infty(M) \mid f(m) = 0\}$. Alors on pose $T_m^*M = I_m/I_m^2$, où

$$I_m^2 = \{f \in C^\infty(M) \mid \exists k \in \mathbb{N}, g_1, h_1, \dots, g_k, h_k \in I_m \text{ tels que } f = \sum_{i=1}^k g_i h_i\}.$$

On peut vérifier que le fibré cotangent, donné par $T^*M = \bigcup_{m \in M} T_m^*M$, et son dual TM le fibré tangent sont deux variétés à coins constituant l'espace total de deux fibrés vectoriels au sens des variétés à coins.

1.2 Algèbre de Lie structurale et Algébroïde de Lie

Soit M une variété à coins de dimension n .

Définition 1.2.1. Une algèbre de Lie structurale des champs de vecteurs lisses sur M est un sous-espace $\mathcal{V} \subset \mathfrak{X}(M)$ de l'espace vectoriel réel des champs de vecteurs sur M satisfaisant aux propriétés suivantes :

1. \mathcal{V} est fermé sous le crochet de Lie des champs de vecteurs ;
2. chaque $V \in \mathcal{V}$ est tangent à toutes les faces de M ;
3. \mathcal{V} est un $C^\infty(M)$ module localement libre, c'est-à-dire que $\forall m \in M$, il existe un voisinage ouvert $U_m \subset M$ de m , $k \in \mathbb{N}$ et une famille de champs de vecteurs $\{X_1, \dots, X_k\} \subset \mathcal{V}$ de sorte que $\forall Y \in \mathcal{V}$, il existe une famille de fonctions lisses $\{f_1, \dots, f_k\} \subset C^\infty(M)$, uniquement déterminée sur U_m par Y , telle que $Y = \sum_{i=1}^k f_i X_i$ sur U_m .

Exemple 1.2.2. (Melrose, 1996) Soient M une variété à coins et

$$\begin{aligned}\mathcal{V}_b &= \{V \in \mathfrak{X}(M) \text{ tel que } V \text{ est tangent à toutes les faces de } M\} \\ &= \{V \in \mathfrak{X}(M) \mid V\rho_H = a_H\rho_H, a_H \in C^\infty(M), \forall H \in \mathcal{M}_1(M)\},\end{aligned}$$

où ρ_H est une fonction de définition de l'hypersurface bordante H . Un champ de vecteurs $V \in \mathcal{V}_b$ est appelé un b -champ de vecteurs. Par un calcul standard, on a que $\forall V_1, V_2 \in \mathcal{V}_b$, $[V_1, V_2]\rho_H \in \rho_H C^\infty(M)$. Alors \mathcal{V}_b est fermé sous le crochet de Lie des champs de vecteurs. Soit m un élément d'une face fermée F de M de profondeur l . Sur $(\rho_1, \dots, \rho_l, y_1, \dots, y_{n-l})$ un système de coordonnées locales centré en m , chaque b -champ de vecteurs $V \in \mathcal{V}_b$ est de la forme :

$$V = \sum_{i=1}^l a_i(\rho, y) \rho_i \frac{\partial}{\partial \rho_i} + \sum_{i=1}^{n-l} b_i(\rho, y) \frac{\partial}{\partial y_i}$$

où les coefficients a_i et b_i sont des fonctions lisses, $y = (y_1, \dots, y_{n-l}) \in \mathbb{R}^{n-l}$, et $\rho = (\rho_1, \dots, \rho_l)$ est une famille de fonctions de définition des hypersurfaces bordantes contenant F . Cela montre que l'algèbre de Lie des b -champs de vecteurs est engendrée par $\rho_i \frac{\partial}{\partial \rho_i}$ et $\frac{\partial}{\partial y_i}$ près de $m \in F$, tandis que près de n'importe quel $m \in \overset{\circ}{M}$, elle est engendrée par le repère habituel $\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\}$. Par conséquent, \mathcal{V}_b est une algèbre de Lie structurale des champs de vecteurs puisqu'elle est un C^∞ module localement libre de rang $n = \dim M$. D'autre part, on peut associer à \mathcal{V}_b un fibré vectoriel ${}^b\mathcal{V}TM = \bigcup_{m \in M} (\mathcal{V}_b / I_m \mathcal{V}_b)$, noté bTM . En effet, il reste à vérifier que bTM est C^∞ , autrement dit, que la matrice de transition entre les changements de cartes est C^∞ . Soit Φ un changement de coordonnées. Si $x = (\rho_1, \dots, \rho_l, y_{l+1}, \dots, y_n)$ est un système de coordonnées locales centré en $m \in F$, alors $\Phi(x)$ est un nouveau système de coordonnées locales de m donné par

$$\rho'_i = \Phi_i(x) = \rho_i \alpha_i(x), \alpha_i(x) > 0, \forall i \in \{1, \dots, l\}.$$

Il est clair que les coefficients de la matrice de transition sont C^∞ car :

Si $i \in \{1, \dots, l\}$, on calcule que

$$\rho_i \frac{\partial}{\partial \rho_i} = \left(1 + \frac{\rho_i}{\alpha_i} \frac{\partial \alpha_i}{\partial \rho_i}\right) \rho'_i \frac{\partial}{\partial \rho'_i} + \sum_{\substack{j \leq l \\ i \neq j}} \frac{\rho_i}{\alpha_j} \frac{\partial \alpha_j}{\partial \rho_i} \rho'_j \frac{\partial}{\partial \rho'_j} + \sum_{j=l+1}^n \rho_i \frac{\partial \Phi_j}{\partial \rho_i} \frac{\partial}{\partial \Phi_j}.$$

Si $i \in \{l+1, \dots, n\}$, on a plutôt que

$$\frac{\partial}{\partial y_i} = \sum_{j=1}^l \frac{1}{\alpha_j} \frac{\partial \alpha_j}{\partial y_i} \rho'_j \frac{\partial}{\partial \rho'_j} + \sum_{j=l+1}^n \frac{\partial \Phi_j}{\partial y_i} \frac{\partial}{\partial \Phi_j}.$$

D'où bTM est bien défini. De plus, on remarque qu'il existe un morphisme canonique de fibrés vectoriels $\rho_b : {}^bTM \rightarrow TM$ qui envoie la classe d'un champ de vecteurs $V \in \mathcal{V}_b$ à un vecteur tangent $V(m) \in T_mM$. Sur un système de coordonnées locales de $m \in F$, on voit que le champ de vecteurs $\rho_i \frac{\partial}{\partial \rho_i}$ n'est pas nul dans bT_mM car $\rho_i \frac{\partial}{\partial \rho_i} \notin I_m \mathcal{V}_b$. Par contre $\rho_i \frac{\partial}{\partial \rho_i}$ est nul dans $T_mM = \mathfrak{X}(M)/I_m \mathfrak{X}(M)$. On déduit que ρ_b est un isomorphisme sur $\overset{\circ}{M}$ et de rang $n-l$ sur l'intérieur d'une face de codimension l ,

$$\rho_i \frac{\partial}{\partial \rho_i} \mapsto 0 \quad \frac{\partial}{\partial y_j} \mapsto \frac{\partial}{\partial y_j}, \quad j > l, i \leq l.$$

Remarque 1.2.3. En utilisant la propriété 2 de la Définition 1.2.1, on peut voir que chaque algèbre de Lie structurale \mathcal{V} est une sous-algèbre de \mathcal{V}_b .

Remarque 1.2.4. On remarque que la propriété 3 de la Définition 1.2.1 équivaut à dire que \mathcal{V} est un C^∞ module projectif. Ainsi, à partir de théorème Serre-Swan (Karoubi, 2008), il existe un fibré vectoriel

$${}^{\mathcal{V}}TM := \bigcup_{m \in M} (\mathcal{V}/I_m \mathcal{V}) \rightarrow M$$

tel que $\mathcal{V} \simeq \Gamma({}^{\mathcal{V}}TM)$. Puisque $\mathcal{V} \subset \mathfrak{X}(M)$, il existe un morphisme canonique de fibrés vectoriels $\rho_{\mathcal{V}} : {}^{\mathcal{V}}TM \rightarrow TM$, appelé l'ancre ou encore l'application d'ancrage.

Exemple 1.2.5. (Mazzeo, 1991) Soient M une variété à bord ∂M , qui est l'espace totale d'un fibré de variétés lisses $\pi : \partial M \rightarrow B$, et

$$\mathcal{V}_e = \{V \in \mathfrak{X}(M) \text{ tel que } V \text{ est tangent à toutes les fibres de } \pi\}.$$

Soient $V_1, V_2 \in \mathcal{V}_e$. Puisque $[V_1, V_2]_{|F} = [V_1|_F, V_2|_F]$ pour F une fibre de π , le commutateur est bien tangent aux fibres de π . Soit (ρ, y, z) un système de coordonnées locales près du bord, où ρ est une fonction de définition du bord, y est une famille de variables sur la base B de π et z est une famille de variables sur les fibres de π . Alors dans ce système de coordonnées, \mathcal{V}_e est engendré par $\rho \frac{\partial}{\partial \rho}$, $\rho \frac{\partial}{\partial y}$ et $\frac{\partial}{\partial z}$. Il s'agit donc d'un C^∞ module projectif. On déduit que \mathcal{V}_e est une algèbre de Lie structurale et qu'on peut lui associer un fibré vectoriel noté eTM . En particulier, lorsque $B := \partial M$ et $\pi = \text{Id}$, on retrouve l'algèbre de Lie des 0-champs de vecteurs de Mazzeo-Melrose (Mazzeo et Melrose, 1987) sur une variété à bord,

$$\mathcal{V}_0 = \{V \in \mathfrak{X}(M) \mid V|_{\partial M} = 0\}.$$

Dans ce cas, on dénote eTM par 0TM .

Nous présentons maintenant quelques définitions et résultats standards concernant les algébroïdes de Lie, dont il sera fait usage dans la suite. Des références sur cette notion sont (Mackenzie *et al.*, 1987) et (Crainic et Fernandes, 2003).

Soit M une variété à coins.

Définition 1.2.6. *Un algébroïde de Lie sur M est la donnée d'un fibré vectoriel $A \rightarrow M$, d'un morphisme $\rho : A \rightarrow TM$, appelé ancre, et d'une structure d'algèbre de Lie sur son module de sections globales $\Gamma(A)$ dont le crochet satisfait à la règle de Leibniz,*

$$[u, fv] = f[u, v] + (\rho_\Gamma(u).f)v, \quad \forall u, v \in \Gamma(A), f \in C^\infty(M),$$

où $\rho_\Gamma : \Gamma(A) \rightarrow \Gamma(TM)$ est l'application des modules des sections induites par l'ancre ρ .

Remarque 1.2.7. *Par l'antisymétrie du crochet, la règle de Leibniz à gauche est aussi satisfaite : $[fu, v] = f[u, v] - (\rho_\Gamma(v).f)u$, $\forall u, v \in \Gamma(A)$, $f \in C^\infty(M)$.*

Proposition 1.2.8. *L'application ϱ_Γ est un morphisme d'algèbres de Lie. Autrement dit, $\varrho_\Gamma([u, v]) = [\varrho_\Gamma(u), \varrho_\Gamma(v)]$, $\forall u, v \in \Gamma(A)$, où à gauche on a le crochet d'algèbroïde de Lie et à droite le crochet de Lie des champs de vecteurs.*

Démonstration. Par le règle de Leibniz, on a que

$$(\varrho_\Gamma(u).f)v = [u, fv] - f[u, v] \quad \forall u, v \in \Gamma(A), f \in C^\infty(M).$$

Par suite, on obtient que $\forall w \in \Gamma(A)$,

$$\begin{aligned} ([\varrho_\Gamma(u), \varrho_\Gamma(v)].f)w &= (\varrho_\Gamma(u).(\varrho_\Gamma(v).f))w - (\varrho_\Gamma(v).(\varrho_\Gamma(u).f))w \\ &= [u, (\varrho_\Gamma(v).f)w] - (\varrho_\Gamma(v).f)[u, w] \\ &\quad - [v, (\varrho_\Gamma(u).f)w] + (\varrho_\Gamma(u).f)[v, w] \\ &= [u, [v, fw]] - [u, f[v, w]] - [v, f[u, w]] + f[v, [u, w]] \\ &\quad - [v, [u, fw]] + [v, f[u, w]] + [u, f[v, w]] - f[u, [v, w]] \\ &= [u, [v, fw]] - [v, [u, fw]] + f([v, [u, w]] - [u, [v, w]]). \end{aligned}$$

En utilisant l'identité de Jacobi et l'antisymétrie du crochet, on déduit donc que

$$\begin{aligned} ([\varrho_\Gamma(u), \varrho_\Gamma(v)].f)w &= -[fw, [u, v]] + f(-[w, [v, u]]) \\ &= [[u, v], fw] - f([[u, v], w]) \\ &= (\varrho_\Gamma([u, v]).f)w, \end{aligned}$$

d'où le résultat. □

Exemple 1.2.9. *Tout fibré $A \rightarrow M$ en algèbres de Lie est un algèbroïde de Lie dont l'ancre est nulle.*

Définition 1.2.10. *Un algèbroïde de Lie sur M est dit bordant si tous les champs de vecteurs de $\varrho_\Gamma(\Gamma(A))$ sont tangents à toutes les faces de M .*

Le concept d'une algèbre de Lie structurale sera alors équivalent au concept d'algèbroïde de Lie bordant, si ϱ_Γ est injective et $\varrho_\Gamma(\Gamma(A)) \subset \mathcal{V}_b$.

Définition 1.2.11. Soit $(A \rightarrow M, \varrho_A, [\cdot, \cdot]_A)$ et $(B \rightarrow M, \varrho_B, [\cdot, \cdot]_B)$ deux algébroïdes de Lie au-dessus de la même base. Un morphisme d'algébroïdes de Lie au-dessus de la même base est la donnée d'un morphisme $\Phi : A \rightarrow B$ entre les fibrés vectoriels $A \rightarrow M$ et $B \rightarrow M$ qui commute aux ancrés et aux crochets au sens où

$$(\varrho_A)_\Gamma = (\varrho_B)_\Gamma \circ \Phi, \quad \Phi([u, v]_A) = [\Phi(u), \Phi(v)]_B, \quad \forall u, v \in \Gamma(A).$$

Définition 1.2.12. Soit $(A \rightarrow M, \varrho_A, [\cdot, \cdot]_A)$ un algébroïde de Lie. On dit qu'un sous-fibré vectoriel $B \rightarrow N$ de $A|_N$, où N est une sous-variété de M , est un sous-algébroïde de Lie de A si :

$$\forall p \in N, u \in B_p, \text{ on a que } \varrho_A(u) \in T_p N; \quad (1.1)$$

$$\forall u, v \in \Gamma(A) \text{ telles que } u|_N, v|_N \in \Gamma(B), \text{ on a que } [u, v]|_N \in \Gamma(B). \quad (1.2)$$

Proposition 1.2.13. Le sous-algébroïde de Lie $B \rightarrow N$ est ancré par la restriction de ϱ_A à B et est équipé par le crochet de A restreint à $\Gamma(B)$. Muni de cette ancre et de ce crochet, $B \rightarrow N$ est bien un algébroïde de Lie, noté aussi par B .

Démonstration. D'abord, on vérifie que le crochet $[\cdot, \cdot]_{|N}$ est bien défini. En effet, soient $u_i \in \Gamma(B)$ et $\tilde{u}_i, \tilde{v}_i \in \Gamma(A)$ deux prolongements pour u_i , pour chaque $i \in \{1, 2\}$. Autrement dit, $\tilde{v}_i|_N = \tilde{u}_i|_N = u_i$. On a donc que $\tilde{u}_i - \tilde{v}_i = f_i \tilde{w}_i$, où $\tilde{w}_i \in \Gamma(A)$ et $f_i \in C^\infty(M)$ est tel que $f_i|_N = 0$. De plus, on voit que

$$[\tilde{u}_1, \tilde{u}_2] - [\tilde{v}_1, \tilde{v}_2] = [\tilde{u}_1 - \tilde{v}_1, \tilde{u}_2] + [\tilde{v}_1, \tilde{u}_2 - \tilde{v}_2].$$

Or,

$$[\tilde{u}_1 - \tilde{v}_1, \tilde{u}_2] = f_1[\tilde{w}_1, \tilde{u}_2] - ((\varrho_A)_\Gamma(\tilde{u}_2).f_1)\tilde{w}_1.$$

Par la condition (1.1), on obtient que $((\varrho_A)_\Gamma(\tilde{u}_2).f_1)|_N = 0$. Par suite, on a que $[\tilde{u}_1 - \tilde{v}_1, \tilde{u}_2]|_N = 0$, puisque $f_1|_N = 0$. De même, on déduit que $[\tilde{v}_1, \tilde{u}_2 - \tilde{v}_2]|_N = 0$ et donc que $[\tilde{u}_1, \tilde{u}_2]|_N = [\tilde{v}_1, \tilde{v}_2]|_N$.

Il reste finalement à montrer que l'application d'ancrage $\varrho_B := \varrho_{A|_B}$ satisfait à la règle de Leibniz. Soient $u_i \in \Gamma(B)$, et $\tilde{u}_i \in \Gamma(A)$ un prolongement de u_i , pour chaque $i \in \{1, 2\}$. Soit $f \in C^\infty(N)$ et $\tilde{f} \in C^\infty(M)$ un prolongement. On a alors que

$$\begin{aligned} [fu_1, u_2] &= [\tilde{f}\tilde{u}_1, \tilde{u}_2]_{|_N} \\ &= \tilde{f}_{|_N}[\tilde{u}_1, \tilde{u}_2]_{|_N} - ((\varrho_A)_\Gamma(\tilde{u}_2) \cdot \tilde{f})\tilde{u}_1_{|_N} \\ &= f[u_1, u_2] - ((\varrho_B)_\Gamma(u_2) \cdot f)u_1. \end{aligned}$$

□

Exemple 1.2.14. Soient M une variété à coins et $(A \rightarrow M, \varrho, [\cdot, \cdot])$ un algébroïde de Lie bordant. Ainsi, pour chaque face fermée F de M , la restriction de A à F est un algébroïde de Lie bordant. En effet, $A|_F$ est un sous-fibré vectoriel et alors la propriété (1.2) est trivialement satisfaite. Puisque l'algébroïde de Lie A est bordant, la propriété (1.1) est aussi satisfaite.

1.3 Structure de Lie à l'infini

Définition 1.3.1. Une structure de Lie à l'infini sur une variété $\overset{\circ}{M}$ est un couple (M, \mathcal{V}) , où M est une variété à coins compacte dont son intérieur est $\overset{\circ}{M}$ et \mathcal{V} est une algèbre de Lie structurale des champs de vecteurs sur M telle que son ancre $\varrho_{\mathcal{V}}$ est un isomorphisme sur $\overset{\circ}{M}$ (donc ${}^{\mathcal{V}}TM|_{\overset{\circ}{M}} \simeq T\overset{\circ}{M}$).

Nous allons mettre en évidence la définition ci-dessus par des exemples illustratifs.

Exemple 1.3.2. Un exemple fondamental est l'algèbre structurale \mathcal{V}_b , vue dans l'Exemple 1.2.2, qui est bien une structure de Lie à l'infini.

Exemple 1.3.3. (Melrose, 1995) Soit M une variété à bord compacte et ρ une fonction de définition du bord. L'espace vectoriel des champs de vecteurs $\mathcal{V}_{sc} = \rho\mathcal{V}_b$

est appelé l'algèbre de Lie de diffusion. Un champ de vecteurs de \mathcal{V}_{sc} est appelé un champs de vecteurs de diffusion ou encore un sc-champ de vecteurs. Le couple (M, \mathcal{V}_{sc}) est alors une structure de Lie à l'infini. En effet, on a que $\forall V_1, V_2 \in \mathcal{V}_{sc}$, $[V_1, V_2] = [\rho V'_1, \rho V'_2] = \rho^2[V'_1, V'_2] + \rho(V'_1 \rho)V'_2 - \rho(V'_2 \rho)V'_1$, où $V'_1, V'_2 \in \mathcal{V}_b$. Soit m un élément de ∂M . Dans un système de coordonnées locales (ρ, y) centré en m , chaque sc-champ de vecteurs $V \in \mathcal{V}_{sc}$ est donnée localement par

$$V = a(\rho, y)\rho^2 \frac{\partial}{\partial \rho} + \sum_{i=1}^{n-1} a_i(\rho, y)\rho \frac{\partial}{\partial y_i},$$

où les coefficients a et a_i sont des fonctions lisses et $y = (y_1, \dots, y_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$.

L'algèbre de Lie \mathcal{V}_{sc} est engendrée par $\rho^2 \frac{\partial}{\partial \rho}$ et $\rho \frac{\partial}{\partial y}$ près du bord. Comme \mathcal{V}_{sc} est un C^∞ module projectif, on peut lui associer un fibré vectoriel noté ${}^{sc}TM$.

Exemple 1.3.4. (Mazzeo et Melrose, 1998) Soit M une variété à bord ∂M , qui est l'espace totale d'un fibré de variétés lisses $\Phi : \partial M \rightarrow S$ de fibre typique Z . Soit $\rho \in C^\infty(M)$ une fonction de définition du bord. On définit alors une algèbre de Lie de champs de vecteurs par

$$\mathcal{V}_\Phi := \{V \in \mathfrak{X}(M) \text{ tel que } V\rho \in \rho^2 C^\infty(M) \text{ et } \Phi_*(V|_{\partial M}) = 0\}.$$

Soit (ρ, y, z) un système de coordonnées locales près du bord, où y est une famille de variables sur la base S de Φ et z est une famille de variables sur les fibres de Φ . Alors dans ce système de coordonnées, \mathcal{V}_Φ est engendré par $\rho^2 \frac{\partial}{\partial \rho}$, $\rho \frac{\partial}{\partial y}$ et $\frac{\partial}{\partial z}$. Il s'agit donc d'un C^∞ module projectif. On déduit que \mathcal{V}_Φ est une structure de Lie à l'infini et qu'on peut lui associer un fibré vectoriel noté ${}^\Phi TM$.

Exemple 1.3.5. Une généralisation de l'exemple précédent est la structure Lie à l'infini des champs de vecteurs à pointes feuilletées au sens de (Rochon, 2012). En effet, soient M une variété compacte à bord ∂M qui est muni d'un feuilletage lisse \mathcal{F} et ρ une fonction de définition du bord. On définit l'espace vectoriel des champs de vecteurs à pointes feuilletés (ou tout simplement \mathcal{F} -champs de vecteurs) par

$$\mathcal{V}_{\mathcal{F}} := \{V \in \mathfrak{X}(M) \text{ tel que } V\rho \in \rho^2 C^\infty(M) \text{ et } V|_{\partial M} \in \Gamma(T\mathcal{F})\}.$$

Alors, on peut voir comme auparavant que $\mathcal{V}_{\mathcal{F}}$ est une structure de Lie à l'infini.

Exemple 1.3.6. Soit M une variété à coins compacte ayant k hypersurfaces bordantes H_1, \dots, H_k . Pour chaque $i \in \{1, \dots, k\}$, on suppose que H_i admet une structure de fibré, $\pi_i : H_i \rightarrow S_i$, où la base S_i et les fibres sont des variétés à coins compactes. On dénote la famille de fibrés vectoriels $(\pi_i)_{i \in \{1, \dots, k\}}$ par π . On dit que (M, π) est une variété à coins fibrés s'il existe un ordre partiel sur les k hypersurfaces bordantes tel que :

1. pour chaque $I \subset \{1, \dots, k\}$ avec $\bigcap_{i \in I} H_i \neq \emptyset$, la famille $(H_i)_{i \in I}$ est totalement ordonnée ;
2. si $H_i < H_j$ alors $H_i \cap H_j \neq \emptyset$, $\pi_{i|_{H_i \cap H_j}} : H_i \cap H_j \rightarrow S_i$ est une submersion surjective, $S_{ji} := \pi_j(H_i \cap H_j)$ est une hypersurface bordante de S_j et il existe une submersion surjective $\pi_{ji} : S_{ji} \rightarrow S_i$ satisfaisant $\pi_{ji} \circ \pi_j = \pi_i$ sur $H_i \cap H_j$;
3. les hypersurfaces bordantes de S_i sont données par S_{ij} pour $H_j < H_i$.

Pour plus de détails, on se réfère le lecteur aux (Albin et Melrose, 2011) et (Albin et al., 2012). À partir de cette définition, il découle directement que chaque base S_j est naturellement une variété à coins fibrés avec la structure fibrée de ses hypersurfaces $(S_{ji})_{i \in \{1, \dots, k\}}$ induite par les fibrés $(\pi_{ji} : S_{ji} \rightarrow S_i)$ avec $H_i < H_j$. De même, chaque fibre de $\pi_i : H_i \rightarrow S_i$ est aussi une variété à coins fibrés. Maintenant, pour ρ_i un choix de fonction définissant H_i compatible avec π , à savoir que pour chaque j tel que $H_i < H_j$ la restriction ρ_i sur H_j est constante le long des fibres de $\pi_j : H_j \rightarrow S_j$, on définit (voir (Conlon et al., 2016))

$$\mathcal{V}_{QFB} = \{V \in \mathcal{V}_b \text{ tel que } \forall i \in \{1, \dots, k\}, V|_{H_i} \text{ est tangent à toutes les fibres de } \pi_i$$

$$\text{et } Vv_i \in v_i^2 C^\infty(M) \text{ où } v_i = \prod_{H_i < H_j} \rho_j\}.$$

Un champ de vecteurs $V \in \mathcal{V}_{QFB}$ est appelé un champ de vecteurs quasi fibré au bord ou simplement un QFB-champ de vecteurs. On peut voir aisément que \mathcal{V}_{QFB}

est fermé sous le crochet de Lie des champs de vecteurs. Soit m un élément d'une face fermée F de M de profondeur l . Après un nouvel étiquetage, si nécessaire, on peut supposer que $F = H_1 \cap \dots \cap H_l$ de sorte que $H_1 < H_2 < \dots < H_l$. On prend alors un petit voisinage ouvert de m tel que π_i est trivial pour chaque $i \in \{1, \dots, l\}$. On considère le k_i -tuplet des fonctions $y_i = (y_i^1, \dots, y_i^{k_i})$ et $z = (z_1, \dots, z_q)$ tel que $(\rho_1, y_1, \dots, \rho_l, y_l, z)$ définit le système de coordonnées locales centré de m qui vérifie que sur chaque H_i , $(\rho_1, y_1, \dots, \rho_{i-1}, y_{i-1}, y_i)$ induit des coordonnées sur la base S_i avec π_i correspondant à l'application

$$(\rho_1, y_1, \dots, \widehat{\rho_i}, y_i, \dots, \rho_l, y_l, z) \mapsto (\rho_1, y_1, \dots, \rho_{i-1}, y_{i-1}, y_i),$$

où le symbole $\widehat{}$ surmontant une lettre indique qu'il faut l'omettre. Et par suite, on peut vérifier que dans ce système de coordonnées locales, \mathcal{V}_{QFB} est engendrée par

$$\begin{aligned} v_1 \rho_1 \frac{\partial}{\partial \rho_1}, v_1 \frac{\partial}{\partial y_1^{n_1}}, v_2 \rho_2 \frac{\partial}{\partial \rho_2} - v_1 \frac{\partial}{\partial \rho_1}, v_2 \frac{\partial}{\partial y_2^{n_2}}, \\ \dots, v_l \rho_l \frac{\partial}{\partial \rho_l} - v_{l-1} \frac{\partial}{\partial \rho_{l-1}}, v_l \frac{\partial}{\partial y_l^{n_l}}, \frac{\partial}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial z_q} \end{aligned}$$

pour $n_i \in \{1, \dots, k_i\}$ et $v_i = \prod_{p=i}^l \rho_p$. Il s'agit donc d'un C^∞ module projectif et on peut lui associer un fibré vectoriel noté ${}^{QFB}TM$. On déduit que (M, \mathcal{V}_{QFB}) est une structure de Lie à l'infini.

Exemple 1.3.7. L'algèbre de Lie (M, \mathcal{V}_S) apparue dans (Debord et al., 2015) est une structure de Lie à l'infini car elle est en tout point similaire à celle de la structure (M, \mathcal{V}_{QFB}) , sauf qu'on exige que $V\rho_i \in \rho_i^2 C^\infty(M)$ pour chaque i au lieu de demander que $Vv_i \in v_i^2 C^\infty(M)$. L'exemple d'algèbre de Lie des ϕ -champs de vecteurs, introduite dans (Mazzeo et Melrose, 1998), définit un cas particulier de (M, \mathcal{V}_{QFB}) en prenant M une variété à bord ∂M qui est l'espace totale d'un fibré $\pi := \phi : \partial M \rightarrow S$. Elle correspond à l'Exemple 1.3.3 si $S = \partial M$ et $\pi = \text{Id}$.

Exemple 1.3.8. Soit (M, π) une variété à coins fibrés. Si $S_i = H_i$ et $\pi_i = \text{Id}$ pour chaque hypersurface bordante maximale H_i , alors un QFB-champ de vecteurs est

dit un QAC-champs de vecteurs ou encore un champs de vecteurs quasi asymptotiquement conique. L'ensemble des QAC-champs de vecteurs est dénoté par \mathcal{V}_{QAC} . D'où (M, \mathcal{V}_{QAC}) est une structure de Lie à l'infini.

Exemple 1.3.9. Soient M une variété compacte avec bord ∂M et ρ une fonction de définition du bord. Soit une 1-forme lisse $\Theta \in C^\infty(M; T^*M)$ telle que $\iota^*\Theta$ ne s'annule nulle part sur M , où $\iota : \partial M \rightarrow M$ est l'inclusion canonique. Soit

$$\mathcal{V}_\Theta := \{V \in \mathcal{V}_b \mid V|_{\partial M} = 0 \text{ et } \Theta(V) \in \rho^2 C^\infty(M)\}.$$

Alors, \mathcal{V}_Θ est une structure de Lie à l'infini, appelé Θ -structure. Pour la description d'une base locale près du bord, et pour plus détails, on se réfère à l'article (Epstein et al., 1991).

Définition 1.3.10. Une structure de Lie évanescence à l'infini est une structure de Lie à l'infini \mathcal{V} telle que pour tout $V \in \mathcal{V}$, on a que $V|_{\partial M} = 0$.

Exemple 1.3.11. On considère, par exemple M une variété à coins compacte de dimension n et

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_0 &:= \{V \in \mathcal{V}_b \text{ tel que pour chaque } H \in \mathcal{M}_1(M), V(m)|_H = 0 \forall m \in H\} \\ &= \rho_1 \dots \rho_k \mathfrak{X}(M), \end{aligned}$$

où ρ_i est une fonction de définition associée à l'hypersurface bordante H_i avec $\partial M = \bigcup_{i=1}^k H_i$. Il est clair que chaque champ de vecteurs de \mathcal{V}_0 s'annule sur toutes les hypersurfaces bordantes de M . Ce sont les 0-champs de vecteurs de Mazzeo-Melrose (Mazzeo et Melrose, 1987). Pour prouver que (M, \mathcal{V}_0) est effectivement une structure de Lie à l'infini, il faut vérifier que \mathcal{V}_0 est un C^∞ module projectif fermé sous le crochet de Lie des champs de vecteurs. En effet, soit m un élément de F une face fermée de M de profondeur l . Sur $(\rho_1, \dots, \rho_l, y_1, \dots, y_{n-l})$ un système de coordonnées locales en m , un champ de vecteurs $V \in \mathcal{V}_0$ est de la forme :

$$V = \sum_{i=1}^l a_i \rho_1 \dots \rho_k \frac{\partial}{\partial \rho_i} + \sum_{i=1}^{n-l} b_i \rho_1 \dots \rho_k \frac{\partial}{\partial y_i},$$

où les coefficients a_i et b_i sont des fonctions lisses. Par un calcul simple, on a que $[V, V'] \in \mathcal{V}_0$, pour tout $V, V' \in \mathcal{V}_0$. De plus, sur un voisinage ouvert de m , l'algèbre de Lie \mathcal{V}_0 est engendrée par $\rho_1 \dots \rho_k \frac{\partial}{\partial \rho_i}$, $i \in \{1, \dots, l\}$ et $\rho_1 \dots \rho_k \frac{\partial}{\partial y_i}$, $i \in \{l, \dots, n-l\}$. Ainsi, \mathcal{V}_0 est C^∞ module projectif.

Exemple 1.3.12. Il y a plusieurs exemples de variétés à bord avec une structure de Lie évanescence à l'infini. On prend par exemples, \mathcal{V}_0 ci-haut, \mathcal{V}_{sc} (Exemple 1.3.3) et \mathcal{V}_{de} apparue dans (Lauter et Moroianu, 2001). Un autre exemple important est $\mathcal{V}_{\mathbb{K}\theta}$ (voir l'article (Epstein et al., 1991)), le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ est exactement l'Exemple 1.3.9.

1.4 Structure de Lie fibrée à l'infini

Dans cette section, nous allons restreindre notre attention à des structures de Lie qui induisent dans un sens précis des structures de fibrés au bord. Cette restriction sera très utile par la suite. De plus, elle a le mérite d'être très flexible, puisqu'elle inclut tous les exemples de structures de Lie décrits précédemment.

Définition 1.4.1. Soient M et S deux variétés à coins compactes. Un fibré d'algébroïdes de Lie associé à un fibré $\phi : M \rightarrow S$ est un algébroïde de Lie A tel que son ancre $\varrho : A \rightarrow TM$ a son image dans le tangent vertical $T(M/S) \subset T(M)$.

Exemple 1.4.2. Soient S, Z deux variétés à coins compactes et $\text{pr} : S \times Z \rightarrow Z$ la projection canonique. Soit $\pi : A \rightarrow Z$ un algébroïde de Lie sur Z avec $\varrho : A \rightarrow TZ$ l'ancre associée. Le fibré d'algébroïdes de Lie trivial sur $S \times Z$ induisant par A est l'algébroïde de Lie $S \times A$ donné par la projection $\pi' = \text{Id} \times \pi : S \times A \rightarrow S \times Z$ avec l'ancre associée $\text{pr}^* \varrho : S \times A \rightarrow T(S \times Z)$ définie par

$$\text{pr}^* \varrho(s, a) = \varrho(a) \in T_{\pi(a)}Z \subset T_{\pi'(s,a)}(S \times Z) = T_s S \times T_{\pi(a)}Z.$$

Définition 1.4.3. Un fibré de structures de Lie à l'infini associé à un fibré $\phi : M \rightarrow S$ est un fibré d'algébroïdes de Lie qui induit par restriction une structure

de Lie à l'infini sur chaque fibre telle que pour chaque $s \in S$, il existe un voisinage ouvert U et une trivialisatation $\Psi_U : \phi^{-1}(U) \rightarrow U \times Z$ qui induit un isomorphisme de fibrés d'algébroides de Lie, où $U \times Z$ est muni du fibré d'algébroides de Lie trivial induit par un certain algébroïde de Lie sur Z .

Définition 1.4.4. Soit M une variété à coins compacte. Une structure de Lie fibrée à l'infini (M, \mathcal{V}_{SF}) est une structure de Lie à l'infini telle que pour toute face fermée F , la restriction \mathcal{V}_{SF} sur F , notée \mathcal{V}_F , induit un fibré de structures de Lie à l'infini associé à un certain fibré $\phi_F : F \rightarrow S_F$.

Proposition 1.4.5. Si (M, \mathcal{V}_{SF}) est une structure de Lie fibrée à l'infini, alors :

1. Si F_1 et F_2 sont deux faces fermées de M avec $F_1 \subset F_2$, alors il existe une submersion surjective ϕ_{12} de S_{F_1} dans $\phi_{F_2}(F_1)$ telle que $\phi_{F_2|_{F_1}} := \phi_{12} \circ \phi_{F_1}$;
2. Pour toute face fermée F de M , il existe un morphisme surjectif d'algébroides de Lie $\pi_F : \mathcal{V}_{SF}T_F M \rightarrow \mathcal{V}_F T F$.

Démonstration. On a que, pour $F_1 \subset F_2$, $\mathcal{V}_{F_2|_{F_1}} = \mathcal{V}_{SF|_{F_2|_{F_1}}} = \mathcal{V}_{F_1}$, donc les éléments de \mathcal{V}_{F_1} doivent aussi être tangents aux fibres de $\phi_{F_2|_{F_1}}$, de sorte que chaque fibre de ϕ_{F_1} doit être incluse dans une fibre de $\phi_{F_2|_{F_1}}$. En effet, si tel n'était pas le cas, il existerait $s_1 \in S_1$, $p \in \phi_{F_1}^{-1}(s_1)$ et $\xi \in \mathcal{V}_{F_1}T_p F_1 \subset \mathcal{V}_{F_2}T_p F_2$ transverse à la fibre de $\phi_{F_2} : F_2 \rightarrow S_2$ passant par p , contredisant la définition de ϕ_{F_2} . Pour la propriété 1 de la Proposition 1.4.5, on peut donc définir $\phi_{12}(s_1)$ comme étant l'élément $s_2 \in \phi_{F_2|_{F_1}} \subset S_2$ tel que $\phi_{F_1}^{-1}(s_1) \subset \phi_{F_2}^{-1}(s_2)$.

Pour la propriété 2 de la Proposition 1.4.5, on sait que $\mathcal{V}_{SF|_F} = \mathcal{V}_F$ et $\varrho_{\mathcal{V}_{SF|_F}} := \varrho_{\mathcal{V}_F}$ induisant le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
\Gamma(\mathcal{V}_{SF}TM) & \xrightarrow{(\pi_F)_\Gamma} & \Gamma(\mathcal{V}_F TF) \\
& \searrow (\varrho_{\mathcal{V}_{SF}})_\Gamma & \downarrow (\varrho_{\mathcal{V}_F})_\Gamma \\
& & \Gamma(TF),
\end{array}$$

où $(\pi_F)_\Gamma$ est le morphisme de restriction de structures de Lie à l'infini qui préserve le C^∞ module projectif. Par le théorème Serre-Swan (Karoubi, 2008), ce morphisme induit un morphisme surjectif d'algébroïdes de Lie

$$\pi_F : \mathcal{V}_{SF}T_F M \rightarrow \mathcal{V}_F TF. \quad \square$$

Remarque 1.4.6. *Toute structure de Lie évanescence à l'infini est un cas particulier de structure de Lie fibrée à l'infini en prenant $\phi_F : F \rightarrow F$ l'application d'identité pour toute face F , puisque $\mathcal{V}_{SF|_F} = 0$.*

Définition 1.4.7. *Un fibré de structures de Lie fibrées à l'infini par rapport à $\phi : M \rightarrow S$ est un fibré de structures de Lie à l'infini induisant par restriction une structure de Lie fibrée à l'infini sur chaque fibre de sorte que pour chaque face F de M telle que $\phi|_F : F \rightarrow S$ est surjectif :*

1. on a un fibré $\phi_F : F \rightarrow S_F$ et une submersion surjective $\alpha_F : S_F \rightarrow S$ de sorte que $\alpha_F \circ \phi_F = \phi|_F$;
2. pour tout $s \in S$, le fibré sur $(\phi|_F)^{-1}(s)$ induit par la structure de Lie fibrée à l'infini sur $\phi^{-1}(s)$, est précisément la restriction de ϕ_F à $(\phi|_F)^{-1}(s)$.

Proposition 1.4.8. *Si (M, \mathcal{V}_{SF}) est une structure de Lie fibrée à l'infini alors (F, \mathcal{V}_F) est un fibré de structures de Lie fibrées à l'infini.*

Démonstration. Il suffit de vérifier que chaque fibre de $\phi_F : F \rightarrow S_F$, munie de la restriction \mathcal{V}_F , est une structure de Lie fibrée à l'infini sur chaque fibre.

Prenant $s \in S_F$, on note par \mathcal{V}_{F_s} la structure de Lie à l'infini de fibre $F_s := \phi_F^{-1}(s)$ induite par restriction. Soit Ω une face fermée de F et posons $\Omega_s := \Omega \cap F_s$. Alors soit $\Omega_s = F_s$, soit Ω_s est une face fermée de F_s de codimension strictement positive. Dans ce dernier cas, la propriété 1 de la Proposition 1.4.5 appliquée à $F_1 = \Omega$ et $F_2 = F$ nous donne une submersion surjective $\alpha_\Omega : S_\Omega \rightarrow S_F$ telle que $\phi_{F|\Omega} = \alpha_\Omega \circ \phi_\Omega$ comme dans 1 de la définition précédente de sorte que $\phi_{\Omega|\Omega_s}$ est le fibré sur Ω_s qui confère à F_s une structure de Lie fibrée à l'infini. \square

Exemple 1.4.9. *L'Exemple 1.3.4 est une structure de Lie fibrée à l'infini, ce qui n'est pas le cas pour la structure $\mathcal{V}_{\mathcal{F}}$ de l'Exemple 1.3.5 lorsque \mathcal{F} est un feuilletage qui ne provient pas d'une structure de fibré.*

Exemple 1.4.10. *La structure de Lie à l'infini \mathcal{V}_b est une structure de Lie fibrée à l'infini telle que chaque fibré $\phi_F : F \rightarrow \{0\}$ est une projection canonique de la base F dans un point. De plus, on a une suite exacte*

$$0 \rightarrow {}^bNF \hookrightarrow {}^bT_F(M) \twoheadrightarrow {}^bTF \rightarrow 0, \quad (1.3)$$

où ${}^bNF := \text{Ker}(\pi)$ est le noyau de la projection canonique $\pi : {}^bT_F(M) \twoheadrightarrow {}^bTF$ par restriction.

Exemple 1.4.11. *Dans l'Exemple 1.3.6, on suppose que M est une variété compacte à coins fibrés de profondeur l associée à une famille $(H_i)_{i \in \{1, \dots, l\}}$ d'hyper-surfaces bordantes. On peut voir que chaque fibre de $\pi_i : H_i \rightarrow S_i$ est une variété à coins fibrés. Précisément, si $s \in S_i$ alors $H_{i,s} := \pi_i^{-1}(s)$ est une variété compacte à coins fibrés, où les hypersurfaces bordantes sont $H_{i,s} \cap H_j$ avec $H_i < H_j$ et les fibrations associées sont obtenues par restriction des π_j . Par conséquent, la restriction d'un QFB-champ de vecteurs de $(\mathcal{V}_{\text{QFB}}, M)$ sur chaque fibre $H_{i,s} := \pi_i^{-1}(s)$ nous donne aussi un QFB-champ de vecteurs sur la fibre. Maintenant, soit $F := H_1 \cap \dots \cap H_k$ une face fermée de profondeur $k \in \{1, \dots, l\}$ de sorte que $H_1 < H_2 < \dots < H_k$, après un ré-étiquetage, si nécessaire. Il suffit de*

prendre $\phi_F := \pi_{k|_F}$ pour voir que la structure \mathcal{V}_{QFB} est une structure de Lie fibrée à l'infini, pourvu bien sûr que pour chaque fibré la condition de trivialisatation locale de la Définition 1.4.3 soit satisfaite.

Proposition 1.4.12. *Le produit cartésien de deux structures de Lie fibrées à l'infini est une structure de Lie fibrée à l'infini.*

Démonstration. Étant données (M_1, \mathcal{V}_1) et (M_2, \mathcal{V}_2) deux structures de Lie fibrées à l'infini, leur produit cartésien est clairement une structure de Lie à l'infini

$$(M = M_1 \times M_2, \mathcal{V} = \Gamma(\text{pr}_1^* \mathcal{V}_1 TM_1) \otimes_{C^\infty(M)} \Gamma(\text{pr}_2^* \mathcal{V}_2 TM_2)),$$

où $\text{pr}_i : M_1 \times M_2 \rightarrow M_i$ est la projection canonique. Pour chaque face fermée $F := F_1 \times F_2$ de M , il suffit alors de prendre

$$\phi_F := \phi_{F_1} \times \phi_{F_2} : F \rightarrow S_F := S_{F_1} \times S_{F_2}$$

avec S_{F_i} un point lorsque $F_i = M_i$. □

1.5 Variété riemannienne avec une structure de Lie à l'infini

Soient (M, \mathcal{V}) une structure de Lie à l'infini et $\varrho_{\mathcal{V}} : {}^{\mathcal{V}}TM \rightarrow TM$ l'ancre associée.

Définition 1.5.1. *Une métrique de $\overset{\circ}{M}$ compatible avec une structure de Lie à l'infini (M, \mathcal{V}) est une métrique riemannienne sur $\overset{\circ}{M}$ définie par*

$$g = (\varrho_{\mathcal{V}}^{-1})^*(h_{|\overset{\circ}{M}}),$$

pour une certaine métrique euclidienne $h \in \Gamma(\text{Sym}^2({}^{\mathcal{V}}T^*M))$. On dit alors que $(\overset{\circ}{M}, g)$ est une variété riemannienne avec une structure de Lie à l'infini.

Nous pouvons montrer alors que la variété $(\overset{\circ}{M}, g)$ est nécessairement complète, voir la section 3.4 (Ammann *et al.*, 2004) et, si $\partial M \neq \emptyset$, que le volume est infini, ce que nous allons démontrer dans la prochaine sous-section.

Exemple 1.5.2. (*Variété à bout asymptotiquement cylindrique*). Soit $\overset{\circ}{M}$ une variété riemannienne complète non-compacte de dimension n munie d'une métrique complète g telle qu'il existe un compact $K \subset \overset{\circ}{M}$ et une variété compacte riemannienne $(\partial M, g_{\partial M})$ de sorte que $\overset{\circ}{M} \setminus K$ peut être paramétriser par un voisinage tubulaire du bord $\partial M \times (0, +\infty) \simeq \overset{\circ}{M} \setminus K$. On suppose que le cylindre $\partial M \times (0, +\infty)$ soit muni de la métrique produit $g_{\text{cyl}} = dx^2 + g_{\partial M}$. Par un recollement à l'infini de $\overset{\circ}{M} \setminus K$ par ∂M , on obtient une compactification $M := \overset{\circ}{M} \cup \partial M$ qui est une variété à bord compacte. Et par suite, le changement de variable $\rho = e^{-x}$ donne une fonction de définition pour ∂M telle que $\frac{\partial}{\partial x} = -\rho \frac{\partial}{\partial \rho}$. Ceci suggère de considérer ${}^b T^*M$. On dit alors que $(\overset{\circ}{M}, g)$ est une variété à bout asymptotiquement cylindrique si, près d'un voisinage tubulaire du bord $\partial M \times [0, 1]$, il existe $\gamma > 0$ tel que

$$g - \left(\frac{d\rho^2}{\rho^2} + g_{\partial M} \right) \in \rho^\gamma C_b^\infty(M; \text{Sym}^2({}^b T^*M)) = \rho^\gamma C_b^\infty(M) \otimes_{C^\infty(M)} \Gamma(\text{Sym}^2({}^b T^*M)),$$

où $C_b^\infty(M) = \{f \in C^\infty(\overset{\circ}{M}) \mid \forall k \in \mathbb{N}_0, \{V_1, \dots, V_k\} \subset \mathcal{V}_b, \sup_{\overset{\circ}{M}} |V_1 \dots V_k f| < \infty\}$. Lorsque $g - \left(\frac{d\rho^2}{\rho^2} + g_{\partial M} \right) \in \rho C_b^\infty(M; \text{Sym}^2({}^b T^*M))$, c'est un exemple de métrique compatible avec la structure de Lie à l'infini \mathcal{V}_b .

Exemple 1.5.3. (*Variété à bout asymptotiquement conique*). Soit g_b une b -métrique qui est une métrique compatible avec une structure de Lie à l'infini (M, \mathcal{V}_b) , où M est une variété à bord compacte. On appelle par une métrique de diffusion une métrique complète de $\overset{\circ}{M}$ compatible avec une structure de Lie à l'infini (M, \mathcal{V}_{sc}) , donnée par $g_{sc} := \frac{g_b}{\rho^2}$. On la dit une métrique de diffusion de type produit s'il existe un voisinage tubulaire du bord $c : \partial M \times [0, \varepsilon) \rightarrow M$ tel que

$$c^* g_{sc} = \frac{d\rho^2}{\rho^4} + \frac{g_{\partial M}}{\rho^2}, \quad g_{\partial M} \in C^\infty(\partial M; \text{Sym}^2(T\partial M)),$$

ou de manière équivalent,

$$c^* g_{sc} = dt^2 + t^2 g_{\partial M}, \quad t \in (-\log \varepsilon, +\infty).$$

On dit alors que $(\overset{\circ}{M}, g)$ est une variété à bout asymptotiquement conique si $g - g_p \in \rho C^\infty(M; \text{Sym}^2({}^{sc}T^*M))$, où g_p est une métrique diffusion de type produit. Dans ce cas, g est compatible avec \mathcal{V}_{sc} . Un exemple simple est le cas euclidien : la compactification radiale de \mathbb{R}^n avec bord la sphère \mathbb{S}^{n-1} . Cette compactification est donnée par la projection stéographique SP définie par

$$SP : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{S}_+^n := \{x = (x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid |x| = 1 \text{ et } x_0 \geq 0\},$$

$$SP(x) = \left(\frac{1}{(1 + |x|^2)^{\frac{1}{2}}}, \frac{x}{(1 + |x|^2)^{\frac{1}{2}}} \right).$$

Puisque \mathbb{S}_+^n est une variété à bord compacte, SP permet d'identifier \mathbb{R}^n à $(\mathbb{S}_+^n)_0 := \mathbb{S}_+^n \setminus \partial\mathbb{S}_+^n$. La métrique euclidienne est une métrique de diffusion de \mathbb{R}^n qui est donnée par

$$|dx|^2 = dr^2 + r^2 |dw|^2 = \frac{d\rho^2}{\rho^4} + \frac{|dw|^2}{\rho^2}, \quad |x| = r = \frac{1}{\rho}, \quad w = \frac{x}{|x|},$$

où $|dw|^2$ est la métrique standard de la sphère $\mathbb{S}^{n-1} = \partial\mathbb{S}_+^n$.

Proposition 1.5.4. Deux métriques g_1 et g_2 de $\overset{\circ}{M}$ compatibles avec une structure de Lie à l'infini (M, \mathcal{V}) sont quasi-isométriques, c'est-à-dire qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$C^{-1}g_2(X, X) \leq g_1(X, X) \leq Cg_2(X, X) \quad \forall X \in T\overset{\circ}{M}.$$

En particulier, $C^{-1}d_2 \leq d_1 \leq Cd_2$, où d_i est la distance sur $\overset{\circ}{M}$ correspondante à g_i .

Démonstration. Sur chaque fibre de $\mathcal{V}TM$, on a une trivialisatoin locale. L'équivalence des normes de \mathbb{R}^n nous assure l'inégalité escomptée localement. Comme M est compacte, on obtient le résultat voulu globalement sur M , et donc sur $\overset{\circ}{M}$ par restriction. \square

On dénote par vol_n la forme volume de la métrique riemannienne d'une variété riemannienne $\overset{\circ}{M}$ avec une structure de Lie à l'infini (M, \mathcal{V}) .

Proposition 1.5.5. (*Proposition 3.1 dans (Ammann et al., 2004)*) Soit $f \geq 0$ une fonction lisse sur M . Si $\int_{\overset{\circ}{M}} f \text{vol}_n < +\infty$ alors f s'annule sur chaque hypersurface bordante de M . En particulier, le volume de chaque variété riemannienne non-compacte avec une structure de Lie à l'infini est infini.

Démonstration. Sans perte de généralité, on suppose que M est une variété à bord compacte. Soit vol'_n une forme volume sur M associée à une autre métrique sur M qui est lisse jusqu'au bord. On a alors que $\text{vol}_n \geq C\rho^{-1} \text{vol}'_n$ avec ρ une fonction de définition du bord et C une constante positive. D'où, si f est non nulle sur ∂M , alors

$$\int_{\overset{\circ}{M}} f \text{vol}_n \geq \int_{\overset{\circ}{M}} C\rho^{-1} f \text{vol}'_n > +\infty.$$

□

1.6 Connexion et courbure

Définition 1.6.1. Soit $E \rightarrow M$ un fibré vectoriel. Une $\mathcal{V}TM$ -connexion sur E , notée aussi ∇ , est une application

$$\nabla : \Gamma(\mathcal{V}TM) \times \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E)$$

$$(X, \mu) \mapsto \nabla_X \mu,$$

qui satisfait aux propriétés suivantes :

1. $\nabla_{fX+gY} \mu = f \nabla_X \mu + g \nabla_Y \mu$, $\forall f, g \in C^\infty(M)$, $\forall X, Y \in \Gamma(\mathcal{V}TM)$,
2. $\nabla_X (a\mu + a'\mu') = a \nabla_X \mu + a' \nabla_X \mu'$, $\forall a, a' \in \mathbb{R}$,
3. $\nabla_X (f\mu) = \varrho_{\mathcal{V}}(X)(f)\mu + f \nabla_X \mu$, $\forall f \in C^\infty(M)$.

Proposition 1.6.2. (Lemme 3.2 dans (Ammann et al., 2004)) Soit $(\overset{\circ}{M}, g)$ une variété riemannienne avec une structure de Lie à l'infini (M, \mathcal{V}) . Alors la connexion de Levi-Civita sur $T\overset{\circ}{M}$,

$$\nabla : \mathfrak{X}(\overset{\circ}{M}) \times \mathfrak{X}(\overset{\circ}{M}) \rightarrow \mathfrak{X}(\overset{\circ}{M}),$$

s'étend en une connexion affine, notée aussi

$$\nabla : \Gamma(\mathcal{V}TM) \times \Gamma(\mathcal{V}TM) \rightarrow \Gamma(\mathcal{V}TM),$$

ayant les mêmes propriétés de la connexion usuelle de Levi-Civita (symétrique et compatible). Autrement dit, la connexion de Levi-Civita sur $T\overset{\circ}{M}$ s'étend en une $\mathcal{V}TM$ -connexion de Levi-Civita sur $\mathcal{V}TM$.

Démonstration. C'est une conséquence directe de la formule de Koszul :

$$\begin{aligned} 2\langle \nabla_X Y, Z \rangle &= \langle [X, Y], Z \rangle - \langle [Y, Z], X \rangle + \langle [Z, X], Y \rangle \\ &\quad + X\langle Y, Z \rangle + Y\langle Z, X \rangle - Z\langle X, Y \rangle, \end{aligned}$$

$$\forall X, Y \in \Gamma(\mathcal{V}TM). \quad \square$$

Remarque 1.6.3. Le même raisonnement implique que la connexion de Levi-Civita sur $T^*\overset{\circ}{M}$ (respectivement $(\otimes^k T^*\overset{\circ}{M}) \otimes (\otimes^l T\overset{\circ}{M})$) s'étend en une $\mathcal{V}TM$ -connexion sur $\mathcal{V}T^*M$ (respectivement $(\otimes^k \mathcal{V}T^*M) \otimes (\otimes^l \mathcal{V}TM)$).

Corollaire 1.6.4. (Corollaire 3.3 dans (Ammann et al., 2004)) Soient $(\overset{\circ}{M}, g)$ une variété riemannienne avec une structure de Lie à l'infini (M, \mathcal{V}) et ∇ la $\mathcal{V}TM$ -connexion de Levi-Civita. $\forall X, Y \in \Gamma(\mathcal{V}TM)$, l'endomorphisme de courbure de Riemann $R(X, Y)$ s'étend en un endomorphisme sur $\mathcal{V}TM$. De plus, chaque dérivée contravariante,

$$\nabla^k R \in \Gamma((\otimes^k T^*\overset{\circ}{M}) \otimes (\wedge^2 T^*\overset{\circ}{M}) \otimes \text{End}(T\overset{\circ}{M})),$$

est bornée sur $\overset{\circ}{M}$ et s'étend en une section de

$$(\otimes^k \nu T^* M) \otimes (\wedge^2 \nu T^* M) \otimes \text{End}(\nu TM).$$

Démonstration. Soit $X, Y \in \Gamma(\nu TM)$. Par définition, on sait que

$$R(X, Y) := \nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X - \nabla_{[X, Y]}.$$

On a que ∇_X , ∇_Y et $\nabla_{[X, Y]}$ sont des opérateurs différentiels sur νTM , par la Proposition 1.6.2. Alors $R(X, Y)$ est un opérateur différentiel sur νTM , qui est un tenseur sur $\overset{\circ}{M}$. Puisque $\overset{\circ}{M}$ est dense dans M , on a bien que

$$R \in \Gamma((\wedge^2 \nu T^* M) \otimes \text{End}(\nu TM)).$$

On applique la νTM -connexion de Levi-Civita sur $\otimes^k \nu T^* M$ pour obtenir

$$\nabla^k R \in \Gamma((\otimes^k \nu T^* M) \otimes (\wedge^2 \nu T^* M) \otimes \text{End}(\nu TM)).$$

Le contrôle de $\nabla^k R$ résulte du fait que M est compacte. □

Avant de conclure, nous rappelons qu'un exemple de géométrie bornée est une variété riemannienne complète dont le rayon d'injectivité est strictement positif et les dérivées contravariantes du tenseur de courbure sont bornées. Ainsi, toute variété avec une structure de Lie à l'infini est un exemple de géométrie bornée dès que le rayon d'injectivité est strictement positif. Par un résultat de Amann, Lauter et Nistor (voir le Corollaire 3.20 dans (Amann *et al.*, 2004)), étant donné une structure de Lie à l'infini, soit le rayon d'injectivité est strictement positif pour toutes les métriques compatibles, soit il ne l'est pour aucune. De plus, Ammann, Lauter et Nistor donnent un critère suffisant pour que le rayon d'injectivité soit strictement positif. Comme, il n'y a aucun exemple connu de métrique compatible avec une structure de Lie à l'infini ayant un rayon d'injectivité nul, il est conjecturé que le rayon d'injectivité est toujours strictement positif pour une métrique

compatible avec une structure de Lie à l'infini, voir la Conjecture 3.11. (Ammann *et al.*, 2004). Cette conjecture n'a pas encore été prouvée sauf pour des métriques particulières comme les métriques QAC et QFB (voir la Proposition 1.27 (Conlon *et al.*, 2016)).

CHAPITRE II

ÉQUATION PARABOLIQUE ET POLYHOMOGENÉITÉ DES SOLUTIONS

Dans le présent chapitre, nous généralisons les travaux de (Rochon, 2015) pour certaines équations \mathcal{V}_{SF} -paraboliques linéaires, à savoir des équations paraboliques linéaires déterminées par une structure de Lie fibrée à l'infini. Plus précisément, nous montrons que les solutions de ces équations admettent un développement polyhomogène à l'infini pourvu que certaines conditions naturelles soient satisfaites.

2.1 Espaces de Hölder

Dans ce qui suit, soit $(\overset{\circ}{M}, g)$ une variété riemannienne non-compacte complète avec une structure de Lie à l'infini (M, \mathcal{V}) . La connexion de Levi-Civita ∇ sur $T\overset{\circ}{M}$ induit une connexion de Levi-Civita sur $\Gamma(T^{(k,l)}\overset{\circ}{M}) := \Gamma((\otimes^k T^*\overset{\circ}{M}) \otimes (\otimes^l T\overset{\circ}{M}))$, notée aussi ∇ . Plus généralement, si $E \rightarrow M$ est un fibré vectoriel euclidien avec une métrique induite sur $\Gamma(T^{(k,l)}\overset{\circ}{M} \otimes E)$, notée aussi g , alors un choix de $\mathcal{V}TM$ -connexion pour E et la connexion de Levi-Civita sur $\Gamma(T^{(k,l)}\overset{\circ}{M})$ induisent une connexion sur $\Gamma(T^{(k,l)}\overset{\circ}{M} \otimes E)$, notée aussi ∇ .

Définition 2.1.1. *On définit l'espace de Banach $C_{\mathcal{V}}^k(\overset{\circ}{M}; E)$ par l'ensemble des sections de classe C^k de E telles que toutes ses dérivées contravariantes jusqu'à*

l'ordre k sont uniformément bornées, c'est-à-dire que

$$C_{\mathcal{V}}^k(\mathring{M}; E) := \{\mu \in C^k(\mathring{M}; E) \mid \sup_{m \in \mathring{M}} |\nabla^j \mu|_g < +\infty \forall j \in \{0, \dots, k\}\}.$$

Il est muni de la norme définie par

$$\|\mu\|_k = \sum_{j=0}^k \sup_{m \in \mathring{M}} |\nabla^j \mu|_g.$$

L'espace de Fréchet associé est défini par

$$C_{\mathcal{V}}^{\infty}(\mathring{M}; E) = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} C_{\mathcal{V}}^k(\mathring{M}; E)$$

et a pour semi-normes $\|\cdot\|_k$ pour $k \in \mathbb{N}$.

Remarque 2.1.2. On a que $C^{\infty}(M; E) \subsetneq C_{\mathcal{V}}^{\infty}(\mathring{M}; E)$. Autrement dit, chaque section de $C_{\mathcal{V}}^k(\mathring{M}; E)$ n'exige que le contrôle de toutes ses dérivées contravariantes, mais pas qu'elle s'étend continûment au bord. Par exemple, si ρ_H est une fonction de définition d'une hypersurface bordante H de M telle que $\rho_H(m) < 1$, $\forall m \in M$, alors la fonction $(\log \rho_H)^{-\eta}$, où $\eta \in \mathbb{N}$, n'est pas une fonction lisse sur M , mais est un élément de $C_{\mathcal{V}}^{\infty}(\mathring{M})$.

Définition 2.1.3. Étant donné $\alpha \in (0, 1]$, on définit l'espace de Hölder $C_{\mathcal{V}}^{0,\alpha}(\mathring{M}; E)$ comme étant l'espace de Banach

$$\{\mu \in C_{\mathcal{V}}^0(\mathring{M}; E) \mid \|\mu\|_{0,\alpha} < +\infty\}$$

avec norme $\|\cdot\|_{0,\alpha}$ donnée par

$$\|\mu\|_{0,\alpha} := \|\mu\|_0 + \sup \left\{ \frac{|\psi_{\gamma}(\mu(\gamma(0))) - \mu(\gamma(1))|_g}{l(\gamma)^{\alpha}} \mid \gamma \in C^{\infty}([0, 1]; \mathring{M}) \text{ et } \gamma(0) \neq \gamma(1) \right\}$$

où $\psi_{\gamma} : E_{|\gamma(0)} \rightarrow E_{|\gamma(1)}$ est le transport parallèle le long de γ et $l(\gamma)$ est la longueur de γ associée à la métrique g .

Pour $k \in \mathbb{N}$, l'espace de Hölder $C_{\mathcal{V}}^{k,\alpha}(\mathring{M}; E)$ est l'espace de Banach défini par

$$\{\mu \in C_{\mathcal{V}}^k(\mathring{M}; E) \mid \nabla^k \mu \in C_{\mathcal{V}}^{0,\alpha}(\mathring{M}; T^{(k,0)} \mathring{M} \otimes E)\}$$

avec norme donnée par

$$\|\mu\|_{k,\alpha} := \|\mu\|_{k-1} + \|\nabla^k \mu\|_{0,\alpha}.$$

Remarque 2.1.4. Par la Proposition 1.5.4 et le Corollaire 1.6.4, la définition de ces espaces et leur topologie dépendent seulement de la structure de Lie à l'infini, pas du choix de métrique compatible. Les normes cependant dépendent clairement du choix de la métrique g .

Maintenant, voici une version parabolique de ces espaces. Dénotons aussi par E le tiré en arrière de E par la projection $[0, T] \times M \rightarrow M$.

Définition 2.1.5. L'espace de Banach $C_V^k([0, T] \times \mathring{M}; E)$ est défini par l'ensemble

$$\left\{ \mu \in C^k([0, T] \times \mathring{M}; E) \mid \forall i, j \in \mathbb{N}_0 \text{ avec } 2i + j \leq k, \right. \\ \left. \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^i \nabla^j \mu \in C^0([0, T] \times \mathring{M}; T^{(j,0)} \mathring{M} \otimes E) \text{ et } \sup_{t \in [0, T]} \sup_{m \in \mathring{M}} \left| \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^i \nabla^j \mu(t, m) \right|_g < +\infty \right\},$$

avec norme donnée par

$$\|\mu\|_k := \sum_{2i+j \leq k} \sup_{t \in [0, T]} \sup_{m \in \mathring{M}} \left| \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^i \nabla^j \mu(t, m) \right|_g.$$

L'espace de Fréchet associé est défini par

$$C_V^\infty([0, T] \times \mathring{M}; E) = \bigcap_{k \in \mathbb{N}_0} C_V^k([0, T] \times \mathring{M}; E).$$

Étant donné $\alpha \in (0, 1]$, l'espace de Hölder parabolique $C_V^{0,\alpha}([0, T] \times \mathring{M}; E)$ est l'espace de Banach défini par

$$\{\mu \in C_V^0([0, T] \times \mathring{M}; E) \mid \|\mu\|_{0,\alpha} < +\infty\}$$

avec norme $\|\cdot\|_{0,\alpha}$ donnée par

$$\begin{aligned} \|\mu\|_{0,\alpha} &:= \|\mu\|_0 \\ &+ \sup_{t \in [0,T]} \sup \left\{ \frac{|\psi_\gamma(\mu(\gamma(0))) - \mu(\gamma(1))|_g}{l(\gamma)^\alpha} \mid \gamma \in C^\infty([0,1]; \{t\} \times \mathring{M}) \text{ et } \gamma(0) \neq \gamma(1) \right\} \\ &+ \sup_{m \in \mathring{M}} \sup_{t \neq t'} \frac{|\mu(t, m) - \mu(t', m)|_g}{|t - t'|^{\frac{\alpha}{2}}}. \end{aligned}$$

Pour $k \in \mathbb{N}$, l'espace de Hölder parabolique $C_V^{k,\alpha}([0,T] \times \mathring{M}; E)$ est l'espace de Banach défini par

$$\{\mu \in C_V^k([0,T] \times \mathring{M}; E) \mid \nabla^k \mu \in C_V^{0,\alpha}([0,T] \times \mathring{M}; T^{(k,0)} \mathring{M} \otimes E)\}$$

avec norme donnée par

$$\|\mu\|_{k,\alpha} := \|\mu\|_{k-1} + \sum_{2i+j=k} \left\| \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^i \nabla^j \mu \right\|_{0,\alpha}.$$

2.2 Expansion polyhomogène

Pour des sections dans $C_V^{k,\alpha}(\mathring{M}; E)$, il existe parfois un développement lisse près du bord ∂M , à savoir un développement similaire au série de Taylor près du bord de la forme $\sum_{n \in \mathbb{N}_0} \rho^n u_n$ où ρ est une fonction de définition du bord et u_n est une section lisse sur M . Sans avoir un développement lisse, on a toutefois souvent une expansion polyhomogène avec des termes de la forme $\rho^z (\log \rho)^k$ au lieu ρ^{-n} , où le couple (z, k) appartient à un sous-ensemble de $\mathbb{C} \times \mathbb{N}_0$, appelé ensemble indiciel défini comme suit :

Définition 2.2.1. *Un ensemble indiciel G est un sous-ensemble discret de $\mathbb{C} \times \mathbb{N}_0$ tel que*

1. $(z_j, k_j) \in G, |(z_j, k_j)| \rightarrow \infty \implies \operatorname{Re} z_j \rightarrow \infty;$
2. $(z, k) \in G \implies (z + p, k) \in G \quad \forall p \in \mathbb{N};$

$$3. (z, k) \in G \implies (z, p) \in G \quad \forall p \in \{0, \dots, k\}.$$

L'ensemble indiciel G est dit positif si $\mathbb{N}_0 \times \{0\} \subset G$ et

$$(z, k) \in G \implies \text{Im } z = 0, \text{ Re } z \geq 0,$$

$$(0, k) \in G \implies k = 0.$$

Une famille indicielle \mathcal{G} de M est la donnée d'un ensemble indiciel $\mathcal{G}(H)$ pour chaque hypersurface bordante H de M . Elle est dite positive si chacun de ses ensembles indiciels est positif. Si \mathcal{G} est une famille indicielle, alors $\mathcal{G}_{|H}$ dénote la famille indicielle de H qui associe à l'hypersurface bordante $H \cap H'$ de H l'ensemble indiciel $\mathcal{G}(H') \in \mathcal{G}$.

Remarque 2.2.2. Si G_1 et G_2 sont deux ensembles indiciels d'une hypersurface bordante H de M , alors leur somme

$$G_1 + G_2 := \{(z_1 + z_2, k_1 + k_2) \in \mathbb{C} \times \mathbb{N}_0 \mid (z_1, k_1) \in G_1, (z_2, k_2) \in G_2\}$$

est aussi un ensemble indiciel de H . De même, si \mathcal{G}_1 et \mathcal{G}_2 sont deux familles indicielles de M , alors $\mathcal{G}_1 + \mathcal{G}_2$ est une famille indicielle qui associe à l'hypersurface bordante H l'ensemble indiciel $\mathcal{G}_1(H) + \mathcal{G}_2(H)$. On vérifie aussi que $\mathcal{G}_1 \cup \mathcal{G}_2$ est une famille indicielle de M qui associe à l'hypersurface bordante H l'ensemble indiciel $\mathcal{G}_1(H) \cup \mathcal{G}_2(H)$. Si \mathcal{G}_1 et \mathcal{G}_2 sont positives alors $\mathcal{G}_1 \cup \mathcal{G}_2 \subset \mathcal{G}_1 + \mathcal{G}_2$. En particulier, si \mathcal{G} est une famille indicielle positive, on peut lui associer la famille indicielle

$$\mathcal{G}_\infty = \sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{G} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^n \mathcal{G},$$

et par construction, on a que $\mathcal{G}_\infty + \mathcal{G} = \mathcal{G}_\infty$.

Définition 2.2.3. On suppose que M est une variété compacte à bord, ρ une fonction de définition du bord ∂M et G un ensemble indiciel de M . L'espace $\mathcal{A}_{\text{phg}}^G(M)$

est l'espace des fonctions polyhomogènes $f \in C^\infty(\overset{\circ}{M})$ ayant un développement asymptotique près de ∂M de la forme

$$f \sim \sum_{(z,k) \in G} a(z,k) \rho^z (\log \rho)^k, \quad a(z,k) \in C^\infty(M),$$

où le symbole \sim signifie que $\forall N \in \mathbb{N}$, on a

$$f - \sum_{\substack{(z,k) \in G \\ \operatorname{Re} z \leq N}} a(z,k) \rho^z (\log \rho)^k \in \rho^{N+1} C_b^N(\overset{\circ}{M}) \quad \text{avec} \quad C_b^N(\overset{\circ}{M}) := C_{\mathcal{V}_b}^N(\overset{\circ}{M}),$$

où (M, \mathcal{V}_b) est la structure de Lie à l'infini de l'Exemple 1.3.2.

Définition 2.2.4. Soit $\mathcal{G} = \{\mathcal{G}(H) \mid H \in \mathcal{M}_1(M)\}$ une famille indicielle pour une variété à coins M . Soient $\operatorname{pr}_1 : H \times [0, \varepsilon) \rightarrow H$ la projection canonique et $\eta_H \in C_c^\infty(M)$ une fonction de coupure lisse à support compact dans un voisinage tubulaire de H , $c : H \times [0, \varepsilon) \leftrightarrow c(H \times [0, \varepsilon)) \subset M$, tel que $\eta_H \equiv 1$ près de H . Une application d'extension $\Xi_H : \mathcal{A}_{\text{phg}}^{\mathcal{G}(H)}(H) \rightarrow \mathcal{A}_{\text{phg}}^{\mathcal{G}(H)}(M)$ est définie par

$$\Xi_H(a) = \eta_H(c^{-1})^* \operatorname{pr}_1^* a \quad \text{vérifiant} \quad \Xi_H(a)|_H = a,$$

avec \mathcal{G}^H la famille indicielle $\{\mathcal{G}^H(H') : H' \in \mathcal{M}_1(M)\}$ telle que

$$\mathcal{G}^H(H') = \begin{cases} \mathcal{G}(H'), & H \neq H' \text{ et } H \cap H' \neq \emptyset, \\ \mathbb{N}_0 \times \{0\}, & H = H', \\ \emptyset, & H \cap H' = \emptyset. \end{cases}$$

Définition 2.2.5. L'espace $\mathcal{A}_{\text{phg}}^{\mathcal{G}}(M)$ est défini récursivement sur la profondeur de la variété à coins par l'ensemble des fonctions $f \in C^\infty(\overset{\circ}{M})$ satisfaisant, pour chaque hypersurface bordante H de M ,

$$f \sim \sum_{(z,k) \in \mathcal{G}(H)} \Xi_H(a(z,k)) \rho_H^z (\log \rho_H)^k, \quad a(z,k) \in \mathcal{A}_{\text{phg}}^{\mathcal{G}(H)}(H),$$

où ρ_H est une fonction de définition associée à H . Le symbole \sim signifie que $\forall N \in \mathbb{N}$, on a

$$f - \sum_{\substack{(z,k) \in \mathcal{G}(H) \\ \operatorname{Re} z \leq N}} \Xi_H(a(z,k)) \rho_H^z (\log \rho_H)^k \in \rho_H^{N+1} \left(\prod_{\substack{H' \neq H \\ H' \in \mathcal{M}_1(M)}} \rho_{H'}^{m_{H'}} (\log \rho_H)^{b_{H'}} \right) C_{\mathcal{V}_b}^\infty(\overset{\circ}{M}),$$

où $(m_{H'}, b_{H'}) \in \mathcal{G}(H')$ est tel que si $(m, b) \in \mathcal{G}(H')$ alors $\text{Re}(m) \geq \text{Re}(m_{H'})$ et $\text{Re}(m) = \text{Re}(m_{H'})$ implique $b \leq b_{H'}$. La récursion se termine éventuellement et $\mathcal{A}_{\text{phg}}^{\mathcal{G}}(M)$ est bien défini lorsque les coefficients $a(z, k)$ est dans $\mathcal{A}_{\text{phg}}^*(Y) \equiv C^\infty(Y)$, où Y est une variété fermée déterminée par une intersection maximale d'hypersurfaces bordantes de M .

Remarque 2.2.6. Étant données \mathcal{G}_1 et \mathcal{G}_2 deux familles indicielles de M , si $f_1 \in \mathcal{A}_{\text{phg}}^{\mathcal{G}_1}(M)$ et $f_2 \in \mathcal{A}_{\text{phg}}^{\mathcal{G}_2}(M)$, alors $f_1 + f_2 \in \mathcal{A}_{\text{phg}}^{\mathcal{G}_1 \cup \mathcal{G}_2}(M)$ et $f_1 f_2 \in \mathcal{A}_{\text{phg}}^{\mathcal{G}_1 + \mathcal{G}_2}(M)$.

Remarque 2.2.7. L'espace $\mathcal{A}_{\text{phg}}^{\mathcal{G}}(M)$ ne dépend pas du choix de fonction de définition du bord ρ contrairement aux coefficients $a(z, k)$. Si chaque ensemble indiciel de \mathcal{G} est $\mathbb{N}_0 \times \{0\}$, alors $\mathcal{A}_{\text{phg}}^{\mathcal{G}}(M) = C^\infty(M)$. Et si chaque ensemble indiciel de \mathcal{G} est \emptyset , alors $\mathcal{A}_{\text{phg}}^{\mathcal{G}}(M) = \dot{C}^\infty(M)$ est l'espace des fonctions lisses sur M s'annulant sur ∂M ainsi que toutes leurs dérivées. On remarque aussi que l'espace $\mathcal{A}_{\text{phg}}^{\mathcal{G}}(M)$ est un C^∞ module.

Définition 2.2.8. Soit $E \rightarrow M$ un fibré vectoriel. L'espace des sections polyhomogènes de E correspondant à une famille indicielle \mathcal{G} est défini par

$$\mathcal{A}_{\text{phg}}^{\mathcal{G}}(M; E) = \mathcal{A}_{\text{phg}}^{\mathcal{G}}(M) \otimes_{C^\infty(M)} \Gamma(E).$$

Il est parfois nécessaire de considérer une classe de métriques un peu plus grande, car la notion de métrique riemannienne compatible avec une structure de Lie à l'infini (M, \mathcal{V}) est un peu stricte.

Définition 2.2.9. Une \mathcal{V} -métrique est une métrique riemannienne sur $\overset{\circ}{M}$ quasi-isométrique à une métrique compatible avec une structure de Lie à l'infini (M, \mathcal{V}) sur $\overset{\circ}{M}$.

Définition 2.2.10. Une \mathcal{V} -métrique polyhomogène est une \mathcal{V} -métrique g sur $\overset{\circ}{M}$ définie par

$$g = (\varrho_{\mathcal{V}}^{-1})^*(h_{\overset{\circ}{M}}),$$

pour une certaine métrique euclidienne $h \in \mathcal{A}_{\text{phg}}^{\mathcal{G}}(M; \text{Sym}^2({}^{\mathcal{V}}T^*M))$ avec \mathcal{G} une famille indicielle positive.

Plusieurs des \mathcal{V} -métriques ne sont pas typiquement lisses jusqu'au bord mais elles admettent souvent un développement asymptotique polyhomogène. Par exemple, les \mathcal{V}_{CE} -métriques de Cheng Yau (Cheng et Yau, 1980), les métriques Poincaré-Einstein (Chruściel *et al.*, 2005) et les métriques Calabi-Yau asymptotiquement cylindriques ou coniques (Conlon *et al.*, 2015).

2.3 Ellipticité et polyhomogénéité des opérateurs différentielles

Nous examinerons certains aspects de la théorie des opérateurs différentiels déterminés par une structure particulière de Lie à l'infini. Soit $(\overset{\circ}{M}, g)$ une variété riemannienne avec une structure de Lie à l'infini (M, \mathcal{V}) , où g est une \mathcal{V} -métrique. Grâce au chapitre précédent, nous savons déjà que la connexion de Levi-Civita sur $\overset{\circ}{TM}$ s'étend en une ${}^{\mathcal{V}}TM$ -connexion ∇ de Levi-Civita sur ${}^{\mathcal{V}}TM$. Cela implique aussi que la connexion de Levi-Civita sur $\Gamma(T^{(k,l)}\overset{\circ}{M}) := \Gamma((\otimes^k T^*\overset{\circ}{M}) \otimes (\otimes^l T\overset{\circ}{M}))$ s'étend en une ${}^{\mathcal{V}}TM$ -connexion sur $\Gamma({}^{\mathcal{V}}TM^{(k,l)})$, notée aussi ∇ . Plus généralement, si $E \rightarrow M$ est un fibré vectoriel, alors la ${}^{\mathcal{V}}TM$ -connexion sur E induit une ${}^{\mathcal{V}}TM$ -connexion sur $\Gamma({}^{\mathcal{V}}TM^{(k,l)} \otimes E)$, notée aussi ∇ .

Définition 2.3.1. *L'espace $\text{Diff}_{\mathcal{V}}^k(M)$ est la $C^\infty(M)$ -algèbre universelle enveloppante de l'algèbre de Lie \mathcal{V} . Autrement dit, l'espace $\text{Diff}_{\mathcal{V}}^k(M)$ des opérateurs différentiels d'ordre k est l'espace des opérateurs différentiels engendrés par $C^\infty(M)$ et la composition d'au plus k éléments de \mathcal{V} .*

Définition 2.3.2. *Puisque $\text{Diff}_{\mathcal{V}}^k(M)$ est un C^∞ module, on définit l'ensemble des opérateurs différentiels de $\text{Diff}_{\mathcal{V}}^k(M)$ agissant sur des sections d'un fibré vectoriel $E \rightarrow M$ par*

$$\text{Diff}_{\mathcal{V}}^k(M; E) = \text{Diff}_{\mathcal{V}}^k(M) \otimes_{C^\infty(M)} \Gamma(\text{End}(E)).$$

Donc chaque $L \in \text{Diff}_{\mathcal{V}}^k(M; E)$ s'écrit sous la forme

$$L\mu = \sum_{j=0}^k \zeta_j \cdot \nabla^j \mu, \quad \nabla^j \mu \in \Gamma({}^{\mathcal{V}}TM^{(j,0)} \otimes E), \quad \zeta_j \in \Gamma({}^{\mathcal{V}}TM^{(0,j)} \otimes \text{End}(E)),$$

où « \cdot » indique la contraction naturelle d'indices.

On définit aussi $\text{Diff}_{\mathcal{V}}^k(\overset{\circ}{M}; E)$ comme étant l'ensemble des opérateurs différentiels L de la forme

$$L\mu = \sum_{j=0}^k \zeta_j \cdot \nabla^j \mu, \quad \nabla^j \mu \in C_{\mathcal{V}}^{\infty}(\overset{\circ}{M}; T^{(j,0)}\overset{\circ}{M} \otimes E), \quad \zeta_j \in C_{\mathcal{V}}^{\infty}(\overset{\circ}{M}; T^{(0,j)}\overset{\circ}{M} \otimes \text{End}(E)).$$

Si on change la régularité au-dessus $C_{\mathcal{V}}^{\infty}$ par $C_{\mathcal{V}}^{\ell, \alpha}$, l'ensemble des opérateurs différentiels L sera noté par $\text{Diff}_{\mathcal{V}, \ell, \alpha}^k(\overset{\circ}{M}; E)$.

Définition 2.3.3. Soit \mathcal{G} une famille indicielle de M . L'espace

$$\text{Diff}_{\mathcal{V}, \mathcal{G}}^k(M; E) = \mathcal{A}_{\text{phg}}^{\mathcal{G}}(M; E) \otimes_{C^{\infty}(M)} \text{Diff}_{\mathcal{V}}^k(M; E)$$

est l'ensemble des opérateurs différentiels de $\text{Diff}_{\mathcal{V}}^k(M; E)$ polyhomogènes par rapport à \mathcal{G} .

Remarque 2.3.4. De manière analogue à la Remarque 2.2.6, étants données \mathcal{G} et \mathcal{K} deux familles indicelles de M , si $u \in \mathcal{A}_{\text{phg}}^{\mathcal{G}}(M; E)$ et $P \in \text{Diff}_{\mathcal{V}, \mathcal{K}}^k(M; E)$, alors $Pu \in \mathcal{A}_{\text{phg}}^{\mathcal{K}+\mathcal{G}}(M; E)$.

Remarque 2.3.5. Les trois définitions précédentes ont un sens même si \mathcal{V} est une algèbre de Lie structurale qui n'est pas une structure de Lie à l'infini.

Remarque 2.3.6. On voit que $\text{Diff}_{\mathcal{V}}^k(M; E) \subset \text{Diff}_{\mathcal{V}}^k(\overset{\circ}{M}; E) \subset \text{Diff}_{\mathcal{V}, \ell, \alpha}^k(\overset{\circ}{M}; E)$.

Définition 2.3.7. Le symbole principal d'un opérateur $L \in \text{Diff}_{\mathcal{V}}^k(M; E)$ (respectivement $\text{Diff}_{\mathcal{V}}^k(\overset{\circ}{M}; E)$) est l'application $\sigma_k(L) : {}^{\mathcal{V}}T^*M \rightarrow \text{End}(E)$ homogène de degré k sur les fibres définie par $\sigma_k(L)(\xi) = i^k \zeta_k \cdot \xi^k$, où ζ_k est le coefficient du terme d'ordre k et $\xi^k = \underbrace{\xi \otimes \xi \dots \otimes \xi}_{k \text{ fois}} \in {}^{\mathcal{V}}TM^{(k,0)}$.

Remarque 2.3.8. *Le symbole principal induit une application $\sigma_k : \text{Diff}_V^k(M; E) \rightarrow C^\infty(\mathcal{V}T^*M, \pi^* \text{End}(E))$, où $\pi : \mathcal{V}T^*M \rightarrow M$ est la projection canonique, telle que $\sigma_{k_1+k_2}(L_1 L_2) = \sigma_{k_1}(L_1) \sigma_{k_2}(L_2)$, pour $L_i \in \text{Diff}_V^{k_i}(M; E)$ avec $i \in \{1, 2\}$.*

Définition 2.3.9. *Un opérateur $L \in \text{Diff}_V^2(\overset{\circ}{M}; E)$ est dit uniformément \mathcal{V} -elliptique si le symbole principal $\sigma_2(L)$ vérifie que $\forall m \in \overset{\circ}{M}$ et $\forall \xi \in T_m^* \overset{\circ}{M} \setminus \{0\}$*

$$\sigma_2(L)(\xi) = -g^{ij} \xi_i \xi_j,$$

pour une certaine \mathcal{V} -métrique g . Autrement dit, L est uniformément \mathcal{V} -elliptique si son symbole principal est le même que celui d'un laplacien associé à une \mathcal{V} -métrique. De même, si $\{L_t : t \in [0, T]\}$ est une famille lisse d'opérateurs uniformément \mathcal{V} -elliptiques dans $\text{Diff}_V^2(M; E)$ (respectivement $\text{Diff}_V^2(\overset{\circ}{M}; E)$), on dira que $\frac{\partial}{\partial t} - L_t$ est un opérateur uniformément \mathcal{V} -parabolique.

Proposition 2.3.10. *Soient (M, \mathcal{V}_{SF}) une structure de Lie fibrée à l'infini et \mathcal{G} une famille indicielle positive de M . On suppose que pour un fibré associé ϕ_F d'une face fermée F de M , il existe $s \in S_F$ tel que la fibre $F_s := \phi_F^{-1}(s)$ est de dimension non nulle. Si $L \in \text{Diff}_{\mathcal{V}_{SF}, \mathcal{G}}^2(M; E)$ est un opérateur uniformément \mathcal{V}_{SF} -elliptique polyhomogène par rapport à \mathcal{G} , alors la restriction de L au coefficient d'ordre 0 sur la fibre F_s est un opérateur $L_s^0 \in \text{Diff}_{\mathcal{V}_{F_s}, \mathcal{G}|_{F_s}}^2(F_s; E)$ uniformément \mathcal{V}_{F_s} -elliptique.*

Démonstration. Grâce à la propriété 2 de la Proposition 1.4.5, on a une suite exacte courte :

$$0 \rightarrow \text{Ker}(\pi_{F|_{F_s}}) \hookrightarrow \mathcal{V}_{SF} T_{F_s}(M) \rightarrow \mathcal{V}_{F_s} T(F_s) \rightarrow 0, \quad (2.1)$$

où \mathcal{V}_{F_s} est la structure de Lie fibrée à l'infini de F_s . La suite exacte courte duale est donc

$$0 \rightarrow \mathcal{V}_{F_s} T^*(F_s) \hookrightarrow \mathcal{V}_{SF} T_{F_s}^*(M) \rightarrow (\text{Ker}(\pi_{F|_{F_s}}))^* \rightarrow 0, \quad (2.2)$$

Par suite, la première application $\iota : \mathcal{V}_{F_s} T^*(F_s) \hookrightarrow \mathcal{V}_{SF} T_{F_s}^*(M)$ induit un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
\text{Diff}_{\mathcal{V}_{SF}, \mathcal{G}}^2(M; E) & \xrightarrow{\sigma_2} & C^\infty(\mathcal{V}_{SF}T^*M, \pi^* \text{End}(E)) \\
\downarrow |_{F_s} & & \downarrow \iota^* \\
\text{Diff}_{\mathcal{V}_{SF}, \mathcal{G}|_{F_s}}^2(F_s; E) & \xrightarrow{\sigma_2} & C^\infty(\mathcal{V}_{SF}T^*F_s, \pi^* \text{End}(E)).
\end{array}$$

Donc $\sigma_2(L_s^0) = \iota^* \circ \sigma_2(L)|_{F_s}$. Si L est \mathcal{V}_{SF} -uniformément elliptique, on voit donc que $\sigma_2(L_s^0)$ sera \mathcal{V}_{F_s} -uniformément elliptique. \square

2.4 Polyhomogénéité des solutions des équations paraboliques

Nous étudions maintenant la polyhomogénéité globale des solutions d'équations paraboliques linéaires déterminées par une structure de Lie fibrée à l'infini. Commençons par un petit lemme.

Lemme 2.4.1. *Soient $B(0, 2r) := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| \leq 2r\}$ une boule fermée centrée en 0 de rayon $2r$ et $\{L_t : t \in [0, T]\}$ une famille d'opérateurs uniformément elliptiques de $\text{Diff}_{k, \alpha}^2(B(0, 2r))$. Soient $f \in C^{k, \alpha}([0, T] \times B(0, 2r))$ et $u_0 \in C^{k+2, \alpha}(B(0, 2r))$. Si $u \in C^{k+2, \alpha}([0, T] \times B(0, 2r))$ est la solution unique de l'équation*

$$\frac{\partial u}{\partial t} - L_t u = f, \quad u|_{t=0} = u_0,$$

alors il existe une constante $\kappa > 0$ dépendante des normes des coefficients de l'opérateur L_t , la régularité k , la dimension n , le rayon r et la constante d'ellipticité de la famille L_t telle que

$$\|u\|_{C^{k+2, \alpha}([0, T] \times B(0, r))} \leq \kappa (\|u_0\|_{C^{k, \alpha}([0, T] \times \mathring{B}(0, 2r))} + \|f\|_{C^{k, \alpha}([0, T] \times \mathring{B}(0, 2r))}). \quad (2.3)$$

Démonstration. C'est un résultat standard. Voici une preuve s'appuyant sur le livre (Ladyzenskaja et al., 1967)). Soit une fonction lisse à support compact

$\varphi \in C_c^\infty(B(0, 2r))$ telle que $\varphi \equiv 1$ sur $B(0, r)$ et $\sup_{B(0, 2r)} |\varphi| = 1$. On sait que L_t est un opérateur uniformément elliptique de $\text{Diff}_{k, \alpha}^2(B(0, 2r))$ de la forme

$$L_t(\mu) = \sum_{j=0}^2 \zeta_j \cdot \nabla^j \mu, \quad (2.4)$$

où ∇ est la connexion de Levi-Civita pour la métrique euclidienne sur \mathbb{R}^n . Ainsi, après un calcul simple, on obtient que,

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\varphi u)}{\partial t} - L_t(\varphi u) &= -(\zeta_2 \cdot \nabla^2 \varphi)u - 2\zeta_2(\nabla \varphi, \nabla u) \\ &\quad - \zeta_1 \cdot (\nabla \varphi)u + \varphi f, \quad \varphi u|_{\partial B(0, 2r) \times [0, T]} = 0. \end{aligned}$$

Par l'équation 5.3 du Théorème 5.2 dans (Ladyzenskaja *et al.*, 1967) à la page 320 (en prenant $\Phi = 0$), on obtient une estimation de φu sur $C^{k+2, \alpha}([0, T] \times \overset{\circ}{B}(0, 2r))$. On déduit ainsi l'estimation escomptée (2.3). \square

Maintenant, voici des généralisations naturelles de deux énoncés apparus dans l'article de Rochon (Rochon, 2015) pour des $\mathbb{C}\Theta$ -métriques (voir l'Exemple 1.3.9).

Proposition 2.4.2. *Soit (M, \mathcal{V}) une structure de Lie à l'infini telle que le rayon d'injectivité des métriques compatibles est strictement positif. Soit $\{L_t : t \in [0, T]\}$ une famille d'opérateurs uniformément \mathcal{V} -elliptiques de $\text{Diff}_{\mathcal{V}, k, \alpha}^2(\overset{\circ}{M}; E)$. Si $u_0 \in C_{\mathcal{V}}^{k+2, \alpha}(\overset{\circ}{M}; E)$ et $f \in C_{\mathcal{V}}^{k, \alpha}([0, T] \times \overset{\circ}{M}; E)$, alors l'équation*

$$\frac{\partial u}{\partial t} - L_t u = f, \quad u|_{t=0} = u_0,$$

possède une solution $u \in C_{\mathcal{V}}^{k+2, \alpha}([0, T] \times \overset{\circ}{M}; E)$. De plus, il existe une constante $\kappa > 0$ dépendante de la famille L_t telle que

$$\|u\|_{k+2, \alpha} \leq \kappa(\|u_0\|_{k+2, \alpha} + \|f\|_{k, \alpha}). \quad (2.5)$$

Démonstration. D'abord, on remplace u par $u - u_0$ pour se ramener au cas où $u_0 = 0$. Soit $(U_p)_{p \in \mathbb{N}}$ un recouvrement de $\overset{\circ}{M}$ qui est donné par une suite d'ouverts

relativement compacts avec bord lisse tels que $U_p \subset U_{p+1}$, $\forall p \in \mathbb{N}$. Soit une suite de fonctions lisses à supports compacts $\varphi_p \in C_c^\infty(U_{p+1})$ telle que $\varphi_p \equiv 1$ sur U_p et $\sup_{U_{p+1}} |\varphi_p| = 1$. Par un résultat standard, voir par exemple le Théorème 7.1 apparu dans la section 7 du chapitre 7 de (Ladyzenskaja *et al.*, 1967), pour chaque $p \in \mathbb{N}$, l'équation

$$\frac{\partial \omega_p}{\partial t} - L_t \omega_p = \varphi_p f, \quad \omega_p(0, \cdot) = 0, \quad \omega_p|_{\partial U_{p+1} \times [0, T]} = 0$$

possède une unique solution $\omega_p \in C^{k+2, \alpha}([0, T] \times U_{p+1}; E)$.

L'estimation (2.3) induit des estimations de Schauder locales indépendantes de p . En effet, comme (\dot{M}, g) est un exemple de géométrie bornée, il existe $r > 0$ et $C_k > 0$ avec $k \in \mathbb{N}_0$ tel que, pour tout $p \in M$, il existe une carte $\varphi : U_p \rightarrow B(0, 2r) \subset \mathbb{R}^n$ avec $n = \dim M$ de sorte que

$$\frac{g_E}{C_0} \leq \varphi_*(g) \leq C_0 g_E \quad \text{et} \quad \sup_{B(0, 2r)} \left| (\nabla^E)^k \varphi_*(g) \right|_{g_E} \leq C_k,$$

où g_E est la métrique euclidienne sur \mathbb{R}^n et ∇^E est la connexion de Levi-Civita associée. On applique par suite le Théorème d'Arzelà-Ascoli, pour extraire une sous-suite $(\omega_{p_q})_{q \in \mathbb{N}}$ qui converge uniformément vers une solution $u \in C_V^{k+2}([0, T] \times \dot{M}; E)$. On vérifie alors que $\|u\|_{k+2, \alpha} < \infty$. En effet, on a pour $2i + j = k + 2$,

$$\begin{aligned} \frac{\left| \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^i \nabla^j u(t', m) - \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^i \nabla^j u(t, m) \right|_g}{|t' - t|^{\frac{\alpha}{2}}} &\leq \frac{\left| \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^i \nabla^j u(t', m) - \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^i \nabla^j \omega_{p_q}(t', m) \right|_g}{|t' - t|^{\frac{\alpha}{2}}} \\ &+ \frac{\left| \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^i \nabla^j \omega_{p_q}(t', m) - \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^i \nabla^j \omega_{p_q}(t, m) \right|_g}{|t' - t|^{\frac{\alpha}{2}}} \\ &+ \frac{\left| \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^i \nabla^j \omega_{p_q}(t, m) - \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^i \nabla^j u(t, m) \right|_g}{|t' - t|^{\frac{\alpha}{2}}}. \end{aligned}$$

Soit maintenant $\varepsilon > 0$ fixé. Comme ω_{p_q} converge uniformément vers u dans $C_V^{k+2}([0, T] \times \dot{M}; E)$, on prend q suffisamment grand dépendant de t et t' tel

que

$$\begin{aligned} \frac{|(\frac{\partial}{\partial t})^i \nabla^j u(t', m) - (\frac{\partial}{\partial t})^i \nabla^j u(t, m)|_g}{|t' - t|^{\frac{\alpha}{2}}} \leq \\ \varepsilon + \frac{|(\frac{\partial}{\partial t})^i \nabla^j \omega_{p_q}(t', m) - (\frac{\partial}{\partial t})^i \nabla^j \omega_{p_q}(t, m)|_g}{|t' - t|^{\frac{\alpha}{2}}} + \varepsilon \leq C + 2\varepsilon, \end{aligned}$$

où C est une constante telle que $\|\omega_p\|_{k+2, \alpha} \leq C$, $\forall p$. En prenant le supremum sur $t \neq t'$, on obtient alors

$$\sup_{t \neq t'} \frac{|(\frac{\partial}{\partial t})^i \nabla^j u(t', m) - (\frac{\partial}{\partial t})^i \nabla^j u(t, m)|_g}{|t' - t|^{\frac{\alpha}{2}}} \leq C + 2\varepsilon < \infty.$$

De même,

$$\begin{aligned} \frac{|\psi_\gamma((\frac{\partial}{\partial t})^i \nabla^j u(\gamma(0))) - (\frac{\partial}{\partial t})^i \nabla^j u(\gamma(1))|_g}{l(\gamma)^\alpha} \leq & \frac{|\psi_\gamma((\frac{\partial}{\partial t})^i \nabla^j u(\gamma(0))) - \psi_\gamma((\frac{\partial}{\partial t})^i \nabla^j \omega_{p_q}(\gamma(0)))|_g}{l(\gamma)^\alpha} \\ & + \frac{|\psi_\gamma((\frac{\partial}{\partial t})^i \nabla^j \omega_{p_q}(\gamma(0))) - (\frac{\partial}{\partial t})^i \nabla^j \omega_{p_q}(\gamma(1))|_g}{l(\gamma)^\alpha} \\ & + \frac{|(\frac{\partial}{\partial t})^i \nabla^j \omega_{p_q}(\gamma(1)) - (\frac{\partial}{\partial t})^i \nabla^j u(\gamma(1))|_g}{l(\gamma)^\alpha}, \end{aligned}$$

ce qui pour q suffisamment grand donne

$$\sup_\gamma \frac{|\psi_\gamma((\frac{\partial}{\partial t})^i \nabla^j u(\gamma(0))) - (\frac{\partial}{\partial t})^i \nabla^j u(\gamma(1))|_g}{l(\gamma)^\alpha} \leq C + 2\varepsilon.$$

Comme par hypothèse $(\overset{\circ}{M}, g)$ est un exemple de géométrie bornée, les estimations de Schauder paraboliques locales peuvent être considérées pour donner l'estimation voulue pour $\|u\|_{k+2, \alpha}$. \square

Corollaire 2.4.3. Soient $(H_i)_{i \in \{1, \dots, l\}}$ la famille des hypersurfaces bordantes d'une variété à coins compacte M et $\{L_t : t \in [0, T]\}$ une famille d'opérateurs uniformément \mathcal{V} -elliptiques de $\text{Diff}_\mathcal{V}^2(\overset{\circ}{M}; E)$. Soient ρ_i une fonction de définition de H_i , pour $i \in \{1, \dots, l\}$, $f \in \rho^\beta (\log \rho)^\eta C_\mathcal{V}^{k, \alpha}([0, T] \times \overset{\circ}{M}; E)$ et $u_0 \in \rho^\beta (\log \rho)^\eta C_\mathcal{V}^{k+2, \alpha}(\overset{\circ}{M}; E)$, où $\rho^\beta = \prod_{i=1}^l \rho_i^{\beta_i}$, $(\log \rho)^\eta = \prod_{i=1}^l (\log \rho_i)^{\eta_i}$, $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_l)$ et $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_l)$ avec $\beta_i > 0$ et $\eta_i \in \mathbb{N}_0$ (ou $\beta_i = \eta_i = 0$). Alors l'équation

$$\frac{\partial u}{\partial t} - L_t u = f, \quad u_{|t=0} = u_0,$$

possède une unique solution $u \in \rho^\beta (\log \rho)^\eta C_{\mathcal{V}}^{k+2, \alpha}([0, T] \times \overset{\circ}{M}; E)$.

Démonstration. D'abord, on considère l'opérateur

$$\tilde{L}_t := \rho^{-\beta} (\log \rho)^{-\eta} \circ L_t \circ \rho^\beta (\log \rho)^\eta.$$

On a que $\tilde{L}_t \in \text{Diff}_{\mathcal{V}}^2(\overset{\circ}{M}; E)$ est une famille lisse d'opérateurs par la Remarque 2.1.2, et aussi clairement uniformément \mathcal{V} -elliptiques car

$$\sigma_2(\tilde{L}_t)(\xi) = \sigma_2(L_t)(\xi) = -\rho^{-\beta} (\log \rho)^{-\eta} \rho^\beta (\log \rho)^\eta g^{ij} \xi_i \xi_j, \quad \forall \xi \in T_m^* \overset{\circ}{M} \setminus \{0\},$$

pour une certaine \mathcal{V} -métrique g . On peut se ramener alors à une équation équivalente à l'équation décrite ci-dessus, à savoir

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} - \tilde{L}_t \tilde{u} = \tilde{f}, \quad \tilde{u}|_{t=0} = \tilde{u}_0, \quad \text{avec}$$

$$\tilde{u} = \rho^{-\beta} (\log \rho)^{-\eta} u, \quad \tilde{u}_0 = \rho^{-\beta} (\log \rho)^{-\eta} u_0, \quad \tilde{f} = \rho^{-\beta} (\log \rho)^{-\eta} f,$$

et l'existence de la solution découle de la proposition précédente. L'unicité de la solution se démontre à l'aide du principe du maximum en vérifiant que si u_1 et u_2 sont deux solutions, alors $u_1 = u_2$. D'abord, en remplaçant u_1 , u_2 , L_t et f par $\rho^\alpha u_1$, $\rho^\alpha u_2$, $\tilde{L}_t = \rho^\alpha L_t \rho^{-\alpha}$ et $\rho^\alpha f$, avec $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_l)$, $\alpha_i > 0$, on peut se ramener au cas où $|u_1|_{g(t)}$ et $|u_2|_{g(t)}$ décroissent vers zéro à l'infini. Maintenant, on considère $u = u_1 - u_2$ qui satisfait à l'équation

$$\frac{\partial u}{\partial t} = L_t u, \quad u|_{t=0} = 0.$$

Comme L_t s'écrit sous la forme

$$L_t(\mu) = \sum_{j=0}^2 \zeta_j \cdot \nabla^j \mu = \Delta_{g(t)} \mu + \zeta_1 \cdot \nabla \mu + \zeta_0 \mu, \quad (2.6)$$

on a successivement

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} |u|^2 &= \Delta |u|^2 - 2 |\nabla u|^2 + 2 \langle u, \zeta_1 \cdot \nabla u \rangle + 2 \langle u, \zeta_0 \cdot u \rangle \\
&= \Delta |u|^2 - 2 |\nabla u|^2 + 2 \langle \zeta_1^* \cdot u, \nabla u \rangle + 2 \langle u, \zeta_0 \cdot u \rangle \\
&\leq \Delta |u|^2 - 2 |\nabla u|^2 + |\zeta_1^* \cdot u|^2 + |\nabla u|^2 + 2 \langle u, \zeta_0 \cdot u \rangle \\
&\leq \Delta |u|^2 + C |u|^2,
\end{aligned}$$

où $C > 0$ est une constante dépendante de ζ_0 et ζ_1^* . On conclut finalement que $u \equiv 0$ par le principe du maximum. \square

Dans l'article (Rochon, 2015), le résultat de la polyhomogénéité des solutions utilise le principe du maximum. L'argument pourrait en principe s'étendre plus généralement aux structures de Lie évanescents à l'infini. Notre prochain objectif sera d'établir plus généralement la polyhomogénéité globale de solutions d'équations paraboliques linéaires déterminées par une structure de Lie fibrée à l'infini. En fait, afin de déterminer un candidat pour le coefficient du terme d'un certain ordre dans le développement polyhomogène, nous serons obligé d'étudier plus généralement une famille paramétrée de telles équations sur une variété à coins M , via la restriction au bord. Cette famille sera déterminée par un fibré de structures de Lie fibrées à l'infini associé à un fibré ϕ_M . Pour cette raison, nous considérons d'emblée une famille d'équations paraboliques, plutôt qu'une seule équation parabolique. Cela nous permettra d'utiliser le principe d'induction sur la profondeur de la variété dans la preuve de la polyhomogénéité. Avant d'établir ce cas général, nous allons considérer un cas particulier facile à étudier, à savoir lorsque $\phi_M = \text{Id}$.

Proposition 2.4.4. *Soient M une variété à coins compacte et \mathcal{G} , \mathcal{G}_1 et \mathcal{G}_2 des familles indicielles positives de M . Alors pour $l_t \in \mathcal{A}_{\text{phg}}^{\mathcal{G}}([0, T] \times M; \text{End}(E))$, $u_0 \in \mathcal{A}_{\text{phg}}^{\mathcal{G}_1}(M; E)$ et $f \in \mathcal{A}_{\text{phg}}^{\mathcal{G}_2}([0, T] \times M; E)$, l'équation différentielle ordinaire*

linéaire d'ordre 1 de la forme

$$\frac{\partial}{\partial t}u - l_t u = f, \quad u|_{t=0} = u_0, \quad (2.7)$$

possède une unique solution $u \in \mathcal{A}_{\text{phg}}^{\mathcal{K}}([0, T] \times M; E)$, où \mathcal{K} est la famille indicielle positive donnée par $\mathcal{K} = \mathcal{G}_1 \cup (\mathcal{G}_\infty + \mathcal{G}_2) + \mathcal{G}_\infty$.

Démonstration. L'équation (2.7) possède une solution unique définie par

$$u(t) = \exp(-P_t)(u_0 + \int_0^t \exp(P_\tau) f(\tau) d\tau), \quad \text{où } P_t = - \int_0^t l_\tau d\tau. \quad (2.8)$$

Puisque l'intégrale en t d'une fonction polyhomogène reste aussi une fonction polyhomogène, on a que $P_t \in \mathcal{A}_{\text{phg}}^{\mathcal{G}}([0, T] \times M; E)$. Ensuite, comme $\mathcal{G}_\infty = \mathcal{G}_\infty + \mathcal{G}$ par la Remarque 2.2.2, on a automatiquement

$$\exp(-P_t) = \sum_{j \in \mathbb{N}_0} \frac{(-P_t)^j}{j!} \in \mathcal{A}_{\text{phg}}^{\mathcal{G}_\infty}([0, T] \times M; E).$$

À partir de (2.8), on déduit que $u \in \mathcal{A}_{\text{phg}}^{\mathcal{K}}([0, T] \times M; E)$. □

Dans la suite, nous allons introduire la notion d'éclatement logarithmique (voir la section 5.14 dans le livre de Melrose (Melrose, 1996) et l'article (Rochon et Zhang, 2012) autour de l'équation 1.14) afin d'obtenir la polyhomogénéité d'une famille de solutions d'une famille d'équations paraboliques. Un éclatement logarithmique $[M, H]_{\log}$ d'une hypersurface bordante H est la variété à coins compacte $[M, H]_{\log}$ identifiée topologiquement avec M , mais avec C^∞ structure à coins engendrée par $C^\infty(M)$ et la nouvelle fonction de définition

$$y_H = \frac{-1}{\log \rho_H},$$

où ρ_H est une fonction de définition de H dans M . Sans perte de généralité, on suppose que $\rho_H < 1$. Par le Lemme 5.14.1 (Melrose, 1996), l'éclatement logarithmique $[M, H]_{\log}$ est indépendant du choix de fonction de définition ρ_H et est tel

que l'identité $\text{Id} : [M, H]_{\log} \rightarrow M$ est C^∞ . Clairement, les différents éclatements logarithmiques entre les hypersurfaces bordantes commutent. Ceci nous permet de définir l'éclatement logarithmique total. Si H_1, \dots, H_l est une liste des hypersurfaces bordantes de M , alors on pose

$$M_{\log} = M_l, \text{ avec } M_0 = M \text{ et } M_j = [M_{j-1}, H]_{\log}, j \in \{1, \dots, l\}.$$

On voit que, pour \mathcal{G} une famille indicielle positive de M , $\mathcal{A}_{\text{phg}}^{\mathcal{G}}(M) \subset C^\infty(M_{\log})$, via $\text{Id}^* : \mathcal{A}_{\text{phg}}^{\mathcal{G}}(M) \rightarrow C^\infty(M_{\log})$. De plus, on obtient que

$$C_{\mathcal{V}_{pc}}^\infty(M_{\log}) = C_b^\infty(\overset{\circ}{M}), \quad (2.9)$$

où $\mathcal{V}_{pc} := \{V \in \mathfrak{X}(M_{\log}) \mid V y_H \in y_H^2 C^\infty(M_{\log}) \forall H \in \mathcal{M}_1(M_{\log})\}$. En effet, on a que

$$\begin{aligned} \rho_H \frac{\partial}{\partial \rho_H} &= \rho_H \frac{\partial y_H}{\partial \rho_H} \frac{\partial}{\partial y_H} \\ &= \rho_H \frac{1}{\log^2(\rho_H)} \frac{1}{\rho_H} \frac{\partial}{\partial y_H} \\ &= y_H^2 \frac{\partial}{\partial y_H}. \end{aligned}$$

De plus, étant donnée $f \in C_{\mathcal{V}_{pc}}^\infty(M_{\log})$, sur $(y_H, x_1, \dots, x_{n-1})$ un système de coordonnées locales centré en $m \in H$, on a que

$$\begin{aligned} \rho_H \frac{\partial}{\partial \rho_H} (f(y_H, x_1, \dots, x_{n-1})) &= \rho_H \frac{\partial}{\partial \rho_H} (y_H) \left(\frac{\partial}{\partial y_H} f \right) (y_H, x_1, \dots, x_{n-1}) \\ &= (y_H^2 \frac{\partial}{\partial y_H} f) (y_H, x_1, \dots, x_{n-1}). \end{aligned}$$

Proposition 2.4.5. *Soit (M, \mathcal{V}) un fibré de structures de Lie fibrées à l'infini associé au fibré $\phi_M : M \rightarrow S$ telle que le rayon d'injectivité des métriques compatibles est strictement positif. Soient $\Psi_U : \phi_M^{-1}(U) \rightarrow U \times Z$ une trivialisatation locale du fibré de structures de Lie fibrées à l'infini, pour U un ouvert de S , et (Z, \mathcal{V}_Z) la structure de Lie fibrée à l'infini de la fibre Z . Soient \mathcal{G}_1 et \mathcal{G}_2 deux familles*

indicielles positives de S , $L_t(s)$ une famille polyhomogène $[0, T] \times U$ d'opérateurs uniformément \mathcal{V}_Z -elliptiques dans $\text{Diff}_{\mathcal{V}_Z}^2(Z; E)$ par rapport $\mathcal{G}_{1|U}$,

$$f \in \mathcal{A}_{\text{phg}}^{\mathcal{G}_{2|U}}(U, C_{\mathcal{V}_Z}^{k,\alpha}([0, T] \times \mathring{Z}; E)) + x|_U^\vartheta C_b^\infty(\mathring{U}; C_{\mathcal{V}_Z}^{k,\alpha}([0, T] \times \mathring{Z}; E)),$$

pour une certaine $\vartheta > 0$, où x est le produit des fonctions de définitions des hypersurfaces bordantes de S , et $u_0 \in C_b^\infty(\mathring{U}, C_{\mathcal{V}_Z}^{k+2,\alpha}(\mathring{Z}; E))$. La famille d'équations \mathcal{V}_Z -paraboliques paramétrée par $s \in U$,

$$\frac{\partial u}{\partial t} - L_t u = f, \quad u_{|t=0} = u_0, \quad (2.10)$$

possède alors une unique solution $u \in C_b^\infty(\mathring{U}, C_{\mathcal{V}_Z}^{k+2,\alpha}([0, T] \times \mathring{Z}; E))$.

Démonstration. Si $\dim Z = 0$, alors (2.10) est une EDO et le résultat découle de la Proposition 2.4.4. On peut donc supposer que $\dim Z \geq 1$. De plus, en remplaçant u par $u - u_0$, on peut se ramener au cas où $u_0 = 0$. Pour $s \in U$ fixé, par le Corollaire 2.4.3, chaque équation de (2.10) possède une unique solution $u(s) \in C_{\mathcal{V}_Z}^{k+2,\alpha}([0, T] \times \mathring{Z}; E)$.

On commence par le cas $U \subset \mathring{S}$. Pour $k \geq 0$ arbitraire, on considère la fonction $F : U \times C_{\mathcal{V}_Z}^{k+2,\alpha}([0, T] \times \mathring{Z}; E) \rightarrow C_{\mathcal{V}_Z}^{k,\alpha}([0, T] \times \mathring{Z}; E)$ définie par

$$F(s, v) := \frac{\partial v}{\partial t} - L_t(s)v - f(s, \cdot).$$

Il est clair que F est de classe C^∞ sur U et que $F(s, \cdot)$ est de classe C^∞ . En fait, $d_v F(s, v) = \frac{\partial}{\partial t} - L_t(s)$ est linéaire et bijective grâce au Corollaire 2.4.3, puisque on sait que $\forall f(s, \cdot) \in C_{\mathcal{V}_Z}^{k,\alpha}([0, T] \times \mathring{Z}; E)$ il existe une unique solution $u(s, \cdot) \in C_{\mathcal{V}_Z}^{k+2,\alpha}([0, T] \times \mathring{Z}; E)$ de (2.10). En appliquant le théorème des fonctions implicites (Krantz et Parks, 2012), on aura que $u \in C^\infty(U, C_{\mathcal{V}_Z}^{k+2,\alpha}([0, T] \times \mathring{Z}; E))$.

Pour traiter le cas $U \subset S$ tel que $U \cap \partial S \neq \emptyset$, l'idée est de se ramener au cas précédent en prolongeant l'équation au-delà de la variété à coins U . Pour y arriver,

il faut cependant utiliser l'éclatement logarithmique. Sans perte de généralité, on peut supposer que U est un voisinage ouvert de l'origine dans \mathbb{R}_l^n , où $n = \dim S$. Alors les coordonnées (x_1, \dots, x_n) de \mathbb{R}_l^n sont telles que x_1, \dots, x_l sont les fonctions de définitions des hypersurfaces bordantes de U :

$$H_i = U \cap \{x_i = 0\}, \quad i \in \{1, \dots, l\}.$$

Soit U_{\log} l'éclatement logarithmique total de U obtenu en utilisant les nouvelles fonctions de définitions des hypersurfaces bordantes

$$y_i := \frac{-1}{\log x_i}, \quad i \in \{1, \dots, l\}.$$

Alors U_{\log} est aussi un ouvert de \mathbb{R}_l^n contenant l'origine, mais en utilisant les coordonnées $(y_1, \dots, y_l, x_{l+1}, \dots, x_n)$ dans \mathbb{R}_l^n . Soit $\Omega_{\log} \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert tel que $U_{\log} = \Omega_{\log} \cap \mathbb{R}_l^n$. On veut alors se ramener au cas précédent en prolongeant la famille d'équations (2.10) à Ω_{\log} . Maintenant près de H_i , la famille d'équations (2.10) a un développement asymptotique de la forme

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{(\eta_1, k_1) \in \mathcal{G}_1(H_i)} x_i^{\eta_1} (\log x_i)^{k_1} \Xi_{H_i}(L_{t, \eta_1, k_1}) u \sim \sum_{(\eta_2, k_2) \in \mathcal{G}_2(H_i)} x_i^{\eta_2} (\log x_i)^{k_2} f_{t, \eta_2, k_2} + x_i^{\vartheta} \tilde{f}, \quad (2.11)$$

où $\tilde{f} \in (\frac{x_i|U}{x_i})^{\vartheta} C_b^{\infty}(\mathring{U}; C_{\mathcal{V}_Z}^{\infty}([0, T] \times \mathring{Z}; E))$, f_{t, η_2, k_2} est le coefficient du terme d'ordre $x_i^{\eta_2} (\log x_i)^{k_2}$ de f et L_{t, η_1, k_1} est une famille polyhomogène paramétrée par $s \in H_i$ d'opérateurs dans $\text{Diff}_{\mathcal{V}_Z}^2(Z; E)$. Sur U_{\log} , on doit plutôt utiliser les coordonnées y_i , ce qui donne le développement asymptotique

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{(\eta_1, k_1) \in \mathcal{G}_1(H_i)} \left(\exp\left(-\frac{1}{y_i}\right)\right)^{\eta_1} y_i^{-k_1} \Xi_{H_i}(L_{t, \eta_1, k_1}) u \sim \sum_{(\eta_2, k_2) \in \mathcal{G}_2(H_i)} \left(\exp\left(-\frac{1}{y_i}\right)\right)^{\eta_2} y_i^{-k_2} f_{t, \eta_2, k_2} + \left(\exp\left(-\frac{1}{y_i}\right)\right)^{\vartheta} \tilde{f}.$$

Or, il est bien connu que, pour un certain couple (η, k) dans un tel ensemble indiciel positif, $\left(\exp\left(-\frac{1}{y_i}\right)\right)^{\eta} y_i^{-k}$, initialement définie par $y_i > 0$, se prolonge

par zéro en une fonction lisse pour tout $y_i \in \mathbb{R}$. En prenant $i = l$, on peut donc prolonger naturellement la famille d'équations sur U_{\log} à $\Omega_{\log} \cap \mathbb{R}_{l-1}^n$. Cette construction peut être itérée successivement pour prolonger la famille d'équations à $\Omega_{\log} \cap \mathbb{R}_{l-2}^n, \dots, \Omega_{\log} \cap \mathbb{R}_1^n$ et finalement $\Omega_{\log} \cap \mathbb{R}^n = \Omega_{\log}$. À nouveau, grâce au théorème des fonctions implicites (Krantz et Parks, 2012), on aura que $u \in C^\infty(\Omega_{\log}; C_{\mathcal{V}_Z}^{k+2,\alpha}([0, T] \times \overset{\circ}{Z}; E)) \subset C_{\mathcal{V}_{pc}}^\infty(U_{\log}; C_{\mathcal{V}_Z}^{k+2,\alpha}([0, T] \times \overset{\circ}{Z}; E))$ et donc par (2.9),

$$u \in C_b^\infty(\overset{\circ}{U}; C_{\mathcal{V}_Z}^{k+2,\alpha}([0, T] \times \overset{\circ}{Z}; E)).$$

□

Remarque 2.4.6. *Les constantes de Schauder κ_s de (2.5) correspondantes à $L_t(s)$, pour tout $s \in S$, peuvent être choisir d'une façon uniforme donnée par*

$$\kappa = \sup_{s \in S} \kappa_s = \sup_{s \in S} (\| (d_v F_{(s,v)})^{-1} \| (\|L_t(s)\| + 1) + 1).$$

En effet, $d_v F_{(s,v)} = \frac{\partial}{\partial t} - L_t(s)$ est bijective, linéaire et lisse sur chaque ouvert U de S . La famille de solutions u peut s'écrire alors comme étant

$$u(s) = (d_v F_{(s,v)})^{-1} (f(s, \cdot) + L_t(s)u_0(s, \cdot)) + u_0(s, \cdot).$$

Comme l'opérateur $L_t(s) : C_{\mathcal{V}_Z}^{k+2,\alpha}([0, T] \times \overset{\circ}{Z}; E) \rightarrow C_{\mathcal{V}_Z}^{k,\alpha}([0, T] \times \overset{\circ}{Z}; E)$ est lisse et linéaire, on a que

$$\|L_t(s)u_0(s, \cdot)\|_{k,\alpha} \leq \|L_t(s)\| \|u_0(s, \cdot)\|_{k+2,\alpha}$$

et donc on déduit que

$$\|u(s)\|_{k+2,\alpha} \leq \sup_{s \in S} (\| (d_v F_{(s,v)})^{-1} \| (\|L_t(s)\| + 1) + 1) (\|f(s, \cdot)\|_{k,\alpha} + \|u_0(s, \cdot)\|_{k+2,\alpha}).$$

Par compacité de la variété S , on obtient le supremum voulu.

Corollaire 2.4.7. *Sous les mêmes hypothèses de la Proposition 2.4.5, on suppose que $U \times Z$ est une variété à coins de profondeur l associée à une famille d'hypersurfaces bordantes $(H_i)_{i \in \{1, \dots, l\}}$. Soit ρ_i une fonction de définition de H_i , pour*

$i \in \{1, \dots, l\}$. Si

$$f \in \rho^\beta (\log \rho)^\eta \left(\mathcal{A}_{\text{phg}}^{\mathcal{G}_{2|U}}(U, C_{\mathcal{V}_Z}^{k,\alpha}([0, T] \times \mathring{Z}; E)) + x_{|U}^{\mathcal{G}} C_b^\infty(\mathring{U}; C_{\mathcal{V}_Z}^{k,\alpha}([0, T] \times \mathring{Z}; E)) \right),$$

où x est comme dans la Proposition 2.4.5, $\rho^\beta = \prod_{i=1}^l \rho_i^{\beta_i}$, $(\log \rho)^\eta = \prod_{i=1}^l (\log \rho_i)^{\eta_i}$, $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_l)$ et $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_l)$ avec $\beta_i > 0$ et $\eta_i \in \mathbb{N}_0$ (ou $\beta_i = \eta_i = 0$), alors

$$u \in \rho^\beta (\log \rho)^\eta C_b^\infty(\mathring{U}; C_{\mathcal{V}_Z}^{k+2,\alpha}([0, T] \times \mathring{Z}; E)).$$

Démonstration. On considère la famille d'opérateurs paramétrée par $s \in U$

$$\tilde{L}_t(s) := \rho^{-\beta} (\log \rho)^{-\eta} \circ L_t(s) \circ \rho^\beta (\log \rho)^\eta.$$

On a que $\tilde{L}_t(s) \in \text{Diff}_{\mathcal{V}_Z}^2(\mathring{Z}; E)$ est une famille lisse d'opérateurs par la Remarque 2.1.2, et aussi clairement uniformément \mathcal{V}_Z -elliptiques car

$$\forall \xi \in T_m^* \mathring{Z} \setminus \{0\}, \quad \sigma_2(\tilde{L}_t(s))(\xi) = \sigma_2(L_t(s))(\xi) = -\rho^{-\beta} (\log \rho)^{-\eta} \rho^\beta (\log \rho)^\eta g^{ij} \xi_i \xi_j,$$

où g est une certaine \mathcal{V}_Z -métrique. On peut se ramener alors à une famille d'équations équivalente à la famille d'équations décrite ci-dessus, à savoir

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} - \tilde{L}_t \tilde{u} = \tilde{f}, \quad \tilde{u}|_{t=0} = \tilde{u}_0, \quad \text{avec}$$

$$\tilde{u} = \rho^{-\beta} (\log \rho)^{-\eta} u, \quad \tilde{u}_0 = \rho^{-\beta} (\log \rho)^{-\eta} u_0, \quad \tilde{f} = \rho^{-\beta} (\log \rho)^{-\eta} f,$$

et l'existence et l'unicité de la solution découle de la proposition précédente. \square

Théorème 2.4.8. *Soit (M, \mathcal{V}) un fibré de structures de Lie fibrées à l'infini associé au fibré $\phi_M : M \rightarrow S$, telle que le rayon d'injectivité des métriques compatibles est strictement positif. Soient \mathcal{G} , \mathcal{G}_1 et \mathcal{G}_2 des familles indicielles positives de M et $L_t(s)$ une famille polyhomogène $[0, T] \times S$ d'opérateurs de $\text{Diff}_{\mathcal{V}, \mathcal{G}}^2(M; E)$ uniformément \mathcal{V}_{M_s} -elliptiques sur $M_s := \phi_M^{-1}(s)$, $\forall s \in S$. Alors pour $u_0 \in \mathcal{A}_{\text{phg}}^{\mathcal{G}_1}(M; E)$ et $f \in \mathcal{A}_{\text{phg}}^{\mathcal{G}_2}([0, T] \times M; E)$, la famille d'équations*

$$\frac{\partial u}{\partial t} - L_t u = f, \quad u|_{t=0} = u_0 \tag{2.12}$$

possède alors une unique solution $u \in \mathcal{A}_{\text{phg}}^{\mathcal{K}}([0, T] \times M; E)$, où \mathcal{K} est la famille indicielle positive donnée par

$$\mathcal{K} = \mathcal{G}_{\infty} + (\mathcal{G}_1 \cup \mathcal{G}_2).$$

Démonstration. D'abord, en considérant $u - u_0$ au lieu de u , on peut toujours se ramener au cas où $u_0 = 0$. On procède par récurrence sur la profondeur l de la variété M , le cas $l = 0$ découle trivialement de la Proposition 2.4.4. On suppose donc que le résultat est vrai pour toute variété de profondeur strictement plus petit que l . Et on montre qu'alors, le résultat est vrai au rang l . Il faut montrer que $u \in \mathcal{A}_{\text{phg}}^{\mathcal{K}|U \times Z}([0, T] \times U \times Z; E)$ sur chaque ouvert de trivialisations locale $U \times Z$ du fibré de structures de Lie fibrées à l'infini. Le cas $\dim Z = 0$ a été fait dans la Proposition 2.4.4. On suppose que $U \times Z$ avec $\dim Z \geq 1$ est une variété à coins de profondeur l associée à une famille $(H_i)_{i \in \{1, \dots, l\}}$ des hypersurfaces bordantes. Puisque \mathcal{K} est une famille indicielle positive, on a que

$$\mathcal{A}_{\text{phg}}^{\mathcal{K}|U \times Z}([0, T] \times U \times Z; E) \subseteq C_b^{\infty}(\overset{\circ}{U}; C_{\mathcal{V}_Z}^{\infty}([0, T] \times \overset{\circ}{Z}; E)).$$

On sait déjà par le Corollaire 2.4.7 que l'équation possède une solution unique $u \in C_b^{\infty}(\overset{\circ}{U}; C_{\mathcal{V}_Z}^{\infty}([0, T] \times \overset{\circ}{Z}; E))$. On fixe $i \in \{1, \dots, l\}$. Alors on définit $\{z_j\}_{j \in \mathbb{N}_0}$ une suite strictement croissante de nombres réels positifs ou nuls avec

$$z_0 = 0 \text{ et } (z_j, 0) \in \mathcal{K}|_{U \times Z}(H_i) \quad \forall j \in \mathbb{N}, \quad (2.13)$$

$$(z, k) \in \mathcal{K}|_{U \times Z}(H_i) \implies z = z_j \text{ pour un certain } j \in \mathbb{N}_0. \quad (2.14)$$

Pour $i \in \{1, \dots, l\}$ fixé, on va montrer par récurrence sur j que $\forall j \in \mathbb{N}_0, \exists u_j \in \mathcal{A}_{\text{phg}}^{\mathcal{K}|U \times Z}([0, T] \times U \times Z; E)$ tel que $u_j(0, \cdot) \equiv 0$ et

$$u - u_j \in \rho_i^{\vartheta} C_b^{\infty}(\overset{\circ}{U}; C_{\mathcal{V}_Z}^{\infty}([0, T] \times \overset{\circ}{Z}; E)) \quad \forall \vartheta < z_{j+1}, \quad (2.15)$$

où ρ_i est une fonction bordante de H_i .

On suppose maintenant que le résultat est vrai jusqu'à l'ordre $j - 1$ et alors on a

que

$$\begin{aligned} \exists u_{j-1} \in \mathcal{A}_{\text{phg}}^{\mathcal{K}|U \times Z}([0, T] \times U \times Z; E) \text{ tel que } u_{j-1}(0, \cdot) \equiv 0 \text{ et} \\ u - u_{j-1} \in \rho_i^{\vartheta} C_b^{\infty}(\mathring{U}; C_{\mathcal{V}_Z}^{\infty}([0, T] \times \mathring{Z}; E)) \quad \forall \vartheta < z_j. \end{aligned}$$

Pour le cas $j = 0$, il est sous entendu ici qu'on prend $u_{-1} = 0$, de sorte que $u - u_{-1} \in C_b^{\infty}(\mathring{U}; C_{\mathcal{V}_Z}^{\infty}([0, T] \times \mathring{Z}; E))$. On pose $v = u - u_{j-1}$ vérifiant

$$\frac{\partial v}{\partial t} - L_t v = f^j, \quad f^j = f - \frac{\partial u_{j-1}}{\partial t} + L_t u_{j-1}. \quad (2.16)$$

En utilisant la Remarque 2.2.2, le fait que $\mathcal{G} + \mathcal{K} = \mathcal{K}$ et que f est polyhomogène, on a que

$$f^j \in \mathcal{A}_{\text{phg}}^{\mathcal{K}|U \times Z}([0, T] \times U \times Z; E).$$

Étant donné que $v \in \rho_i^{\vartheta} C_b^{\infty}(\mathring{U}; C_{\mathcal{V}_Z}^{\infty}([0, T] \times \mathring{Z}; E))$, $\forall \vartheta < z_j$, on obtient aussi $f^j \in \rho_i^{\vartheta} C_b^{\infty}(\mathring{U}; C_{\mathcal{V}_Z}^{\infty}([0, T] \times \mathring{Z}; E))$, $\forall \vartheta < z_j$. Cela entraîne que

$$\exists k \in \mathbb{N}_0, \quad f^j \in \rho_i^{z_j} (\log \rho_i)^k C_b^{\infty}(\mathring{U}; C_{\mathcal{V}_Z}^{\infty}([0, T] \times \mathring{Z}; E)).$$

On suppose maintenant pour un instant que l'on sache déjà que

$$v \in \mathcal{A}_{\text{phg}}^{\mathcal{K}|U \times Z}([0, T] \times U \times Z; E) \cap \rho_i^{z_j} (\log \rho_i)^k C_b^{\infty}(\mathring{U}; C_{\mathcal{V}_Z}^{\infty}([0, T] \times \mathring{Z}; E)).$$

Dans ce cas, on peut restreindre la famille d'équations (2.16) au coefficient d'ordre $\rho_i^{z_j} (\log \rho_i)^k$ sur H_i . On sait déjà par la Proposition 1.4.8, que (H_i, \mathcal{V}_{H_i}) est un fibré de structures de Lie fibrées à l'infini par rapport à un certain fibré (pas nécessairement trivial) de fibre typique dénotée Z_i . En utilisant la Proposition 2.3.10, l'équation (2.16) restreinte au coefficient d'ordre $\rho_i^{z_j} (\log \rho_i)^k$ sur H_i sera une famille d'équations \mathcal{V}_{Z_i} -paraboliques linéaires localement de la forme :

$$\frac{\partial v_j(s)}{\partial t} - \Psi_t(s) v_j(s) = f_{z_j, k}^j(s), \quad v_j(s)|_{t=0} = 0, \quad (2.17)$$

où $v_j(s)$ et $f_{z_j, k}^j(s) \in \mathcal{A}_{\text{phg}}^{\mathcal{K}|Z_i}([0, T] \times Z_i; E)$ sont les coefficients du terme d'ordre $\rho_i^{z_j} (\log \rho_i)^k$ de v_j et f^j respectivement restreint sur \mathring{Z}_i et $\Psi_t(s) \in \text{Diff}_{\mathcal{V}_{Z_i}, \mathcal{K}|Z_i}^2(Z_i; E)$

est une famille d'opérateurs différentiels \mathcal{V}_{Z_i} -elliptiques car elle est la restriction à l'ordre de 0 de l'opérateur

$$\tilde{L}_t = \rho_i^{-z_j} (\log \rho_i)^{-k} L_t \rho_i^{z_j} (\log \rho_i)^k \text{ satisfaisant } \sigma_2(\tilde{L}_t) = \sigma_2(L_t).$$

Vu que H_i est une variété de profondeur $l - 1$, par notre hypothèse de récurrence, la famille d'équations (2.17) possède une unique solution polyhomogène $v_j \in \mathcal{A}_{\text{phg}}^{\mathcal{K}_{|H_i}}([0, T] \times H_i; E)$. Maintenant, même si on ne sait pas a priori si v est polyhomogène, on remarque que la famille d'équation (2.17) a malgré tout un sens et que sa solution v_j donne le candidat naturel qui est la restriction à l'ordre $\rho_i^{z_j} (\log \rho_i)^k$ de v . Pour montrer que c'est bien le cas, on pose $w = v - w_j$ avec $w_j = \rho_i^{z_j} (\log \rho_i)^k \Xi_{H_i}(v_j)$, où Ξ_{H_i} est une application d'extension comme dans la Définition 2.2.4, de sorte que w satisfait à l'équation d'évolution

$$\frac{\partial w}{\partial t} - L_t w = h^j, \quad w|_{t=0} = 0, \quad h^j = f^j - \frac{\partial w_j}{\partial t} + L_t w_j.$$

Or, comme f^j et w_j appartiennent à l'espace

$$\rho_i^{z_j} (\log \rho_i)^k C_b^\infty(\mathring{U}; C_{\mathcal{V}_Z}^\infty([0, T] \times \mathring{Z}; E)) \cap \mathcal{A}_{\text{phg}}^{\mathcal{K}_{|U \times Z}}([0, T] \times U \times Z; E),$$

on a alors que h^j est aussi un élément de cet espace. Grâce à la définition de w_j , on a aussi $h^j \in \rho_i^{z_j} (\log \rho_i)^{k-1} C_b^\infty(\mathring{U}; C_{\mathcal{V}_Z}^\infty([0, T] \times \mathring{Z}; E))$ car la restriction h^j sur \mathring{H}_i admet un coefficient nul d'ordre $\rho_i^{z_j} (\log \rho_i)^k$. D'après le Corollaire 2.4.7, on a alors que

$$w \in \rho_i^{z_j} (\log \rho_i)^{k-1} C_b^\infty(\mathring{U}; C_{\mathcal{V}_Z}^\infty([0, T] \times \mathring{Z}; E)).$$

En répétant cet argument k fois, on obtient alors

$$r_k, r_{k-1}, \dots, r_0 \in \mathcal{A}_{\text{phg}}^{\mathcal{K}_{|H_i}}([0, T] \times H_i; E)$$

avec $r_k = v_j$ de sorte que

$$\hat{v} = v - \sum_{p=0}^k \Xi_{H_i}(r_p) \rho_i^{z_j} (\log \rho_i)^p, \quad r_p(0, \cdot) \equiv 0$$

a pour équation d'évolution

$$\frac{\partial \hat{v}}{\partial t} - L_t \hat{v} = \hat{f}^j, \quad \hat{v}(0, \cdot) \equiv 0 \text{ avec}$$

$$\hat{f}^j \in \rho_i^{z_j} C_b^\infty(\dot{U}; C_{\mathcal{V}_Z}^\infty([0, T] \times \dot{Z}; E)) \cap \mathcal{A}_{\text{phg}}^{\mathcal{K}|U \times Z}([0, T] \times U \times Z; E)$$

et $\rho_i^{-z_j} \hat{f}_{|H_i}^j = 0$. Ainsi on a $\hat{f}^j \in \rho_i^\vartheta C_b^\infty(\dot{U}; C_{\mathcal{V}_Z}^\infty([0, T] \times \dot{Z}; E)) \quad \forall \vartheta < z_{j+1}$, et par le Corollaire 2.4.7, on déduit que $\hat{v} \in \rho_i^\vartheta C_b^\infty(\dot{U}; C_{\mathcal{V}_Z}^\infty([0, T] \times \dot{Z}; E)) \quad \forall \vartheta < z_{j+1}$.

Il suffit donc de prendre

$$u_j = u_{j-1} + \sum_{p=0}^k \Xi_{H_i}(r_p) \rho_i^{z_j} (\log \rho_i)^p,$$

ce qui termine la construction de la suite u_j de (2.15) et complète la démonstration. \square

Corollaire 2.4.9. *Si dans l'équation (2.12), $L_t(s)$ est une famille lisse $[0, T] \times S$ d'opérateurs uniformément \mathcal{V}_{M_s} -elliptiques de $\text{Diff}_{\mathcal{V}_{M_s}}^2(M_s; E)$, $u_0 \in C^\infty(M; E)$ et $f \in C^\infty([0, T] \times M; E)$, alors la solution de cette équation est dans $C^\infty([0, T] \times M; E)$.*

Démonstration. Il suffit de prendre $\mathcal{G} = \mathcal{G}_1 = \mathcal{G}_2 = \{\mathbb{N}_0 \times \{0\}$ pour $H \in \mathcal{M}_1(M)\}$ dans le Théorème 2.4.8. \square

Corollaire 2.4.10. *Soit (M, \mathcal{V}) une structure de Lie fibrée à l'infini telle que le rayon d'injectivité des métriques compatibles est strictement positif. Soient \mathcal{G} , \mathcal{G}_1 et \mathcal{G}_2 des familles indicielles positives de M et $\{L_t : t \in [0, T]\}$ une famille d'opérateurs uniformément $\mathcal{V}_{SF, \mathcal{G}}$ -elliptiques de $\text{Diff}_{\mathcal{V}_{SF, \mathcal{G}}}^2(M; E)$. Alors pour $u_0 \in \mathcal{A}_{\text{phg}}^{\mathcal{G}_1}(M; E)$ et $f \in \mathcal{A}_{\text{phg}}^{\mathcal{G}_2}([0, T] \times M; E)$, la famille d'équations*

$$\frac{\partial u}{\partial t} - L_t u = f, \quad u_{|t=0} = u_0, \tag{2.18}$$

possède une unique solution $u \in \mathcal{A}_{\text{phg}}^{\mathcal{K}}([0, T] \times M; E)$, où \mathcal{K} est la famille indicielle positive donnée par $\mathcal{K} = \mathcal{G}_\infty + (\mathcal{G}_1 \cup \mathcal{G}_2)$.

Démonstration. C'est une conséquence directe du Théorème 2.4.8 en prenant la base S un point de fibré ϕ_M . \square

Corollaire 2.4.11. *Si dans l'équation (2.18), la famille $\{L_t : t \in [0, T]\}$ d'opérateurs uniformément \mathcal{V}_{SF} -elliptiques est dans $\text{Diff}_{\mathcal{V}_{SF}}^2(M; E)$, $u_0 \in C^\infty(M; E)$ et $f \in C^\infty([0, T] \times M; E)$, alors la solution de cette équation est dans $C^\infty([0, T] \times M; E)$.*

Démonstration. Dans le Corollaire 2.4.10, on prend la même famille indiciale \mathcal{G} que dans la preuve du Corollaire 2.4.9. \square



CHAPITRE III

POLYHOMOGÉNÉITÉ DES SOLUTIONS DES ÉQUATIONS PARABOLIQUES QUASI-LINÉAIRES

Ce chapitre développe la théorie des équations paraboliques quasi-linéaires déterminées par une structure de Lie à l'infini. En s'inspirant beaucoup de l'article de Bahuaud (Bahuaud, 2011), nous étudions l'existence et l'unicité de leurs solutions et nous déterminons quelles contraintes nous assurent que la polyhomogénéité sera préservée localement jusqu'au bord. Ces résultats jouent un rôle important dans des problèmes d'évolution géométrique concrets tel que le flot de Ricci.

3.1 L'existence et l'unicité des solutions des équations ordinaires non linéaires

Pour se réchauffer, considérons d'abord le cas d'équations ordinaires non linéaires au lieu d'EDP paraboliques. Soient $T > 0$ un réel positif et $f : [0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application continue. Pour $x_0 \in \mathbb{R}^n$, considérons l'EDO

$$\frac{\partial}{\partial t} x = f(t, x), \quad x(0) = x_0. \quad (3.1)$$

Pour une telle équation, nous avons le résultat bien connu d'existence et d'unicité suivant (voir par exemple Théorème A (Simmons, 2016) à la page 626).

Théorème 3.1.1. (*Cauchy-Lipschitz*) *Si $f(t, \cdot)$ est lipschitzienne (uniformément en t) sur la boule fermée centrée en x_0 de rayon r , $B(x_0, r) := \{x \in \mathbb{R}^n :$*

$\|x - x_0\| \leq r\}$, et que $c := \sup\{\|f(t, x)\| : (t, x) \in [0, T] \times B(x_0, r)\} < \infty$, alors l'équation (3.1) possède une unique solution $x \in C^1([0, \alpha], B(x_0, r))$, avec

$$\alpha = \min\left(\frac{1}{\kappa}, \frac{r}{c}\right), \quad (3.2)$$

où κ est la constante de Lipschitz de f sur $B(x_0, r)$. De plus, la suite définie par

$$y_0 = x_0, \quad y_i(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, y_{i-1}(s)) ds, \quad i \geq 1, \quad |t - t_0| \leq \alpha,$$

converge uniformément sur l'intervalle $|t - t_0| \leq \alpha$ vers la solution x de (3.1).

Une solution $x : [0, \alpha] \rightarrow \mathbb{R}^n$ de l'équation (3.1) est dite maximale si elle n'est pas prolongeable, c'est-à-dire que si $y : [0, \tau] \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une autre solution, alors $\tau \leq \alpha$. Bien entendu, d'après l'unicité de la solution $x = y$ sur $[0, \tau]$. Par conséquent, toute équation de la forme (3.1) possède toujours une solution maximale. De plus si f est de classe C^k , alors la solution est de classe C^{k+1} .

Corollaire 3.1.2. Soient M une variété à coins compacte, \mathcal{G} une famille indicielle positive associée et $E \rightarrow M$ un fibré vectoriel. Pour $u_0 \in \mathcal{A}_{\text{phg}}^{\mathcal{G}}(M; E)$ et $f \in \mathcal{A}_{\text{phg}}^{\mathcal{G}}(E)$, on considère la famille d'EDO

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = f(u(x, t)), \quad u|_{t=0} = u_0. \quad (3.3)$$

Alors il existe $\tau > 0$ tel que la famille d'équations (3.3) possède une unique solution maximale $u \in C_b^\infty(\overset{\circ}{M}, E \otimes C^{k+1}([0, \tau]))$.

Démonstration. Soit $x \in M$ fixé. En vertu du Théorème 3.1.1, pour chaque équation de (3.3), il existe une constante $\tau_x > 0$ telle qu'elle possède une unique solution $u(x, \cdot) \in E_x \otimes C^{k+1}([0, \tau_x])$. Comme M est compact, il est alors facile de trouver, à partir de (3.2), un temps minimale τ d'existence qui fonctionne pour la famille d'équations de (3.3). Il reste à montrer que la solution u est dans $C_b^\infty(\overset{\circ}{M}, E \otimes C^{k+1}([0, \tau]))$. En considérant $u - u_0$ au lieu de u , on peut toujours

se ramener au cas où $u_0 = 0$. On prend un ouvert trivialisant quelconque $U \subset \overset{\circ}{M}$ du fibré $E \rightarrow M$ de sorte que $E|_U \simeq U \times V$. Pour $k \geq 0$ arbitraire, on considère la fonction

$$F : U \times V \otimes C^{k+1}([0, \tau]) \rightarrow V \otimes C^{k+1}([0, \tau])$$

définie par $F(x, v) := \frac{\partial v}{\partial t} - f(x, v)$. Il est clair que F est de classe C^∞ sur U et que $F(x, \cdot)$ est de classe C^∞ . Comme $d_v F(x, v) = \frac{\partial}{\partial t} - d_v f(x, v)$ est linéaire et bijective, on peut appliquer le théorème des fonctions implicites (Krantz et Parks, 2012) pour obtenir que $u \in C^\infty(U; V \otimes C_{\mathcal{V}_Z}^{k+1}([0, \tau]))$. On prend finalement le cas $U \subset M$ tel que $U \cap \partial M \neq \emptyset$. Comme $f \in \mathcal{A}_{\text{phg}}^{\mathcal{G}}(E)$, on peut alors se ramener au cas précédent. En utilisant l'éclatement logarithmique total et en prolongeant ainsi la famille d'équations à Ω_{\log} comme dans la Proposition 2.4.5, on déduit que $u \in C^\infty(\Omega_{\log}; V \otimes C^{k+1}([0, \tau])) \subset C_{\mathcal{V}_{pc}}^\infty(U_{\log}; V \otimes C^{k+1}([0, \tau])) = C_b^\infty(\overset{\circ}{U}; V \otimes C^{k+1}([0, \tau]))$. \square

3.2 L'existence et l'unicité des solutions des équations quasi-linéaires paraboliques

Soit $\overset{\circ}{M}$ une variété riemannienne avec une structure de Lie à l'infini (M, \mathcal{V}) telle que le rayon d'injectivité des métriques compatibles est strictement positif. Soient $E \rightarrow M$ un fibré vectoriel et $\{L_t : t \in [0, T]\}$ une famille d'opérateurs uniformément \mathcal{V} -elliptiques de $\text{Diff}_{\mathcal{V}}^2(\overset{\circ}{M}; E)$. Nous allons étudier des équations paraboliques quasi-linéaires de la forme

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - L_t\right)u = Q(u)u + f, \quad u|_{t=0} = 0, \quad (3.4)$$

où $f \in C_{\mathcal{V}}^\infty([0, T] \times \overset{\circ}{M}; E)$ est indépendante de u et

$$Q : C_{\mathcal{V}}^{k+2, \alpha}([0, T] \times \overset{\circ}{M}; E) \times C_{\mathcal{V}}^{k+2, \alpha}([0, T] \times \overset{\circ}{M}; E) \rightarrow C_{\mathcal{V}}^{k, \alpha}([0, T] \times \overset{\circ}{M}; E)$$

est une application telle que $\forall w, w', w'' \in C_{\mathcal{V}}^{k+2, \alpha}([0, T] \times \overset{\circ}{M}; E)$,

$$Q(w)(aw' + bw'') = aQ(w)w' + bQ(w)w'', \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad (3.5)$$

$$\|Q(w)w\|_{k,\alpha} \leq c \|w\|_{k+2,\alpha}^2 \text{ et} \quad (3.6)$$

$$\|Q(w)w - Q(w')w'\|_{k,\alpha} \leq C \max\{\|w\|_{k+2,\alpha}, \|w'\|_{k+2,\alpha}\} \|w - w'\|_{k+2,\alpha}, \quad (3.7)$$

pour c et C deux constantes réelles.

Proposition 3.2.1. *Il existe $\tau \in (0, T]$ tel que l'équation (3.4) admet une unique solution $u \in C_V^{k+2,\alpha}([0, \tau] \times \mathring{M}; E)$.*

Démonstration. On suit l'approche de Bahuaud (Bahuaud, 2011). En utilisant la Proposition 2.4.2 et le Corollaire 2.4.3, il existe une application linéaire

$$\Psi : C_V^{k,\alpha}([0, T] \times \mathring{M}; E) \rightarrow C_V^{k+2,\alpha}([0, T] \times \mathring{M}; E)$$

telle que $(\frac{\partial}{\partial t} - L_t)\Psi(h) = h$, $\Psi(h)|_{t=0} = 0$ et satisfait à l'estimation de Schauder

$$\|\Psi(h)\|_{k+2,\alpha} \leq \kappa \|h\|_{k,\alpha}, \quad (3.8)$$

pour une certaine constante $\kappa > 0$. Ainsi, l'équation (3.4) est alors équivalente à

$$u = \Psi(Q(u)u + f).$$

On définit l'application \mathcal{Y} par $\forall \nu \in C_V^{k+2,\alpha}([0, \tau] \times \mathring{M}; E)$,

$$\mathcal{Y}(\nu) = \Psi(Q(\nu)\nu + f).$$

Pour certains K et τ deux nombres réels strictement positifs à déterminer, on considère

$$\mathcal{Z}_{K,\tau} := \{\nu \in C_V^{k+2,\alpha}([0, \tau] \times \mathring{M}; E) \mid \nu(0) = 0, \|\nu\|_{k+2,\alpha} \leq K\}.$$

Si $\nu \in \mathcal{Z}_{K,\tau}$ alors $u = \mathcal{Y}(\nu)$ est la solution de

$$\frac{\partial u}{\partial t} - L_t u = Q(\nu)\nu + f, \quad u(0, \cdot) \equiv 0.$$

On suit le même raisonnement des Lemmes 4.5 et 4.6 de (Bahaud, 2011) pour prouver que $\mathcal{Y} : \mathcal{Z}_{K,\tau} \rightarrow \mathcal{Z}_{K,\tau}$ est une application contractante. En effet, soit $\nu \in \mathcal{Z}_{K,\tau}$ et on définit

$$\begin{aligned} u_1 &:= \Psi(Q(\nu)\nu), \\ u_2 &:= \Psi(f). \end{aligned}$$

En particulier, u_1 est la solution de l'équation parabolique

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} - L_t u_1 = Q(\nu)\nu, u_1(0, \cdot) \equiv 0.$$

À l'aide de l'estimation (3.6) de l'application Q et l'estimation de Schauder (3.8), on a que

$$\begin{aligned} \|u_1\|_{k+2,\alpha} &\leq \kappa \|Q(\nu)\nu\|_{k,\alpha} \\ &\leq c\kappa \|\nu\|_{k+2,\alpha}^2 \\ &\leq c\kappa K \|\nu\|_{k+2,\alpha}. \end{aligned}$$

On prend K suffisamment petit pour que $c\kappa K \leq \frac{1}{2}$, ainsi

$$\|u_1\|_{k+2,\alpha} \leq \frac{1}{2}K. \quad (3.9)$$

De même, u_2 est la solution de l'équation parabolique

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} - L_t u_2 = f, u_2(0) \equiv 0.$$

En utilisant $u_2(0) \equiv 0$ et l'estimation de Schauder (3.8), on a que

$$\begin{aligned} \|u_2(t)\|_{k+2,\alpha} &\leq \int_0^t \left\| \frac{\partial u_2}{\partial s}(s) \right\|_{k+2,\alpha} ds \\ &\leq \tau \left\| \frac{\partial u_2}{\partial s}(s) \right\|_{k+2,\alpha} \\ &\leq \tau \|u_2\|_{k+4,\alpha} \\ &\leq \tau\kappa \|f\|_{k+2,\alpha}. \end{aligned}$$

On prend τ assez petit pour que $\tau\kappa\|f\|_{k+2,\alpha} \leq \frac{1}{2}K$, de sorte que

$$\|u_2\|_{k+2,\alpha} \leq \frac{1}{2}K. \quad (3.10)$$

Par (3.9) et (3.10), on déduit que l'application $\mathcal{Y} : \mathcal{Z}_{K,\tau} \rightarrow \mathcal{Z}_{K,\tau}$ est bien définie. Aussi, pour K suffisamment petit tel que $K \leq \frac{1}{2\kappa C}$, elle est contractante grâce à l'estimation (3.7),

$$\begin{aligned} \|\mathcal{Y}(\nu_1) - \mathcal{Y}(\nu_2)\|_{k+2,\alpha} &\leq \|\Psi(Q(\nu_1)\nu_1 - Q(\nu_2)\nu_2)\|_{k+2,\alpha} \\ &\leq \kappa \|Q(\nu_1)\nu_1 - Q(\nu_2)\nu_2\|_{k,\alpha} \\ &\leq \kappa C \max\{\|\nu_1\|_{k+2,\alpha}; \|\nu_2\|_{k+2,\alpha}\} \|\nu_1 - \nu_2\|_{k+2,\alpha} \\ &\leq \kappa C K \|\nu_1 - \nu_2\|_{k+2,\alpha}. \end{aligned}$$

Par le Théorème du point fixe de Banach, on voit donc que pour

$$\tau \leq \frac{K}{2\kappa(\|f\|_{k+2,\alpha} + 1)} \text{ et } K \leq \frac{1}{2\kappa(C + C)},$$

l'équation (3.4) possède une unique solution $u \in C_{\mathcal{V}}^{k+2,\alpha}([0, \tau) \times \overset{\circ}{M}; E)$. \square

Remarque 3.2.2. *Puisque l'ellipticité est une condition ouverte, en prenant τ assez petit, on peut aussi supposer que $L_t + Q(u)$ est elliptique $\forall t \in [0, \tau)$.*

Proposition 3.2.3. *Si la solution u de (3.4) peut se réécrire comme étant la solution d'une équation parabolique quasi-linéaire*

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a(u, \nabla u) \cdot \nabla^2 u + b(u, \nabla u) = f, \quad (3.11)$$

où $a(u, \nabla u) \in C_{\mathcal{V}}^{k+1,\alpha}([0, \tau) \times \overset{\circ}{M}; T^{(2,0)}\overset{\circ}{M} \otimes E)$ et $b(u, \nabla u) \in C_{\mathcal{V}}^{k+1,\alpha}([0, \tau) \times \overset{\circ}{M}; E)$ dès que $u \in C_{\mathcal{V}}^{k+2,\alpha}([0, \tau) \times \overset{\circ}{M}; E)$, alors la solution u est en fait dans $C_{\mathcal{V}}^{\infty}([0, \tau) \times \overset{\circ}{M}; E)$.

Démonstration. Comme $a(u, \nabla u)$ et $b(u, \nabla u)$ sont de classe $C_{\mathcal{V}}^{k+1,\alpha}$ dès que $u \in C_{\mathcal{V}}^{k+2,\alpha}([0, \tau) \times \overset{\circ}{M}; E)$, on obtient que $u \in C_{\mathcal{V}}^{k+3,\alpha}([0, \tau) \times \overset{\circ}{M}; E)$ par le Corollaire 2.4.3. Ainsi, on déduit la régularité voulue par un argument de bootstrap. \square

Soit (M, \mathcal{V}) un fibré de structures de Lie fibrées à l'infini associé à un fibré $\phi_M : M \rightarrow S$, telle que le rayon d'injectivité des métriques compatibles est strictement positif. Soient $\Psi_U : \phi_M^{-1}(U) \rightarrow U \times Z$ une trivialisatation locale du fibré de structures de Lie fibrées à l'infini, pour U un ouvert de S , et (Z, \mathcal{V}_Z) la structure de Lie à l'infini de la fibre Z . Soient $f \in \mathcal{A}_{\text{phg}}^{\mathcal{F}|U}(U, C_{\mathcal{V}_Z}^{k,\alpha}([0, T] \times \overset{\circ}{Z}; E))$ et $L_t(s)$ une famille polyhomogène sur $[0, T] \times U$ d'opérateurs uniformément \mathcal{V}_Z -elliptiques dans $\text{Diff}_{\mathcal{V}_Z}^2(Z; E)$ par rapport à $\mathcal{G}|_U$, où \mathcal{F} et \mathcal{G} deux familles indicielles positives de S (avec ensemble indicielle \mathbb{N}_0 en $t = 0$ et $t = T$). On considère Q une famille d'applications sur $C_{\mathcal{V}}^\infty([0, T] \times \overset{\circ}{Z}; E)$ définie par

$$Q(u)v = a(\cdot, u, \nabla u) \cdot \nabla^2 v + b(\cdot, u, \nabla u) \cdot \nabla v + c(\cdot, u) \cdot v, \quad (3.12)$$

où la dépendance des familles a , b et c par rapport u et ∇u est lisse de sorte qu'en appliquant la dérivation en chaîne, on a que, pour tout $s \in U$, $a(s, u, \nabla u) \in C_{\mathcal{V}}^{k,\alpha}([0, T] \times \overset{\circ}{Z}; T^{(2,0)}\overset{\circ}{Z} \otimes E)$, $b(s, u, \nabla u) \in C_{\mathcal{V}}^{k,\alpha}([0, T] \times \overset{\circ}{Z}; T^*\overset{\circ}{Z} \otimes E)$ et $c(s, u) \in C_{\mathcal{V}}^{k,\alpha}([0, T] \times \overset{\circ}{Z}; E)$ dès que $u \in C_{\mathcal{V}}^{k+1,\alpha}([0, T] \times \overset{\circ}{Z}; E)$.

Hypothèse 3.2.4. *On suppose que les familles a , b et c de (3.12) sont polyhomogènes en $s \in U$ par rapport à $\mathcal{G}|_U$, et que $a(\cdot, 0, 0)|_{t=0} = 0$, $b(\cdot, 0, 0)|_{t=0} = 0$ et $c(\cdot, 0)|_{t=0} = 0$. On suppose aussi que la famille Q satisfait (3.6) et (3.7) uniformément en $s \in U$.*

Proposition 3.2.5. *Soit Q une famille d'applications donnée par (3.12) satisfaisant à l'Hypothèse 3.2.4. Il existe alors $\tau \in (0, T]$ tel que la famille d'équations \mathcal{V}_Z -paraboliques quasi-linéaires paramétrée par $s \in U$,*

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - L_t\right)u = Q(u)u + f, \quad u|_{t=0} = 0, \quad (3.13)$$

possède une unique solution $u \in C_b^\infty(\overset{\circ}{U}, C_{\mathcal{V}_Z}^{k+2,\alpha}([0, \tau] \times \overset{\circ}{Z}; E))$.

Démonstration. Pour chaque $s \in U$ fixé, on sait par la Proposition 3.2.1 qu'il existe $\tau_s > 0$ tel que (3.2.3) possède une unique solution $u(s) \in C_{\mathcal{V}_Z}^\infty([0, \tau_s] \times \overset{\circ}{Z}; E)$.

On suppose pour l'instant que $\tau = \inf_{s \in U} (\tau_s) > 0$. On considère $\mathcal{Y} : U \times \mathcal{Z}_{K,\tau} \rightarrow \mathcal{Z}_{K,\tau}$ l'application définie par

$$\mathcal{Y}(\cdot, \nu) = \Psi(Q(\cdot, \nu)(\nu) + f) \quad \forall \nu \in C_{\mathcal{V}_Z}^{k,\alpha}([0, \tau] \times \overset{\circ}{Z}; E).$$

On sait déjà, pour $s \in U$ fixé, que $\mathcal{Y}(s)$ est contractante. De plus, par la Proposition 2.4.5, $\mathcal{Y}(\cdot, \nu)$ est lisse sur $\overset{\circ}{U}$ car elle est équivalente à la solution d'une famille d'équations paraboliques linéaires paramétrée. Par conséquent, lorsque $U \subset \overset{\circ}{S}$, on utilise le théorème de point fixe de Banach à un paramètre (Krantz et Parks, 2012) pour montrer que $u \in C^\infty(U; C_{\mathcal{V}_Z}^k([0, \tau] \times \overset{\circ}{Z}; E))$. Si $U \subset S$ tel que $U \cap \partial S \neq \emptyset$, par la polyhomogénéité de L_t et Q , on peut se ramener au cas précédent en utilisant l'éclatement logarithmique total et en prolongeant ainsi la famille d'équations à Ω_{\log} comme dans la Proposition 2.4.5. On déduit que $u \in C_b^\infty(\overset{\circ}{U}; C_{\mathcal{V}_Z}^{k+2,\alpha}([0, \tau] \times \overset{\circ}{Z}; E))$. On revient finalement à montrer que $\tau = \inf_{s \in U} (\tau_s) > 0$. En effet, comme $\bar{U} \subset M$ est compact, on sait par hypothèse que la famille Q satisfait (3.6) et (3.7) uniformes en $s \in U$. De même, les constantes des estimations de Schauder sont uniformément en $s \in U$, par le Remarque 2.4.6, ce qui nous permet de prendre τ non nul. \square

3.3 Polyhomogénéité des solutions des équations quasi-linéaires paraboliques

Dans cette section, nous allons prouver le théorème principal de ce chapitre.

Théorème 3.3.1. *Soit (M, \mathcal{V}) un fibré de structures de Lie fibrées à l'infini associé à un fibré $\phi_M : M \rightarrow S$, telle que le rayon d'injectivité des métriques compatibles est strictement positif. Soient \mathcal{F} et \mathcal{G} deux familles indicielles positives de M et $L_t(s)$ une famille polyhomogène $[0, T] \times S$ d'opérateurs de $\text{Diff}_{\mathcal{V}, \mathcal{G}}^2(M; E)$ uniformément \mathcal{V}_{M_s} -elliptiques sur $M_s := \phi_M^{-1}(s), \forall s \in S$. Alors pour $f \in \mathcal{A}_{\text{phg}}^{\mathcal{F}}([0, T] \times M; E)$ et Q la famille d'applications donnée par (3.12) satisfaisant à l'Hypothèse 3.2.4 avec les familles a, b et c polyhomogènes en $s \in S$ par rapport à \mathcal{G}_S , il existe*

$\varepsilon \in (0, T]$ tel que la famille d'équations

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - L_t\right)u = Q(u)u + f, \quad u_{|t=0} = 0, \quad (3.14)$$

possède une unique solution $u \in \mathcal{A}_{\text{phg}}^{\mathcal{K}}([0, \varepsilon) \times M; E)$, où \mathcal{K} est la famille indicielle positive donnée par

$$\mathcal{K} = \mathcal{G}_{\infty} + \mathcal{F}_{\infty}.$$

Démonstration. Comme dans la preuve du Théorème 2.4.8, on procède par induction sur la profondeur l de M . Pour une variété sans bord, c'est-à-dire une variété de profondeur 0, le résultat découle directement de la Proposition 3.2.5. On suppose donc que le résultat est vrai jusqu'à la profondeur $l - 1$ et on doit montrer qu'il est aussi valide pour l . Il faut donc montrer qu'il existe $\varepsilon \in (0, T]$ tel que $u \in \mathcal{A}_{\text{phg}}^{\mathcal{K}_{|U \times Z}}([0, \varepsilon) \times U \times Z; E)$ sur chaque ouvert de trivialisations locale $U \times Z$ du fibré de structure de Lie. Sur un tel ouvert, on sait déjà par la Proposition 3.2.5 que la famille d'équations (3.14) possède une famille unique de solutions $u \in C_b^{\infty}(\overset{\circ}{U}, C_{\mathcal{V}_Z}^{\infty}([0, \tau) \times \overset{\circ}{Z}; E))$, pour un certain $\tau > 0$. En prenant τ assez petit, on peut aussi supposer que $L_t + Q(u)$ est elliptique $\forall t \in [0, \tau)$. Soient H_i une hypersurface bordante de $U \times Z$ et $\{z_j\}_{j \in \mathbb{N}_0}$ une suite strictement croissante de nombres réels positifs ou nuls avec

$$z_0 = 0 \text{ et } (z_j, 0) \in \mathcal{K}_{|U \times Z}(H_i) \quad \forall j \in \mathbb{N}, \quad (3.15)$$

$$(z, k) \in \mathcal{K}_{|U \times Z}(H_i) \implies z = z_j \text{ pour un certain } j \in \mathbb{N}_0. \quad (3.16)$$

On va montrer par récurrence sur j qu'il existe $\varepsilon_U \in (0, \tau]$ de sorte que $\forall j \in \mathbb{N}_0$, $\exists u_j \in \mathcal{A}_{\text{phg}}^{\mathcal{K}_{|U \times Z}}([0, \varepsilon_U) \times U \times Z; E)$ tel que $u_j(0, \cdot) \equiv 0$ et

$$u - u_j \in \rho_i^{\vartheta} C_b^{\infty}(\overset{\circ}{U}; C_{\mathcal{V}_Z}^{\infty}([0, \varepsilon_U) \times \overset{\circ}{Z}; E)) \quad \forall \vartheta < z_{j+1}. \quad (3.17)$$

On traite d'abord l'ordre 0. On a besoin de trouver u_0 tel que

$$u - u_0 \in \rho_i^{\vartheta} C_b^{\infty}(\overset{\circ}{U}; C_{\mathcal{V}_Z}^{\infty}([0, \varepsilon_i) \times \overset{\circ}{Z}; E)) \quad \forall \vartheta < z_1, \quad (3.18)$$

pour un certain $\varepsilon_i > 0$.

On suppose pour l'instant qu'il existe $\varepsilon_U > 0$ tel que

$$u \in \mathcal{A}_{\text{phg}}^{\mathcal{K}_{|U \times Z}}([0, \varepsilon_U) \times U \times Z; E).$$

On sait déjà par la Proposition 1.4.8 que (H_i, \mathcal{V}_{H_i}) est un fibré de structures de Lie fibrées à l'infini par rapport à un certain fibré de fibre typique dénotée Z_i . On peut donc restreindre la famille d'équations (3.14) au coefficient d'ordre 0 sur H_i . En particulier, si $\dim Z_i = 0$, alors la restriction de (3.4) au coefficient d'ordre 0 sur H_i devient une équation différentielle ordinaire non-linéaire d'ordre 1 sur H_i de la forme

$$\frac{\partial \tilde{u}_0}{\partial t} - l_t \tilde{u}_0 = Q_{i,0}(\tilde{u}_0) + f_{i,0}, \quad \tilde{u}_0(0, \cdot) \equiv 0, \quad (3.19)$$

où $l_t \in \mathcal{A}_{\text{phg}}^{\mathcal{G}_{|H_i}}([0, \varepsilon_U) \times H_i; E)$, $Q_{i,0}$ et $f_{i,0}$ sont les coefficients d'ordre 0 de Q et f respectivement. Sinon, en utilisant la Proposition 2.3.10, notre restriction nous donne une famille d'équations \mathcal{V}_{Z_i} -paraboliques quasi-linéaires

$$\frac{\partial \tilde{u}_0(s)}{\partial t} - L_{t,i,0}(s) \tilde{u}_0(s) = Q_{i,0}(s, \tilde{u}_0(s)) \tilde{u}_0(s) + f_{i,0}(s), \quad \tilde{u}_0(s)(0, \cdot) \equiv 0. \quad (3.20)$$

Sans compromettre la preuve, on peut considérer l'équation (3.19) comme un « cas particulier » de (3.20). Vu que H_i est une variété de profondeur $l - 1$, on applique notre hypothèse de récurrence sur la profondeur de la variété pour voir que la famille d'équations (3.20) possède une unique solution polyhomogène $\tilde{u}_0 \in \mathcal{A}_{\text{phg}}^{\mathcal{K}_{|H_i}}([0, \varepsilon_i) \times H_i; E)$, pour un certain $\varepsilon_i \in (0, \tau]$. On pose $u_0 := \Xi_{H_i}(\tilde{u}_0)$, où Ξ_{H_i} est une application d'extension comme dans la Définition 2.2.4. D'après la formule de Taylor en $u - u_0 = 0$, on voit qu'il existe un opérateur B_t dépendant de u_0 et $u - u_0$ tel que

$$Q(u) - Q(u_0) = (u - u_0) \cdot B_t(u_0, u - u_0). \quad (3.21)$$

En posant $w = u - u_0$, on aura que

$$\begin{aligned}
Q(u)u - Q(u_0)u_0 &= Q(u)(u - u_0) + (Q(u) - Q(u_0))u_0 \\
&= Q(u)(u - u_0) + (u - u_0) \cdot B_t(u_0, u - u_0)u_0 \\
&= Q(u)w + w \cdot B_t(u_0, w)u_0.
\end{aligned}$$

On note par A_t la famille d'opérateurs elliptiques linéaires donnée par

$$A_t(u_0, \nu) = L_t(\nu) + Q(u)\nu + \nu \cdot B_t(u_0, w)u_0$$

de sorte que w satisfait à l'équation d'évolution

$$\frac{\partial w}{\partial t} - A_t(u_0, w) = h, \quad w(0, \cdot) \equiv 0, \quad h = f - \frac{\partial u_0}{\partial t} + (L_t + Q(u_0))u_0.$$

Comme u_0 est polyhomogène, $h \in \mathcal{A}_{\text{phg}}^{\mathcal{K}|U \times Z}([0, \varepsilon_i] \times U \times Z; E)$. Comme la restriction de u_0 est \tilde{u}_0 , on déduit de (3.20) que

$$h \in \rho_i^\vartheta C_b^\infty(\mathring{U}; C_{\mathcal{V}_Z}^\infty([0, \varepsilon_i] \times \mathring{Z}; E)), \quad \forall \vartheta < z_1,$$

car la restriction de h sur \mathring{H}_i est nulle. Par le Corollaire 2.4.7, on a alors que

$$w \in \rho_i^\vartheta C_b^\infty(\mathring{U}; C_{\mathcal{V}_Z}^\infty([0, \varepsilon_i] \times \mathring{Z}; E)), \quad \forall \vartheta < z_1.$$

On suppose maintenant que le résultat (3.17) est vrai jusqu'à l'ordre $j - 1$. On pose $v = u - u_{j-1}$ vérifiant

$$\frac{\partial v}{\partial t} - A_t(u_{j-1}, v) = f^j, \quad f^j = f - \frac{\partial u_{j-1}}{\partial t} + L_t(u_{j-1}) + Q(u_{j-1})u_{j-1}. \quad (3.22)$$

Grâce à la formule de Taylor en $v = 0$, il existe un opérateur \tilde{B}_t dépendant de u_{j-1} et v tel que

$$B_t(u_{j-1}, v)u_{j-1} = B_t(u_{j-1}, 0)u_{j-1} + (\tilde{B}_t(u_{j-1}, v)u_{j-1}) \cdot v,$$

où l'opérateur lisse $B_t(u_{j-1}, 0)$ est le terme d'ordre 0 dans le développement de Taylor de B_t indépendant de v . Ainsi, la famille d'équations (3.22) peut se ramener sous la forme d'une famille d'équations paraboliques

$$\frac{\partial v}{\partial t} - (L_t + Q(u))v - v \cdot B_t(u_{j-1}, 0)u_{j-1} = v \cdot (\tilde{B}_t(u_{j-1}, v)u_{j-1}) \cdot v + f^j. \quad (3.23)$$

On note $v \cdot (\tilde{B}_t(u_{j-1}, v)u_{j-1}) \cdot v + f^j$ par ψ^j . Par la définition de f^j , on déduit que

$$\psi^j \in \mathcal{A}_{\text{phg}}^{\mathcal{K}|U \times Z}([0, \varepsilon_i) \times U \times Z; E) + \rho_i^{2\vartheta} C_b^\infty(\mathring{U}; C_{\mathcal{V}_Z}^\infty([0, \varepsilon_i) \times \mathring{Z}; E)), \quad \forall \vartheta < z_j. \quad (3.24)$$

Afin de trouver un candidat pour le coefficient du terme d'ordre $\rho_i^{z_j} (\log \rho_i)^k$ dans le développement polyhomogène de v , on peut prétendre un instant que $v \in \mathcal{A}_{\text{phg}}^{\mathcal{K}|U \times Z}([0, \varepsilon_i) \times U \times Z; E)$. En utilisant (3.21), la famille d'équations (3.23) peut se réécrire

$$\frac{\partial v}{\partial t} - (L_t + Q(u_0))v - v \cdot B_t(u_{j-1}, 0)u_{j-1} - (u - u_0) \cdot B_t(u_0, u - u_0)v = \psi^j. \quad (3.25)$$

Comme

$$v \in \mathcal{A}_{\text{phg}}^{\mathcal{K}|U \times Z}([0, \varepsilon_i) \times U \times Z; E) \cap \rho_i^\vartheta C_b^\infty(\mathring{U}; C_{\mathcal{V}_Z}^\infty([0, \varepsilon_i) \times \mathring{Z}; E)), \quad \forall \vartheta < z_j$$

et grâce à la Proposition 2.3.10 et (3.18), on voit que la restriction de l'équation (3.25) au coefficient d'ordre $\rho_i^{z_j} (\log \rho_i)^k$ sur \mathring{H}_i , où $k \in \mathbb{N}_0$ est le plus grand entier tel que $(z_j, k) \in \mathcal{K}(H_i)$, nous donne une famille d'équations \mathcal{V}_{Z_i} -paraboliques linéaires localement de la forme

$$\frac{\partial v_j(s)}{\partial t} - P_t(s)v_j(s) = \psi_{z_j, k}^j(s), \quad v_j(s)|_{t=0} \equiv 0, \quad (3.26)$$

où $v_j(s)$ et $\psi_{z_j, k}^j(s) \in \mathcal{A}_{\text{phg}}^{\mathcal{K}|Z_i}([0, \varepsilon_i) \times Z_i; E)$ sont les coefficients du terme d'ordre $\rho_i^{z_j} (\log \rho_i)^k$ de v et ψ^j respectivement restreints sur \mathring{H}_i et la famille d'opérateurs $P_t(s) \in \text{Diff}_{\mathcal{V}_{Z_i}, \mathcal{K}|Z_i}^2(Z_i; E)$ est la restriction à l'ordre 0 sur H_i de l'opérateur

$$v \mapsto (L_t + Q(u_0))v - v \cdot B_t(u_{j-1}, 0)u_{j-1}.$$

En vertu du Théorème 2.4.8, la famille d'équations (3.26) possède une unique solution polyhomogène $v_j \in \mathcal{A}_{\text{phg}}^{\mathcal{K}|H_i}([0, \varepsilon_i) \times H_i; E)$. On pose ensuite $w = v - w_j$ avec $w_j = \rho_i^{z_j} (\log \rho_i)^k \Xi_{H_i}(v_j)$, de sorte que w satisfait à l'équation d'évolution

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial t} - (L_t + Q(u_0))w - w \cdot B_t(u_{j-1}, 0)u_{j-1} &= (u - u_0) \cdot B_t(u_0, u - u_0)w + \varphi^j, \quad w(0, \cdot) \equiv 0, \\ \varphi^j &= \psi^j - \frac{\partial w_j}{\partial t} + (L_t + Q(u_0))w_j + (u - u_0) \cdot B_t(u_0, u - u_0)w_j + w_j \cdot B_t(u_{j-1}, 0)u_{j-1}. \end{aligned}$$

Par définition de la suite $\{z_j\}$, on remarque que $z_j \geq z_1 \geq z_{j+1} - z_j$, $\forall j \in \mathbb{N}$.
Grâce à (3.24) et notre choix de w_j , on aura que

$$\varphi^j \in \mathcal{A}_{\text{phg}}^{\mathcal{K}|U \times Z}([0, \varepsilon_i) \times U \times Z; E) + \rho_i^\vartheta C_b^\infty(\mathring{U}; C_{V_Z}^\infty([0, \varepsilon_i) \times \mathring{Z}; E)), \quad \forall \vartheta < z_{j+1}, \quad (3.27)$$

et que $\varphi^j \in \rho_i^{z_j}(\log \rho_i)^{k-1} C_b^\infty(\mathring{U}; C_{V_Z}^\infty([0, \varepsilon_i) \times \mathring{Z}; E))$. Donc, par le Corollaire 2.4.7,

$$w \in \rho_i^{z_j}(\log \rho_i)^{k-1} C_b^\infty(\mathring{U}; C_{V_Z}^\infty([0, \varepsilon_i) \times \mathring{Z}; E)).$$

En répétant cet argument k fois, on obtient alors

$$r_k, r_{k-1}, \dots, r_0 \in \mathcal{A}_{\text{phg}}^{\mathcal{K}|H_i}([0, \varepsilon_i) \times H_i; E) \text{ avec } r_k = v_j$$

de sorte que

$$\hat{v} = v - \sum_{p=0}^k \Xi_{H_i}(r_p) \rho_i^{z_j}(\log \rho_i)^p, \quad r_p(0, \cdot) \equiv 0,$$

a pour équation d'évolution sous la forme

$$\frac{\partial \hat{v}}{\partial t} - (L_t + Q(u_0)) \hat{v} - \hat{v} \cdot B_t(u_{j-1}, 0) u_{j-1} = (u - u_0) \cdot B_t(u_0, u - u_0) \hat{v} + \hat{h}^j, \quad \hat{v}(0, \cdot) \equiv 0, \text{ avec}$$

$$\hat{h}^j \in \rho_i^{z_j} C_b^\infty(\mathring{U}; C_{V_Z}^\infty([0, \varepsilon_i) \times \mathring{Z}; E)) \cap \left(\mathcal{A}_{\text{phg}}^{\mathcal{K}|U \times Z}([0, \varepsilon_i) \times U \times Z; E) + \rho_i^\vartheta C_b^\infty(\mathring{U}; C_{V_Z}^\infty([0, \varepsilon_i) \times \mathring{Z}; E)) \right), \quad \forall \vartheta < z_{j+1},$$

et $\rho_i^{-z_j} \hat{h}_{|H_i}^j = 0$. On a donc $\hat{h}_j \in \rho_i^\vartheta C_b^\infty(\mathring{U}; C_{V_Z}^\infty([0, \varepsilon_i) \times \mathring{Z}; E))$, $\forall \vartheta < z_{j+1}$.

Par (3.21) et le Corollaire 2.4.7, on en déduit que

$$\hat{v} \in \rho_i^\vartheta C_b^\infty(\mathring{U}; C_{V_Z}^\infty([0, \varepsilon_i) \times \mathring{Z}; E)), \quad \forall \vartheta < z_{j+1}.$$

Le pas d'induction est donc complété en prenant $u_j = u_{j-1} + \sum_{p=0}^k \Xi_{H_i}(r_p) \rho_i^{z_j}(\log \rho_i)^p$.

Finalement, on prend $\varepsilon_U = \min_{i \in \{1, \dots, l\}} \varepsilon_i$. Comme S est compact, on peut extraire un recouvrement fini d'ouverts de trivialisations $\{U_j, j \in J\}$ de S de sorte qu'on peut prendre $\varepsilon = \min_{j \in J} \varepsilon_{U_j}$. \square

Corollaire 3.3.2. *Soit (M, \mathcal{V}_{SF}) une structure de Lie fibrée à l'infini telle que le rayon d'injectivité des métriques compatibles est strictement positif. Soit \mathcal{G} une famille indicielle positive de M . Si dans l'équation (3.13), $\{L_t : t \in [0, T]\}$ est une famille d'opérateurs uniformément \mathcal{V}_{SF} -elliptiques de $\text{Diff}_{\mathcal{V}_{SF}, \mathcal{G}}^2(M; E)$ et $f \in \mathcal{A}_{\text{phg}}^{\mathcal{F}}([0, T] \times M; E)$, alors il existe $\varepsilon \in (0, T]$ tel que la solution de cette équation est dans $\mathcal{A}_{\text{phg}}^{\mathcal{K}}([0, \varepsilon] \times M; E)$ avec $\mathcal{K} = \mathcal{G}_{\infty} + \mathcal{F}_{\infty}$.*

Démonstration. C'est une conséquence directe du Théorème 3.3.1 en prenant la base S un point de fibré ϕ_M . □

CHAPITRE IV

POLYHOMOGÉNÉITÉ DES SOLUTIONS DU FLOT DE RICCI-DETURCK

Nous établissons que la polyhomogénéité des métriques compatibles avec une structure de Lie fibrée à l'infini est préservée le long du flot de Ricci-DeTurck au moins pour un court laps de temps. En particulier, lorsque la métrique initiale est asymptotiquement Einstein, la polyhomogénéité sera préservée par le flot de Ricci-DeTurck tant que le flot existe.

4.1 Flot de Ricci-DeTurck

Nous introduisons brièvement certaines définitions et résultats fondamentaux liées au concept du flot de Ricci qui serviront par la suite. Pour plus de détails, nous renvoyons le lecteur à (Lee, 1997), (Lee, 2013) et (Chow et Knopf, 2004).

Définition 4.1.1. *Soient (M, g) une variété riemannienne et ∇ la connexion de Levi-Civita de la métrique. L'application $R : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ définie par*

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{\nabla_X Y - \nabla_Y X} Z \quad (4.1)$$

est appelée l'endomorphisme de Riemann ou le tenseur de courbure.

En termes de coordonnées locales, on réécrit

$$R(\partial_i, \partial_j)\partial_k = R_{ijk}^l \partial_l \text{ où}$$

$$R_{ijk}^l = \partial_i \Gamma_{jk}^l - \partial_j \Gamma_{ik}^l + \Gamma_{jk}^s \Gamma_{is}^l - \Gamma_{ik}^s \Gamma_{js}^l, \quad (4.2)$$

et Γ_{ij}^l est le symbole de Christoffel. L'endomorphisme de Riemann R est vu comme étant un homomorphisme du fibré vectoriel $\otimes^2 TM$ vers le fibré vectoriel $\text{End}(TM) \simeq TM \otimes T^*M$, et ainsi est un champs de tenseurs de type $(3, 1)$ défini localement par

$$R = R_{ijk}^l dx_i \otimes dx_j \otimes dx_k \otimes \partial^l.$$

Pour $m \in M$ donné, il est souvent utile de considérer une carte normale centrée en m . Dans cette carte normale, on sait que le symbole de Christoffel s'annule en m , $\Gamma_{ij|m}^k = 0$ donc $\nabla_i \partial_{j|m} = 0$. Par suite,

$$(\nabla_s F)_{j_1 \dots j_k | m}^{i_1 \dots i_l} = (\partial_s F)_{j_1 \dots j_k | m}^{i_1 \dots i_l}$$

et

$$\nabla_{i,j|m}^2 := (\nabla_{\partial_i} \nabla_{\partial_j} - \nabla_{\nabla_{\partial_i} \partial_j})|_m = \nabla_i \nabla_{j|m}.$$

Ces faits simplifient considérablement les calculs des tenseurs en coordonnées normales.

Proposition 4.1.2. *(Lemme 3.2 (Chow et Knopf, 2004)) Pour une famille lisse $g(t)$ des métriques riemanniennes, la dérivée de symbole de Christoffel de la connexion de Levi-Civita par rapport de temps est donnée par*

$$\frac{\partial}{\partial t} \Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{kl} ((\nabla_i h)_{jl} + (\nabla_j h)_{il} - (\nabla_l h)_{ij}), \quad (4.3)$$

où h est la dérivée de g par rapport au temps.

Proposition 4.1.3. *(Lemme 3.3 (Chow et Knopf, 2004)) Pour une famille lisse $g(t)$ des métriques riemanniennes, la dérivée de l'endomorphisme de Riemann par rapport au temps est donnée par*

$$\frac{\partial}{\partial t} R_{ijk}^l = \frac{1}{2} g^{ls} ((\nabla_{i,j}^2 h)_{ks} + (\nabla_{i,k}^2 h)_{js} - (\nabla_{i,s}^2 h)_{jk} - (\nabla_{j,i}^2 h)_{ks} - (\nabla_{j,k}^2 h)_{is} + (\nabla_{j,s}^2 h)_{ik}),$$

où h est la dérivée de g par rapport au temps.

Définition 4.1.4. *Le tenseur de Riemann ou tenseur de courbure Rm est le champ de tenseurs de type $(4, 0)$ défini par*

$$Rm(X, Y, Z, W) = g(R(X, Y)W, Z) \quad \forall X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M).$$

Définition 4.1.5. *La courbure de Ricci Ric est le champ de tenseurs de type $(2, 0)$ défini par $Ric = \text{tr } Rm$. En termes de coordonnées locales, on a $Ric_{ij} = R^k_{kij}$ (où on somme sur l'indice répété) et grâce à la symétrie du tenseur Rm , Ric est symétrique.*

Proposition 4.1.6. *(Lemme 3.5 (Chow et Knopf, 2004)) La dérivée de la courbure de Ricci par rapport au temps est donnée localement par*

$$\frac{\partial}{\partial t} Ric_{ij} = \frac{1}{2} g^{ks} ((\nabla^2_{k,i} h)_{js} + (\nabla^2_{k,j} h)_{is} - (\nabla^2_{k,s} h)_{ij} - (\nabla^2_{i,j} h)_{ks}). \quad (4.4)$$

Démonstration. Il suffit de prendre $i = l$ dans la Proposition 4.1.3. On a alors

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} Ric_{jk} &= \frac{\partial}{\partial t} R^i_{ijk} = \frac{1}{2} g^{is} ((\nabla^2_{i,j} h)_{ks} + (\nabla^2_{i,k} h)_{js} - (\nabla^2_{i,s} h)_{jk} \\ &\quad - (\nabla^2_{j,k} h)_{is}) + \frac{1}{2} g^{is} ((\nabla^2_{j,s} h)_{ik} - (\nabla^2_{j,i} h)_{ks}). \end{aligned}$$

Le résultat (4.4) provient alors du fait que

$$g^{is} (\nabla^2_{j,s} h)_{ik} - g^{is} (\nabla^2_{j,i} h)_{ks} = g^{is} (\nabla^2_{j,s} h)_{ik} - g^{si} (\nabla^2_{j,s} h)_{ik} = 0.$$

□

Soit $g(t)$ une famille à un paramètre de métriques riemanniennes sur une variété $\overset{\circ}{M}$.

Définition 4.1.7. *Le flot de Ricci est l'équation non-linéaire d'évolution définie par $\frac{\partial}{\partial t} g(t) = -2Ric(g(t))$, $g(0) = g_0$.*

Supposons maintenant que g_0 est une métrique compatible avec une structure de Lie fibrée à l'infini (M, \mathcal{V}) telle que le rayon d'injectivité soit strictement positif, où M est une variété à coins compacte telle que $\overset{\circ}{M}$ soit identifié avec l'intérieur de M . Nous avons vu dans le premier chapitre que g_0 est une métrique complète et que le tenseur de courbure et les dérivées contravariantes sont bornées. De ce fait, nous pouvons appliquer le Théorème de Shi (Shi, 1989) pour démontrer l'existence local du flot de Ricci sur $[0, T)$, où $T < \infty$, notée $\bar{g} \in C^\infty_V([0, T) \times \overset{\circ}{M}; T^{(2,0)}\overset{\circ}{M})$, telle que les métriques $\bar{g}(t)$ sont des \mathcal{V} -métriques, c'est-à-dire que les $\bar{g}(t)$ sont quasi-isométriques, le long du flot, à g_0 , ou plus précisément que pour T assez petit,

$$\exists C > 0, \forall t \in [0, T), \quad e^{-C} g_0 \leq \bar{g}(t) \leq e^C g_0.$$

Pour l'unicité de la solution, nous nous référons aux travaux de Bing-Long Chen et Xi-Ping Zhu (Chen et Zhu, 2006).

Nous allons maintenant définir le flot de Ricci-DeTurck (Chow et Knopf, 2004). Un opérateur différentiel non-linéaire P est dit elliptique si sa linéarisation DP est elliptique, c'est-à-dire que son symbole principal $\sigma_2(DP)(\xi)$ sous la direction de $\xi \in T^*\overset{\circ}{M}$ est un isomorphisme si $\xi \neq 0$. En revenant au résultat (4.4) et en regardant $\text{Ric}(g)$ comme un opérateur différentiel agissant sur g , nous voyons que sa linéarisation est

$$D \text{Ric}(g)(h)_{ij} = \frac{1}{2} g^{sk} \left((\nabla_{k,i}^2 h)_{js} + (\nabla_{k,j}^2 h)_{is} - (\nabla_{k,s}^2 h)_{ij} - (\nabla_{i,j}^2 h)_{ks} \right).$$

Comme $\sigma_2(D \text{Ric}(g))(\xi)_{ij}$ n'est pas elliptique, voir page 72 dans (Chow et Knopf, 2004), cela implique que le flot de Ricci n'est pas parabolique. Mais par un truc remontant à DeTurck, voir Théorème 3.13 (Chow et Knopf, 2004), nous pouvons nous ramener à une équation parabolique quasi-linéaire en modifiant la solution par une famille de difféomorphismes. En effet, nous pouvons réécrire la linéarisa-

tion du flot de Ricci sous la forme (voir (3.28) (Chow et Knopf, 2004))

$$D \operatorname{Ric}(g)(h)_{ij} = -\frac{1}{2}(\Delta h_{ij} - \nabla_i V_j - \nabla_j V_i + S_{ij}),$$

où $V_j := g^{sk}(\nabla_k h_{sj} - \frac{1}{2}\nabla_j h_{sk})$ et

$$\begin{aligned} S_{ij} &:= g^{sk} \left(\frac{1}{2}(\nabla_{i,j} h_{ks} - \nabla_{j,i} h_{ks}) + (\nabla_{i,k} h_{js} - \nabla_{k,j} h_{js}) + (\nabla_{j,k} h_{is} - \nabla_{k,j} h_{is}) \right) \\ &= g^{sk} \left(\frac{1}{2}(R_{ijk}^r h_{rs} + R_{ijs}^r h_{rk}) + (R_{iks}^r h_{rj} + R_{ikj}^r h_{rs}) + (R_{jki}^r h_{rs} + R_{jks}^r h_{ri}) \right) \\ &= g^{sk} (2R_{kij}^r h_{rs} - Ric_{is} h_{jk} - Ric_{js} h_{ik}), \end{aligned}$$

puisque $\nabla_{i,j} h_{ab} = \nabla_{j,i} h_{ab} + R_{ija}^r h_{rb} + R_{ijb}^r h_{ra}$.

Soit \tilde{g} une métrique de référence et $\tilde{\Gamma}_{sk}^j$ son symbole de Christoffel et considérons le champs de vecteurs

$$W^j := W^j(g, \tilde{g}) = g^{sk}(\Gamma_{sk}^j - \tilde{\Gamma}_{sk}^j),$$

où Γ_{sk}^j est le symbole de Christoffel de la métrique g , on pose

$$A(g)_{ij} = \nabla_i W_j + \nabla_j W_i = \nabla_i \left(\frac{1}{2} g_{ji} g^{sk} (\Gamma_{sk}^i - \tilde{\Gamma}_{sk}^i) \right) - \nabla_j \left(\frac{1}{2} g_{ij} g^{sk} (\Gamma_{sk}^j - \tilde{\Gamma}_{sk}^j) \right).$$

En utilisant (4.3), nous pouvons voir que

$$DA(g)(h)_{ij} = \frac{1}{2}(\nabla_i V_j + \nabla_j V_i) + T_{ij},$$

où T_{ij} est un terme linéaire d'ordre 1 en h . Ainsi,

$$\begin{aligned} D(-\operatorname{Ric} + A)(g)(h)_{ij} &= -D \operatorname{Ric}(g)(h)_{ij} + DA(g)(h)_{ij} \\ &= \frac{1}{2}(\Delta h_{ij} + S_{ij}) + T_{ij} \\ &= \frac{1}{2}(\Delta h_{ij} + 2g^{ks} R_{kij}^r h_{rs} - g^{ks} Ric_{is} h_{jk} - g^{ks} Ric_{js} h_{ik}) + T_{ij} \\ &= \frac{1}{2} \mathcal{L}_g + T_{ij}, \end{aligned}$$

où $\mathcal{L}_g := \Delta h_{ij} + 2g^{ks} R_{kij}^r h_{rs} - g^{ks} Ric_{is} h_{jk} - g^{ks} Ric_{js} h_{ik}$ est le laplacien de Lichnerowicz correspondant à g qui est un opérateur elliptique. Par conséquent, $-\operatorname{Ric} + A$ est un opérateur elliptique.

Définition 4.1.8. *L'équation parabolique donnée localement par*

$$\frac{\partial}{\partial t}g(t)_{ij} = -2 \operatorname{Ric}(g(t))_{ij} + \nabla_i W_j(t) + \nabla_j W_i(t), \quad g(0) = g_0, \quad (4.5)$$

où $W_i(t) := g_{ij}W^j(t)$ avec $W^j(t) := W^j(g(t), g(0))$, est appelée le flot de Ricci-DeTurck,

Proposition 4.1.9. *(Lemme 2.1 (Shi, 1989)) Le flot de Ricci-DeTurck est donné localement par*

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}g_{ij} = & g^{ab}\tilde{\nabla}_a\tilde{\nabla}_b g_{ij} - g^{ab}\tilde{g}^{pq}(g_{ip}\tilde{R}m_{jaqb} + g_{jp}\tilde{R}m_{iaqb}) + \frac{g^{ab}g^{pq}}{2}(\tilde{\nabla}_i g_{pa}\tilde{\nabla}_j g_{qb} \\ & + 2\tilde{\nabla}_a g_{jp}\tilde{\nabla}_q g_{ib} - 2\tilde{\nabla}_a g_{jp}\tilde{\nabla}_b g_{iq} - 2\tilde{\nabla}_j g_{pa}\tilde{\nabla}_b g_{iq} - 2\tilde{\nabla}_i g_{pa}\tilde{\nabla}_b g_{jq}), \end{aligned}$$

$g(0) = g_0 = \tilde{g}$. On utilise \sim pour présenter les connexions de Levi-Civita et les tenseurs de courbure associés à la métrique initiale g_0 .

Dans ce qui suit, posons $u = g - \tilde{g}$.

Proposition 4.1.10. *L'équation du flot de Ricci-DeTurck dans la Proposition 4.1.9 peut être réécrite sous la forme*

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \mathcal{L}_{\tilde{g}}u = \mathcal{Q}(u)u - 2 \operatorname{Ric}(\tilde{g}), \quad u|_{t=0} = 0, \quad (4.6)$$

avec

$$\mathcal{Q}(u)v = a(u) \cdot \nabla^2 v + b(u, \nabla u) \cdot \nabla v + c(u) \cdot v,$$

où $\mathcal{L}_{\tilde{g}}$ est le laplacien de Lichnerowicz correspondant à \tilde{g} et a , b et c sont lisses dans leur dépendance en u et ∇u , tels que $a(0)|_{t=0} = 0$, $b(0, 0)|_{t=0} = 0$, $c(0)|_{t=0} = 0$. De plus, \mathcal{Q} satisfait (3.6) et (3.7).

Démonstration. Comme la métrique $\tilde{g} + u$ est inversible, elle satisfait à l'identité

$$(\tilde{g} + u)^{ab} = \tilde{g}^{ab} - \tilde{g}^{al}\tilde{g}^{bm}u_{ml} + (\tilde{g} + u)^{bl}\tilde{g}^{am}\tilde{g}^{pq}u_{lp}u_{mq}. \quad (4.7)$$

L'équation de la Proposition 4.1.9 est équivalente à

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} u = & ((\tilde{g} + u)^{ab} - \tilde{g}^{ab}) \tilde{\nabla}_a \tilde{\nabla}_b u_{ij} + (Pu)_{ij} \\ & + ((\tilde{g} + u)^{-1} \star (\tilde{g} + u)^{-1} \star \tilde{\nabla} u \star \tilde{\nabla} u)_{ij}, \quad u|_{t=0} = 0, \end{aligned}$$

où \star dénote les contractions linéaires dont les formules précises ne joueront aucun rôle dans la suite et

$$\begin{aligned} (Pu)_{ij} = & \tilde{g}^{ab} \tilde{\nabla}_a \tilde{\nabla}_b u_{ij} + (\tilde{g} + u)^{ab} (\tilde{g} + u)_{ip} \tilde{g}^{pq} \tilde{R}m_{jaqb} \\ & + (\tilde{g} + u)^{ab} (\tilde{g} + u)_{jp} \tilde{g}^{pq} \tilde{R}m_{iaqb}. \end{aligned}$$

À l'aide de (4.7), on a que

$$\begin{aligned} (Pu)_{ij} = & \tilde{g}^{ab} \tilde{\nabla}_a \tilde{\nabla}_b u_{ij} - \tilde{g}^{pq} \text{Ric}(\tilde{g})_{jq} u_{ip} - \tilde{g}^{pq} \text{Ric}(\tilde{g})_{iq} u_{jp} + 2\tilde{g}^{al} R_{aij}^m u_{ml} \\ & + (\tilde{g}^{-1} \star \tilde{g}^{-1} \star u \star u \star \tilde{R})_{ij} - 2 \text{Ric}(\tilde{g})_{ij} \\ = & \mathcal{L}_{\tilde{g}} + (\tilde{g}^{-1} \star \tilde{g}^{-1} \star u \star u \star \tilde{R})_{ij} - 2 \text{Ric}(\tilde{g})_{ij}, \end{aligned}$$

où $\tilde{R} \in \Gamma(T^{(1,3)}\mathring{M})$. Le résultat est alors obtenu en prenant

$$\begin{aligned} (a(u) \cdot \nabla^2 v)_{ij} = & ((\tilde{g} + u)^{ab} - \tilde{g}^{ab}) \tilde{\nabla}_a \tilde{\nabla}_b v_{ij} \\ = & (\tilde{g}^{ab} - \tilde{g}^{al} \tilde{g}^{bm} u_{ml} + (\tilde{g} + u)^{bl} \tilde{g}^{am} \tilde{g}^{pq} u_{lp} u_{mq} - \tilde{g}^{ab}) \tilde{\nabla}_a \tilde{\nabla}_b v_{ij} \\ = & (\tilde{g}^{-1} \star \tilde{g}^{-1} \star u \star \tilde{\nabla}^2 v + (\tilde{g} + u)^{-1} \star \tilde{g}^{-1} \star \tilde{g}^{-1} \star u \star u \star \tilde{\nabla}^2 v)_{ij} \\ (b(u, \nabla u) \cdot \nabla v)_{ij} = & ((\tilde{g} + u)^{-1} \star (\tilde{g} + u)^{-1} \star \tilde{\nabla} u \star \tilde{\nabla} v)_{ij} \\ (C(u) \cdot v)_{ij} = & (\tilde{g}^{-1} \star \tilde{g}^{-1} \star u \star v \star \tilde{R})_{ij}. \end{aligned}$$

□

4.2 Polyhomogénéité locale des métriques le long du flot de Ricci-DeTurck

Pour des métriques associées à une structure de Lie fibrée à l'infini sur une variété non-compacte, on montre que la polyhomogénéité le long du flot de Ricci-DeTurck est préservée, à tout le moins pour un cours laps de temps.

Théorème 4.2.1. *Soit $(\overset{\circ}{M}, g_0)$ une variété riemannienne de dimension n avec une structure de Lie fibrée à l'infini (M, \mathcal{V}_{SF}) telle que le rayon d'injectivité est strictement positif. Si g_0 est polyhomogène par rapport une famille indicielle \mathcal{G} positive de M et $g(t)$ pour $t \in [0, T)$ est la solution du flot de Ricci–DeTurck, alors il existe $\varepsilon \in (0, T)$ tel que*

$$g \in \mathcal{A}_{\text{phg}}^{\mathcal{G}\infty}([0, \varepsilon) \times M; \mathcal{V}_{SF}TM^{(2,0)}).$$

Démonstration. Par la Proposition 4.1.10, on sait que le flot de Ricci–DeTurck (4.5) est équivalent à l'équation (4.6), qui a la même forme que l'équation (3.14) pour un certain $\varepsilon \in (0, T)$. Le résultat est donc une conséquence directe de Corollaire 3.3.2. \square

Remarquons que par la discussion dans le fin du premier chapitre, plus précisément le Corollaire 3.20 (Ammann *et al.*, 2004), le rayon d'injectivité des solutions du flot de Ricci $g(t)$ est strictement positif puisqu'elles sont quasi-isométries à la métrique initiale g_0 .

4.3 Polyhomogénéité globale des métriques asymptotiquement Einstein le long du flot de Ricci–DeTurck

Nous montrons ici que la polyhomogénéité à l'infini des métriques compatibles avec une structure de Lie fibrée à l'infini est préservée globalement par le flot de Ricci–DeTurck si la métrique initiale est asymptotiquement Einstein.

Définition 4.3.1. *La métrique g_0 est dite asymptotiquement Einstein s'il existe $\lambda > 0$ et $\delta > 0$ tels que*

$$\text{Ric}(g_0) + \lambda g_0 \in \rho^\delta C_{\mathcal{V}}^\infty(\overset{\circ}{M}; T^{(2,0)}\overset{\circ}{M}), \quad \rho = \prod_{H \in \mathcal{M}_1(M)} \rho_H.$$

Cela suggère de normaliser le flot de Ricci.

Définition 4.3.2. *Le flot de Ricci normalisé est donné par*

$$\frac{\partial}{\partial t} g(t) = -2 \operatorname{Ric}(g(t)) - 2\lambda g(t), \quad g(0) = g_0. \quad (4.8)$$

Définition 4.3.3. *Le flot de Ricci-DeTurck normalisé est défini localement par*

$$\frac{\partial}{\partial t} g(t)_{ij} = -2 \operatorname{Ric}(g(t))_{ij} - 2\lambda g(t)_{ij} + \nabla_i W_j(t) + \nabla_j W_i(t), \quad g(0) = g_0. \quad (4.9)$$

Proposition 4.3.4. *Soit (\mathring{M}, g_0) une variété riemannienne avec une structure de Lie à l'infini (M, \mathcal{V}) telle que le rayon d'injectivité de g_0 est strictement positif. Si la métrique g_0 est asymptotiquement Einstein et g est la solution du flot Ricci-DeTurck normalisé, alors*

$$g - g_0 \in \rho^\delta C_{\mathcal{V}}^\infty([0, T] \times \mathring{M}; T^{(2,0)} \mathring{M}), \quad (4.10)$$

où δ est la constante d'Einstein de g_0 apparue dans la Définition 4.3.1.

Démonstration. D'abord, on considère $u = g - g_0$ au lieu de g . À partir de la Proposition 4.1.9 et par un calcul standard, l'équation d'évolution de u peut se ramener à une équation linéaire parabolique suivante

$$\frac{\partial}{\partial t} u = L_t(u) + f, \quad u|_{t=0} = 0, \quad f = -2 \operatorname{Ric}(\tilde{g}) - 2\lambda \tilde{g}, \quad (4.11)$$

où $L_t \in \operatorname{Diff}_{\mathcal{V}}^2(\mathring{M}; \operatorname{End}(T^{(2,0)} \mathring{M}))$ est un opérateur uniformément \mathcal{V} -elliptique donné localement par

$$(L_t(v))_{ij} = g^{ab} \tilde{\nabla}_a \tilde{\nabla}_b v_{ij} + (Q_1(g_0, u, \tilde{\nabla} u) \cdot \tilde{\nabla} v)_{ij} + (Q_2(g_0, u, \tilde{\nabla} u) \cdot v)_{ij},$$

avec $Q_1 \in C_{\mathcal{V}}^\infty([0, T] \times \mathring{M}; T^{(2,3)} \mathring{M})$ et $Q_2 \in C_{\mathcal{V}}^\infty([0, T] \times \mathring{M}; T^{(2,2)} \mathring{M})$. D'autre part, on a que

$$f \in \rho^\delta C_{\mathcal{V}}^\infty(\mathring{M}; T^{(2,0)} \mathring{M}),$$

puisque que g_0 est une métrique asymptotiquement Einstein. Le résultat découle alors du Corollaire 2.4.3. \square

Théorème 4.3.5. *Soit $(\overset{\circ}{M}, g_0)$ une variété riemannienne de dimension n avec une structure de Lie fibrée à l'infini (M, \mathcal{V}_{SF}) telle que le rayon d'injectivité est strictement positif. Si la métrique g_0 est asymptotiquement Einstein polyhomogène par rapport à une famille indicielle positive \mathcal{G} de M et si $g(t)$ pour $t \in [0, T)$ est la solution du flot de Ricci-DeTurck, alors*

$$g \in \mathcal{A}_{\text{phg}}^{\mathcal{G}\infty}([0, T) \times M; \mathcal{V}_{SF}TM^{(2,0)}).$$

Démonstration. D'abord, on considère $u = g - g_0$ au lieu de g pour se mettre dans le cadre du Théorème 3.3.1. En vertu de ce dernier, on remarque que l'existence de laps de temps ε où la métrique est polyhomogène dépend uniquement du temps d'existence des équations au bord à l'ordre 0. Puisque g_0 est asymptotiquement Einstein, ces équations ont des solutions triviales tant que le flot existe. En effet, on sait par le premier pas de la preuve par induction du Théorème 3.3.1 que u_0 est le terme d'ordre 0 de la polyhomogénéité de la solution u pour un certain $\varepsilon > 0$. Puisque la métrique est asymptotiquement Einstein, la Proposition 4.3.4 nous permet de prendre $u_0 = 0$, ainsi par (4.10), z_1 sera le plus petit réel positif tel que

$$u \in \rho_i^{\vartheta} C_{\mathcal{V}_{SF}}^{\infty}([0, T) \times \overset{\circ}{M}; T^{(2,0)}\overset{\circ}{M}), \forall \vartheta < z_1.$$

On peut donc prendre $\varepsilon = T$ dans le Théorème 3.3.1. □

Les deux Théorème 4.2.1 et Théorème 4.3.5 concernent la polyhomogénéité de solution au flot de Ricci-DeTurck lorsque la métrique initiale g_0 a été supposée polyhomogène. En particulier, lorsqu'elle est dans $C^{\infty}(M; \mathcal{V}_{SF}TM^{(2,0)})$, on peut facilement déduire dans le corollaire suivant qu'il en sera de même pour les solutions du flot de Ricci normalisé et du flot de Ricci-DeTurck.

Corollaire 4.3.6. *Soit $(\overset{\circ}{M}, g_0)$ une variété riemannienne de dimension n avec une structure de Lie fibrée à l'infini (M, \mathcal{V}_{SF}) , telle que le rayon d'injectivité est*

positif. Si $g_0 \in C^\infty(M; \mathcal{V}_{SF}TM^{(2,0)})$ et si $\bar{g}(t)$ pour $t \in [0, T)$ est la solution du flot de Ricci alors $\exists \varepsilon \in (0, T)$ tel que

$$\bar{g} \in C^\infty([0, \varepsilon) \times M; \mathcal{V}_{SF}TM^{(2,0)}).$$

En particulier, si g_0 est asymptotiquement Einstein, alors la solution du flot de Ricci normalisé (4.8) \bar{g} est dans $C^\infty([0, T) \times M; \mathcal{V}_{SF}TM^{(2,0)})$.

Démonstration. D'abord, on remplace $\mathcal{G}_\infty(H)$ par $\mathbb{N}_0 \times \{0\}$ pour $H \in \mathcal{M}_1(M)$ dans le Théorème 4.2.1 et le Théorème 4.3.5. On sait alors que la solution au flot de Ricci-DeTurck est dans $C^\infty(M; \mathcal{V}_{SF}TM^{(2,0)})$ pour $\forall t < \varepsilon$ et un certain $\varepsilon > 0$. Par conséquent, $W(t) = W^j(t) \frac{\partial}{\partial x^j}$ est un \mathcal{V} -champ de vecteurs lisses jusqu'au bord, donc $W(t) \in \mathcal{V} \subset \mathcal{V}_b$. Ainsi la famille de difféomorphismes $t \rightarrow \alpha_t$ avec $\alpha(0) = Id$ engendrée par W est en fait des difféomorphismes de la variété à coins M . Et par suite, on peut voir que la solution $\bar{g} = \alpha^*g(t)$ est une solution du flot de Ricci normalisé, voir Théorème 3.13 (Chow et Knopf, 2004). Par conséquent, on obtient que $\bar{g} \in C^\infty([0, \varepsilon) \times M; \mathcal{V}_{SF}TM^{(2,0)})$, pour un certain $\varepsilon \in (0, T)$. Si g_0 est asymptotiquement Einstein, alors on peut prendre $\varepsilon = T$. \square



RÉFÉRENCES

- Albin, P., Aldana, C. L. et Rochon, F. (2013). Ricci flow and the determinant of the laplacian on non-compact surfaces. *Communications in Partial Differential Equations*, 38(4), 711–749.
- Albin, P., Leichtnam, É., Mazzeo, R. et Piazza, P. (2012). The signature package on Witt spaces. Dans *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure*, volume 45, 241–310. Société mathématique de France.
- Albin, P. et Melrose, R. (2011). Resolution of smooth group actions. *Contemp. Math*, 535, 1–26.
- Ammann, B., Lauter, R. et Nistor, V. (2004). On the geometry of Riemannian manifolds with a Lie structure at infinity. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, 2004(4), 161–193.
- Bahuaud, E. (2011). Ricci flow of conformally compact metrics. Dans *Annales de l'Institut Henri Poincaré (C) Non Linear Analysis*, volume 28, 813–835. Elsevier.
- Biquard, O. et Mazzeo, R. (2011). A nonlinear Poisson transform for Einstein metrics on product spaces. *Journal of the European Mathematical Society*, 13(5), 1423–1475.
- Chau, A. (2004). Convergence of the Kähler-Ricci flow on noncompact Kähler manifolds. *Journal of Differential Geometry*, 66(2), 211–232.
- Chen, B.-L. et Zhu, X.-P. (2006). Uniqueness of the Ricci flow on complete noncompact manifolds. *Journal of Differential Geometry*, 74(1), 119–154.
- Cheng, S.-Y. et Yau, S.-T. (1980). On the existence of a complete Kähler metric on non-compact complex manifolds and the regularity of Fefferman's equation. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 33(4), 507–544.
- Chow, B. et Knopf, D. (2004). *The Ricci flow : an introduction*, volume 110. American Mathematical Society Providence.

- Chruściel, P. T., Delay, E., Lee, J. M. et Skinner, D. N. (2005). Boundary regularity of conformally compact Einstein metrics. *Journal of Differential Geometry*, 69(1), 111–136.
- Conlon, R. J., Degeratu, A. et Rochon, F. (2016). Quasi-asymptotically conical Calabi-Yau manifolds. *arXiv preprint arXiv :1611.04410*.
- Conlon, R. J., Mazzeo, R. et Rochon, F. (2015). The moduli space of asymptotically cylindrical Calabi-Yau manifolds. *Communications in Mathematical Physics*, 338(3), 953–1009.
- Crainic, M. et Fernandes, R. L. (2003). Integrability of Lie brackets. *Annals of Mathematics*, 575–620.
- Debord, C., Lescure, J.-M. et Rochon, F. (2015). Pseudodifferential operators on manifolds with fibred corners [Opérateurs pseudodifférentiels sur les variétés à coins fibrés]. Dans *Annales de l'institut Fourier*, volume 65, 1799–1880.
- DeTurck, D. M. (1983). Deforming metrics in the direction of their Ricci tensors. *Journal of Differential Geometry*, 18(1), 157–162.
- Epstein, C. L., Melrose, R. B. et Mendoza, G. A. (1991). Resolvent of the Laplacian on strictly pseudoconvex domains. *Acta Mathematica*, 167(1), 1–106.
- Gibbons, G. W. et Pope, C. N. (1979). The positive action conjecture and asymptotically Euclidean metrics in quantum gravity. *Communications in Mathematical Physics*, 66(3), 267–290.
- Grieser, D. (2017). Scales, blow-up and quasimode constructions. *Geometric and Computational Spectral Theory*, 700, 207.
- Hamilton, R. S. (1982). Three-manifolds with positive Ricci curvature. *Journal of Differential Geometry*, 17(2), 255–306.
- Isenberg, J., Mazzeo, R. et Sesum, N. (2013). Ricci flow on asymptotically conical surfaces with nontrivial topology. *Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelles Journal)*, 2013(676), 227–248.
- Joyce, D. (2001a). Asymptotically Locally Euclidean metrics with holonomy $SU(m)$. *Annals of Global Analysis and Geometry*, 19(1), 55–73.
- Joyce, D. (2001b). Quasi-ALE metrics with holonomy $SU(m)$ and $Sp(m)$. *Annals of Global Analysis and Geometry*, 19(2), 103–132.
- Karoubi, M. (2008). *K-theory : An introduction*, volume 226. Springer

Science & Business Media.

Krantz, S. G. et Parks, H. R. (2012). *The implicit function theorem : history, theory, and applications*. Springer Science & Business Media.

Kronheimer, P. B. et Nakajima, H. (1990). Yang-Mills instantons on ALE gravitational instantons. *Mathematische Annalen*, 288(1), 263–307.

Krylov, N. V. (1996). *Lectures on elliptic and parabolic equations in Hölder spaces*. Numéro 12. American Mathematical Soc.

Ladyzenskaja, O. A., Solonnikov, V. A. et Ural'ceva, N. N. (1967). Linear and quasilinear equations of parabolic type, Translated from the Russian by S. Smith. Translations of Mathematical Monographs, Vol. 23. *American Mathematical Society, Providence, RI*, 63, 64.

Lauter, R. et Moroianu, S. (2001). Fredholm theory for degenerate pseudodifferential operators on manifolds with fibered boundaries. *Comm. Partial Differential Equations*, 26(1-2), 233–283.

Lee, J. M. (1997). *Riemannian manifolds, volume 176 of Graduate Texts in Mathematics*, volume 176 of Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York.

Lee, J. M. (2013). *Introduction to smooth manifolds, 2nd ed.*, volume 218 of Graduate Texts in Mathematics. Springer, New York.

Lott, J. et Zhang, Z. (2011). Ricci flow on quasi-projective manifolds. *Duke Mathematical Journal*, 156(1), 87–123.

Lott, J. et Zhang, Z. (2016). Ricci flow on quasiprojective manifolds II. *Journal of the European Mathematical Society*, 18(8), 1813–1854.

Mackenzie, K., Mackenzie, K. C. et Kirill, M. (1987). *Lie groupoids and Lie algebroids in differential geometry*, volume 124. Cambridge university press.

Mazzeo, R. (1991). Elliptic theory of differential edge operators I. *Communications in Partial Differential Equations*, 16(10), 1615–1664.

Mazzeo, R. et Melrose, R. B. (1998). Pseudodifferential operators on manifolds with fibred boundaries. *Asian J. Math.*, 2(4), 833–866.

Mazzeo, R. R. et Melrose, R. B. (1987). Meromorphic extension of the resolvent on complete spaces with asymptotically constant negative curvature. *Journal of Functional analysis*, 75(2), 260–310.

Melrose, R. B. (1992). Calculus of conormal distributions on manifolds with

- corners. *International Mathematics Research Notices*, 1992(3), 51–61.
- Melrose, R. B. (1993). *The Atiyah-Patodi-singer index theorem*, volume 4. Citeseer.
- Melrose, R. B. (1995). *Geometric scattering theory*, volume 1. Cambridge University Press.
- Melrose, R. B. (1996). Differential analysis on manifolds with corners.
- Morgan, J. W. et Tian, G. (2007). *Ricci flow and the Poincaré conjecture*, volume 3. American Mathematical Soc.
- Rochon, F. (2012). Pseudodifferential operators on manifolds with foliated boundaries. *Journal of Functional Analysis*, 262(3), 1309–1362.
- Rochon, F. (2015). Polyhomogénéité des métriques asymptotiquement hyperboliques complexes le long du flot de Ricci. *The Journal of Geometric Analysis*, 25(3), 2103–2132.
- Rochon, F. et Zhang, Z. (2012). Asymptotics of complete Kähler metrics of finite volume on quasiprojective manifolds. *Advances in Mathematics*, 231(5), 2892–2952.
- Shi, W.-X. (1989). Deforming the metric on complete Riemannian manifolds. *Journal of Differential Geometry*, 30(1), 223–301.
- Simmons, G. F. (2016). *Differential equations with applications and historical notes*. CRC Press.
- Vertman, B. (2016). Ricci flow on singular manifolds. *arXiv preprint arXiv :1603.06545*.