UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL

ÉLABORATION D'UNE SÉQUENCE D'ENSEIGNEMENT SUR LE CALCUL DIFFÉRENTIEL METTANT À CONTRIBUTION LE TRAVAIL DE FERMAT DANS UNE APPROCHE PLUS INTUITIVE

MÉMOIRE PRÉSENTÉ COMME EXIGENCE PARTIELLE DE LA MAITRISE EN MATHÉMATIQUES

PAR
PEDRO DA SILVEIRA CASTRO

JUIN 2019

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL Service des bibliothèques

Avertissement

La diffusion de ce mémoire se fait dans le respect des droits de son auteur, qui a signé le formulaire *Autorisation de reproduire et de diffuser un travail de recherche de cycles supérieurs* (SDU-522 – Rév.10-2015). Cette autorisation stipule que «conformément à l'article 11 du Règlement no 8 des études de cycles supérieurs, [l'auteur] concède à l'Université du Québec à Montréal une licence non exclusive d'utilisation et de publication de la totalité ou d'une partie importante de [son] travail de recherche pour des fins pédagogiques et non commerciales. Plus précisément, [l'auteur] autorise l'Université du Québec à Montréal à reproduire, diffuser, prêter, distribuer ou vendre des copies de [son] travail de recherche à des fins non commerciales sur quelque support que ce soit, y compris l'Internet. Cette licence et cette autorisation n'entraînent pas une renonciation de [la] part [de l'auteur] à [ses] droits moraux ni à [ses] droits de propriété intellectuelle. Sauf entente contraire, [l'auteur] conserve la liberté de diffuser et de commercialiser ou non ce travail dont [il] possède un exemplaire.»

REMERCIEMENTS

Je souhaite avant tout remercier mon directeur de mémoire, M. Fernando Hitt, pour le temps qu'il a consacré à me donner les outils méthodologiques et les consignes indispensables à la conduite de cette recherche. J'aimerais le remercier pour sa grande générosité intellectuelle qui fait toujours grandir les sciences. Sa passion a été une grande inspiration pour moi.

Évidemment, je ne peux pas oublier l'aide de mes collègues et professeurs pour des suggestions et consignes importantes à la réalisation de ce travail. Particulièrement, je tiens à souligner les suggestions de lectures de livres rares que M. David Guillemette m'a prêtées ce qui m'a permis de trouver des pistes historiques importantes et indispensables à la réalisation de ce travail. Également, j'aimerais remercier toujours mes professeurs Mireille Saboya et Luis Saldanha pour ses commentaires, critiques et suggestions qui à contribué fondamentalement pour l'élaboration finale de ce mémoire.

Un merci spécial à toute ma famille et surtout à ma femme, Ana Beatriz, mon enfant Abel, ma belle-mère Quita et mes oncles Ivete et Leoncio qui m'ont toujours encouragé.

Spécialement, je souhaite remercier mes parents pour l'exemple de vie ce qui m'a donné de fortes bases pour garder toujours un bon équilibre dans ma vie.

TABLE DES MATIERES

LISTE DES FIGURESvii
LISTE DES TABLEAUXx
RÉSUMÉxi
CHAPITRE I PROBLÉMATIQUE1
1.1 Les taux de réussite dans les cours de calcul différentiel au Québec 1
1.2 Recension des problèmes d'apprentissage liés au calcul différentiel5
1.3 Recension des difficultés autour d'un des concepts associés au calcul différentiel : le concept de fonction et approche privilégiée
1.3.1 Le concept de fonction
1.3.2 Approche cognitive aux problèmes d'apprentissage du concept de fonction
1.4 Approche privilégiée pour l'apprentissage du calcul différentiel : traitement de l'obstacle
1.5 Objectif général de la recherche19
CHAPITRE II ANALYSE DE LA DERIVEE A TRAVERS LES CONCEPTS D'INFINI ET DE LIMITE20
2.1 Analyse historique de l'infini en mathématique20
2.2 L'infini réel ou actuel et l'infini potentiel dans la classe de mathématiques 31
2.3 La notion de limite
2.4 Le concept de limite dans l'histoire des mathématiques34
2.5 Sierpinska et son approche aux problèmes d'apprentissage du concept d'infini mathématique
2.6 Erwynck et les problèmes d'apprentissage du concept d'infini mathématique au niveau universitaire

2.7 L	a philosophie des mathématiques et le développement du calcul différentiel 41
2.8 O	bjectifs spécifiques de la recherche
2.9 A	pproche générale méthodologique pour atteindre l'objectif fixé45
APPU	PITRE III JIS THÉORIQUES POUR LA CONSTRUCTION D'UNE SÉQUENCE ISEIGNEMENT AUTOUR DU CALCUL DIFFÉRENTIEL47
3.1 L	e rôle des représentations dans l'apprentissage des mathématiques48
3.2 D	e la représentation dans la pensée de l'élève (image conceptuelle) approche « top down » versus la construction à partir de représentations sémiotiques sur papier (activités sur la conversion de représentations) (approche « bottom up »).
3.3 L	es représentations sémiotiques spontanées et la construction de concepts mathématiques
3.4 L	a modélisation mathématique et les problèmes d'apprentissage56
3.5 L	a modélisation mathématique comme proposition d'enseignement58
3.6 R	etour à l'objectif général de la recherche
	PITRE IV LYSE DE MANUELS ET DES PLANS DE COURS DES CÉGEPS65
4.1	Analyse des programmes d'enseignement de la dérivée dans trois cégeps 66
	4.1.1 Analyse du curriculum et présentation officielle du programme66
	4.1.2 Critique du programme
4.2	Analyse de trois plans de cours
	4.2.1 Le plan de cours du Cégep de Montmorency
	4.2.2 Le plan de cours du Cégep de Lévis Lauzon
	4.2.3 Le plan de cours du Cégep de Sainte-Foy
4.1	Analyse du manuel <i>Calcul différentiel et intégral I</i> , Collection mathématique Nouvelles, Ottawa de Jear Menard (1970)
4.2	Analyse dui manuel <i>Leçons de Calcul I</i> (1991), Allan B.Cruse et Millianne Lehman, Éditions du SITESA (Sistema Tecnicos de edicion)
4.3	Analyse du manuel <i>Calcul différentiel</i> (2007), de Amiotte e Flamel, Editions du rénouveau pedagogique (ERPI), Québec
4.4	Analyse du manuel <i>Calcul Différentiel</i> de Éric Brunelle et Marc-André Désautels (2011), les éditions CEC inc. Québec

4.5	Conclusion : que peut-on tirer de l'analyse des manuels scolaires ?99
-	PITRE V
5.1 E	mergence du calcul différentiel : un intérêt pour la période de Fermat101
5.2 L	es méthodes de Fermat
	5.2.1 La méthode de Fermat pour trouver les points extrémums dans la covariation de deux variables
	5.2.2 L'interprétation géométrique de la méthode de Fermat
	5.2.3 Les conditions nécessaires et les conditions suffisantes pour avoir des points de maximum et de minimum locaux
	5.2.4 La méthode de Fermat pour trouver des tangentes à une courbe quelconque
	5.2.5 Notre interprétation aux idées intuitives de Fermat
5.3 L	La Méthode de Fermat et l'enseignement des mathématiques
5.4 L	La méthode de Fermat en action d'un point de vue numérique
5.5 I	nterprétation de la méthode de maximums et minimums une fois construit le concept de fonction
5.6 F	Représentation géométrique de la méthode de maximums et minimums une fois construit le concept de fonction
5.7 L	La systématisation de la dérivée avec les connaissances mathématiques du XVIIIe siècle
	5.7.1 La systématisation de la dérivée de la fonction $f(x) = x^k$
SÉQ	APITRE VI UENCE D'ENSEIGNEMENT DONT LES ACTIVITÉS SONT BASÉES SUR MÉTHODE DE FERMAT À DES FINS DIDACTIQUES149
6.1	La stratégie adoptée dans l'élaboration des tâches pour l'enseignement de la dérivée
6.2 N	Notre proposition d'apprentissage du calcul différentiel basée sur la modélisation mathématique
6.3	Une séquence d'enseignement basée sur des activités mathématiques
6.4 I	Les situations problèmes et les modélisations mathématiques
	6.4.1 Importance des connaissances préalables
	6.4.2 La question d'arrière-plan
6.5	Les situations-problèmes comme forme d'enseignement

6.6	La méthode de Fermat en action d'un point de vue numérique et sa généralisation (guide pour l'enseignant)159
	6.6.1 La méthode de Fermat et le calcul numérique du taux de variation instantané en un point
6.7	Les dérivées successives et leur signifiée
	6.7.1 Les dérivées successives et leurs représentations graphiques166
	6.7.2 Points d'inflexion d'une fonction
	6.7.3 Les registres de représentations comme moyen de contrôle
	6.7.4 L'articulation entre les registres de représentations pour promouvoir l'apprentissage heuristique de la dérivée des fonctions
6.8	La Méthode de Fermat et la notion de taux de variation égale à zéro 1'75
6.9	La résolution de problèmes de maximums et minimums avec la Méthode de Fermat et la notion de taux de variation instantanée
6.10	La résolution de la tâche avec l'approche opérationnelle 1/n
6.11	À la recherche de l'optimisation. Situation-problème 2 :
6.12	La proposition d'enseignement
6.13	Les activités mathématiques à utiliser directement dans la classe
	6.13.1 Analyse d'un cas réel d'une boite standard
	6.13.2 La palette versus les boites
	6.13.3 L'emballage pour le yogourt : Un cas spécial
6.14	Perspective du mémoire
BIBI	IOGRAPHIE215

LISTE DES FIGURES

Figure	Page
1.1	Taux de réussite du cours 201-103-RE selon le sexe - profil administration avec mathématiques au Cégep Édouard-Montpetit
1.2	Taux de réussite du cours 201-103-RE selon le sexe Profil monde avec mathématiques au Collège LaSalle
1.3	Représentation de la fonction par Euler (recueil de notes du cours MAT3225 Didactique de la variable et des fontions, à l'UQAM de Hitt, 2018)
3.1	Schéma sur la noésis et la sémiosis de Duval
3.2	Un exemple de manuel qui prend en compte la conversion entre représentations et la technologie
Figure	3.3 Schéma de modélisation mathématique d'une situation problème soulignée par Bassanezi (Ibid), p.37
4.1	Livre Calcul différentiel et intégral I, Menard
4.2	Livre Calcul différentiel et intégral I, Menard
4.3	Graphique de la fonction $f(x) = x^3 + 2x^2 + 4$
4.4	Livre Calcul différentiel et intégral I, Menard
4.5	Manuel Leçons de Calcul I (1991), Allan B.Cruse et Millianne Lehman, Éditions du SITESA (Sistema Tecnicos de edicion)
4.6	Manuel <i>Leçons de Calcul I</i> (1991), Allan B.Cruse et Millianne Lehman, Éditions du SITESA (Sistema Tecnicos de edicion)
4.7	Manuel <i>Leçons de Calcul I</i> (1991), Allan B.Cruse et Millianne Lehman, Éditions du SITESA (Sistema Tecnicos de edicion)
4.8	Manuel Calcul différentiel (2007), de Amiotte et Hamel, p.6287
4.9	manuel Calcul différentiel (2007), de Amiotte et Hamel, p.64
4.10	Manuel Calcul différentiel (2007), de Amiotte et Hamel, p.65

4.11	Manuel Calcul différentiel (2007), de Amiotte et Hamel, p.6690
4.12	Manuel Calcul différentiel (2007), de Amiotte et Hamel, p.7391
4.13	Manuel Calcul différentiel (2007), de Amiotte et Hamel, p.6692
4.14	Manuel Calcul Différentiel de Éric Brunelle et Marc-André Désautels (2011), les éditions CEC inc. Québec, p.52
4.15	Manuel Calcul Différentiel de Éric Brunelle et Marc-André Désautels (2011), les éditions CEC inc. Québec, p.53
4.16	Manuel Calcul Différentiel de Éric Brunelle et Marc-André Désautels (2011), les éditions CEC inc. Québec, p.54
5.1	Original d'Euvres de Fermat qui date de 1636
5.2	Invention des tangentes par Fermat
5.3	Explication de la tangente 1
5.4	Explication de la tangente 2
5.5	Explication de la tangente 3
5.6	Explication de la tangente 4
5.7	Généralisation de la tangente de Fermat
5.8	Généralisation de la tangente de Fermat partie 2
5.9	Généralisation de la tangente de Fermat partie 3
5.10	Généralisation de la tangente de Fermat partie 4
5.11	Interprétation de l'idée intuitive de Fermat 1
5.12	Interprétation de l'idée intuitive de Fermat 2
5.13	Interprétation de l'idée intuitive de Fermat 3
5.14	La dérivée
5.15	La dérivée et GeoGebra
6.1	Point de minimum 167
6.2	Les points extrêmes des fonctions
6.3	Point d'inflexion

- 6.4 La construction de la représentation graphique de fx = x3 6x + 9...... 175
- 6.5 Exemples de boites prismatiques non standards de base rectangulaire 202

LISTE DES TABLEAUX

Tablea	u .	Page	
1.1	Contenus du calcul différentiel	10	
5.1	Exemple de Fermat	111	

RÉSUMÉ

Est-ce que les connaissances mathématiques servent seulement pour développer les habiletés intellectuelles des individus ? Ou bien ces connaissances pourraient être aussi utiles dans la vie quotidienne? Ces questionnements sont encore plus intéressants si nous pensons que la plupart des étudiants sauront ou se souviendront seulement d'une petite partie des connaissances mathématiques étudiées tout le long de leur formation en mathématiques (Bassanezi, 2006).

Nous considérons que l'apprentissage des mathématiques devrait être révélateur et devrait promouvoir la découverte de signifiés pour les connaissances mathématiques. Dans ce sens, nous allons proposer aux étudiants des situations problèmes intéressantes qui les amènent à la réflexion et à la découverte de signifiés en mathématiques. Si les situations problèmes sont stimulantes, elles peuvent contribuer significativement à l'apprentissage des mathématiques.

Donc, d'un côté, nous allons cibler l'apprentissage du calcul différentiel en nous référant au processus historique de la construction de cette dernière, et de l'autre côté nous allons promouvoir l'apprentissage du calcul différentiel dans un contexte de résolution de situations problèmes à travers un environnement d'apprentissage collaboratif, de débat scientifique et d'auto réflexion (méthodologie ACODESA, Hitt 2007; Hitt, Saboya & Cortés 2017). Spécifiquement, nous allons aborder le concept de maximum et minimum d'un point de vue historique et aussi, d'un point de vue pratique. De plus, nous nous appuierons sur la modélisation mathématique et sur l'utilisation de la technologie. Notre objectif est de construire chez les étudiants un concept pour le calcul différentiel solide, englobant les aspects intuitifs, algébriques et géométriques.

Mots clés: Apprentissage collaboratif et significatif; Modélisation mathématique; Calcul différentiel; Méthode de Fermat; Enseignement intuitif; Usage de la technologie.

Keywords: Collaborative and meaningful learning; Mathematical modeling; Differential calculus; Fermat method; Intuitive teaching; Use of technology.

CHAPITRE I

PROBLÉMATIQUE

Les applications des mathématiques dans la vie réelle sont nombreuses. Parmi cellesci, le calcul différentiel est l'une des plus importantes. En effet, le calcul différentiel est un élément incontournable puisqu'on l'utilise en économie, en ingénierie, en médecine, en physique, etc. Pour cette raison, ce contenu mathématique occupe une place spéciale dans le curriculum. Par contre, les statistiques nous montrent que réussir un cours du calcul différentiel n'est pas facile pour les étudiants¹ préuniversitaires (Laport, 2017), comme nous allons le mentrer plus loins dans ce chapitre.

1.1 Les taux de réussite dans les cours de calcul différentiel au Québec

Au Québec, la variable « enseignement des mathématiques » est une variable que l'on doit analyser de manière plus approfondie. Le calcul différentiel enseigné au niveau collégial, notamment, est présenté par des enseignants qui ont une formation complètement différente de ceux du secondaire. En effet, au Québec, les enseignants du cégep ont une formation formelle en mathématiques, une formation purement mathématique, et, par conséquent, leur façon d'enseigner diffère beaucoup de celle des enseignants du secondaire, qui ont une formation centrée sur la didactique des

¹ Pour ne pas alourdir le texte, nous nous conformons à la règle qui permet d'utiliser le masculin avec la valeur de neutre.

mathématiques et qui abordent donc la matière de façon très différente. De plus, il faut souligner qu'au niveau collégial, le formalisme en mathématiques est fortement présent (Corriveau et Tanguay, 2007). Cependant, on constate au Québec les mêmes problèmes qu'ailleurs quant au taux d'échec au cours de calcul.

Selon le ministère de l'Éducation du Québec² (MES), dans un passé récent (1999), seulement 39% des étudiants réussissaient à compléter leur programme préuniversitaire en deux ans; 17 % le faisaient en trois ou quatre ans et 22 % en plus de quatre ans. De plus, les programmes en sciences connaissaient un taux d'échec ou d'abandon très élevé. La situation dans les écoles du niveau collégial était donc préoccupante.

Les données statistiques plus récentes du ministère de l'Éducation du Québec nous indiquent que, parmi les élèves de la formation professionnelle qui quittaient leurs études en 2010-2011, 30,9% n'avaient obtenu ni diplôme ni qualification. Si l'on ne considère l'effectif jugé comme étant véritablement en quête d'un diplôme, soit les élèves inscrits à temps plein, la proportion de titulaires d'un diplôme ou d'une qualification parmi les étudiants sortants atteignait 87,6%.

Depuis le début de la réforme de la formation professionnelle, en 1987-1988, le pourcentage de ceux qui ont obtenu un diplôme ou une qualification a augmenté de façon appréciable. Par exemple, à la fin de 2010-2011, ce pourcentage atteignait 75,4% des sortants des programmes menant au diplôme d'études professionnelles (DEP), contre 54,4 % en 1990-1991. Par rapport à la situation qui existait au professionnel long (PL) au milieu des années 1980, le taux de réussite ne semble pas avoir beaucoup augmenté, mais il faut toutefois savoir que les données alors disponibles ne concernaient que le secteur des jeunes. Si l'on ne considère que les élèves inscrits à temps plein, l'amélioration est plus visible. En effet, comme on l'a déjà noté, la proportion de titulaires d'un diplôme ou d'une qualification parmi les sortants inscrits

² Aujourd'hui connu sous l'appellation « ministère de l'Éducation et de l'Enseignement supérieur » (MEES).

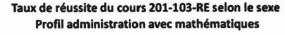
à temps plein en 2010-2011 s'élevait à 87,6%, alors qu'elle était de 56,3% en 1980-1981.

Cependant, dans le cours de mathématiques, nous avons des taux d'échec et d'abandon importants, ce que montre Odierna (2004) en s'appuyant sur les études de Beaulac et Robitaille (1976), de Denis (1978), de Cudoch-Dussiaume (1988) et, plus tard, de Maurice (2000).

D'après Laporte (2016: 12), particulièrement au Québec, le cours de calcul différentiel pour le programme des sciences humaines, par exemple, est un cours mal aimé des étudiants et même des enseignants. Ces affirmations faites par Laporte (*ibid*.) proviennent de données statistiques démontrant que les taux de réussite en calcul différentiel sont préoccupants. Les causes des bas taux de réussite sont, er partie dues au manque, chez les étudiants, d'une maitrise des connaissances préalables au calcul, comme le concept de fonction (les caractéristiques des fonctions, la lecture des graphiques des fonctions), la factorisation, les règles des exposants, les radicaux, etc. Ces constats sont confirmés par un consensus de la part des enseignants provenant d'un échantillon d'établissements collégiaux (Collège LaSalie, Collège de Rosemont, Collège de Maisonneuve, Cégep de l'Outaouais, Cégep de Sherbrooke et le Cégep régional de Lanaudière). De plus, d'autres facteurs ont une influence sur les bas taux de réussite comme l'hétérogénéité de ces étudiants qui proviennent de commissions scolaires et d'écoles secondaires différentes (et parfois même de pays différents).

Pour app uyer ses propos, Laporte³ (*ibid.*, : 14) présente des statistiques récentes¹ autour de la réussite du cours de calcul différentiel, ou calcul 1, en sciences humaines. Par exemple, les taux de réussite au Cégep Édouard-Monpetit sont décrits dans la figure 1.2 pour le profilad ministration avec mathématiques :

³ Ces données statistiques sont extraites de la recherche de Charles Laporte, elles sont présentées dans son rapport de recherche paru en 2017 (p. 14).



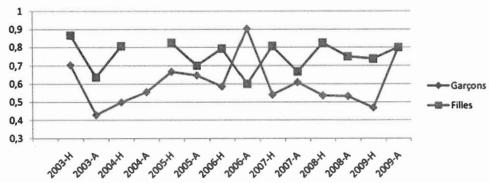


Figure 1.1 Taux de réussite du cours 201-103-RE selon le sexe - profil administration avec mathématiques au Cégep Édouard-Montpetit

Nous observons qu'entre 2003 et 2009, les taux de réussite sont souvent en bas de 70% chez les garçons. Cependant, chez les filles, le résultat est différent, car les taux de réussite en calcul 1 dans la même période sont égaux ou supérieurs à 60%.

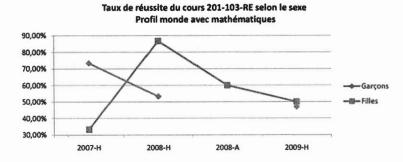


Figure 1.2 Taux de réussite du cours 201-103-RE selon le sexe Profil monde avec mathématiques au Collège LaSalle

2003-H signifie session Hiver 2003, 2003-A signifie session Automne 2003, 2007-H signifie session Hiver 2007, 2008-H signifie session Hiver 200 et 2009-H signifie session Hiver 2009.

Ces résultats sont semblables, même si on remarque que, chez les filles, les taux de réussite sont plus élevés dans les deux collèges. Par contre, le taux de réussite global (filles et garçons) est toujours en-dessus de 75 %.

Tout cela nous indique que les résultats par rapport aux taux de réussite dans les cours de calcul 1 sont toujours préoccupants. Mais quelles sont les difficultés que les étudiants rencontrent lors de l'étude du calcul différentiel?

1.2 Recension des problèmes d'apprentissage liés au calcul différentiel

Dans cette recherche, nous ciblons le concept clé enseigné dans les cours d'introduction au calcul différentiel, c'est-à-dire la dérivée. Ce sont les difficultés liées à l'apprentissage de cette dernière qui doivent être ciblées. Les concepts notamment de fonction, de continuité, de tangente, de limite (surtout de limite attachée aux processus d'infini), doivent être abordés.

En ce qui concerne la nature des causes des difficultés d'apprentissage du calcul différentiel, plusieurs chercheurs ont des points de vue différents. Tall (1993), dans son article *Students' Difficulties in Calculus*, expose les principales difficultés révélées par la littérature. Il cite entre autres les difficultés liées aux concepts d'infini et de limite des fonctions, des difficultés autour des manipulations algébriques, de la présence de différentes représentations (algébriques, numériques, graphiques, etc.), de l'aspect formel de ces représentations, de la préférence de la part des étudiants et même des enseignants d'une approche attachée aux methodes et procédures, ainsi que la mathématisation des problèmes qui, dans ce cas, sont strictement liés à la modélisation mathématique (dont la notion de variable et le concept de fonction sont les pierres angulaires).

Entre autres, Tall (*ibid*.) clarifie que c'est dans l'apprentissage du calcul que l'étudiant se heurte pour la première fois au concept de limite des fonctions, dont les calculs ne sont pas réalisés par des arithmétiques simples ni même par des manipulations algébriques modestes. En fait, c'est la première fois que l'étudiant doit passer d'une idée intuitive de l'infini potentiel à un concept formel lié à l'infini actuel ou réel.

De même, Tall (*ibid.*) révèle que l'insatisfaction quant à la performance des élèves dans les cours de calcul est très forte dans le monde entier. Par exemple, en France, les IREM (les Instituts de recherche sur l'enseignement des mathématiques) se sont aperçus qu'il y avait des problèmes dans l'apprentissage du calcul lorsqu'on aborde ce dernier comme une « formule ». Au Royaume-Uni, un rapport de la London Mathematical Society datant de 1992 a révélé la nécessité d'une réorganisation du cours de calcul, et même d'une réduction du contenu abordé. Par contre, à cette époque, il y avait peu d'investissements en recherche de type cognitif, ce que nous révèle Tall (*ibid.*).

Pour surmonter les difficultés citées ci-dessus, Tall (*ibid.*), dans sa recherche, suggère la possibilité de construire une nouvelle connaissance cohérente et structurée. Pour cela, il faudrait réconcilier les connaissances anciennes et les nouvelles. Parallèlement, enseigner en évitant les éléments conflictuels (obstacles épistémologiques) peut être possible si on donne la préférence aux procédures et méthodes pratiques de résolution de problèmes. Tall (*ibid.*) souligne que la plupart des enseignants ont une prédilection pour cette façon de faire et, nous pouvons constater dans plusieurs manuels cette même tendance (comme nous le verrons dans Le chapître IV). Cela promeut un apprentissage algorithmique, au détriment d'un apprentissage conceptuel.

Nous empruntons la notion d'obstacle épistémologique de Bachellard adapté à la didactique des mathématiques par Brousseau (1983, p.165-198) :

Un obstacle se manifeste donc par des erreurs, mais ces erreurs ne sont pas dues au hasard. Fugaces, erratiques, elles sont reproductibles, persistantes. De plus, ces erreurs, chez un même sujet, sont liées entre elles par une source commune une manière de connaître, une conception caractéristique, cohérente sinon correcte, une « connaissance » ancienne et qui a réussi dans tout un domaine d'actions. Ces erreurs ne sont pas forcément explicitées. Il arrive qu'elles ne disparaissent pas radicalement, d'un seul coup, qu'elles résistent, qu'elles persistent puis resurgissent, se manifeste longtemps après que le sujet ait rejeté le modèle défectueux de son système cognitif conscient.

Est-il préférable de maintenir les obstacles épistémologiques dans une boite fermée ? En fait, une approche purement algorithmique peut sembler donner un apprentissage efficace, mais, à long terme, les étudiants oublient les procédures et recommencent à produire des erreurs provoquées par les obstacles cognitifs précédemment mentionnés.

Précisons notre pensée à l'aide d'un exemple, soit l'apprentissage du concept de limite, qui crée plusieurs difficultés chez l'apprenant :

- La question du langage utilisé : quand on parle de limite donc « quand h tend vers zéro », la valeur de h peut être très petite, aussi petite que nous le voulons (on crée alors une notion d'infiniment petit). De la même façon, l'idée de « N peut devenir arbitrairement grand » va suggérer implicitement une conception de l'infini, l'infini comme un nombre réel. Mais le professeur va essayer de clarifier aux étudiants que l'infini n'est pas un nombre, et tout de suite après on va manipuler l'infini comme un nombre en travaillant les indéterminations. Ainsi, ces concepts sont « entourés d'un mystère » causé par d'une approche purement procédurale et provoquant un obstacle cognitif.
- La difficulté chez les étudiants à comprendre si la limite peut effectivement être atteinte ou pas : quelle est la signification du signe « = » dans l'expression lim ¹/_{n→∞} = 0, puisque ¹/_n ne sera jamais égal à zéro, mais que lim ¹/_{n→∞} = 0 ?
- La confusion sur le passage du fini à l'infini, dans la compréhension de « ce qui se passe à l'infini ».
- Le formalisme et la rigueur trouvés sur les nouveaux concepts mathématiques comme la limite des fonctions et l'infini.

Nous reviendrons sur la notion d'obstacle épistémologique à la section 3.1 jusqu'à la section 3.7. Pour le moment, nous cherchons simplement souligner que le problème de l'apprentissage du calcul différentiel, n'est pas un problème local, mais bien un problème répandu dans le monde entier. Par exemple, des recherches aux États-Unis ont montré que le teux d'échec dans les cours de calcul différentiel en 1987 était aux alentours de 46% chez 600 000 étudiants universitaires ciblés (Anderson &

Loftsgaarden, 1987). L'insatisfaction liée à ce taux d'échec a mené à un mouvement de réforme du calcul différentiel et intégral aux États-Unis (réforme initiée en 1986) qui continue aujourd'hui. Des chercheurs (Selden, Mason et Selden, 1989) ont démontré que même les étudiants ayant suivi et réussi un cours de calcul différentiel dans l'une des meilleures universités aux États-Unis n'ont pas pu, un mois après la fin du cours, résoudre des problèmes non routiniers. « *Not one student got an entire problem correct*! » ont-ils écrit. La réforme du calcul était donc indispensable! Pour la mise en place de cette nouvelle approche, les établissements scolaires ont investi dans la production de manuels (par exemple le projet Harvard), dans la réduction du nombre d'étudiants par salle (25 étudiants maximum) et dans l'utilisation de nouvelles technologies à des fins de promotion de l'apprentissage du calcul (Star et Smith, 2006).

Du côté des manuels, par exemple, nous remarquons que le livre *Fonctions d'une variable*, qui date de 1999 et fait partie du projet Harvard, organise son contenu selon une logique qui lui est propre et qui privilégie les applications du calcul dans des résolutions de problèmes, sans restreint la présentation à un rapport exclusive des technique, ce qui est souvent négligé dans les ouvrages dits « traditionnels ». Ces auteurs ont un penchant pour une approche conceptuelle du calcul différentiel. Ainsi, le chapitre deux de ce manuel, qui est consacré au concept de dérivée, privilégie les applications dans une approche conceptuelle. Les techniques de différentiation ne sont vues qu'au chapitre suivant, et la préoccupation pour la notion de limite est seulement abordée à la fin du chapitre deux. Nous approfondirons cette discussion dans le chapitre II du présent mémoire.

D'après nous, la compréhension conceptuelle effective du calcul différentiel va favoriser l'acquisition d'une base solide pour les cours subséquents de calcul et même dans d'autres disciplines.

Le calcul différentiel est une discipline qui requiert comme préalables plusieurs connaissances en mathématiques, soit :

- l'arithmétique;
- l'algèbre;
- les fonctions;
- la trigonométrie;
- la géométrie;
- la géométrie analytique.

Ces branches mathématiques doivent être intégrées de façon cohérente et pratique dans l'apprentissage du calcul différentiel. Ce premier obstacle pourrait être dépassé par quelques étudiants en comblant leurs lacunes liées aux connaissances en arithmétique, en l'algèbre, sur les fonctions, etc., mais il y a d'autres connaissances qui sont propres au calcul différentiel et qui sont difficiles pour les étudiants. En effet, la dérivée, au premier regard, semble simple, mais son apprentissage est complexe parce que des difficultés subsistent, liées aux sous-concepts mathématiques que l'étudiant doit intégrer pour faire face à ce nouveau concept, chacun de ces sous-concepts étant complexe, comme la notion de variable, de fonction et de limite. En fait, le concept de limite lié au concept d'infini mathématique est un des concepts qui suscite beaucoup de préoccupations parmi les chercheurs parce que le concept d'infini est une question qui trouble très profondément l'esprit humain depuis plusieurs siècles. L'infini mathématique, en résumé, demande une compréhention des prérequis, de l'infini potentiel et de la distinction entre ce dernier et l'infini actuel ou réel⁴.

Il n'y a pas de consensus parmi les chercheurs en didactique des mathématiques par rapport aux difficultés autour de l'apprentissage du calcul. Il y a des chercheurs qui montrent que les difficultés proviennent de la complexité des concepts mathématiques qui empêche leur compréhension conceptuelle (obstacles épistémologiques), et d'autres qui affirment que les difficultés sont liées à la visualisation et à l'articulation entre différentes représentations.

⁴ Nous approfondirons la discussion sur l'infini actuel ou réel dans le chapitre II d₁ p résent mémoire.

En résumé, de la littérature se dessinent deux voies pour la compréhension des problèmes d'apprentissage du calcul différentiel: des problèmes d'apprentissage liés à des branches mathématiques qui confluent vers le cours de calcul, et des problèmes d'apprentissage propres au calcul.

Tableau 1.1 Contenus du calcul différentiel

Contenus importants pour aborder les notions du calcul différentiel (classés comme précalcul)	Contenus propres au calcul différentiel
 arithmétique; algèbre; fonctions; trigonométrie; géométrie; géométrie analytique. 	 Tangente à une courbe; Limite de fonctions; Continuité de fonctions; Dérivée de fonctions; Applications de la dérivée à l'étude de phénomènes physiques.

Dans quelques pays, par exemple aux États-Unis, les étudiants font du précalcul avant leurs études universitaires et du calcul à l'université. Toutefois, la réforme aux États-Unis n'a pas pu régler le problème des difficultés des étudiants autour du calcul différentiel.

1.3 Recension des difficultés autour d'un des concepts associés au calcul différentiel : le concept de fonction et approche privilégiée

1.3.1 Le concept de fonction

Le concept de fonction est un des concepts du précalcul très important pour la compréhension du calcul différentiel. C'est un des concepts les plus utilisés en mathématiques, et ses applications sont nombreuses. Le développement de ce concept, comme souvent en mathématiques, est passé par une succession de changements.

À sa création, le concept de fonction était considéré comme un rapport entre les nombres et leurs carrés, entre des nombres et leur racine, etc.. On trouve des exemples de fonctions dans les tablettes babyloniennes datant de 2 000 ans av. J.-C., comme on peut le voir dans Youschkevitch (1981:40), cité par Hitt (1994). À cette époque, l'idée de fonction provenait de la vie quotidienne et avait pour objectif de faciliter les calculs. Plus tard, au Moyen Âge, les notions générales de quantités variables et de fonctions étaient exprimées à la fois dans les formes géométriques et mécaniques. Mais, comme pendant l'Antiquité, les situations de dépendance entre deux variables étaient traitées de façon verbale ou encore de façon graphique. Il est intéressant de rappeler que les formules algébriques, telles que nous les connaissons aujourd'hui, ont commencé à apparaître au XVIe siècle avec Viète.

Au milieu du XIVe siècle, grâce aux études d'Oresme, les premières représentations graphiques se sont développées. Puis, au XVIIe siècle, des expressions analytiques des fonctions ont commencé à prédominer, comme on peut le voir dans les travaux de Descartes. Finalement, petit à petit, la notion de fonction s'approche de notre conception moderne. Ainsi, nous constatons tout au long de l'évolution du concept de fonction qu'il y a une tendance explicite à s'attarder à la dépendance entre variables, et à focaliser sur une formulation qui s'appuie sur une description géométrique (ou même graphique) et qui sous-entend une perception dynamique et covariationnelle. Cette approche correspond aux recherches récentes qui ont mis l'accent sur l'importance de la variation et de la relation de dépendance entre variables comme éléments fondamentaux à la bonne compréhension des fonctions (Kiem, 2011).

De même, on peut rapporter quelques constats par rapport au concept de fonction.

Ainsi:

- Les premières idées de fonction viennent du monde physique, c'est-à-dire de la nécessité de modéli ser un phénomène de la vie pratique.
- Les relations de dépendance sont des signifiés fondamentaux de la notion de fonction.

L'histoire des mathématiques montre le long parcours qui a permis la construction du concept de fonction. La première définition de fonction est apparue chez Bernoulli (1618), et c'est avec Euler (1648) que la définition a été intégrée à l'élaboration des fonctions de manière systématique. Les sous-concepts de domaine et codomaine ne sont pas été mentionnés chez ces mathématiciens. Ce n'est qu'au XIX^e siècle que ces sous-concepts de la fonction ont été explicités. On peut remarquer que chez Oresme, Bernoulli ou Euler, l'axe vertical n'est pas été dessiné. Il reste implicite dans les dessins, par exemple dans ceux d'Euler (voir le recueil de notes du cours MAT3225, Didactique de la variable et des fonctions, UQAM, de Hitt, 2018 : 11).

Puisqu'une ligne droite est propre à représenter une quantité variable x, cherchons à présent une manière très commode de représenter géométriquement une fonction quelconque de x. Soit y cette fonction de x; laquelle par conséquent recevra une valeur déterminée, si on substitue à x une valeur donnée.

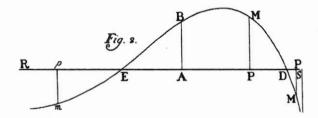


Figure 1.3 Représentation de la fonction par Euler (recueil de notes du cours MAT3225 Didactique de la variable et des fontions, à l'UQAM de Hitt, 2018)

Une fois abordée l'histoire du concept de fonction, on peut se questionner sur la compréhension de ce concept par les étudiants.

1.3.2 Approche cognitive aux problèmes d'apprentissage du concept de fonction

D'un point de vue cognitif, pour la bonne compréhension des concepts mathématiques comme celui de fonction, il est fondamental de faire des articulations entre les différents types de représentations. Ainsi, Duval (1988, 1993) stipule l'importance de

l'articulation entre représentations pour la construction de concepts. Selon Duval, un concept mathématique ne peut pas être développé à partir d'une seule représentation, car cette dernière ne peut pas exprimer toutes les caractéristiques du concept étudié. De ce point de vue. Duval fait référence aux systèmes de signes et les opérations dans ces systèmes. Alors, pour lui, pour construire un concept mathématique il est absolument nécessaire de reconnaître les éléments de chaque système de singes, les traitements dans un système et la conversion entre les éléments de chaque système. En plus, étant donné les problèmes d'apprentissage des concepts mathématique, Duval va préciser ce qui est un registre (comme partie d'un système de signes) qui va permettre d'expliquer les phénomènes d'apprentissage. Alors, il affirme qu'un registre est un système de représentation si trois conditions sont respectées : 1) la reconnaissance dans chaque système (les représentations algébriques, les représentations graphiques, la table de valeurs, etc.); 2) les traitements dans le registre; 3) la conversion entre les différents registres. L'articulation entre registres est liée à une bonne compréhension du concept mathématique envisagé (la phase que Duval appelle la noésis). Effectivement, pour Duval, la conversion entre les différents registres de représentations (noésis) est la phase la plus importante de l'apprentissage des concepts mathématiques. En d'autres mots, le passage d'une représentation è l'autre, tel que le passage de la représentation algébrique à la représentation graphique et vice-versa, est au cœur de l'apprentissage d'un concept mathématique comme celui de fonction.

La recherche autour de l'apprentissage des fonctions a démontré que l'appopriation de ce concept requiert la construction de sous-concepts liés à la correspondance, à la dépendance et à la variation (Passaro, 2013) Notamment, Passaro met de l'avant que la notion de covariation entre variables est au cœur de l'apprentissage du concept de fonction.

La correspondance se définit par l'association entre une valeur de la variable indépendante et une valeur de la variable dépendante d'une fonction et s'exprime par un processus opératoire appelé règle de correspondance. Ainsi, la correspondance est

souvent exprimée à l'aide de la notion d'ensemble, comme on peut le voir dans plusieurs manuels. À cet effet, Passaro (*ibid*.) cite la définition donnée par Charon et Parrent (2007 : 4) :

Une fonction f d'un ensemble A vers un ensemble B, notée $f: A \to B$, est une règle qui associe à chaque élément de D, où $D \subseteq A$, un seul élément de I, où $I \subseteq B$.

Selon Passaro (*ibid.*), les aspects de dépendance et de variation vont de pair. Ainsi, lorsqu'on a une fonction réelle, la variation est reliée à deux grandeurs qui changent de façon concomitante. En d'autres mots, la chercheuse explique que la variation de la grandeur dépendante dépend de la variation de la grandeur indépendante. Dans ce sens, Passaro cite la définition d'Euler datant de 1755 : « des quantités dépendent des autres de manière que si les autres changent, ces quantités changent aussi » (extrait de Youschkevitch (1976 : 61) cité par Passaro, 2013).

Entre d'autres aspects, l'une des spécificités du calcul différentiel, en ce qui concerne l'étude des fonctions, est d'étudier le taux de variation d'une fonction, soit de comprendre les différentes manières qu'a une fonction de croitre ou de décroitre dans un intervalle ou autour d'un point d'inflexion. Conséquemment, cette analyse va promouvoir l'idée fondamentale du calcul différentiel, qui est l'idée qu'une courbe, localement, peut être bien approchée par une droite, dont les caractéristiques de proportionnalité constituent des composants facilitateurs à la compréhension et à l'analyse de la dérivée. Dans ce sens, le calcul différentiel est un outil utile, notamment parce que l'étude des variations et la nécessité d'approximations locales sont présentes dans différents phénomènes reliés à presque tous les domaines de la connaissance, tels comme l'ingénierie, l'économie, les sciences de la gestion entre autres.

Dans ce sens, Passaro (2013) affirme que les aspects de dépendance et de variation sont liés à la notion de dérivée, dans la mesure où la dérivée peut être considérée comme un outil d'étude de la variation d'une fonction. En effet, pour Passaro (*ibid.*), l'étude des variations concomitantes revient globalement à l'étude de la covariation. La

covariation permet, entre autres, de favoriser le passage è la notion de dérivée et, bien sûr, de travailler la notion de fonction. Le travail de Passaro nous porte à travailler simultanément l'enseignement des fonctions et de la dérivée. La covariation constitue donc une piste intéressante à la mise en place d'un continuum entre les deux ordres, le secondaire et le collégial. Néanmoins, selon Passaro (*ibid.*), on peut faire une crit que aux manuels scolaires, en effet, la notion de covariation n'a pas une place privilégiée dans l'enseignement des fonctions à l'école secondaire dans les manuels scolaires.

1.4 Approche privilégiée pour l'apprentissage du calcul différentiel : traitement de l'obstacle

On peut dire que, d'une façon générale, les problèmes d'apprentissage du calcul sont fortement basés sur l'articulation entre les contenus mathématiques travaillés à l'école secondaire (comme l'arithmétique, l'algièbre, les fonctions, la trigonométrie, la géométrie et la géométrie analytique) et l'apprentissage de nouveaux contenus mathématiques, c'est-à-dire les contenus propres au calcul différentiel, comme les concepts d'infini (in fini potentiel et infini actuel), de limite mathématique, de tangente et de dérivée, ainsi que l'utilisation d'une nouvelle notation de symboles mathématiques comme ∞ , $+\infty$, $-\infty$, $0+\infty$, ∞ x ∞ , etc.. Ces nouveaux symboles, en effet, exigent de nouvelles images conceptuelles que l'apprenant doit incorporer dans ses connaissances pour comprendre les concepts reliés au calcul différentiel. De plus, il faut accorder une attention particulière aux problèmes d'apprentissage du calcul différentiel lorsqu'on travaille les situations problèmes qui impliquent l'appropriation de processus de modélisation mathématique.

Lorsque nous tratons avec les étudiants d'un concept mathématique précis, il est possible d'abserver une certaine lenteur ou même des troubles dans l'acquisition de ce concept. Sierpinska (1985) souligne deux catégories principales de causes qui sont :

- 1) des causes spécifiques liées au propre concept et à lui seul;
- 2) des prises de conscience préalables indispensables pour le développement du concept en question.

C'est l'ensemble de ces deux aspects que Sierpinska nomme *obstacle épistémologique* relatif à un concept mathématique.

Que les obstacles épistémologiques soient inévitables fait consensus parmi les chercheurs en didactique des mathématiques (Brousseau, 1956, 1983). Si l'apparition des obstacles épistémologiques est inévitable, il est donc inutile de les éviter. On se doit de buter sur l'obstacle épistémologique en prenant conscience de son existence, pour ensuite le franchir, ce qui permettra de progresser dans le savoir. Ainsi, comme le précise Brousseau (*ibid*.) en citant Bachelard (1938 : 56) :

C'est en termes d'obstacles qu'il faut poser le problème de la connaissance scientifique. Et il ne s'agit pas de considérer les obstacles externes, comme la complexité des phénomènes, ni d'incriminer la faiblesse des sens et de l'esprit humain : c'est dans l'acte même de connaitre, intiment, qu'apparaissent, par une sorte de nécessité fonctionnelle, des lenteurs et des troubles. C'est là que nous montrerons les causes de stagnation et même de régression, c'est là que nous décèlerons des causes d'inertie, que nous appellerons obstacles épistémologiques. (Bachelard 1938, p. 56)

D'après Brousseau (1976:101-117), les origines des obstacles en didactique des mathématiques se divisent en trois piliers, à savoir :

- 1) Les obstacles d'origine ontogénique qui sont provoqués par les limitations (neurophysiologiques, entre autres) qui empêchent l'apprentissage et font en sorte que l'apprenant ne développe pas la connaissance de façon adéquate;
- 2) Les obstacles d'origine didactique qui sont liés aux choix effectués, comme la conception d'un système d'enseignement ou des choix pédagogiques faits par l'enseignant, etc.;
- 3) Finalement, les obstacles d'origine épistémologique qui sont inhérents au savoir même. Nous observons ce type d'obstacles tout au long de l'histoire des mathématiques lorsqu'on constate les difficultés vécues par les mathématiciens par rapport à la

compréhension et à l'utilisation d'un concept mathématique. En d'autres termes, les obstacles épistémologiques font partie du processus d'appréhension de la connaissance scientifique. Il est inutile de les éviter. On ne doit pas les éviter, au contraire : il faut les surmonter (Brousseau, *ibid.*).

Dans les deux sections précédentes, nous avons souligné les problèmes que les mathématiciens ont rencontrés lors de la construction du concept de fonction et les problèmes cognitifs que les étudiants éprouvent. Ainsi, nous avons montré que la construction du concept de fonction chez les étudiants est difficile et qu'en fait, cette construction va se confironter à un obstacle épistémologique qui, selon le cadre théorique de Brousseau, est incontournable.

Comme l'explique Sierpinska (1985), les obstacles épistémologiques en didactique des mathématiques constituent un support au développement des connaissances. De même, elle ajoute que ces derniers ne sont pas un défaut, mais qu'ils sont plutôt la condition du développement du savoir. Pour illustrer ce fait, la chercheuse discute deux propositions qui sont souvent citées comme des erreurs communes :

(1) $(x + y)^2 = x^2 + y^2$. Dans ce cas, pour que cette égalité soit fausse, il faut que x et y soient différents de 0.

$$(2) 0,999 \dots < 1$$

Pour la première proposition, on peut montrer qu'il s'agit d'une erreur en montrant simplement un contrexemple, comme celui-ci :

$$(1+2)^2 = 3^2 = 9$$
, $1^2 + 2^2 = 5 \neq 9$

Par contre, cette analogie peut n'avoir aucun sens aux yeux d'une personne qui soutient qu'on ne peut faire avec des lettres \mathbf{x} et \mathbf{y} la même chose qu'on peut faire avec les nombres. En effet, l'expression $(x+y)^2$ est une simple inscription, une expression algébrique, et on ne peut pas faire autre chose que la transformer en une autre expression algébrique. Si $(x.y)^2 = x^2$. y^2 , pourquoi ne peut-on pas penser que $(x+y)^2 = x^2 + y^2$? (Cwik, 1984, cité par Sierpinska, 1998).

Pour la deuxième proposition, on peut déduire une contradiction en montrant que le nombre 0,999...9 est une somme finie : 0,9 + 0,09 + ···+ 0,000 ...09. Même si le nombre de termes ne peut pas être déterminé, le nombre 0,9999...9 n'est pas égal à 1, il est toujours plus petit. Par contre, on peut utiliser 1 comme son approximation, mais il faut remarquer que, dans ce cas, ce n'est qu'une convention, et non pas une vérité (Sierpinska, 1985).

Donc, pour chaque proposition ci-dessus, on a une justification cognitive. La première a été validée par une attitude formaliste, et la deuxième par une attitude « intuitive empiriste ». Sierpinska (*ibid.*) appelle ces justifications cognitives des obstacles épistémologiques, car elles concernent la connaissance scientifique.

En fait, pour la deuxième erreur, c'est plus subtil, car si l'on se situe dans l'analyse standard, l'on devrait opter pour une écriture comme $S_n = 0.9 + 0.09 + \cdots + 0.000 \dots 0.09$; et $0.999 \dots = \lim_{n \to \infty} S_n = 1$.

Ainsi, comme l'a signalé Sierpinska (1986), la deuxième « erreur » dépend d'où l'on se situe : dans l'analyse standard, cela peut être considéré comme erreur, mais pas dans l'analyse non standard. Les idées intuitives peuvent donc nous amener à une erreur dans un cas (analyse standard) ou à une bonne interprétation dans l'autre cas (analyse non standard).

Encore aujourd'hui, ces paradoxes provoquent des confusions dans la pensée humaine, comme on peut le lire chez Bachelard (1938 : 7), cité par Sierpinska (*ibid.*) : « Même chez l'homme nouveau, il reste des vestiges du vieil homme. En nous, le 18^e siècle continue sa vie sourde. »

Pourquoi l'infini actuel est-il apparu au 18^e siècle, quand l'infini potentiel a été nommé déjà dans les paradoxes de Zeno (V^e siècle av. J.-C.) ?

Du point de vue de Brousseau (1983), de Sierpinska (1985) et de Hitt (2004), l'infini actuel est devenu un obstacle épistémologique insurmontable pour les mathématiciens

du passé. Et, selon ces auteurs, il est possible que ces problèmes apparaissent dans les classes de mathématiques. Le problème se transforme donc ainsi : quel type d'activité faut-il faire en classe de mathématiques pour que les étudiants puissent surpasser l'obstacle épistémologique lié à la notion d'infini mathématique? Avant de donner une réponse, nous allons approfondir la problématique ici exposée dans les chapitres II et III.

1.5 Objectif général de la recherche

Ainsi, les étudiants rencontrent de nombreuses difficultés dans le cours de calcul différentiel qui apparaît comme un concept d'une grande complexité. Dans notre recherche, nous proposons d'élaborer une séquence d'enseignement qui comprend différentes activités qui visent à contrer les difficultés ressenties par les étudiants. La séquence d'enseignement sera construite en prenant en considération les travaux de Fermat que nous avons repris sous un angle intuitif.

Mais avant d'aller plus loin, un détour est nécessaire pour cerner le concept de dérivée qui est à la base du calcul différentiel, celui-ci mobilise les concepts de limite et d'infini.

CHAPITRE II

ANALYSE DE LA DÉRIVÉE À TRAVERS LES CONCEPTS D'INFINI ET DE LIMITE

L'infini est un sujet qui a troublé et trouble encore le cerveau humain. Dans plusieurs secteurs de la société, l'idée d'infini est présente, par exemple dans la religion, dans la philosophie, dans l'art, dans les sciences en général (telles la physique et la chimie), et dans les mathématiques aussi.

Mais, en fin de compte, qu'est-ce qu'est l'infini? D'un point de vue intuitif, nous pouvons associer l'infini à quelque chose qui est immense et, dans certains cas, inaccessible. Nous pouvons dire, par exemple, que Dieu est infini, que l'esprit est infini, que l'univers est infini, que le temps et l'espace sont infinis, etc. Mais dans les sciences, comment pouvons-nous définir l'infini? Ce concept est intéressant à creuser de façon historique car comme nous l'avons mentionné dans la problématique, il est central dans l'étude du calcul différentiel.

2.1 Analyse historique de l'infini en mathématique

Les étudiants ont des conceptions de l'infini reliées à son utilisation dans la vie courante. Ces conceptions apparaitront quand il s'agira d'en faire un traitement mathématique. Par exemple, dans les situations où on affirme qu'une droite a une infinité de points, ou que par un seul point dans le plan cartésien passe un nombre infini de droites, ou encore qu'entre le nombre 0 et le nombre 1 il y a une infinité de nombres. Également, le comptage des nombres entiers (1, 2, 3, 4, 5, etc.) un dilemme existe

parce que, dans cette séquence, il y a un début, mais pas de fin. C'est-à-dire qu'il n'est pas possible d'imaginer un nombre qui soit plus grand que tous les nombres.

Le conflit entre le côté intuitif et le côté scientifique du concept d'infini constitue un défi pour l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques. En effet, le concept d'infini a perturbé les mathématiciens et les philosophes de toutes les époques (Hitt, 2013). Dans les faits, c'est autour du VIIe siècle av. J.-C., les Grecs ont commencé à se pencher sur les questions de la place de l'Homme dans l'univers, ce qui a donné naissance au *logos*, la pensée logique (Boyer, 1996 : 50). La découverte de l'existence de grandeurs incommensurables marque la naissance de l'infini dans les mathématiques grecques. Notamment, si on cherche la mesure de la diagonale d'un carré dont la mesure du côté est 1, on trouve comme résultat $\sqrt{2}$, donc un nombre irrationnel, soit un résultat avec une infinité de chiffres après la virgule et qui n'a pas de période. Mais on ne peut pas l'écrire comme le quotient de deux nombres entiers, ce qui est le cas des nombres périodiques du type 0,666... ou 0,181818... Celta a beaucoup perturbé les mathématiciens de cette époque. Même avant, ces découvertes ont provoqué de grandes confusions chez les pythagoriciens. En effet, c'est grâce à ces derniers que les nombres du type $\sqrt{2}$ sont nés (Domingues, cité par Iezzi, 2009 : 62).

En fait, dans les travaux des pythagoriciens (569-500 av. J.-C.) la question de l'infini avait déjà été abordée (Boyer, 1996 : 50), mais c'est avec le travail de Zénon, comme nous le verrons plus loin, que la question de l'infini mathématique est devenue un problème majeur.

Les Grecs, en tentant de trouver une mesure commune pour toutes les grandeurs, on admit la divisibilité des infinis. Cep endant, cet æp ect de l'infini a provoqué chez eux une grande confusion Même en admettant l'idée d'infini, les Grecs ont donc toujours essayé de la contourner. Par ses paradoxes, Zénon (Ve siècle av. J.-C.) voulait mettre en garde les philosophes : ælon lui, les idées sur l'infini (actuellement nommé infini potentiel) étaient insuffisantes pour répondre à des questions comme celles proposées

dans ses paradoxes. Le paradoxe d'Achille et de la tortue, par exemple, montre bien ce type de pensée. Le problème imposé par Zénon est le suivant :

Achille dispute une course avec la tortue et, pour cela, il lui offre un avantage initial : lorsque la course commence, la tortue parcourt l'espace initial pendant qu'Achille reste immobile. Pendant qu'Achille parcourt cet espace initial, la tortue avance un peu plus. L'espace entre eux se réduit, mais la tortue conserve l'avantage. Ensuite, Achille parcourt la nouvelle distance qui les sépare et la tortue avance encore, et cela successivement. De cette façon, Achille ne rencontre jamais la tortue. Le paradoxe est en effet la difficulté de concevoir une quantité infinie d'espaces chaque fois plus petits, de même que l'impossibilité de concevoir intuitivement que la somme de cette mesure pourrait être finie. La variable temps est aussi immergée dans ce paradoxe.

En effet, ici, nous constatons qu'il y a une impasse gérée par la non-divisibilité de l'espace et du temps à l'infini. Zénon montre bien l'idée intuitive de l'infini potentiel dans un contexte, mais, pour résoudre le paradoxe, il est nécessaire de construire l'infini actuel (comme nous le verrons plus loin).

Pour avoir une idée plus précise, nous pouvons imaginer que Zénon court deux fois plus vite que la tortue. Nous allons prendre la distance qui les sépare comme une unité. Si nous mettons des marques, Achille est dans la position A et la tortue dans la position B. Quand la tortue est rendue en C, Achille est en B. Quand la tortue est rendue en D, Achille est en C, etc.



Si on interprète le problème avec l'infini potentiel (qui est plus proche de l'intuition), cela veut dire qu'Achille ne va jamais rattraper la tortue. La tortue sera toujours en avance.

Mais, d'un point de vue de l'infini actuel, la distance parcourue par Achille peut être interprétée par :

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n} \right) = 2$$

Attention, toutefois: la signification du signe d'égalité est complètement différent quand on est dans une situation d'addition d'un nombre fini d'éléments. Dans ce cas, nous pouvons dire que, pour une quantité infiniment petite, il existe un nombre N, tel que pour tout n > N, la distance entre Achille et 2 est plus petite que l'infiniment petit choisi.

À travers un autre paradoxe, Zénon nous amène à considérer la même situation : imaginez-vous qu'avant de parcourir un certain espace donné, on doit parcourir initialement la moitié de cet espace et, qu'ensuite, on doit encore parcourir la moitié de cette moitié, et cela successivement jusqu'à l'infini. En réalité, dans ce cas, Zénon essaye de comprendre la série suivante liée à un certain temps, mais sans préciser quel est le domaine de la convergence :

$$\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \cdots$$

Encore une fois, son paradoxe est lié à l'infini potentiel : si l'on fait une interprétation avec l'infini actuel, on sera dans une situation similaire à celle présentée plus haut.

Un autre célèbre paradoxe est celui de la flèche. Il provoque beaucoup de confusion chez les gens. Si on considère que l'espace et le temps sont composés de parties indivisibles, c'est-à-dire de « points » et d'instants, lorsque la flèche est lancée, à chaque instant, elle occupe un « point » dans l'espace, et est donc au repos. Alors, si ce fait se répète à chaque instant, le mouvement ne peut pas exister. La cible du paradoxe est la question de la vitesse instantanée. Quelle est la valeur qu'on devrait attribuer à ratio $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ de la distance parcourue Δx lorsque la quantité de temps Δt tend à zéro? Les mathématiciens de l'Antiquité ont attribué à cette ratio la valeur de zéro p ui:qu'ils étaient incapables d'imaginer une valeur minimum nor nulle.

De noi jours, nous savons que la limite de la ratio $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ est, en effet, la vitesse instantanée, alors que Δt tend vers zéro. Cependant, les mathématiciens de l'Antiquité ont eu de la difficulté à admettre la question de l'infini en mathématiques. C'est ainsi qu'Aristote a

mis de côté les paradoxes de Zénon et qu'il a admis qu'on ne pouvait admettre qu'un seul infini, soit l'infini potentiel.

Les paradoxes de Zénon sont d'une valeur inestimable pour la science puisqu'ils révèlent que le mouvement ne peut être compris comme une succession de stades particuliers et que le temps n'est pas une succession d'instants, mais qu'il est plutôt continu.

Plus tard, Archimède de Syracuse (287 av. J.-C.) et Eudoxe de Cnide ont développé l'idée de l'infini proposée par Zénon (Boyer, 1986).

Il y avait plus d'imagination dans la tête d'Archimède que dans la tête d'Homère.

Voltaire, cité par Boyer (1986 : 83)

Les deux ont travaillé sur les questions du calcul d'aires et de volumes. Par exemple, l'une des célèbres découvertes d'Archimède est la suivante :

Si on prend une sphère inscrite dans un cylindre circulaire droit dont la hauteur est égale au diamètre de la sphère, la raison entre le volume de la sphère et le volume du cylindre est équivalente à la raison entre leur aire respective, donc trois pour deux.

Une autre découverte importante d'Archimède est que l'aire de la sphère est égale à quatre fois l'aire du cercle maximum géré par cette sphère (Boyer, *ibid*.: 90). On voit ici que la contribution des mathématiciens grecs à l'histoire du calcul infinitésimal est centrée sur les problèmes posés par le traitement de l'infini. D'un point de vue technique, les mathématiques grecques ont principalement abordé l'intégration, avec les calculs d'aires. Notamment, il faut souligner que l'expression « calcul d'aires » est inappropriée parce que, en effet, les mathématiques grecques sont totalement basées sur deux mouvements (le rectiligne et le circulaire), avec pour seuls outils la règle et le compas. Pour les Grecs, évaluer une surface consiste à établir son équivalence avec un carré, la surface la plus simple. C'est de là que vient le nom « quadrature » pour désigner l'évaluation d'une aire (d'après le livre *Aux origines du calcul infinitésimal*, 1999 : 12).

Malheureusement, on ne trouve pas de traces d'utilisation symbolique directe des infiniment petits par les Grecs. On voit qu'ils ont quand même fait allusion à des quantités infiniment petites géométriquement, étant donné que les problèmes cités cidessus portent sur la divisibilité des grandeurs à l'infini et sur la possibilité d'envisager un raisonnement comportant un nombre infini d'étapes, ce qui revient à dire que les Grecs ont utilisé le concept de l'infini potentiel pour élaborer des méthodes afin de trouver des aires et des volumes. Pour ce faire, les Grecs ont fixé des règles très précises :

- 1) L'usage essentiellement des postulats et des axiomes, comme les Éléments d'Euclide, qui étaient fortement présents dans leurs travaux;
- 2) Un type de raisonnement permettant d'éviter des vérifications infinies, ce que nous appellerons le raisonnement par l'absurde.

Par exemple, les nombreux essais de quadrature du cercle ont conduit à des approximations de polygones qui s'approchent de plus en plus du disque. Les Grecs ont également développé leur technique de « quadratures » en appliquant cette technique aux surfaces plus complexes, ce qui a donné des quadratures dé finies à l'aide de courbes simples, cercles ou coniques. Les lunules d'Hippocrate sont un bon exemple d'application de cette technique.

Cette méthode de démonstration d'égalité entre deux surfaces consiste à faire deux démonstrations par l'absurde, ce qui permet d'éviter l'infini actuel. Pour ce faire, les Grecs ont utilisé des figures rectilignes aussi proches que possible de la surface traitée. En d'autres mots la première surface ne peut être plus grande que la deuxième, et vice versa.

La découverte de l'existence de grandeurs incommensurables marque la naissance de l'infini dans les nat hématiques grecques. Les Grecs, en tentant de trouver une mesure commune pour toutes les grandeurs, on admit la divisibilité des infinis. Nous pouvons interpréter des problèmes comme ceux portant sur la nature des nombres réels. Cette

contribution a été très importante pour la construction et l'évolution du calcul infinitésimal, même si Aristote, qui a marqué les mathématiques après les Grecs, a eu des réticences à ce sujet. En effet, pour les Grecs, le seul infini possible en mathématiques était l'infini potentiel.

D'un point de vue intuitif, nous pouvons affirmer qu'un ensemble est infini lorsqu'il n'est pas fini. La succession qui apparait dans l'ensemble des nombres naturels en est un exemple. Cette dernière, notamment, n'est pas limitée et, en conséquence, est infinie. En termes mathématiques, on peut dire que cette façon de traiter les quantités illimitées correspond à ce que nous appellerons l'infini potentiel. En d'autres mots, on peut dire qu'il s'agit d'un processus qui se répète pas à pas sans limites.

Cependant, l'idée de l'infini a continué à provoquer chez les Grecs une grande confusion, surtout la non-acceptation d'une autre possibilité que l'infini potentiel, soit l'autre type d'infini : l'infini actuel. Par exemple, l'axiome 8 d'Euclide (« Le tout est plus grand que la partie. ») fait appel à notre intuition et on pourrait penser qu'il est une certitude, mais, dans les mathématiques actuelles, avec la définition moderne d'infini cet axiome n'est pas vrai. Selon la nouvelle définition, et si nous prenons comme exemple les nombres naturels, on peut trouver une bijection entre les nombres naturels et leurs carrés, et ainsi conclure à l'infinité des nombres naturels et dire que les nombres naturels ont la même quantité de nombres que l'ensemble de leurs carrés. Le problème est que les paradoxes de Zénon, ou même le célèbre axiome 8 d'Euclide, ne peuvent être élucidés avec l'infini potentiel (Hitt, 2013). En somme, il est nécessaire d'avoir une autre structure mathématique pour répondre à toutes les questions citées.

Cependant, même en admettant l'idée d'infini, les Grecs ont toujours essayé de la contourner en mettant en évidence un type de raisonnement qui permet d'éviter l'infini, c'est-à-dire le raisonnement par l'absurde. Nous pouvons vérifier cette affirmation notamment à partir du traitement par les Grecs de la question de la tangente à un cercle. Que ce soit chez Euclide, Archimède ou Apollonius, la question de la tangente était entièrement topologique. Par exemple, Euclide (Éléments, livre III, définition 2) a

défini la tangente à un cercle comme une droite qui, rencontrant un cercle et prolongée, ne le coupe pas.

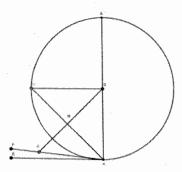
De plus, dans la proposition 16 des Éléments, Euclide énonce l'unicité de la tangente, ainsi que le fait que l'angle compris entre le cercle et la tangente est plus petit que tout angle rectiligne. En effet, la preuve de ces deux affirmations porte sur l'existence de la tangente en un point, puis la démonstration de son unicité. Les démonstrations faites par les Grecs sont généralement par l'absurde et restent limitées à quelques courbes simples, ce qui nous amène à conclure qu'il n'y a pas de traces de l'utilisation symbolique directe des infiniment petits chez les Grecs.

Proposition 16 des Éléments (extraits du livre III) :

La droite menée à angles droits avec le diamètre du cercle à partir d'une extrémité tombera à l'extérieur du cercle, et dans le lieu compris entre la droite et la circonférence, une autre droite ne sera pas intercalée; en outre, d'une part l'angle du demi-cercle est plus grand, d'autre part l'angle restant plus petit, que tout angle rectiligne aigu.

Voir la figure 1 pour une bonne compréhension de la proposition 16 d'Euclide :

Figure 1



Soit le cercle ABC autour du centre D et de diamètre AB. Je dis que la droite menée à angles droits avec AB à partir de l'extrémité A tombera à l'extérieur du cercle, Car sinon qu'elle tombe, si c'est possible, à l'intérieur comme CA et que DC soit jointe.

Puisque DA est égale à DC, l'angle sous DAC est aussi égal à l'angle sous ACD. Or celui sous DAC est droit; donc celui sous ACD est aussi droit. Alors dans le triangle ACD, deux angles, ceux sous DAC, ACD, sont égaux à deux droits. Ce qui est impossible. Donc la droite menée à angles droits avec AB à partir du point A ne tombera pas à l'intérieur du cercle.

Extrait du livre Aux origines du calcul infinitésimal, 1999, p. 66-67.

Les problèmes liés à l'infini ont persisté jusqu'au XVI^e siècle. Il faut souligner que cette période a été très importante pour le développement des mathématiques, étant donné que la géométrie analytique et les calculs différentiel et intégral sont nés à cette période (Boyer, 1996). À titre d'exemple, on peut citer quelques personnages importants de l'histoire des mathématiques qui ont travaillé sur l'infini et ont pourtant considéré les sommes infinies, comme Stevin (1546-1620), Kepler (1571-1630) et Galilée (1564-1642). Galilée, notamment, mérite une mention spéciale parce que c'est lui qui a ajouté de nouveaux éléments importants à la discussion sur la question de l'infini. Par exemple, Galilée a comparé deux ensembles infinis, l'ensemble des nombres naturels et l'ensemble de leurs carrés. Nous pouvons tout de suite constater que ces deux ensembles ont une correspondance biunivoque, c'est-à-dire que pour chaque élément de l'ensemble des nombres naturels N, il y a un et seulement un élément correspondant dans l'ensemble de leurs carrés M (c'est-à-dire $f(n) = n^2$, n naturel).

$$N = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots, n\}, n \in N;$$

$$M = \{1, 4, 9, 16, 25, \dots, n^2\}, n \in N.$$

À partir de ce constat, nous percevons que Galilée est arrivé à une situation contradictoire du point de vue intuitif et que, finalement, il a conclu que les attributs « égal », « plus grand » et « petit » n'ont pas leur place dans les quantités infinies, qu'ils n'y n'ont pas de sens (Hitt 2003). Hitt (*ibid*.) ajoute notamment que l'Église catholique, à travers ses théologiens comme Thomas d'Aquin, a également rejeté l'infini actuel. En effet, pour les théologiens, seul l'infini pourrait s'associer à Dieu. Peut-être que cette pensée a retardé l'adoption de l'infini actuel en mathématiques. Curieusement, celui qui a dissous ce rejet en mathématiques était un grand croyant, Georg Cantor (1845-1918) (Domingues, cité par Iezzi, 2009 : 62).

De même, Hitt (*ibid.*) mentionne que, depuis la philosophie éléatique (V^e siècle av. J.-C.), plusieurs tentatives ont été réalisées par les mathématiciens afin de comprendre le concept d'infini. L'humanité a toutefois dû attendre le travail de Kant (1'790) en philosophie puis celui de Bolzano (1817 et 1851) en mathématiques pour élucider la question de la continuité des fonctions et les paradoxes de l'infini.

Avec Kant (1790, T26), la discussion est passée au niveau supérieur. Kant, dans son ouvrage *Critique du jugement* argumente ainsi :

Mais l'esprit entend en lui-même la voix de la raison, qui, pour toutes les grandeurs données, même pour celles que l'appréhension ne peut jamais entièrement saisir, mais qu'on doit pourtant juger (dans la représentation sensible) comme entièrement données, exige la totalité, par conséquent la compréhension dans une intuition, et pour tous ces membres d'une série croissante de nombres l'exhibition, et qui même n'exclut pas l'infini (l'espace et le temps écculé) de cette exigence, mais nous oblige au contraire à le concevoir (dans le jugement de la raison commune) comme donné en entier (dans sa totalité)

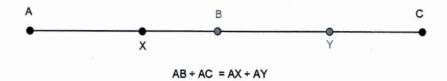
À ce propos, Kant ouvre la porte à une nouvelle façon de penser, un nouvel essai pour comprendre le problème de l'infini. En fait, il a changé l'approche intuitive sur l'infini : au lieu de penser à un processus pas à pas, on imagine que tout est là, que rien ne bouge.

Le travail de Bolzano nous a amenés à penser à cette possibilité en mathématiques : la possibilité de ne pas penser que la situation est contradictoire, mais de penser que, même si la situation semble contradictoire, elle peut servir pour définir des ensembles infinis. Pour élucider cette pensée, Bolzano (*ibid.*) nous a provoqué en affirmant :

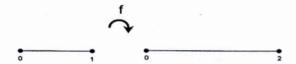
- (1) Deux ensembles peuvent être de telle sorte qu'il est possible que chacun des éléments de l'un d'eux soit associé à un élément d'un autre, il n'existe aucun objet dans l'un des deux ensembles dans cette relation plus d'une association d'un élément avec l'autre; et
- (2) que l'un de ces ensembles comprend l'autre comme une partie de lui-même, de sorte que les deux ensembles représentent des multiplicités et qu'ils peuvent être trouvés dans les rapports les plus variés les uns avec les autres lorsou' on considère tous les éléments comme des objets individuels interchangeables.

(Extraits des notes du cours Didactique du calcul différentiel et intégral, MAT 7191 été 2016).

Nous voyons que l'idée de proportionnalité est bien comprise dans la proposition de Bolzano :



Aujourd'hui, il est possible d'imaginer une infinité de possibilités d'avoir une correspondance entre deux ensembles de façon à satisfaire la proposition de Bolzano. Par exemple, deux ensembles peuvent être reliés à travers une correspondance biunivoque provoquée par une fonction du type f(x) = 2x:



L'interprétation qui a été faite au XX^e siècle des résultats de Bolzano sur l'ensemble infini est la suivante : un ensemble A est infini, s'il existe un sous-ensemble propre B de A, à savoir un sous-ensemble B contenu en A tel que $A \neq B$, tel qu'il existe une bijection $f: A \rightarrow B$ entre A et B.

La définition ci-dessus est l'interprétation de l'infini actuel qui est née au début du XX^e siècle.

Comme nous l'avons expliqué plus haut, nous pouvons considérer les ensembles des nombres entiers et leurs carrés $f(n) = n^2$, $n \in \mathbb{Z}$ comme une bijection.

Par la suite, le mathématicien russe Georg Cantor (1845-1918) a continué le travail sur la question de l'infini et a développé ce qu'il a appelé l'arithmétique des nombres

transfinis. Cantor a démontré avec une rigueur mathématique que la notion d'infini n'est pas une notion indifférenciée, c'est-à-dire que ce ne sont pas tous les ensembles infinis qui ont la même « taille », et pourtant qu'il est possible d'ordonner leurs « tailles ». Ainsi, l'ensemble des nombres irrationnels, par exemple, a la « taille plus grande » que la « taille » de l'ensemble des nombres rationnels. Ses résultats, toutefois, n'ont pas été acceptés facilement pour la communauté scientifique de l'époque. Il a reçu beaucoup de critiques de ses camarades mathématiciens de l'époque. Cependant, en 1872, il a publié, à l'âge de 27 ans, une solution beaucoup plus générale qui conten ait le germe de la théorie des nombres transfinis.

De même, Hitt conclut que le travail de Cantor (1883) sur la théorie des nombres transfinis ouvre la porte à (et même provoque) la création d'une nouvelle branche dans les mathématiques : les mathématiques intuitionnistes. Les mathématiques intuitionnistes ont comme départ une rupture avec les mathématiques liées à l'infini actuel, puisque, d'un point de vue formel, elles rejettent l'infini réel ou actuel. Les mathématiciens les plus importants de cette nouvelle approche des mathématiques sont Poincaré (1905) et Brouwer (1930). Les mathématiques intuitionnistes ont gagné plus de force à partir des années 1960 avec le développement de la technologie qui utilise dans les ordinateurs une seule procédure liée à l'infini potentiel.

2.2 L'infini réel ou actuel et l'infini potentiel dans la classe de mathématiques

L'infini est une expression très u ili sée pa les êtres humains, surtout pour désigner les quantités plus grandes ou quelque chose d'ill imité, ou encore dans un sens métaphorique. Ce type de notions est dit intuitif ou bien « modèle spontané » (Cornu, 1981). Le modèle spontané est strictement attaché à l'idée d'infini potentiel qui a été acceptée tout de suite parce qu'il est logique de penser qu'à chaque nombre on peut associer un autre nombre olt is grand qui vient après.

L'activité mathématique ne se réduit pas à des définitions, ni à démontrer des propositions selon les règles logiques. C'est donc dire que l'activité mathématique ne peut pas être mise en jeu uniquement par les mathématiques formelles, mais qu'il faut plutôt considérer que les notions mathématiques déclenchent des représentations mentales, des images, et que ces images vont jouer le rôle de faire bien fonctionner l'intuition mathématique. La prise en compte de cette représentation mentale permet aux apprenants de faire fonctionner la notion mathématique (Cornu, 1981).

L'étudiant a déjà une idée de la notion de limite, particulièrement, provenant de la vie courante, et cette notion a souvent des sens qui sont bien différents du sens mathématique, ce qui confirme Cornu (ibid.), qui appelle ces sens « modèles spontanés ». De même, le chercheur mentionne qu'il est inutile de penser que la définition mathématique va effacer toutes les conceptions antérieures de l'étudiant. Au contraire, la définition mathématique va produire des mélanges qui pourront euxmêmes produire de mauvaises conceptions par rapport à une définition. Donc, si nous ne réparons pas ces inadéquations, la compréhension qu'ont les étudiants de la notion peut rester éloignée fort longtemps du modèle mathématique. En plus, selon Cornu (ibid.), les étudiants peuvent créer des modèles propres qui sont engendrés par un mélange entre les modèles spontanés des étudiants et les modèles mathématiques, qui peuvent être inexacts sur le plan mathématique. Ces modèles peuvent fonctionner dans un champ d'exercices déterminé, mais ils ne sont pas suffisants dans toutes les situations. Par exemple, si l'étudiant est face à un problème inhabituel, il est possible que leur modèle propre ne fonctionne pas. Par contre, Cornu (ibid.) souligne que, parfois, les modèles propres ne sont pas totalement faux, ni totalement justes. Ils peuvent évoluer vers un modèle mathématique si on les corrige, si on repère les inadéquations au fur et à mesure qu'ils sont utilisés.

2.3 La notion de limite

Lorsqu'on réussit à étudier la limite, il y a déjà des significations importantes (le mot « limite » en tant que tel et l'expression « tend vers ») qui ne sont pas faciles à comprendre pour l'apprenant.

La recherche Cornu (*ibid.*) nous révèle que l'expression « tend vers » n'est pas une expression usuelle pour les étudiants, car ils ont du mal à trouver des exemples dans lesquels cette expression est présente. Cette expression est aussi rattachée à l'expression « avoir tendance à », ce qui peut ne pas contenir l'idée de variation effective.

Par rapport à l'expression « tend vers », Cornu (*ibid.*) a distingué quatre modèles présents dans la conception des étudiants, à savoir :

- *Modèle a : tend vers* = se rapproche de, dans le sens de s'approcher, mais peut rester éloigné quand même. Par exemple, si une grandeur varie de 1 à 7, on peut dire qu'elle tend vers 15.
- Modèle b : tend vers = se rapproche de, dans le sens d'arriver à quelque chose. Par exemple, si x augmente de 1 à 3, alors 1+x tend vers 4. Dans ce cas, dès qu'on arrive à la tendance, l'étudiant conclut que « ça ne tend plus ».
- Modèle c: tend vers = se rapproche de, dans le sens qu'on ne va jamais y arriver. Par exemple, 1/x tend vers 0 lorsque x tend vers l'infini.
 - Selon Cornu, les modèles a, b et c contiennent la notion de variation. Par contre, si on prend la fonction constante, ces modèles ne fonctionnent pas puisque la fonction constante ne va pas tendre vers quelque chose.
- Modèle d: tend vers = se rapproche de, dans le sens de réassemblage, dans le sens d'avoir tendance à quelque chose. Par exemple, 2,8 tend vers 3.
 - En revanche, le mot « limite », selon Cornu (*ibid.*), se trouve plus près du quotidien des étudiants, même si, la plupart des fois qu'ils utilisent le mot « limite », ce mot est plutôt associé à quelque chose de fixe, immobile, statique ; par exemple, « limite » dans le sens de ne pas dépasser (limite géographique). Cependant, lorsque le mot « limite » est

associé au sens moral, comme dans l'expression « j'ai étudié mes limites psychologiques », on remarque qu'apparait une difficulté à surpasser, mais que la notion de se « rapprocher indéfiniment » est présente.

Dans tous les modèles ci-dessus, on voit que parfois la limite est attachée à l'idée de séparer deux choses. Par contre, pour la plupart des apprenants, la limite est la fin en soi, il n'y a pas rien d'autre après. Cornu (*ibid.*) souligne que les principaux modèles qui intègrent cette fin en soi sont les suivants :

- *Modèle* α : la limite est infranchissable;
- Modèle β : la limite est infranchissable au niveau de deux bornes, inférieure et supérieure;
- Modèle γ : la limite peut être atteinte;
- *Modèle* δ : la limite est impossible à atteindre.

Autant dire que la prédominance du caractère infranchissable dans ces modèles entraine des conséquences dans le savoir mathématique, puisqu'on observe que la notion de limite n'est pas associée à l'idée de variation, de mouvement.

Dans sa recherche, Cornu (*ibid.*) a conclu que non seulement les étudiants de secondaire, mais aussi les étudiants très avancés, préfèrent utiliser leurs propres modèles, extrêmement marqués par leur conception initiale.

2.4 Le concept de limite dans l'histoire des mathématiques

Cornu (*ibid*.) nous révèle que la notion précise de limite que nous connaissons aujourd'hui a pris beaucoup de temps à être conçue. Ainsi, les mathématiciens, encore au XIX^e siècle, ont utilisé le mot « limite » pour désigner les bornes d'un intervalle, et ils avaient du mal à déterminer si la limite pouvait être atteinte ou non. Toutes les questions ci-dessus sont au cœur de la construction de l'analyse mathématique, en particulier du calcul différentiel, au XVIII^e siècle.

Cournu (*ibid.*) souligne que les difficultés chez les mathématiciens du passé sont les mêmes qu'on trouve chez nos étudiants, et c'est pour cette raison qu'il n'est pas intéressant d'effacer les mauvaises interprétations du passé. L'évolution historique de la limite nous permet de situer les vraies difficultés.

Dans sa recherche, Cornu (*ibid.*) nous révèle que la définition mathématique formelle de la limite ne suffit pas à régler tous les obstacles de l'apprentissage de cette dernière. Pour arriver à la bonne compréhension du concept de la limite, on devrait examiner en détail toutes les façons dont on l'utilise dans toutes les branches des mathématiques. Ainsi, il faut considérer le calcul de la limite, les démonstrations du passage vers la limite, les résultats qui peuvent être des approximations, etc.

Enfin, Cornu (*ibid.*) ajoute que les obstacles épistémologiques par rapport à la limite ont plus des conséquences positives que négatives puisque les efforts pour les surmonter nous amènent à développer l'analyse mathématique : ils sont responsables de l'évolution du calcul.

Selon Cornu (*ibid.*), les principaux obstacles épistémologiques liés à l'apprentissage sont :

- 1) La transposition numérique : la difficulté d'abstraire du contexte géométrique la cinématique;
- 2) L'aspect métaphysique de la notion de la limite : le concept de la limite est apparu à partir des questions de la philosop hie et de la métaphysique, et non des mathématiques classiques;
- 3) La notion d'infiniment petit ou d'infiniment grand : la difficulté à imaginer une quantité infiniment petite qui n'est pas le zéro;
- 4) La question à savoir si la limite est atteinte ou non : si la limite a été (ib lée, ce n'est donc pas une limite;
- 5) Le problème des quantités qui tendent vers zéro : la difficulté à imaginer qu'une somme infinie peut être finie.

Cette présentation de Cornu nous donne plus de précisions sur les problèmes que les étudiants doivent surpasser pour franchir l'obstacle cognitif (épistémologique) li é au concept de la limite. Selon Cornu, cela nous montre pourquoi l'approche de Finney,

Thomas, Demana et Waits (1994) n'était pas suffisante pour résoudre le problème d'apprentissage.

2.5 Sierpinska et son approche aux problèmes d'apprentissage du concept d'infini mathématique

Sierpinska (1985), nous montre l'importance de la signification en mathématiques, c'est-à-dire qu'il faut se pencher sur les genres des choses, comme les genres de concepts primitifs et les genres de catégories universelles de la pensée (par exemple, l'espace et l'infini). Des réponses différentes à ces questions produisent des philosophies différentes. Il faut donc se demander : à quoi bon manipuler des symboles sans signification? Est-ce que l'analogie est un argument valide dans une théorie formelle? Est-ce que la non-acceptation de l'infini mathématique peut compliquer davantage l'apprentissage de cette dernière?

Enfin, comment peut-on franchir un obstacle épistémologique? Franchir un obstacle épistémologique n'est pas une chose évidente, car ce dernier est fortement lié à la croyance qu'on détient un certain savoir, une vérité, comme si on vivait dans un monde clos, explique Sierpinska (*ibid.*). Effectivement, il faut sortir de ce monde et voir d'autres mondes possibles dans lesquels les mots et symboles changent de signification. Par contre, ces nouvelles significations devraient être explicitées et, pour cela, il n'est pas nécessaire de convertir l'étudiant à une nouvelle philosophie. Un accord est possible.

Par exemple, soit le concept de limite est acceptable par toutes les philosophies, soit ce n'est pas le cas, alors pourquoi donc réveiller les étudiants au sein de la classe? Donner la définition n'est-il pas suffisant? Pourquoi « perdre du temps » avec des discussions qui pourraient compliquer encore plus cet apprentissage? Selon Sierpinska (*ibid.*), ce n'est pas une « perte de temps », car nous voulons que la limite soit un concept

significatif pour nos étudiants. Si on banalise ce concept en partant seulement de la définition de Weierstrass, sans réelle signification de la part des élèves, alors on peut en arriver à des erreurs comme celle ci-dessous, où on voit clairement que la personne ne maitrise pas le concept de limite, car elle traite le mot « lim » comme une variable que l'on peut simplifier :

$$\lim \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{\lim \frac{1}{n}}{\lim \frac{1}{n^2}} = \frac{1}{n} \frac{n^2}{1} = n$$

De plus, Sierpinska (*ibid.*) clarifie qu'il est important de poser aux étudiants des questions qui suscitent une discussion afin de les amener à une bonne compréhension des concepts tels que « limite » et « infini ». Dans son travail, on trouve, par exemple, des questions posées aux étudiants qui font un appel à l'infini potentiel plutôt qu'à l'infini actuel :

- 1) Calcule 0,26.... fois 2.
- 2) Les égalités suivantes sont-elles vraies?
- a) 0.666... = 0.7
- b) 0,222...=0,3
- 0.999...=1
- 3) Le nombre 0,999... est une somme infinie : 0.9 + 0.09 + 0.009 + ... Cela peut s'écrire sous la forme : $9 \cdot (10^{-1} + 10^{-2} + 10^{-3} + ...)$, les termes $10^{-1} + 10^{-2} + 10^{-3} + ...$, étant les termes d'une suite géométrique infinie à quotient ou raison 10^{-1} .

4) La somme infinie $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\frac{1}{16}-\frac{1}{32}+...$, termes d'une suite infinie géométrique à quotient -1/2, définit-elle aussi un nombre? Si oui, quel est ce nombre?

Avec les questions 1 et 2, par exemple, on peut bien travailler le concept de l'infini et le rôle des approximations, de même que les significations des termes « nombre rationnel » et « nombre irrationnel », ou immensurable, si on prend la traduction littérale du mot « irrationnel » du polonais (Sierpinska, *ibid.*). Avec la question 3, on peut travailler l'idée de convergence et le concept de limite.

Cependant, poser des questions de ce type, qui suscitent des discussions très échauffées, comme c'est le cas de l'infini, peut nous amener à des difficultés du type « Comment gérer le comportement des étudiants ? », mais les éviter est-il efficace du point de vue de l'apprentissage? En effet, l'enseignant devrait être prévenu et bien formé par rapport aux questions à poser afin de promouvoir une bonne construction du concept envisagé, ici la limite ou l'infini.

Les recherches liées aux obstacles épistémologiques montrent entre autres que le savoir des étudiants devrait être respecté et traité sérieusement puisqu'on peut profiter de ces savoirs pour amener les étudiants à la bonne compréhension du concept mathématique étudié. Il faut être conscients que, dans l'enseignement des mathématiques, les représentations mentales des notions mathématiques des étudiants méritent d'être étudiées, ce que nous confirment Davis et Winner (1986).

Dans sa recherche, Sierpinska (1985) a identifié une liste des obstacles importants, à savoir :

- 1) L'horreur de l'infini;
- 2) Les obstacles épistémologiques liés à la conception de fonction;
- 3) Les obstacles géométriques;

- 4) Les obstacles logiques;
- 5) L'obstacle lié au symbole mathématique de la limite.

Selon Sierpinska (*ibid.*), le premier obstacle, l'horreur de l'infini, correspond au refus de regarder l'infini comme un tout, c'est-à-dire, le refus d'effectuer une opération mathématique avec lui. D'après la chercheuse, le passage vers la limite exige un processus de démonstration rigoureux. Pour Sierpinska, faire le passage vers la limite en considérant seulement des approximations afin de justifier un résultat permet uniquement une vérification à travers un calcul, tout simplement. Par rapport à l'exemple du manuel cité dans la section 2.4 exemple 4 plus haut, nous voyons bien que le signe d'égalité n'est pas explicité, ce qui correspond bien au premier obstacle épistémologique cité par la chercheuse.

2.6 Erwynck et les problèmes d'apprentissage du concept d'infini mathématique au niveau universitaire

Tous ces problèmes que l'on trouve chez les étudiants vont avoir une répercussion dans leurs études universitaires. Erwynck (1981) signale plusieurs problèmes. Dans le déroulement usuel d'un cours sur la théorie des fonctions d'une variable réelle, la notion fondamentale travaillée est celle de limite. De même, Erwynck (*ibid.*) clarifie que le but initial et fondamental du cours est d'étudier le comportement d'une fonction dans le sens de voisinage autour d'un point x_0 . Le chercheur affirme que, généralement, les étudiants n'ont pas de difficultés à admettre cette approch e, surtout dans un premier temps lorsqu'on travalle plutôt le notion intuitive de limite. Pour llustrer cela, le chercheur affirme que quelques exemples intéressants, comme les suivants, sont suffisants :

$$f(x) = \frac{1}{x}$$
, $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, $f(x) = \sin(\frac{1}{x})$, etc.., $(x_0 = 0)$

Le chercheur souligne notamment que le but du cours de limite est d'arriver à une compréhension complète de la définition de limite, ainsi :

$$\lim_{x \to x_0} f = L \quad \text{si et seulement si } \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tel que}, \ \forall \ x \in Dom \ (f),$$

$$si \ 0 < |x - x_0| < \delta_{\varepsilon}, alors |f(x) - L| < \varepsilon$$

Le chercheur confirme également que, d'un point de vue verbal, la compréhension de la limite chez les étudiants n'est pas difficile. C'est-à-dire que, lorsqu'on dit « $si \ x \ est$ proche de x_0 , alors f(x) est proche de la limite L », les étudiants sont capables de comprendre le sens de la limite. En contrepartie, l'auteur affirme que, lors d'une écriture en termes mathématiques, les étudiants ont de la difficulté à comprendre de façon plus approfondie le concept de limite. Par exemple, l'auteur souligne quelques difficultés liées à l'écriture de la limite, ainsi :

- Le sens de « x s'approche a x_0 »;
- L'interconnexion du rôle de ε et de δ ;
- Le rôle et l'ordre des quantificateurs ∀ et ∃;
- Le cas insignifiant quand x=a et la valeur f(a);
- Le fait que x_0 doit être un point de convergence dans le domaine de la fonction.

Par contre, le chercheur remarque que, si la représentation graphique est bien faite, c'est-à-dire si l'enseignant est capable de représenter la fonction totalement, avec toutes ses particularités, l'étudiant peut surpasser la difficulté inhérente au passage de l'image conceptuelle vers la définition formelle. Mais, de même, l'auteur précise que, si une représentation graphique est manquante, alors les difficultés reviennent encore une fois. L'article du chercheur cible une population constituée d'un groupe de 52 étudiants de 18 ans qui ont choisi une spécialisation en mathématiques ou en physique, c'est-à-dire qu'il était attendu que ces étudiants soient bien disposés envers le sujet. De

plus, il faut remarquer que ces étudiants sont classés comme de bons étudiants en mathématiques à l'école secondaire.

Le chercheur confirme, par expérimentation, que près de 50% des étudiants n'ont pas été capables de donner un commentaire sur l'absence de limite suivante : $\lim_{x\to 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.

De plus, quelques étudiants n'ont pas été capables de bien décrire le comportement de cette fonction. Le chercheur explique que cette difficulté vient du fait que les étudiants ne reconnaissent pas la nature commune de la limite d'une fonction, de la limite c'une suite et de celle d'une série.

Pour l'auteur, l'utilisation de graphiques est donc cruciale, non seulement pour arriver à une bonne compréhension du concept mathématique de la limite, mais aussi pour arriver à l'identification d'une fonction par sa formule. De même, il affirme que la conversion entre la formule mathématique et la courbe d'une fonction est un pas très important vers l'abstraction.

En effet, le chercheur souligne que, si la fonction est bien « travaillée », la machinerie complète des théorèmes et règles, comme la règle de l'Hôpital, rend le calcul de la limite beaucoup plus facile.

2.7 La philosophie des mathématiques et le développement du calcul différentiel

Ainsi, dans notre recherche, nous nous appuyons sur le processus de construction et de développement du calcul différentiel en portant une attention à l'histoire des mathématiques et à l'histoire de la philosophie des mathématiques. En effet, le calcul différentiel et l'histoire de la philosophie des mathématiques ont une relation rapprochée (Meneghetti, 2001).

Dans l'Antiquité avec Platon au XVIII^e siècle, nous constatons que, dans l'histoire de la philosophie des mathématiques, il y a deux courants de pensée manifestement opposés : le rationalisme et l'empirisme. Pour toute cette période, sauf avec Kant, ces deux courants de la philosophie se sont positionnés comme contraires et s'excluant l'un l'autre. D'après les rationalistes, la raison est ce qui est important, tandis que, pour les empiristes, l'expérience et l'intuition forment les bases de la connaissance. Nous parlons ici des deux genres d'intuition : l'intuition sensible que nous acquérons à travers l'expérience et l'intuition intellectuelle qui est indépendante de l'expérience.

Par contre, même si ces deux positionnements philosophiques sont manifestement contradictoires, le calcul différentiel et intégral a été développé grâce aux contributions des deux, car tant l'intuition que la raison ont joué un rôle très important au développement du calcul différentiel. Cela nous amène à défendre que, dans le processus de construction du savoir mathématique, l'équilibre entre la raison, la logique, l'intuition et l'empirique (l'empirisme) doivent être considérés.

Pour élucider tout cela, faisons un bref retour à l'histoire des mathématiques. Ainsi, nous avons précisé que, parmi les créateurs du calcul, il y a d'un côté Platon, Fermat, Barrow, Locke, Newton et Wallis, et de l'autre côté, tout aussi importants, Descartes et Leibnitz. Par exemple, pour Platon (427-347 av. J.-C.) seules les idées sont vraies : tout ce qui est aperçu seulement par le moyen des sens est faux, et les sciences doivent s'occuper de qui est réel (en d'autres mots : les idées, l'intuition). Le philosophe anglais John Locke (1621-1704) a également établi que toutes nos idées sont dérivées ou de la « sensation » (l'expérience extérieure), ou de la « réflexion » (l'expérience intérieure).

En revanche, de l'autre côté, Descartes, Berkeley et Leibnitz étaient fortement contraires aux empiristes. Pour eux, la raison était la seule forme de pensée capable de concevoir le savoir scientifique. Ainsi, pour Leibnitz (1646-1716), la certitude de la connaissance scientifique ne peut pas être native de l'expérience, mais elle repose seulement sur la raison (Meneghetti, *ibid*).

Il est intéressant de rappeler quelques curiosités qui révèlent qu'un bon équilibre entre la raison et l'intuition est la clé pour arriver à comprendre le concept de calcul. Par exemple, John Wallis (1616-1703), qui était visiblement empiriste, est le mathématicien qui est arrivé le plus proche de la définition actuelle de la limite. Un autre exemple classique est le cas de Fermat (empiriste) et de Descartes (rationaliste) qui, à un moment, se sont critiqués l'un l'autre en raison de leurs positionnements philosophiques. Finalement, nous arrivons au cas le plus connu : le fameux débat sur la paternité du calcul différentiel et intégral entre Newton et Leibnitz qui a duré plus de dix ans, soit jusqu'à la fin de leur vie (Bardi, 2006).

Newton (visiblement empiriste), pendant ses années créatives de 1665 et 1666, a découvert le calcul. Chronologiquement, il a été le premier à découvrir le calcul. Par contre, il a attendu 19 ans pour finalement publier sa découverte. Tandis que Leibnitz, dont la démonstration avait beaucoup de force, a publié sa découverte en 1680, soit cinq ans avant Newton. Il est établi que Leibnitz a pris connaissance des premiers résultats de Newton, car ils ont échangé des lettres au fil des années par l'intermédiaire du père Marin Mersenne (1588-1648). Leibnitz a eu accès aux premiers brouillons du premier livre de calcul de Newton (Boyer, 1996 : 236). Toutefois, aujourd'hui, il y a un consensus parmi les historiens des mathématiques comme quoi ces deux personnages ont découvert le calcul différentiel et intégral parallèlement (Bardi, ibid. : 266.). Ce qui est intéressant ici, c'est le fait que ces deux génies de l'humanité qui appartenaient à deux côtés philosophiques opposés ont contribué au développement de cette très belle discipline qu'est le calcul. Par contre, séparément, leurs contributions à la paternité du calcul se sont révélées insuffisantes étaint donné qu'il y avait des concepts dans les deux méthodes impliquées qui n'étaien pas totalement clarifiés. En effet, c'est justemen l'union des deux méthodes qui a contribué au développement du calcul, à postériori.

Par rapport au débat entre Newton et Leibnitz, nous pouvons donc penser que c'est peut-être leur positionnement philosophique qui a délivé en autant de critiques l'un envers l'autre. Ceci est un mystère vraiment difficile à élucider. Le calcul est

suffisamment grand, il devait être suffisant pour les deux, a une fois dit Pierre Varignon (1654-1722) (Bardi, *ibid*: 268)

Bref, de la critique de ces deux courants philosophiques est né l'idéalisme transcendantal de Emmanuel Kant (1724-1804), qui défendait que le savoir scientifique ne peut être conçu seulement par les juges de l'empirisme, car, si c'était vrai, le savoir scientifique serait vague. Il ne peut pas non plus être conçu seulement par les juges du rationalisme, car, dans ce cas, le savoir ne serait pas de la science, mais bien une habitude, un costume sans fondement, puisqu'il n'aurait pas la validité nécessaire et universelle (Meneghetti, 2001).

Nous voyons que, pour Kant, le savoir part de l'expérience. Néanmoins, il doit être indépendant d'elle, car les sciences doivent être universelles et nécessaires. Ce qui nous importe, ici, c'est que, d'une certaine façon, dans la philosophie de Kant, il y a un constat autour du fait que l'empirisme et le rationalisme, des courants indépendants et contraires, sont insuffisants pour donner les fondements du savoir mathématique. Cela nous amène à considérer que les aspects intuitifs, logiques et le formalisme liés à la notion de limite devraient être traités conjointement pour permettre une bonne compréhension globale du calcul.

Dans la littérature, nous voyons qu'il n'y a pas un consensus en ce qui concerne la conception de ce que serait un premier cours de calcul (Reis, 2001). Reis, par exemple, a constaté qu'il y a un déséquilibre entre l'intuition et la raison dans l'enseignement du calcul et de l'analyse. La négation de l'intuition au détriment de la raison a troublé et trouble encore nos étudiants. Mettre l'accent sur l'apprentissage par cœur, en valorisant seulement la mémorisation de techniques de calcul, ne sert strictement à rien dans le sens d'un apprentissage conceptuel effectif.

Pour terminer, nous sommes d'accord que l'équilibre entre la rigueur et l'intuition devrait être respecté. Ces deux pôles devraient être examinés conjointement : ils sont en effet complémentaires dans le sens de la formation de la pensée et de la

connaissance. La virtuosité s'est trouvée sur le milieu ou comme cela se dit en latin, in medio stat virtus.

2.8 Objectifs spécifiques de la recherche

Nous avons présenté dans le chapitre précédent une problématique générale liée aux problèmes d'apprentissage du calcul différentiel et nous avons parlé de notre objectif général de recherche (section 1.5) qui est lié aux problèmes d'apprentissage du calcul différentiel. Dans le chapitre II, nous avons montré une variable didactique essentielle dans l'enseignement des mathématiques liée au rôle de l'histoire des mathématiques et en particulier sur une partie centrée sur le calcul différentiel.

Notre objectif spécifique de recherche est :

a) Faire une analyse de différentes variables didactiques (analyse de l'histoire du calcul différentiel, analyse de manuels) pour l'élaboration d'une séquence de situations d'enseignement.

2.9 Approche générale méthodologique pour atteindre l'objectif fixé

Pour que l'apprentissage du calcul différentiel promeuve l'équilibre entre la rigueur et l'intuition, nous croyons que l'analyse des travaux de Fermat est importante, car ces découvertes nous amiènent à l'essence du concept de les dérivée. De plus, l'analyse des manuels scolaires et des plans de cours est également important état donné que cela nous permette de voir comment les manuels du passé et du présent traitent les approches intuitives et la rigueur. Ce qui nous verra dans le prochain chapitre.

Ainsi, pour arriver à notre objectif spécifique, er plus de ce que nous avons énoncé dans le paragraphe précédent, nous allons prendre en considération les problèmes d'articulation entre représentations, les problèmes liés à la visualisation mathématique, les problèmes liés aux processus de modélisation mathématique et, finalement, les problèmes pour intégrer la technologie dans la résolution de problèmes d'application du calcul différentiel.

Ces différentes variables que nous venons de spécifier vont être analysées d'un point de vue cognitif lié au développement des idées mathématiques dans l'histoire et d'un point de vue cognitif lié aux problèmes d'apprentissage dans les classes de mathématiques. Cela va nous permettre la construction des situations énoncées dans l'objectif spécifique.

CHAPITRE III

APPUIS THÉORIQUES POUR LA CONSTRUCTION D'UNE SÉQUENCE D'ENSEIGNEMENT AUTOUR DU CALCUL DIFFÉRENTIEL

Dans le chapitre I, nous avons mis de l'avant l'importance des registres de représentations dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques. Dans ce chapitre, nous allons nous attarder plus en profondeur sur ce concept qui est un concept porteur dans la conception de notre séquence d'enseignement. Par ailleurs, nous misons sur une approche basée sur la modélisation mathématique dans la séquence d'enseignement que nous avons construite.

Comme nous avons explicité dans la problématique au chapitre 1 il est connu que les étudiants rencontrent de nombreuses difficultés dans le cours de calcul différentiel qui apparaît comme un concept d'une grande complexité. En conséquence, dans le présent chapitre, nous élaborons une séquence d'enseignement qui comprend différentes activités qui visent à contrer les difficultés ressenties par les étudiants. La séquence d'enseignement sera construite en prenant en considération les travaux de Fermat que nous avons repris sous un angle intuitif. Ensuite, nous allons proposer une séquence d'activités qui sont en effet des situations problèmes dans lesquelles la modélisation mathématique sera requise.

Mais avant d'aller plus loin, un détour est nécessair e pour cerner le concept de dérivée qui est à la base du calcul différentiel, celui-ci mobilise les concepts de limite et d'infini.

3.1 Le rôle des représentations dans l'apprentissage des mathématiques

Dans sa recherche, Hitt (2006) révèle que les représentations mentales sont des objets d'investigation en didactique des mathématiques depuis les années 1960. Par exemple, Hitt (*ibid*.) cite quelques chercheurs comme Guilford (1967) qui, dans son livre « The Nature of Human Intelligence », a détecté, en général, 120 capacités chez l'homme. Guilford, ainsi, a montré l'importance de développer ses capacités de façon intégrées. que lui permettent d'isoler et de trouver des corrélations. Selon Hitt, (Ibid.), du côté des mathématiques, Krutetskii (1976) va mettre l'accent sur les capacités mentales, ou processus mentaux, qui sont pris en compte en résolution de problèmes mathématiques, tels que « l'inspiration » ou l'« *insight* », qu'on peut aussi appeler perspicacité (notre traduction). Finalement, dans les années 1980, une nouvelle approche de l'enseignement des mathématiques fait son apparition : la définition de l'image d'un concept. Dans cette période, Hitt (*ibid.*) rapporte les travaux de Tall et Vinner (1981), de Vinner (1983, 1994) et de Tall (1991), qui donnent certaines précisions permettant de clarifier les représentations mentales chez les étudiants. Par exemple, Tall (*1991*. : 7) présente la définition de l'image d'un concept :

We shall use the term concept image to describe the total cognitive structure that is associated with the concepts, which includes all the mental pictures and associated properties and processes. It is built up over the years through experiences of all kinds, changing as the individual meets new stimuli and matures (p. 7)

Tall (*ibid.*) a essentiellement essayé de comprendre les structures cognitives qui sont prises en compte chez l'apprenant, soit les images mentales et les processus qui y sont associés. Selon Tall (*ibid.*), au fur et à mesure que les nouveaux stimuli sont mis en place et murissent, des structures cognitives sont construites. En fait, les nouveaux stimuli (nouvelles expériences) fournissent des éléments pour la construction des structures cognitives chez l'apprenant.

Hitt (2006) souligne que l'approche de Tall est basée sur ce que les étudiants pensent sur un concept et s'appuie sur une idée générale des problèmes que les étudiants

pourraient rencontrer dans la construction d'objets mathématiques. Cette approche semble toutefois trop large et ne fournit pas suffisamment d'informations sur la construction de concepts. En fait, nous avons deux façons d'analyser la construction des concepts. L'approche appelée « top down » qui consiste à analyser « l'image conceptuelle » construite par l'élève et à regarder comment les représentations sémiotiques ont pu agir sur cette construction. Avec le développement des théories locales sur la construction des concepts à partir des représentations sémiotiques et le rôle indispensable des tâches de conversion, une approche « bottom up » dans la construction des concepts mathématiques se voit promue.

3.2 De la représentation dans la pensée de l'élève (image conceptuelle) approche « top down » versus la construction à partir de représentations sémiotiques sur papier (activités sur la conversion de représentations) (approche « bottom up »).

Pendant les années 1990, une avancée a permis de clarifier plusieurs questions autour des représentations sémiotiques, plusieurs chercheurs ont ainsi mis l'accent sur les processus psychologiques et l'enseignement des mathématiques. Dans cette période, Hitt (*ibid.*) souligne l'importance des travaux de Brousseau (1983, p :165-168) qui, sur les concepts et les obstacles épistémologiques, a écrit :

- a) Un obstacle est une connaissance, l'obstacle est une sorte de difficulté provoquée généralement par un manque de connaissances.
- b) Cette connaissance produit des réponses appropriées au sein d'un contexte particulier, souvent vécu.
- c) Mais il pœut générer de fausses réponses en dehors de ce contexte. Une réponse correcte, universelle, nécessite un point de vue sensiblement différent.
- d) Enfin, ce savoir (concept) résiste aux deux contradictions occasionnelles entre l'ancien concept et le nouveau concept. La possession d'un meilleur savoir n'est pas suffisante pour que le savoir précédent disparaisse. Cette résistance distingue les processus d'accommodation pour surmonter les obstæles dans le

sens de Piaget. Il est donc essentiel d'identifier et d'intégrer ces rejets dans le nouveau morceau de connaissance que l'apprenant acquiert.

e) Après que son inexactitude a été reconnue, elle continue à apparaître d'une manière intempestive, persistante.

Selon Hitt (2006), la promotion d'activités spécifiques qui amènent les étudiants dans des situations contradictoires en leur donnant l'occasion de s'en sortir va favoriser l'apprentissage d'un nouveau concept mathématique. La question est : comment les obstacles épistémologiques apparaissent-ils chez les apprenants? Pour Brousseau (1997), une piste de réponse consiste à analyser la manière dont ces obstacles sont apparus dans l'Antiquité à travers une analyse du développement des idées mathématiques dans l'Histoire. Dans ce processus d'analyse, il est important de déceler les conceptions des étudiants. C'est ainsi que Hitt (ibid.) cible l'approche de Balacheff et Gaudin (2002) qui, par rapport aux conceptions, ont affirmé ceci :

Nous appelons conception C un quadruplet (P, R, L, Σ) dans lequel :

- − P est un ensemble de problèmes;
- R est un ensemble d'opérateurs;
- − L est un système de représentation;
- $-\Sigma$ est une structure de contrôle.

Selon Hitt (*ibid.*), P (ensemble de problèmes) sont les tâches qui vont promouvoir la construction du concept mathématique et, pour cela, il y a deux approches intéressantes à considérer : l'approche de Vergnaud (1991) qui suggère l'élaboration de toute une sorte de problèmes afin de circonscrire le maximum d'outils de façon à surmonter l'obstacle épistémologue existant, et l'approche Brousseau (1997) qui suggère la considération d'un ensemble fini de problèmes avec l'idée que d'autres problèmes découleront d'eux.

L'ensemble R des opérateurs est plus classique. Les opérateurs sont des moyens de promouvoir l'évolution de la relation entre le sujet et le milieu. Ils sont les outils pour l'action des apprenants.

Le système de représentation L consiste en un répertoire d'ensembles structuré de signifiants, de nature linguistique ou non, utilisé à l'interface entre le sujet et le milieu pour soutenir l'action et la rétroaction, les opérations et les décisions. Comme exemples des systèmes de représentation, Hitt (*ibid.*) cite le langage algébrique, le langage géométrique, le dessin, le langage naturel, les interfaces de logiciels mathématiques et les calculatrices.

Finalement, la structure de contrôle Σ est constituée de tous les moyens nécessaires pour faire des choix, prendre des décisions et exprimer son jugement (Saboya, 2010).

Dans notre travail, nous allons nous concentrer plus particulièrement sur la position pragmatique dérivant vers la description de P, c'est-à-dire sur l'élaboration de situations permettant de dépasser les conceptions des étudiants qui posent des obstacles pour la construction d'un concept mathématique, dans notre cas le concept de dérivée.

Au cours des années 1990, une nouvelle approche liée au rôle des représentations dans l'apprentissage des mathématiques est apparue. Ainsi, les représentations sémiotiques ont occupé une grande place dans la construction de concepts mathématiques en prenant en compte des activités et des réflexions sur des connaissances spécifiques. Dans cette période, Hitt (2006) cite, par exemple, Janvier (1987) et Duval (1988, 1993) qui étaient intéressés par les difficultés que rencontrent les étudiants en passant d'une représentation à l'autre. Duval a souligné qu'il est important de clarifier les difficultés que les étudiants rencontrent lors du passage d'une représentation à l'autre et a analysé en profondeur ce que représente une représentation, l'importance des processus de conversion entre représentations et les problèmes cognitifs pour réaliser les conversions. Cela l'a amené à introduire la notion de variable visuelle. Par exemple,

dans le cas d'une fonction linéaire, la question posée est « quelles sont les variables visuelles que nous devons prendre en compte afin de construire une représentation algébrique d'une fonction linéaire à partir de sa représentation géométrique ? Duval a dénombré 18 variables, en général, dans le graphique d'une fonction linéaire avec une expression algébrique. Duval a appelé ces variables des « variables significatives ».

En 1993, Duval donne plus de détails sur la construction de concepts mathématiques. Soulignant le fait qu'une représentation mathématique ne représente que partiellement l'objet mathématique en question et prenant en compte l'activité principale de la conversion entre les représentations, il introduit une nouvelle notion, celle de registre. Ainsi, selon Duval (*ibid.*), un système sémiotique peut être un registre représentatif s'il permet trois activités cognitives associées à la sémiotique qui, en résumé, sont les suivantes :

- 1) La présence d'une représentation identifiable;
- 2) Le traitement d'une représentation, qui est la transformation d'une représentation dans le même registre où elle a été formée;
- 3) La conversion d'un registre de représentation à un autre registre de représentation, qui est la transformation de la représentation dans un registre différent qui préserve la totalité ou la partie de la signification de la représentation initiale.

En effet, nous avons déjà mentionné dans la problématique au chapitre I, l'importance de la prise en compte de l'articulation entre les différents registres de représentation sémiotiques à des fins de la construction d'un concept mathématique. Alors, présentement nous allons approfondir et mettre en action cette cadre théorique présentée par Duval (1993).

Selon Duval (Ibid.), la compréhension (intégrative) d'une connaissance conceptuelle en mathématique repose sur la coordination d'au moins deux registres de représentation sémiotique, et cette coordination se manifeste par la rapidité et la spontanéité des activités cognitives d'articulation entre registres et de la conversion entre représentations d'un registre à un autre registre.

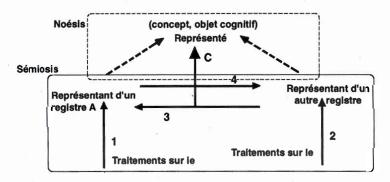


Figure 3.1 Schéma sur la noésis et la sémiosis de Duval

Premièrement, il faut comprendre qui sont les représentations mentales (liées à la Noésis) et les représentations sémiotiques (liées à la Sémiosis). D'après Duval (Ibid), les représentations mentales recouvrent l'ensemble des images et, plus globalement, des conceptions qu'un individu peut avoir sur un objet, sur une situation. Pareillement, les représentations sémiotiques sont des productions constituées par l'emploi de signes appartenant à un système de représentation qui a ses contraintes propres de fonctionnement. Une figure géométrique, une formule algébrique, un graphe, un énoncé en langue naturelle sont des exemples des représentations sémiotiques qui en effet révèlent des systèmes sémiotiques différents.

Par contre, Duval (Ibid) souligne que les représentations sémiotiques ne sont pas seulement nécessaires pour des fins de communication, elles sont également essentielles pour l'activité cognitive de la pensée. Conséquemment, elles jouent un rôle primordial dans le développement des représentations mentales, l'exécution des différentes fonctions cognitives comme la fonction objectivation et la fonction de traitement qui est la transformation de la représentation dans un même registre où elle

est formée (la transformation interne à un registre). La conversion d'une représentation dans un registre vers une autre représentation dans un autre registre. Finalement, les activités de reconnaissance, de traitements et de conversion, avant décrites constituent la Sémiosis, qui va provoquer un processus mental : la Noésis. Ces deux processus sont fondamentaux dans la production de connaissances.

En résumé, le schéma (Figure 3.1) présent deux processus, la Sémiosis et la Noésis. Duval nous clarifie en affirmant que la Sémiosis représente l'appréhension, ou la production effective, d'une représentation sémiotique. Et pour le mot Noésis Duval clarifie qu'elle représente l'appréhension conceptuelle d'un concept mathématique. Pour lui, il n'y a pas de noésis sans la sémiosis, ces processus sont inséparables dans le sens d'une appréhension conceptuelle.

La représentation de Duval est très suggestive. On peut observer que la conversion entre représentations de différents registres est l'activité principale dans la construction des concepts. À travers les tâches de conversion que l'on propose aux étudiants, on va promouvoir la sémiosis, et l'étudiant, dans un processus d'« abstraction réflexive », va construire l'articulation entre les registres de représentation (la noésis).

3.3 Les représentations sémiotiques spontanées et la construction de concepts mathématiques

Si la théorie sur les représentations de Duval est très importante comme théorie locale à l'intérieur d'une approche constructiviste plus générale, ce cadre théorique ne touche pas de façon explicite aux obstacles épistémologiques ni à la résolution de problèmes et situations problèmes.

Dans les années 1990, pendant la réforme du calcul aux États-Unis, le livre de Janvier (1987), qui contient une grande quantité de chapitres écrits par des chercheurs des

États-Unis, a eu un impact énorme. Janvier aussi proclamait l'importance des processus de conversion entre représentations. Malheureusement, Janvier n'a pas développé des notions aussi importantes comme les variables visuelles et leur importance dans les processus de conversion entre représentations tel que présentés par Duval.

Les manuels scolaires mettent en lumière cette approche en mettant l'accent sur la conversion des représentations, ce qui a commencé pendant la réforme du calcul. Par exemple, le manuel de Finney, Thomas, Demana et Waits (1994) *Calculus : Graphical, Numerical, Algebraic* a mis en avant trois représentations et, tout au long du manuel, les auteurs proposent des tâches de conversion entre les trois représentations. Les auteurs ont aussi inclus l'utilisation de la calculatrice Texas Instruments (par exemple, la TI-84, TI-89 ou TI-92), qui avait la possibilité d'afficher simultanément les trois représentations (voir figure 3.2).

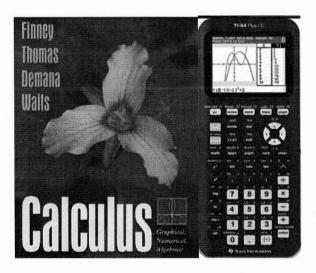


Figure 3.2 Un exemple de manuel qui prend en compte la conversion entre représentations et la technologie

Cette approche n'a pas résolu le problème d'apprentissage aux États-Unis et la reforme a continué en donnant lieu au projet Harvard. Mais quel était le grand problème d'apprentissage? Encore une fois, les problèmes cognitifs étaient liés aux processus de

l'infini (Zandieh, 2000). Comme signalé par Cornu (1981) et Sierpinska (1985), les idées intuitives liées à l'infini mathématique constituent une connaissance qui s'oppose à la construction conceptuelle de l'infini mathématique (l'infini actuel), ce qui est un obstacle épistémologique dans le sens de Brousseau (1997).

3.4 La modélisation mathématique et les problèmes d'apprentissage

Nous croyons que promouvoir l'amour des mathématiques peut se faire grâce à des stimuli externes aux mathématiques, c'est-à-dire par des stimuli qui arrivent du « monde réel », et les mathématiques appliquées donnent cette possibilité.

Ne serait-il pas intéressant que les mathématiques servent à des projets de chemises, de chaussures, d'emballages et, enfin, pour des produits intelligents qui minimiseraient les coûts de production et, par conséquent, contribueraient à la réduction des besoins de matériaux, participant ainsi à la préservation de l'environnement ?

Toutes ces considérations, pour être finalisées de façon intelligente, nécessitent la maîtrise de concepts comme les fonctions, les limites, les logarithmes, les vecteurs, les dérivées, les intégrales, les matrices, etc. Les mathématiques devraient ainsi être utiles à la vie quotidienne.

Nous pensons que la façon actuelle d'enseigner les mathématiques devrait être contestée. Les connaissances mathématiques devraient-elles servir seulement pour développer les habiletés intellectuelles des individus ou plutôt pour être des outils appliqués à la vie quotidienne ? Cette question est encore plus intéressante si on pense que la plupart des étudiants ne se souviendront que d'une petite partie des connaissances mathématiques étudiées au long de leur formation en mathématiques (Bassanezi, 2006).

Pour promouvoir l'apprentissage des mathématiques, nous pensons que la modélisation mathématique peut être une stratégie d'enseignement et d'apprentissage. Pour Bassanezi, la modélisation mathématique est l'art de transformer les problèmes de la réalité en problèmes mathématiques, pour ensuite les résoudre en interprétant leurs solutions dans le langage du monde réel.

Pour ce faire, nous proposons un apprentissage du calcul différentiel dans un contexte de résolution de situations problèmes (SP), à travers un environnement d'apprentissage collaboratif, de débat scientifique et d'autoréflexion (méthodologie ACODESSA, Hitt, 2006; Hitt, Saboya et Cortés, 2017). Évidemment, la théorie des représentations sémiotiques de Duval (1993) va nous apporter un soutien théorique local pour baliser notre proposition autour des représentations institutionnelles.

Selon Duval (1988), il est fondamental pour la bonne compréhension d'un concept mathématique, comme les fonctions et/ou la dérivée, de faire toutes les liaisons, toutes les articulations entre les différents types de registres de représentations (représentations algébriques, représentations graphiques, table de valeurs, etc.). De même, pour Duval (1993), un concept mathématique ne peut pas être développé avec une seule représentation, car cette représentation seule ne peut pas exprimer toutes les caractéristiques du concept étudié. Duval clarifie aussi que les registres de représentations dont il parle sont, en fait, les systèmes de représentation du concept mathématique. D'ailleurs, il ajoute qu'il faut faire tout d'abord la reconnaissance dans chaque système, puis tous les traitements dans chacun des systèmes (phase que Duval a appelé la sémiosis), puis, en définitive, la conversion entre ces différents systèmes pour finalement arriver à une bonne compréhension du concept mathématique envisagé (la phase que Duval a appelé la noésis). Effectivement, pour Duval la conversion entre les différents registres de représentations (noésis) est la phase la plus importante de l'apprentissage du concept mathématique. En d'autres mots, le passage d'une représentation à l'autre, tel que le passage de la représentation algébrique à la représentation graphique et vice-versa, est le cœur de l'apprentissage d'un concept mathématique comme la dérivée.

Ce type d'approche est justifié par le fait que, dans le curriculum au Québec (MELS, 2007), une grande importance est donnée aux situations problèmes (SP) puisque la première compétence disciplinaire du domaine des mathématiques est « résoudre une situation problème ».

Pour être efficaces, les SP doivent promouvoir une ouverture de pensée, de telle sorte qu'elles vont favoriser l'émergence de représentations fonctionnelles/spontanées (Hitt, 2006 et 2007).

Selon Blum (1989), citée par Bassanezi (2006), l'inclusion de la modélisation mathématique dans l'apprentissage est justifiée, premièrement, parce qu'elle va favoriser l'exploration, la créativité et l'habileté dans la résolution de problèmes. Deuxièmement, son inclusion dans la résolution de SP fournit à l'étudiant un riche matériel pour comprendre et interpréter les mathématiques dans toutes ses facettes. Finalement, la modélisation mathématique favorise chez l'étudiant la compréhension d'arguments mathématiques, des concepts et des résultats, en plus de valoriser les mathématiques. Par contre, il y a des facteurs qui compliquent son utilisation comme, par exemple, le temps ou même le fait que les étudiants ne sont pas habitués à ce type d'approche, ce qui demeurera un obstacle pour les enseignants tant que l'usage de la modélisation ne prendra pas la relève de la routine traditionnelle.

3.5 La modélisation mathématique comme proposition d'enseignement

Ainsi, pour promouvoir l'apprentissage significatif des mathématiques, nous pensons que la modélisation mathématique peut être une stratégie efficace. Pour Bassanezi (2006 : 24), la modélisation mathématique est l'art de transformer les problèmes de la réalité en problèmes mathématiques, pour ensuite les résoudre en interprétant les

solutions dans le langage du monde réel. La modélisation mathématique est un processus dynamique qu'on peut utiliser pour obtenir et valider nos modèles mathématiques. C'est une forme de généralisation des situations problèmes afin de prévoir les tendances.

Nous ne voulons pas faire une apologie de la modélisation mathématique au détriment des mathématiques dites pures : nous savons bien que les mathématiques doivent servir aux mathématiques propres. Nous prétendons tout simplement montrer que la modélisation mathématique à partir de la résolution de situations problèmes peut être appliquée dans plusieurs situations d'apprentissage. Notre intention est de promouvoir un apprentissage significatif des mathématiques. Pour ce faire, des situations problèmes serviront comme éléments provocateurs à des fins de stimulations chez les enseignants et leurs étudiants. Le but est que les apprenants développent leurs propres habiletés en tant que modalisateurs.

Selon Blum (1989), citée par Bassanezi (*ibid.* : p.36), l'inclusion de la modélisation mathématique dans l'apprentissage repose sur des raisons solides. Les principaux arguments sont :

- 1) L'argument formatif: la modélisation mathématique évoque les applications mathématiques et, dans ce sens, elle développe des capacités intellectuelles chez les étudiants, comme la créativité, l'esprit critique et l'habileté à résoudre des situations problèmes.
- 2) L'argument de compétence critique : la modélisation mathématique met l'accent sur la préparation des étudiants dans la résolution de situations réelles, ce qui les aide à développer et à former des jugements propres.
- 3) L'argument d'utilité: la modélisation mathématique montre à l'apprenant la puissance des mathématiques en tant qu'outil pour résoudre plusieurs situations problèmes dans différents domaines; en effet, la modélisation mathématique favorise la valorisation des mathématiques.
- 4) L'argument intrinsèque : l'inclusion de la modélisation mathématique fournit aux étudiants un riche arsenal pour comprendre les mathématiques en elles-mêmes.

- 5) L'argument d'apprentissage: l'utilisation de la modélisation mathématique facilite l'apprentissage, car les concepts mathématiques appliqués à des situations réelles aident à la compréhension et l'appréhension de tels concepts. C'est ainsi que son inclusion dans l'apprentissage fournit à l'étudiant un riche matériel pour comprendre et interpréter les mathématiques dans toutes leurs facettes.
- 6) L'argument d'alternative épistémologique : les mathématiques sont perçues de manière naturelle dans une approche cognitive avec forte base culturelle vers l'action pédagogique.

Par contre, il y a des facteurs qui compliquent son utilisation, ainsi :

- 1) Le temps pour le faire, car la modélisation peut prendre beaucoup plus de temps que la méthode traditionnelle dans les cours réguliers;
- 2) L'obstacle pour les étudiants étant donné qu'ils ne sont pas habitués à ce type d'approche;
- 3) Le choix d'un thème désintéressant peut démotiver les étudiants et, conséquemment, provoquer des manques d'intérêts chez une partie des étudiants;
- 4) Les enseignants peuvent ne pas se sentir préparés à développer la modélisation dans leur cours, car l'usage de la modélisation contourne la routine traditionnelle.

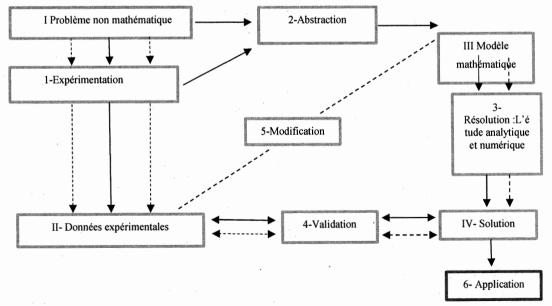


Figure 3.3 Schéma de modélisation mathématique d'une situation problème soulignée par Bassanezi (Ibid), p.37

Les flèches continues indiquent la première approximation et les flèches pointillées l'ambition d'un modèle mathématique pour mieux décrire le problème étudié, ce qui rend le processus de modélisation mathématique dynamique. Les étapes numérotées en chiffres romains sont les étapes principales dans un parcours « direct », sinon, les chiffres arabiques désignent un parcours « non direct », voire plus bas.

Pour expliquer son schéma, Bassanezi (*ibid.* : 27) suggère une séquence d'activités intellectuelles, à savoir :

- 1) L'expérimentation : c'est une activité essentiellement laborieuse où le processus d'obtention de données prend place. Les méthodes expérimentales sont souvent régies par la nature propre de l'expérimentation et l'objectif de l'expérience. Néanmoins, la contribution des enseignants des mathématiques à cette étape est fondamentale pour baliser la direction de la recherche et pour faciliter, à postériori, les calculs impliqués dans la modélisation mathématique.
- 2) L'abstraction : c'est la procédure qui va amener à la formulation des modèles mathématiques. Dans cette phase, on cherche à établir :
- a. La sélection de variables : c'est le choix des variables de contrôle qui agissent dans le système. Dans cette phase, il est fondamental que les variables choisies soient clairement définies.
- b. La problématisation: c'est la formulation du problème posé par la situation. L'énoncé de la situation problème doit être explicité de façon claire, compréhensible et opérationnelle. Ainsi la situation problème devient une question scientifique lorsqu'elle explicite la relation entre les variables de la situation.
- c. La formulation d'hypothèses: les hypothèses font référence à la fréquence de l'interrelation entre les variables observées expérimentalement (hypothèses

observationnelles). Ces hypothèses cherchent à généraliser les résultats observés dans la pratique.

d. La simplification: dans cette phase, il est important de vérifier la nécessité de simplifier les informations, c'est-à-dire d'observer s'il n'y a pas trop d'informations. Même si la situation problème est très complexe, il est pertinent de la simplifier si on peut rejeter des informations qui ne sont pas essentielles à la compréhension du phénomène étudié. À ce propos, on peut citer l'extraordinaire mathématicien polonais qui a dit:

Si vous ne pouvez pas résoudre le problème que vous proposez, essayez de le simplifier. La condition est la suivante : vous ne devriez pas trop simplifier au point de perdre des informations essentielles.

Mark Kac (1914-1983), cité par Bassanezi (ibid.: 29), notre traduction.

- 3) La résolution : c'est le moment où le langage des hypothèses (langage naturel) est remplacé par le langage mathématique cohérent.
- 4) La validation : c'est le processus de la validation du résultat obtenu à partir du modèle mathématique. C'est l'étape de l'acceptation ou non du modèle mathématique proposé, c'est-à-dire que le modèle doit être testé, qu'il doit être confronté aux hypothèses suggérées au début. Pour ce faire, il faut comparer les solutions (la résolution) et prévisions (les hypothèses) aux valeurs obtenues à partir de l'expérimentation. Le degré d'approximation désiré de ces prévisions serait le facteur prépondérant pour leur validation.
- 5) La modification : c'est l'étape où il faut vérifier si les résultats obtenus répondent ou pas aux questions posées par le problème. Lorsque les modèles sont obtenus en considérant les idéalisations de la réalité, leurs solutions peuvent nous amener à des prévisions incorrectes. Quelques facteurs liés au problème original peuvent provoquer des rejets ou validations de tels modèles. Par exemple :
- Certaines hypothèses utilisées peuvent être fausses ou ne pas être assez proches de la réalité;

- Certaines données expérimentales ou informations peuvent être obtenues de façon incorrecte;
- Les hypothèses et données peuvent être vraies, mais insuffisantes, ou encore notre intuition peut être inadéquate ;
 - Une erreur peut avoir été commise lors du développement mathématique.
- 6) L'application: c'est le moment où nous pouvons constater l'efficacité et la puissance des mathématiques dans des situations de la vie quotidienne. Cela peut être un facteur stimulant de l'apprentissage des mathématiques.

3.6 Retour à l'objectif général de la recherche

Notre objectif est, rappelons-le, d'élaborer une séquence d'enseignement qui comprend des activités autour du calcul différentiel. Ces activités prendront la forme de situations problèmes liées à des questions de la vie quiotidienne comme par exemple une problématique autour de l'amélioration des emballages trouvés dans les supermarchés. En effet, il est souhaité faire une économie des matériaux qui sont utilisés pour les fabriquer. Il s'agit d'un questionnement intéressant, car si nous réduisons le gaspillage de matériaux, cela va produire un impact sur l'environnement, ce qui est une question très importante de nos jours. C'est donc à travers la modélisation mathématique que nous corstruirons le concept de dérivée et, en même temps, nous montrerons le pouvoir et la beauté qui dérivent des applications du calc₁1 différentiel.

Notre séquence d'enseignement va prendre en considération différents espects :

- l'articulation entre représentations;
- un appui sur la visualisation mathématique;
- une approche par modélisation mathématique;

une approche par l'intégration de la technologie

Nous proposerons un apprentissage collaboratif vers une approche socioculturelle (Methodologie ACODESA) développé dans Hitt (2007) et Hitt, Saboya et Cortês (2017). Nous croyons que ce type d'approche va promouvoir une solide formation globale (technique et intuitive).

Dans la section suivante, nous allons présenter une analyse de différents manuels scolaires qui traitent du calcul différentiel ainsi qu'un aperçu des plans de cours proposés par trois Cégeps sur ce contenu. Cette analyse permettra de mieux comprendre le matériel disponible aux enseignants ainsi que d'entrevoir comment le calcul différentiel est approché avec les étudiants. Ces éléments serviront comme assises pour construire une séquence d'enseignement, séquence qui est l'objet de ce mémoire.

CHAPITRE IV

ANALYSE DE MANUELS ET DES PLANS DE COURS DES CÉGEPS

Dans ce chapitre, nous sommes intéressés à l'analyse de quelques manuels scolaires en ce qui a trait au concept de dérivée. Ces manuels ont été choisis parce que sont les manuels plus utilisés dans le milieu scolaire québécois. Nous ne sommes pas uniquement portés à regarder les manuels actuels, mais également des manuels plus anciens, cela va nous permettre de faire une comparaison entre ce qui a été utilisé dans le passé et ce qui est utilisé actuellement dans les cégeps. De plus, nous analyserons les programmes d'enseignement de la dérivée présentés par trois cégeps. Notre but de faire une analyse critique des manuels et des programmes pour ressortir les points forts mais également les points faibles. Cette analyse sera porteuse pour justifier les choix faits dans l'élaboration de notre séquence d'enseignement.

Comme nous l'avons précisé dans les chapitres précédents, le concept de dérivée présente un obstacle épistémologique difficile à surmonter pour les étudiants. En effet, celui-ci est à la croisée de différents éléments :

- a) Connaissances antérieures (arithmétique, algèbre, fonctions, etc.)
- b) Notion de tangente en géométrie et sa généralisation dans les courbes,

- Nouvelles connaissances, tel que l'infini mathématique, la limite, la continuité, etc.,
- d) Les nouvelles tendances des manuels scolaires,
- e) Les programmes classiques qui ont en général ont très peu changé,
- f) L'interprétation de l'enseignant sur la dérivée

Ainsi, les étudiants risquent d'être confrontés à de nombreux obstacles cognitifs, liés aux concepts de limite, d'infini, au concept de fonction, de continuité de fonctions, de tangente. Nous voulons analyser dans ce chapitre, comment les auteurs des manuels attaquent ces difficultés.

Étant donné que pour enseigner la dérivée, le concept de la limite est un des obstacles épistémologiques importants à cibler, les manuels donnent une place spéciale à cette dernière.

Avant de faire une analyse des manuels, nous allons analyser trois planes de cours de trois cégeps pour montrer ce qu'ils demandent d'apprend à ses étudiantes.

4.1 Analyse des programmes d'enseignement de la dérivée dans trois cégeps

Nous avons décidé d'analyser le programme préuniversitaire collégial en sciences pures et appliquées (200.B0) particulièrement dans le cours de calcul différentiel en ce qui concerne l'apprentissage des notions d'infini, de limite et de dérivée pour en savoir plus sur ce qui se fait réellement dans le milieu. Nous allons d'abord décrire le contenu du curriculum telles que presentés par le ministère et par la suite se pencher sur son application dans l'enseignement en nous basant sur les plans de cours de trois cégeps.

4.1.1 Analyse du curriculum et présentation officielle du programme

On s'est intéressé au programme commandé par le ministère de l'Éducation et de l'enseignement supérieur en sciences de la nature (200.B0). Les élèves du secondaire qui veulent suivre ce programme doivent passer les cours de chimie, de physique et de mathématiques de cinquième secondaire, dans la séquence technico-science ou de sciences naturelles. Donc, ces élèves sont pour la plupart forts en mathématiques et en sciences. Leurs champs d'études dans ce programme tournent autour des domaines scientifiques tels que la chimie, la physique, les mathématiques, la biologie, l'informatique et la géologie. Les différents programmes offerts au cégep offrent des cours de mathématiques adaptés à la clientèle et au domaine d'étude correspondant. Ainsi, les cours de mathématiques offerts aux étudiants d'un programme en sciences humaines prennent en considération le fait que les étudiants ne sont pas nécessairement habiles en mathématiques. En sciences de la nature, les cours sont bâtis pour des étudiants forts qui vont faire des mathématiques pures et qui vont les appliquer à différents domaines scientifiques. Dans le cadre du cours de calcul différenticil, les étudiants doivent acquérir les cinq compétences suivantes:

- 1. Reconnaître et décrire les caractéristiques d'une fonction représentée sous forme d'expression symbolique ou sous forme graphique.
- 2. Déterminer si une fonction a une limite si elle est continue est dérivable, en un point et sur un intervalle.
- 3. Appliquer les règles et les techniques de dérivation.
- 4. Uiliser la dérivée et les notions connexes pour analyser les variations d'une fonction et tracer son graphique.
- 5. Résoudre des problèmes d'optimisation et de taux de variation.

De plus, les élèves sont évalués selon les critères suivantes:

- Utilisation appropriée des concepts.
- Représentation d'une situation sous forme de fonction.
- Représentation graphique exacte d'une fonction.

- Choix et application correcte des techniques de dérivation.
- Manipulations algébriques conformes aux règles.
- Exactitude des calculs.
- Interprétation juste des résultats.
- Justification des étapes de la résolution de problèmes.
- Utilisation d'une terminologie appropriée.

Finalement, dans la section « activités d'apprentissage », le programme donne les précisions suivantes sur le contenu de la formation en calcul différentiel :

- Fonctions du genre algébriques, exponentielles, logarithmiques, trigonométriques et trigonométriques inverses.
- Limite : approche intuitive, définition, propriétés, calculs de limites.
- Continuité : définition et propriétés.
- Dérivée : interprétation géométrique, définition, règles et techniques usuelles.
- Applications : études de courbes, problèmes d'optimisation, taux de variation.

4.1.2 Critique du programme

La version du programme commandé par le gouvernement date de 1998 comme on peut le voir à la page VIII du programme en sciences de la nature (200.B0). Le gouvernement a adapté les conditions particulières d'admission dans le programme parce que les anciens codes ne correspondaient plus aux nouveaux codes de cours, en particulier pour les cours de mathématique (math536 est devenu math TS ou SN). Cependant, il semble qu'il n'y ait pas eu de nouvelle version du programme depuis 1998, ce qui est aberrant selon nous compte tenu du renouveau pédagogique qui est en

place au secondaire depuis 2005 et que depuis 2009, les élèves qui passent du secondaire au cégep ont un bagage sûrement différent que celui des élèves dans les années 90.

Le programme du cégep est centré sur l'étude des fonctions, ce qui est en lien avec les récents changements dans le curriculum du secondaire qui veut que le sujet principal du deuxième cycle du secondaire soit l'étude de différentes fonctions. Il en est de même pour la résolution de problèmes.

Le programme, dans les activités d'apprentissage qu'il propose, demande qu'on favorise une approche intuitive de la notion de limite. L'approche intuitive de la notion de limite est une des causes les plus courantes d'erreurs et de difficultés chez les élèves. Ils vont développer des idées purement intuitives au départ qui vont les induire en erreur lorsque l'enseignant va leur demander un niveau de rigueur supérieur. Une approche intuitive de limite va s'appuyer sur l'infini potentiel qui veut qu'on aborde l'infini comme étant un processus étape par étape (pas à pas) avec certaines expressions comme : « s'approcher », « tend vers », « des valeurs de plus en plus proches », « voisinage », etc. Dans un infini actuel, on aborde l'infini comme si tout était déjà là, comme si on était déjà rendu à la limite, sans avoir à passer par les étapes une à la fois.

4.2 Analyse de trois plans de cours

4.2.1 Le plan de cours du Cégep de Montmorency

L'objectif du cours est d'initier l'élève à la démarche mathématique et aux calculs des variations de différentes fonctions. L'étudiant sera en mesure de décrire les caractéristiques d'une fonction en se basant sur les notions de limite, de continuité et de dérivée. Ensuite, l'élève sera capable de faire le passage d'une représentation à une

autre pour une fonction. En particulier, il doit être capable de tracer le graphique d'une fonction présentée sous forme algébrique et vice versa. Finalement, il devra résoudre des problèmes d'optimisation et de taux de variation. En enrichissement, l'étudiant suivant ce cours apprendra à calculer les intégrales élémentaires.

Les contenus abordés par ce programme sont :

- Rappels des notions du secondaire
- Limite et continuité
- Dérivée des fonctions algébriques
- Dérivée des fonctions transcendantes
- Taux liés et différentiels
- Optimisation
- Tracés de courbes
- Intégration élémentaire

En regardant la méthodologie, nous voyons que le plan de cours fait état d'un cours principalement magistral où l'enseignant présente les différents concepts mathématiques aux élèves. Par la suite, c'est la responsabilité de l'élève de parfaire sa formation avec le manuel du cours, en lisant les différents exemples et en effectuant les différents exercices. L'enseignant répondra aux questions des étudiants lors de la période d'exercices. Quelques laboratoires d'informatique complèteront l'apprentissage des élèves avec l'utilisation du logiciel Mathematica.

4.2.2 Le plan de cours du Cégep de Lévis Lauzon

Comme objectif le plan de cours reprend tels quels les objectifs commandés par le programme du ministère de l'Éducation et de l'enseignement supérieur.

- Reconnaître et décrire les caractéristiques d'une fonction représentée sous forme d'expression symbolique ou sous forme graphique.
- Déterminer si une fonction a une limite si elle est continue et dérivable, en un point et sur un intervalle.
- Appliquer les règles et les techniques de dérivation.
- Utiliser les notions du calcul afin analyser les variations d'une fonction et tracer son graphique.
- Résoudre des problèmes d'optimisation et de taux de variation.

Et les contenus travaillés sont :

- Limite et dérivée :
- Fonction
- Limites
- Continuité
- Dérivée
- Fonctions algébriques
- Dérivées
- Applications
- Analyse de fonctions algébriques
- Fonctions transcendantes
- Dérivées
- Différentielle
- Applications
- Analyse de fonctions transcendantes

La méthodologie privilégiée est la transmission de la matière à l'aide d'exposés magistraux où les notions sont présentées et expliquées à l'aide d'exemples. L'étudiant doit être présent à tous les cours, poser des questions lors des périodes d'exercices et faire tous les exercices et les devoirs qui lui sont demandés.

4.2.3 Le plan de cours du Cégep de Sainte-Foy

Cette fois-ci, le plan de cours est celui d'un cours de calcul différentiel auquel s'ajoute l'apprentissage du langage de programmation Pascal. En plus de devoir apprendre le calcul différentiel, les étudiants devront développer des habiletés dans le logiciel de calcul formel appelé Maple, une interface très puissante de calculs et de représentations graphiques de toutes sortes. Ensuite, de façon plus générale, le plan de cours décrit les objectifs suivants :

« Le cours *Calcul différentiel* est le premier cours de mathématiques du programme de Sciences de la nature. Ce cours permet à l'élève de bien saisir la notion de dérivée et d'avoir une bonne vision de son champ d'application, plus particulièrement en physique. Il est un également un préalable absolu aux cours NYB de calcul intégral et de physique électrique. »

De plus, nous retenons les objectifs plus généraux suivants :

- développer la capacité de produire des solutions claires et rigoureuses, notamment en utilisant correctement le langage mathématique ainsi qu'en soignant la présentation et le français;
- développer l'aptitude à résoudre des problèmes concrets, c'est-à-dire s'attarder à lire un énoncé, à l'analyser, à le comprendre, à le transcrire mathématiquement, à trouver la solution et à l'interpréter;

Les objectifs du cours visent à ce que les étudiants produisent des solutions « claires et rigoureuses », mais il nous semble que cela est contradictoire avec le fait d'introduire de façon intuitive les notions de limite et de dérivée comme le demande le programme du ministère. Il faut alors faire extrêmement attention lorsqu'on enseigne intuitivement ces notions pour ne pas tomber à un niveau où les concepts sont faussement définis parce qu'on ne veut pas utiliser la véritable définition de limite et de dérivée, avec epsilon et delta. Si on n'utilise pas la bonne définition par souci de clarté envers les

étudiants, il faut alors s'assurer de garder en permanence un regard critique sur ce qu'on fait, comme le fait qu'une limite qui « tend vers l'infini » n'existe tout simplement pas.

Ensuite, on souhaite que l'étudiant développe « l'aptitude à résoudre des problèmes concrets », ce qui vient s'ajouter dans le prolongement de ce qui était fait au secondaire lorsque le plan de cours a été écrit. Avec le nouveau programme de formation au secondaire, il faudrait plutôt centrer les objectifs sur la résolution de situations problèmes.

Le contenu du plan de cours explicite une liste exhaustive d'une trentaine d'habiletés que les étudiants devront développer dans le cadre du cours. D'un côté, cela peut sembler très intimidant à première vue pour les étudiants, mais d'un autre côté, cela peut être motivant dans l'optique où ils vont développer beaucoup d'habiletés dans le cadre du cours de calcul différentiel. Ensuite, le cours est divisé en quatre parties et chacune d'entre elles a un temps alloué à la réalisation :

- Les fonctions (5 heures)
- Limites et continuité (20 heures)
- La dérivée (30 heures)
- Applications de la dérivée (20 heures)

On remarque que le cours est essentiellement classique, ce qui n'est pas surprenant vu les manuels des dernières décennies. L'enseignant prend peu de temps dans le cours pour faire une petite mise à niveau en ce qui concerne les fonctions, leurs représentations graphiques et leurs propriétés. Il passe ensuite à la notion de limite et de continuité des fonctions pour en arriver à la dérivée et finalement aux différentes applications. On remarque qu'il passe plus de temps sur le calcul de dérivée que sur les concepts sous-jacents que sont les limites et la continuité.

La méthodologie est marquée par des pratiques pédagogiques proposées dans le cadre du cours et sont des présentations magistrales impliquant seulement des explications de la part du professeur à l'aide d'une présentation PowerPoint. Ensuite, l'enseignant propose des exercices et des lectures dans le manuel que les étudiants devront réaliser dans le courant de la semaine de cours. Il est du devoir de l'étudiant de réaliser les exercices demandés, de se présenter à tous les cours et à toutes les périodes d'exercices et de lire les pages demandées. Il ne participe pas à ses apprentissages en classe et il doit réaliser plusieurs exemples similaires dans le but de devenir meilleur dans le calcul, sans jamais avoir à comprendre ce qu'il est en train de faire. La bibliographie du plan de cours ne propose que trois références, dont un manuel et le livre de Charron et Parent (2002).

4. Analyse de manuels de Calcul différentiel depuis 1970 à 2012

Les manuels que nous allons analyser sont les suivants :

Calcul différentiel et intégral I, Collection mathématique Nouvelles, Ottawa de Jean Menard (1970), Leçons de Calcul I (1991), Allan B.Cruse et Millianne Lehman, Éditions du SITESA (Sistema Tecnicos de edicion), Calcul différentiel (2007), de Amiotte et Hamel, Calcul Différentiel de Éric Brunelle et Marc-André Désautels (2011), les éditions CEC inc.

4.3 Analyse du manuel *Calcul différentiel et intégral I*, Collection mathématique Nouvelles, Ottawa de Jean Menard (1970)

D'après ce manuel, nous rencontrons certains problèmes lorsque l'auteur présente le concept de limite. Pour commencer, l'auteur a choisi la suite suivante à des fins d'introduction du concept de limite :

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots \frac{1}{n}, \dots$$

(les trois premiers points sont liés à une notation finie, et les autres trois points à un notation à l'infinie!)

Ainsi, l'auteur fait appel à l'intuition de l'apprenant en supposant que la suite se « dirige » vers zéro (notion implicite de convergence), parce qu'en termes de direction, elle se dirige vers -10, -3 ou -1). Par la suite , il présente la représentation institutionnelle de la limite (sans expliquer pourquoi la suite ne dépasse pas zéro) et pourquoi la limite est exactement zéro.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$$

Comme si cette représentation était quelque chose d'évident, de simple à comprendre. Finalement, à la tentative de définir la limite, l'auteur affirme que le phénomène d'« agglomération » des suites tout près de zéro est essentiellement le phénomène responsable pour définir la limite. En effet, la notion d' « agglomération » est classée comme un concept qui est lié à un obstacle épistémologique, car c'est seulement au XVIII siècle que ce concept a été conçu chez les mathématiciens, selon Hitt 2016, note de cours MAT7191.

De plus, cet auteur, en essayant de donner une idée intuitive, simplifie beaucoup le problème qui, probablement, va promouvoir un obstacle chez les étudiants. Par exemple, en prenant cette idée, nous pouvons construire la suite suivante : $\lim_{n\to\infty} (-1)^n \left(1 - \frac{(-1)^n}{n}\right), \text{ les étudiants pourront penser qu'il existe deux limites (-1 et 1), en utilisant exclusivement la notion d'agglomération, quand en réalité la limite n'existe pas.}$

Entre autre, dans ce cas c'est important d'avoir recours à une approche géométrique pour convaincre, d'un point de vue visuel, avant même de faire une approche algébrique.

Dans le chapitre 2, l' auteur présente la dérivée en donnant un premier exemple provenant de la physique qui relate le lancement d'un satellite. À la tentative de définir la vitesse instantanée du satellite, l'auteur montre une expression algébrique, sans aucune référence graphique qui selon nous empêche la visualisation du problème. Ensuite, dans le deuxième exemple, l'auteur essaye de faire la liaison entre la pente d'une droite tangente et la définition de la dérivée. Pour ça, il choisit la fonction cubique $f(x) = x^3 + 2x^2 + 4$ (voir figure 4.1)

Exemple 2

Considérons la fonction $f: x \longmapsto x^3 - 2x^2 + 4$.

Relativement à la variation de f, arrêtons-nous au problème de savoir au-dessus de quels intervalles f sera croissante ou décroissante; nous allons vérifier que nous sommes alors amenés à une expression analogue à celle établie plus haut, i.e.(*). Notre raisonnement peut se décomposer en plusieurs étapes:

1. Le but précis du travail: savoir si, en un point donné se, f est croissante;

2. Si f croit en xe, la pente de la tangente au graphique au point $(x_0, f(x))$ est positive.

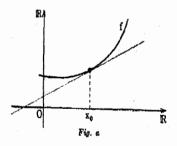


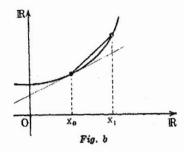
Figure 4.1 Livre Calcul différentiel et intégral I, Menard

Ici, nous notons qu'il y a plusieurs manques par rapport à la représentation graphique utilisée. En effet, dans la figure présentée il n'y a qu'une partie du graphique de la

fonction, puis dans l'axe des ordonnées, il n'y a pas la représentation de l'image de la fonction ce qui empêche la compréhension globale du phénomène analysé.

Par la suite, dans la figure 4.2, l'auteur fait des associations vers la pente :

- 3. La pente de la tangente est donnée par ceux points quelconques de cette tangente. Or ce qui nous est donné ici, ce som des points sur la courbe.
- 4. On remarque que si l'on prend x_0 et un point voisin x_1 , la pente du segment $\overline{f(x_0)}$ $\overline{f(x_1)}$ est « près » de la pente de la tangente.



- 5. La pente de ce segment (fig. b) est $\frac{f(x_1) f(x_0)}{x_1 x_0}$
- 6. Plus x₁ s'approche de x₀, plus cette expression s'approche de la véritable pente.

Figure 4.2 Livre Calcul différentiel et intégral I, Menard

À la figure a, on voit que les manques sur la représentation graphique persistent. De plus, (ici, nous parlons des manques de représentaions tels $f(x_0)$, $f(x_1)$ dans les axes des ordonées, par exemple). En autre, le lien avec la pente n'est pas expli qué au comp let ce qui, selon nous, est source de difficult és pour la compréhension du concept envisagé (la dérivée).

Nous croyons que c'est important de donner un aperçu global de la fonction. Il faudrait présente le graphique au complet pour ensuite faire des remarques ponctuelles comme preciser les points où la fonction est croissante ou décroissante et faire des associations à la pente.

Notamment, l'analyse du graphique au complet va nous permettre d'avoir un aperçu général de la fonction et par conséquent une meilleure compréhension de la fonction.

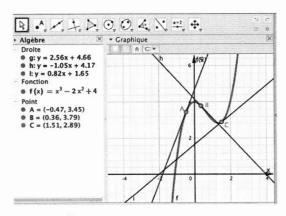


Figure 4.3 Graphique de la fonction $f(x) = x^3 + 2x^2 + 4$

De plus, l'auteur propose des exercices purement algébriques sans aucune représentation graphique ce qui, selon nous, rend la compréhension du concept ciblé plus compliquée, c'est-à-dire la compréhension de la dérivée. En effet, au sens de Duval (1988, 1993), il est important de proposer des tâches capables de promouvoir les « aller-retour » dans tous les registres de représentations possibles de la même situation traitée, tel que nous l'avons déjà précisé.

Par ailleurs, on remarque que quelques exercices provoquent des confusions chez les étudiants. Par exemple, à la page 53, exercice 3 de ce manuel, l'auteur propose l'exercice suivant :

Si a,b > 0 si b « est près » de a (b > 0), on peut écrit b=a+h, où h > 0, mais petit.

a. Vérifier que
$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

b. Evaluer
$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$
 pour la fonction $f(x) = x^3 + 2x^2 + 4$ si $a = 2$, $h = 1$, ou $h = \frac{1}{2}$, ou $h = \frac{1}{10}$

En effet, dans ce cas la confusion est causée par la notation. Faire l'association entre la limite et la dérivée avec cette notation :

$$f'(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$
 ou $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ peut provoquer des confusions chez les étudiants.

Finalement, après la section portant sur les exercices, l'auteur donne la définition descriptive de la dérivée :

« Nous dirons que la fonction f est dérivable au point x_0 si l'expression

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

a une valeur bien determinée quand x tend vers x_0 . Cette valeur :

- s'écrit, $f'(x_0)$,
- s'appelle: dérivée de f au point x_0

Il est vrai que pour faciliter la compréhension du concept de dérivée, l'auteur montre la représentation graphique de cette définition :

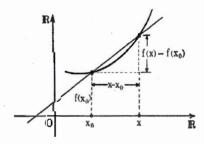


Figure 4.4 Livre Calcul différentiel et intégral I, Menard

Toutefois, dans l'axe des ordonnées, il n'y a pas la représentation de l'image de la fonction ce qui empêche la compréhension globale du phénomène ciblé.

Par la suite, l'auteur (Menard, 1970) donne la définition formelle de la limite :

« $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ a une valeur $f`(x_0)$ qund $x \to x_0$ » Nous donnons à cette expression le sens suivante : Quand la distance séparant x de x_0 est arbitrairement petite, mais non nulle, la distance séparant $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ de $f'(x_0)$ est aussi arbitrairement petite.

En symboles, cette phrase peut s'annoncer comme suit :

Quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe un $\delta > 0$, dépendant en général de ε , tel que :

$$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow \left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \right| < \varepsilon . (p. 56)$$

Dans ce cas, nous remarquons que l'auteur montre une prédilection algébrique de la définition de la limite. De même, il ne fait pas les liens entre la représentation algébrique et la représentation graphique ce qui, encore selon nous, agrave la compréhension du phénomène.

Par contre, l'auteur fait une remarque en précisant qu'au chapitre 4 il va donner un sens plus profond et détaillé de ces quantités soit les ε et δ cités. Alors, si c'est évident que ce n'est pas logique de présenter la définition formelle de la limite de cette manière, pourquoi insister de le faire surtout dans un premier aperçu?

Par la suite, il montre quelques exemples purement algébriques d'applications de la détermination de la dérivée des fonctions polynomiales à l'aide de la définition formelle donnée en haut. Pour continuer, l'auteur propose une section d'exercices. Selon nous, cette façon de proposer l'enseignement de la dérivée, surtout dans une première approche, n'est pas suffisante pour la compréhension de ce concept parce qu'il y a des manques précis comme on l'a déjà précisé, tels comme l'absence d'articulations entre les différents registres de représentations du même phénomène, l'absence d'explications claires du rôle des nouveaux symboles ($\lim_{\epsilon \to 0} \delta_{\epsilon}$, etc.).

Il faut remarquer que le manuel de Jean Ménard date de 1970 dont la période est fortement marquée par un enseignement très formel de la dérivée. De surcroît, ce n'est pas surprenant de présenter la dérivée de cette façon à cette époque. Au contraire,

pendant les années 1970, la formalité en mathématiques est fortement présente, principalement à cause du fait que la didactique des mathématiques en était à sa naissence. Nous ne voyons de grands changements qu'à partir des années 1980, moment où la didactique des mathématiques a gagné en puissance, a pris de l'effervescence.

4.4 Analyse du manuel *Leçons de Calcul I* (1991), Allan B.Cruse et Millianne Lehman, Éditions du SITESA (Sistema Tecnicos de edicion).

Dans ce manuel, on remarque que les auteurs commencent l'introduction au calcul à partir de situations de la vie quotidienne ce qui est un point positif, étant donné que l'aperçu intuitif du concept de dérivée est présent. Pour cela, ces auteurs ont illustré la dérivée travers des situations problème qui amènent les étudiants à résoudre des questions autour de problèmes d'optimisation.

Dans un premier exemple, ces auteurs proposent la situation suivante :

Étant donné un papier-carton rectangulaire de dimensions fixes comme 4 dm X 5 dm, est demandé de faire une boite sans couverture de telle façon que les mesures soient optimales.

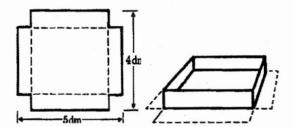


Figure 4.5 Manuel Leçons de Calcul I (1991), Allan B.Cruse et Millianne Lehman, Éditions du SITESA (Sistema Tecnicos de edicion).

Les figures présentes dans cette situation sont bien faites ce qui amène chez les étudiants vers une bonne compréhension du problème et on peut dire même que ce type de problème est en accord avec l'introduction de la modélisation mathématique comme stratégie d'apprentissage des concepts mathématiques ce qui est remarquable à cette époque-là, le début des années 1990. Puis étant donné les dimensions fixées, les auteurs remarquent qu'il y a des restrictions à respecter dans les solutions trouvées. En autres, avant de résoudre le problème de façon algébrique, ces auteurs présentent aussi une table de valeurs pour donner un aperçu estimatif de la solution ce qui est un bon point. En effet, les différents types de registres de représentations sont présents dans la situation ce qui va promouvoir chez les étudiants une bonne compréhension du concept mathématique envisagé (la dérivée) au sens de Duval (1991). Voici la figure extraite du manuel:

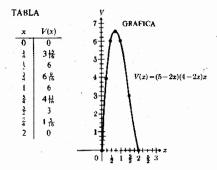


Figure 4.6 Manuel *Leçons de Calcul I* (1991), Allan B.Cruse et Millianne Lehman, Éditions du SITESA (Sistema Tecnicos de edicion).

À des fins de faire progresser la connaissance intuitive du concept de dérivée, d'autres exemples et des exercices comme celui de la boite maximale sont présents tout le long du manuel. Par exemple, à la page 8, nous trouvons une autre situation où il est

demandé aux étudiants de trouver les mesures optimales d'une boite prismatique à base rectangulaire:

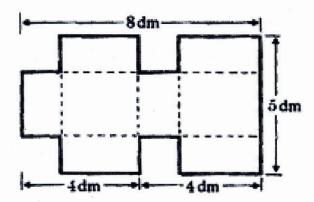


Figure 4.7 Manuel *Leçons de Calcul I* (1991), Allan B.Cruse et Millianne Lehman, Éditions du SITESA (Sistema Tecnicos de edicion).

Le fait intéressant c'est qu'à ce moment les auteurs ne montrent pas la solution ce qui réveille chez les étudiants une certaine curiosité mathématique. En effet, ils soulignent que si on pouvait déterminer les coordonnées du point plus en haut de la courbe du graphique de la fonction, la solution serait trouvée. Puis, ils soulignent que le point plus en haut de la courbe est justement le point dont la droite tangente est horizontale. On remarque ici que l'apprentissage intuitif de la dérivée est bien travaillé dans cette façon de la présenter.

La seule critique que nous pouvons faire par rapport à cette activité proposée par Leman c'est le fait de donner aux étudiants le patron de la boite. Nous croyons que c'est plus intéressant de demander aux apprenants d'apporter une vraie boite trouvée dans les marchés afin de découvrir comment les patrons sont engendrés et à partir de cela construire chez les étudiants le modèle mathématique qui représente la situation proposée. En d'autres termes, demander aux étudiants de construire leurs propres patrons peut être compliqué, car il y a 52 possibilités de former des patrons ayant la

forme de parallélépides ce qui peut être difficile à gérer pour l'enseignant qui est en classe.

Par rapport à l'approche proposée par le manuel pour l'étude des tangentes, nous voyons également que ces auteurs s'appuient sur une connaissance mathématique intuitive. Par exemple, ils font constamment des références au passé en affirmant que le problème pour trouver les tangentes à des courbes a occapé bien la tête des mathématiciens tout le long de l'histoire des mathématiques. En particulier ces auteurs citent les méthodes pour trouver des tangentes proposées par les Grecs, par René Descartes (1694-1650) puis par Pierre de Fermat (1601-1665). Pour faire progresser l'apprentissage, ils utilisent la géométrie analytique et des méthodes géométriques en utilisant la règle et le compas pour trouver une droite tangente à un point quelconque des paraboles, des hyperboles et des ellipses, ce qui est intéressant vu que ces auteurs ont privilégié l'intuition et s'appuient sur l'histoire des mathématiques.

Par la suite, les auteurs mènent un bon travail sur la pente de la droite tangente, en présentant un bel exposé de la méthode de racines égales proposé par Descartes.

Finalement, les auteurs arrivent à la méthode de Fermat pour trouver la droite tangente à une courbe quelconque. Par contre, après la présentation de la méthode de Fermat, à la page 32, ils passent à la notation formelle de la limite, ce qui est délicat parce que d'un point de vue de la didactique des mathématiques le passage à la limite formellement sans préavis provoque déjà un obstacle épistémologique important chez les étudiants.

En fin de compte, d'une manière globale, nous pouvons conclure que l'app oche du livre est intéressante parce que l'intuition, la visualisation et 'histoire des mathématiques sont bien exploitées. Cette approche est porteuse pour une bonne introduction du concept de dérivée.

De plus, nous remarquons que la visualisation en mathématiques est toujours privilégiée tout le long de ce livre, car ils présentent beaucoup de représentations graphiques bien faites et bien détaillées, ce qui est intéressant, surtout si on considère la date de cette publication (1990). Nous pouvons même dire, d'une certaine manière, que Lemman a été avant-gardiste pour l'époque dans l'appui qu'il fait sur les visualisations.

4.5 Analyse du manuel *Calcul différentiel* (2007), de Amiotte et Hamel, Editions du rénouveau pedagogique (ERPI), Québec

Nous pouvons remarquer dans ce manuel que le le concept de dérivée est introduit dès le début du livre, mais uniquement dans un exemple de physique mécanique, en utilisant des termes tirés de la physique, des équations en physique, des variables et des constantes déjà connues dans un autre domaine que les mathématiques. Or, les étudiants du cegep n'ont probablement pas encore débuté le cours de physique mécanique lorsqu'ils commencent le cours de dérivée et de limites. De plus, on définit les concepts de vitesse moyenne et de vitesse instantanée à la place de parler du taux de variation moyen et instantané de la fonction, des concepts qui sont beaucoup plus mathématiques que physiques. Après cette explication sur la dérivée, le livre s'engage dans le calcul de limites et d'indéterminations. Le manuel commence par la dérivée avec un exemple et ensuite donne un exemple de calcul intégral pour après parler des limites et des indéterminations pour finalement en revenir à la dérivée (Hamel et Amyotte, 2007, chapitre 1).

Les exemples du manuel sont toujours accompagnés de la règle de la fonction en jeu, mais on ne parle pas du domaine de la fonction, ce qui pourrait être utile pour introduire dès le début de l'étude une habitude chez l'étudiant à trouver les restrictions possibles de la fonction. C'est essentiel à l'étude d'une fonction parce que c'est justement là où

il y a une restriction dans le domaine de la règle d'une fonction, il peut se passer « quelque chose de spécial » dans le graphique représentant cette fonction. De plus, l'étudiant n'a jamais l'occasion ou le mandat de trouver la règle de la fonction à partir de la situation donnée en mots, dans un graphique ou dans une table de valeurs. La situation présente toujours la formule algébrique de la règle de la fonction. On fait alors travailler l'élève uniquement dans un mode de représentation algébrique alors que les autres modes de représentation pourraient très bien l'aider à mieux comprendre les différents concepts en jeu dans l'apprentissage du calcul différentiel, dans le le sens de Duval (1988, 1993).

À la page 62 commence le deuxième chapitre sur la dérivée des fonctions algébriques et on peut y voir l'image suivante :

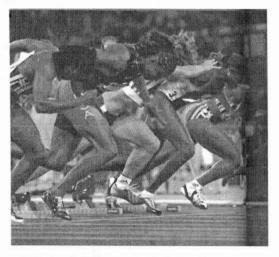


Figure 4.8 Manuel *Calcul différentiel* (2007), de Amiotte et Hamel, p.62

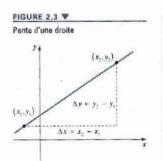
Nous trouvons que cette image représente bien le concept intuitif de dérivée, en illustrant la dérivée comme une vitesse instantanée. Dans la photo, on voit des coureurs olympiques et on peut s'imaginer que mathématiquement, on pourrait analyser la course pour y déceler des vitesses moyennes et des vitesses instantanées. À différents moments de la course, les coureurs auront une vitesse variable qu'on peut représenter à l'aide d'une fonction dérivée de la fonction de la position en fonction du temps.

Après une étude plus générale des limites et de la continuité, on arrive à des limites beaucoup plus importantes dans le calcul différentiel comme celle qui est connue sous le nom de limite fondamentale qui permet le calcul de la dérivée d'une fonction si la limite existe en un point :

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Selon Hamel et Amyotte (2007), cette limite, qui donne le taux de variation instantané de la fonction f, est si importante qu'on lui attribue un nom particulier : la dérivée. On parle alors dans le livre du taux de variation moyen et du taux de variation instantané dans le but d'expliquer ce qu'est la dérivée d'une fonction et comment on peut la conceptualiser à l'aide des limites.

Tout d'abord, les auteurs commencent ce chapitre par un rappel sur la définition d'une droite, de l'équation d'une droite, de la pente d'une droite, de la détermination de la règle d'une droite, etc. Toutes ces notions sont en fait des notions de troisième secondaire avec lesquelles les étudiants devraient être familiers. En fait, on retrouve la démarche adoptée par Hamel et Amyotte, un manuel avec les notions nécessaires à l'apprentissage du calcul (algèbre, géométrie, fonctions, etc.), mais qui ne sont pas propres au calcul différentiel.



Pour déterminer l'équation d'une droite, on a besoin de deux points de cette droite ou bien de la pente et d'un point de la droite.

La pente d'une droite se détermine à l'aide de deux points de celle-ci (figure 2.3). Soit (x_1, y_1) et (x_2, y_2) deux points d'une droite tels que $x_1 \neq x_2$. On définit la pente de cette droite par le rapport

$$m = \frac{\text{variation de } y}{\text{variation de } x} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Figure 4.9

manuel Calcul différentiel (2007), de Amiotte et Hamel, p.64

Il faut faire attention lorsqu'on aborde la question des droites et de leurs équations. En effet, il faut faire une distinction entre la pente d'une droite et son taux de variation. La pente est une valeur que l'on peut associer à l'inclinaison d'une droite, dans une approche géométrique, on observe l'inclinaison de la droite par rapport à l'axe horizontal. Le taux de variation, quant à lui, est un concept algébrique qui est calculé à l'aide de la formule décrite dans la figure 4.9. Les auteurs font donc une erreur en appelant le taux de variation de la droite une pente.

Ensuite, ils abordent en même temps les notions de droite sécante à la courbe d'une fonction et le taux de variation moyen de la courbe de la fonction. Ils présentent la figure 4.10 :

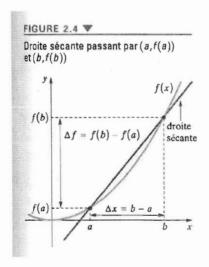


Figure 4.10 Manuel Calcul différentiel (2007), de Amiotte et Hamel, p.65

Nous trouvons que la représentation graphique est très bien conçue parce qu'elle est complète en ce sens qu'elle contient tous les éléments qu'on pourrait vouloir voir sur le même graphique. En effet, les valeurs sont toutes représentées sur les axes, autant pour la variable indépendante que pour la variable dépendante (parfois on oublie les valeurs de la variable dépendante). De plus, on y affiche les variations des deux

variables comme étant une distance entre deux valeurs, ce qui est très bien. Malheureusement, on identifie mal l'axe vertical avec « y » plutôt que « f(x) ». Sinon, c'est une très bonne représentation visuelle de la notion de sécante à une courbe. On remarque cependant qu'on utilise ici le graphique classique pour représenter la dérivée : le graphique de la fonction quadratique de base représentée dans le premier quadrant. Or, comme nous l'avons vu dans le MAT7191 Didactique du calcul différentiel et intégral donné par Fernando Hitt en 2016 à l'UQAM et tel que par Dufour (2011), ceci peut parfois poser problème. Certains enseignants du cegep utilisent cette représentation pour expliquer tous les concepts liés au calcul différentiel, même dans les exercices où ce n'est pas une quadratique qui est en jeu.

Le manuel aborde ensuite la notion de droite tangente et de taux de variation instantané. Encore une fois, ces deux concepts sont étroitement liés et les auteurs utilisent ce lien pour introduire le concept de taux de variation instantané à l'aide de la droite tangente. Ils donnent alors la définition et la représentation suivantes (voir figure 4.11) :

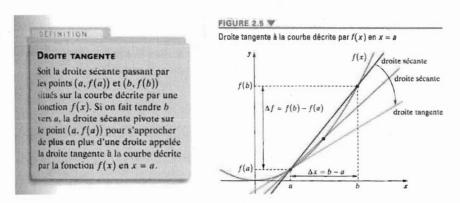
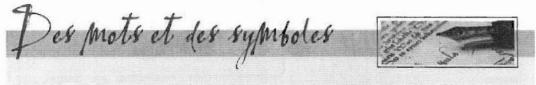


Figure 4.11 Manuel Calcul différentiel (2007), de Amiotte et Hamel, p.66

Tout d'abord, on peut faire le même constat ici, le graphique utilisé est celui de la fonction quadratique de base représentée dans le premier quadrant. On peut supposer que les auteurs souhaitent faire un lien avec le graphique précédent. De plus, on peut souligner que la définition qui est proposée semble donner beaucoup de sens aux concepts de droite sécante et de taux de variation instantané. On sent vraiment que la

limite des droites sécantes dans ce cas-ci est une droite tangente à la courbe. Il faudrait tout simplement préciser que ce sont les valeurs de la variable b qui se rapprochent de la valeur de a.

Tout au long du manuel, on présente des capsules historiques et étymologiques qui permettent de motiver l'étudiant à l'apprentissage des différents concepts parce qu'il peut constater rapidement quelle était l'utilité d'origine des notions mathématiques qu'il apprend aujourd'hui. Par exemple, une capsule qui a retenu notre attention se retrouve à la page 73 du manuel :



L coupe donc une courbe et la sépare. Par ailleurs, le mot tangente tire son origine du verbe latin tangere qui veut dire « toucher ». Dans les textes plus anciens, les mathématiciens utilisaient aussi le mot touchante, ce dernier étant depuis disparu. Toutefois, ce terme vieilli rend bien compte de l'idée qu'on se fait généralement d'une tangente, c'est-à-dire une droite qui ne fait que toucher, qu'effleurer une courbe sans la traverser, ni la couper, au point de contact avec la courbe. Enfin, le qualificatif normal tire son origine du latin norma qui veut dire « équerre », figure que forment les droites tangente et normale au point de tangence.

Figure 4.12 Manuel Calcul différentiel (2007), de Amiotte et Hamel, p.73

Cette petite section a retenu notre attention parce qu'elle aborde une problématique que nous avons vu dans le cours MAT 7191-ÉTÉ 2016 à l'UQAM. D'un côté, elle explique l'origine du mot « sécante » puis elle explique que la tangente était autrefois appelée la « touchante », terme qui est beaucoup moins difficile à comprendre que le concept de tangente parce qu'il exprime le fait qu'on cherche une droite qui ne fait qu'effleurer ou frôler la courbe.

D'un autre côté, on voit que pour amorcer le sujet de la limite, les auteurs essayent de le présenter de façon intuitive en proposant comme premier exemple, le problème suivant (voir figure 4.13) :

Considérons un aquarium vide. On y verse de l'eau à un certain rythme. Notons h la fonction donnant la hauteur du niveau de l'eau dans l'aquarium t secondes après le début du remplissage et V(h) la fonction donnant le volume de l'eau dans l'aquarium.

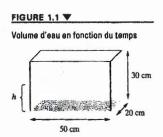


Figure 4.13 Manuel Calcul différentiel (2007), de Amiotte et Hamel, p.66

La première erreur qu'on a trouvée est que, dans la figure, le volume d'eau dans l'aquarium est écrit en fonction du temps. On voit bien que, dans ce cas, le volume est en fait la fonction de la hauteur (et l'hauteur est en fonction du temps). De plus, nous notons qu'au début l'auteur parle du versement de l'eau à un certain rythme, mais quel est ce rythme? Quelle est la pertinence de parler du temps dans ce cas ?

En plus, les formules sont données. Il aurait été intéressant que les étudiants aient à construire ces formules. En fait, au lieu de commencer avec une situation pour modéliser, il s'agit d'une simple application.

Par contre, lorsque l'auteur dit que plus la hauteur (h) s'approche de 10 cm, plus le volume (V) s'approche de 10 000 cm³, l'idée de s'approcher est adéquate pour conceptualiser le concept de la limite. Cependant, lorsque l'auteur écrit :

 $\lim_{n\to 10} V(h) = 10\,000\,cm^3$, il n'explicite pas pourquoi on a cette égalité. Dans ce cas, pourquoi on ne précise pas qu'il s'agit d'une tendance et non d'une valeur précise ? En effet, lorsqu'on dit que la limite d'une fonction f(x) est L, on parle de convergence.

Ainsi, à travers cet exemple, on introduit les concepts de limite et de convergence. En accord avec les propos explicités par Sierpinska et Hitt, on peut dire qu'on fait face à

un problème d'enseignement. En effet, Hitt (2006), dans son expérimentation avec des enseignants de cegep, rapporte une discussion qu'ils ont eu sur la pertinence d'utiliser une notation différente pour la limite, soit $\lim_{n\to 10} V(x) \xrightarrow[n\to 10]{} 10\,000$ (représentation spontanée) au lieu de $\lim_{n\to 10} V(h) = 10\,000$ (représentation institutionnelle). Ainsi, comme Sierpinska le mentionne, on doit faire attention aux problèmes liés aux obstacles épistémologiques.

Entre autres, dès qu'on écrit le symbole de la limite $\lim_{x\to a} f(x) = L$, non seulement est sous-entendu que tout est déjà fait, mais encore qu'il faut donner une interprétation du rôle de chaque élément qui entre en jeu dans cette expression. C'est-à-dire, en analysant l'expression $\lim_{x\to a} f(x) = L$ on pourrait la diviser en 4 morceaux :

- 1. $\lim_{x\to a}$: C'est traduit comme la limite lorsque x tend vers a;
- **2.** f(x): Représente la fonction en question ;
- 3. = : Le symbole de l'égalité qu'indique la convergence de la limite et qui doit être lié à l'interprétation d'une définition (regarder l'égalité comme une notation qui nous renvoie à la définition formelle). Ou bien de le dire tend vers ... et l'on tombe sur une interprétation intuitive qui pourrait promouvoir un obstacle cognitif.
- **4.** L : Représente la valeur de la limite.

Finalement, on arrive à l'interprétation suivante en mots :

 $\lim_{x\to a} f(x) = L$: La limite de la fonction f(x) tend vers la valeur L, lorsque x est proche de la valeur de a ($x \to a$).

En analysant le rôle de l'égalité plus en profondeur, nous pouvons signaler que le signe d'égalité dépend du contenu mathématique, par exemple :

- a) En arithmétique, 3+5= (le signe égal est lié à un calcul à réaliser),
- b) En algèbre, 3x+2 = 7x-1 (le signe égal est lié à la résolution d'une équation),
- c) $\lim_{x\to a} f(x) = L$ (le signe égal est lié à la définition formelle de la limite):

Soit une fonction f(x). Nous disons que f(x) converge vers L quand x tend vers a $\lim_{x\to a} f(x) = L$:

$$si \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists \ \delta > 0 \ tel \ que \ 0 < |x-a| < \delta \Longrightarrow |f(x)-L| < \varepsilon.$$

Les auteurs de manuels et les enseignants ont un vrai problème pour justifier ce signe d'égalité qui jusqu'à maintenant n'a pas été résolu d'un point de vue didactique, l'obstacle cognitif restant présent.

Si on revient au manuel scolaire, ony trouve par la suite un autre exemple qui sert à introduire le concept de limite. Dans ce cas, pour expliquer la limite, les auteurs ont choisi de cibler une situation provenant de la physique et par conséquent ils ont besoin de définitions précises de ce domaine, la physique, telles que la vitesse moyenne et la vitesse instantanée ce qui complique la résolution de la situation. Pour la vitesse moyenne, nous ne pensons pas que ça pose problème vu que c'est une définition simple. Par contre, en ce qui a trait à la vitesse instantanée, on ressent la nécessité de bien comprendre le concept de limite d'une fonction, car effectivement l'idée de la convergence est présente dans cette situation, c.-à-d. lorsqu'on dit que la tendance de la longueur des intervalles de temps s'approche de zéro (0), nous sommes tombés dans le « monde » des limites ce qui n'est pas encore clair chez les apprenants à ce moment.

Pour conclure, on voit dans cet exemple tiré du manuel que la question de la droite tangente à une courbe est explorée, mais sans une explication complète, car la droite tangente n'est pas explicitée que succinctement. De plus, Castela (1995), souligne l'importance de s'attarder au passage du point de vue global de la tangente (le cas de l'étude de la droite tangente à un cercle est vu à l'école secondaire) au point de vue

beaucoup plus complexe qui est celui de la dérivée, ce passage étant difficile. De surcroît, dans l'apprentissage de la dérivée, le rôle de la droite tangente à une courbe d'une fonction devrait être pris en compte avec précaution, car cette dernière constitue un obstacle épistémologique. Puis, étant donné que la droite tangente est un élément important pour la compréhension de la dérivée, c'est pertinent de faire le lien entre la droite tangente et la géométrie analytique.

En conclusion, nous trouvons que le livre de Hamel et Amyotte est très didactique dans ses approches pédagogiques, dépendamment toutefois de l'utilisation que peut en faire l'enseignant qui dispense le cours. Les explications, les définitions et les exemples résolus du livre sont toujours accompagnés d'images, de représentations graphiques, de tables de valeurs, de textes explicatifs, de capsules historiques, etc. Aussi, on y voit beaucoup de couleurs, le fini est très attrayant pour l'étudiant en plus d'être facile à lire et à comprendre. Il y a ensuite beaucoup d'exercices qui ont tous un corrigé intégré à la fin du livre. D'ailleurs, le solutionnaire comporte beaucoup plus d'explications que pour certains autres livres qui se contentent de donner la réponse. Nous considérons que ce livre est très adéquat pour l'apprentissage du calcul différentiel au cégep. De plus, ce manuel répond bien aux trois plans de cours que nous avons analysé (voir 4.5) ainsi qu'à ce qui est demandé dans le programme du ministère. Il respecte ainsi les éléments d'apprentissage visés par ces programmes. Il en revient donc à l'enseignant du cours de calcul différentiel d'utiliser ce livre à bon escient dans son cours.

4.6 Analyse du manuel *Calcul Différentiel* de Éric Brunelle et Marc-André Désautels (2011), les éditions CEC inc. Québec.

Dans ce manuel, nous observons que les thèmes liés à des questions tirées de la physique sont utilisés pour introduire la notion de limite. Le problème (voir figure 4.14) est un exemple de ces situations :

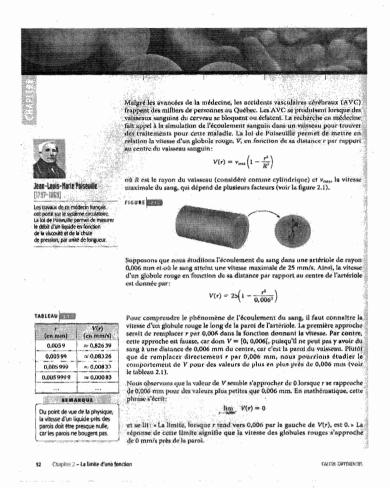


Figure 4.14 Manuel *Calcul Différentiel* de Éric Brunelle et Marc-André Désautels (2011), les éditions CEC inc. Québec, p.52

De la même manière que pour l'exercice précédent (mettre le numéro de la figure), les données sont toutes fournies (formules et table de valeurs), de telle façon que le travail des étudiants autour de la limite d'une fonction et de la dérivée est limité.

De plus, nous observons que la représentation institutionnelle de la limite est donnée d'un seul coup et sans aucune explication préalable ce qui complique aussi la compréhension de ce concept.

Finalement, l'exercice énonce la limite à gauche comme si cette dernière était évidente, simple à comprendre.

Dans ce même manuel, nous constatons une tentative de mener les étudiants vers une approche intuitive de la limite. Remarquons que l'idée de s'approcher d'une valeur est présentée étant donné que les mots utilisés sont bien en accord avec la définition formelle de la limite ce qui est un point positif. Par contre, dans la représentation graphique correspondante nous notons quelques erreurs importantes. Par exemple, la fourmi est dessinée de telle façon que ça nous amène à penser qu'elle va en direction contraire du point de convergence de la fonction qui est le sujet abordé dans l'exercice. Il faut en fait considérer que la fourmi marche à l'envers (Voir figure 4.15).

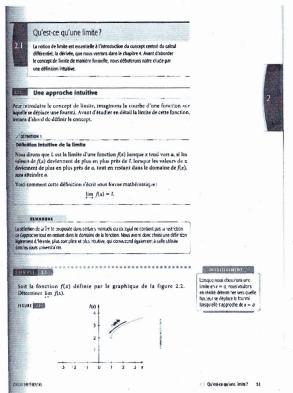
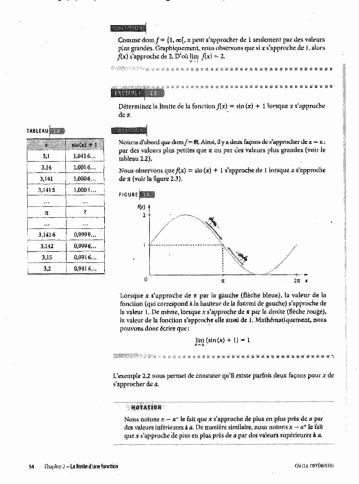


Figure 4.15 Manuel Calcul Différentiel de Éric Brunelle et Marc-André Désautels (2011), les éditions CEC inc. Québec, p.53

Nous pouvons également remarquer que les flèches dessinées sur la représentation graphique désignent le parcours de la fourmi et indiquent la valeur pour laquelle la fonction f(x) converge lorsque la variable indépendante x varie (voir figure 4.16). Par contre, selon nous, il y a un manque dans cette représentation qui est le fait de ne pas indiquer sur la figure que la variation de x (variable indépendante) est responsable du mouvement de la fonction f(x) (variable dépendante).



4.16 Manuel Calcul Différentiel de Éric Brunelle et Marc-André Désautels (2011), les éditions CEC inc. Québec, p.54

4.7 Conclusion : que peut-on tirer de l'analyse des manuels scolaires ?

De façon générale on peut dire que du point de vue didactique ces livres sont bien conçus, c'est-à-dire qu'ils répondent assez bien aux exigences du ministère de l'Éducation (voir 4.6.1).

Notamment, il faut souligner que les chapitres commencent par une introduction qui établit un lien avec les chapitres précédents, ce qu'on considère comme un point fort.

Par contre, le manuel de Amyotte, par exemple, débute par une introduction de la limite. Il nous semble que ce serait pertinent pour enseigner la dérivée d'aborder à l'avance les fonctions en faisant un résumé des principales idées liées à celles-ci, ce qu'on ne trouve dans ce manuel. De plus, lorsque les auteurs commencent le chapitre 1, ils présentent la limite avec une approche intuitive et ils parlent de la vitesse instantanée, ce qui, à notre avis, donne une idée de la dérivée, ce qui est très tôt parce que le concept de limite n'est pas encore maitrisé chez les élèves.

Pour finaliser, nous voyons qu'il y a certaines contradictions dans le langage utilisé, par exemple, dans le manuel d'Amiotte, nous voyons que tout le jargon formel des mathématiques lié à l'infini actuel (le concept formel de l'infini) est exposé dans des exemples et des exercices en même temps que le langage textuel est notamment marqué pour l'infini potentiel qui est lié à l'intuition, ce qui représente toujours le gros problème du calcul différentiel comme nous avons notés dans la littérature déjà exposée dans les chapitres précédents.

4.3 Conclusion

L'analyse des planes d'études nous a montré qu'en réalité il a eu très peu de changements dans les programmes, c'est plutôt dans les manuels scolaires que l'on voit un grand changement, par exemple l'approche formellede Ménard a un grand contraste

avec celui de Éric Brunelle et Marc-André Désautels. On peut remarquer la grande tendance de s'approcher à l'enseignement à travers les applications pour développer les concepts. Par contre, avec Ménard, lui va prioriser les définitions et après va montrer les applications.

Probablement la production ailleurs de manuels scolaires où les applications sont privilégiés, et/ou l'approche par situations problèmes du curriculum québécois à l'école primaire et secondaire, ont eu une influence dans cette nouvelle approche des auteurs des manuels récents.

Dans le chapitre suivant, nous proposons une analyse des travaux effectués par Fermat. En effet, nous avons revisité l'étude de Fermat pour en dégager une approche intuitive, ce travail a inspiré la séquence d'enseignement que nous avons élaborée sur le calcul différentiel. Ainsi, nous présentons une séquence d'enseignement menant à un aperçu intuitif du calcul différentiel. Pour apprécier cette méthode, il faut se placer dans une approche des infiniment petits et dans l'approche visuelle indispensable liée à la coordination entre représentations dans le sens de Duval (1993).

CHAPITRE V

DÉVELOPPEMENT ET ANALYSE MATHÉMATIQUE DE DEUX MÉTHODES DE FERMAT COMME LA BASE POUR UNE PROPOSITION D'ENSEIGNEMENT DE LA DÉRIVÉE

Dans ce chapitre, nous allons atteindre un de nos objectifs explicités dans l'introduction de ce mémoire, soit de développer une proposition d'enseignement du calcul différentiel autour de la dérivée. Pour cela, nous allons nous appuyer sur l'histoire du calcul différentiel pour montrer la pertinence et l'importance de respecter les processus historiques dans sa construction. Notre objectif est de construire chez les étudiants un concept solide du calcul différentiel, englobant les aspects intuitifs, algébriques et géométriques. Mais avant de présenter notre proposition d'enseignement qui s'appuie sur les travaux de Fermat, faisons un détour dans l'histoire pour mieux comprendre l'apport de ces mathématiques dans le calcul différentiel.

5.1 Émergence du calcul différentiel : un intérêt pour la période de Fermat

Le XVII^e siècle a été une période de grand développement des sciences mathématiques, et plus particulièrement du calcul différentiel, qui a gagné beaucoup de puissance grâce aux travaux des mathématiciens de cette période. Selon Boyer (1968 : 229-252), dans son livre *História da Matemática*, les principaux personnages de cette époque ont été René Descartes (1596-1650) et Pierre de Fermat (1601-1665).

D'après Boyer (*ibid.*), le mathématicien le plus connu et le plus important du XVII^e siècle a été Descartes, surtout pour l'invention de la géométrie analytique à travers l'arithmétisation de la géométrie et de l'algèbre géométrique. René Descartes a peut-être fait la plus importante contribution aux mathématiques depuis le temps des Grecs

avec l'invention de la géométrie analytique. Cette invention a permis, à postériori, une avancée pour les calculs différentiel et intégral. Le travail de Descartes nous a montré que lignes, superficies et formes géométriques peuvent être représentées par des équations algébriques et que de telles équations peuvent également être représentées géométriquement. Cette découverte a été très importante, car cela a permis de faire l'analyse de formes géométriques en s'appuyant sur des équations algébriques (Bardi, 2008 : 24). Toutefois, en ce qui a trait au calcul différentiel, c'est la contribution de Pierre de Fermat qui a été cruciale, comme on peut le voir dans cette citation de Laplace : « Fermat, le vrai inventeur du calcul différentiel » (Laplace, cité par Boyer, 1968 : 229, notre traduction).

Selon l'historien Jason Socrates Bardi, la contribution de Fermat au calcul a été reconnue par quelques-uns de ses pairs : ceux qui étaient en faveur de ses découvertes ont proclamé M. Fermat l'inventeur du calcul différentiel de l'époque.

Fermat est né à Beaumont-de-Lomagne, une petite ville au sud de Toulouse, en France. Il a étudié le droit à Toulouse. Il a commencé sa carrière comme avocat, puis a travaillé comme conseiller juridique. Cependant, même s'il était un homme très occupé, il semble que cet érudit a pris le temps de se dévouer à la littérature classique et aux sciences, et plus particulièrement aux sciences mathématiques. C'est ainsi que Fermat a dédié la même ferveur au droit qu'aux mathématiques. En 1629, il a commencé à faire d'importantes découvertes en mathématiques. Pendant cette année, il a notamment consacré son temps à la « restauration » d'œuvres mathématiques de l'Antiquité qui étaient considérées comme perdues. Fermat, par exemple, a reconstruit l'œuvre Les Lieux plats d'Apollonios à partir d'allusions contenues dans la Collection mathématique de Pappus. Ce travail l'a amené à la découverte, en 1636, du principe fondamental de la géométrie analytique : dans une équation dont il y a deux quantités inconnues, on a toujours un lieu qui décrit une courbe ou une droite (Boyer, 1996 : 238).

Fermat a écrit un court travail intitulé Ad Locos Planos et Solidos Isagoge (Introduction aux lieux plats et solides). Dans cet ouvrage, Fermat utilise la notation de François Viète (1540-1603) pour décrire le cas le plus simple d'une équation linéaire : « D in A aequeteur B in E » (dans le symbolisme d'aujourd'hui : Dx = By). Le graphique est une droite qui passe par l'origine. Comme Descartes, Fermat n'utilisait pas les abscisses négatives. Ainsi, cette équation représente une demi-droite dont l'extrémité est à l'origine du système des axes de coordonnées (Boyer, 1996 : 238).

Par la suite, Fermat a montré que $xy = k^2$ représente une hyperbole et qu'une équation de la forme $xy + a^2 = bx + cy$ peut être réduite à une autre équation de la forme $xy = k^2$ par une translation des axes. Finalement, il a montré que $a^2 \pm x^2 = by$ est une parabole, que $x^2 + y^2 + 2ax + 2by = c^2$ est un cercle, et que $a^2 - x^2 = ky^2$ est une hyperbole.

D'après Boyer (*ibid.*), pour les représentations graphiques des courbes citées ci-dessus, Fermat a utilisé un système basé seulement sur une demi-droite positive. La correspondance biunivoque entre l'ensemble des nombres réels positifs (les seuls qu'il utilisait) et la demi-droite était sous-entendue.

Étant donné que Fermat ne publiait pas systématiquement ses travaux, la géométrie analytique est beaucoup plus associée aux travaux de Descartes. Selon Boyer (*ibid.*), il est vraiment dommage que Fermat ait refusé de publier ses résultats, car les explications et même les symbolismes utilisés par ce dernier étaient beaucoup plus systématiques, et même plus didactiques, que ceux de Descartes. L'œuvre de Fermat circulait sous la forme de manuscrits jusqu'à la publication de *Varia Opera Mathematica* qui, finalement, a exposé leurs découvertes mathématiques si importantes. Comme Descartes, Fermat a perçu l'existence de la géométrie analytique à deux dimensions et à plusieurs dimensions. Cependant, il a fallu attendre le XVIIIe siècle pour que la géométrie analytique de plus d'une dimension soit finalement formalisée.

Fermat et Descartes, toutefois, correspondaient fréquemment par l'intermédiaire de Mersenne et de Roberval. En fait, Mersenne et Roberval ont été des personnages de grande importance, car ils étaient les responsables de la divulgation et de la communication scientifique à l'époque (Boyer, *ibid.* : 236).

D'après Boyer (1996 : 238), Fermat a fait progresser les mathématiques depuis 1629 : il a permis le développement de la géométrie analytique et a découvert le calcul différentiel. En effet, ce sont ses découvertes sur les lieux géométriques qui ont permis d'autres découvertes et deux importants travaux, celui portant sur la méthode permettant de trouver les points extrêmes d'une fonction (maximums et minimums) et celui sur la méthode qui précède celle des points extrêmes : l'invention des tangentes à une courbe.

Il est bien connu, en effet, que Fermat détenait depuis quelque temps la méthode pour trouver les points extrêmes d'une fonction. Par exemple, dans une lettre à Roberval datée du 22 septembre 1636, Fermat dit avoir donné sa méthode à Jean d'Espagnet (1564-1637) environ sept ans auparavant, donc il la connaissait depuis 1629, (Œuvres, livre II, p. 71-74, cité par Giusti dans son article Les méthodes des maxima et minima de Fermat).

Pour trouver les points extrêmes d'une courbe, Fermat a utilisé des lieux mathématiques. Si on utilise la notation symbolique d'aujourd'hui, ce sont des équations de la forme $y = x^n$ qui sont appelées aujourd'hui « paraboles de Fermat » si n est positif ou « hyperboles de Fermat » si n est négatif. En effet, pour des courbes polynomiales de la forme y = f(x), Fermat a créé une méthode assez ingénieuse pour trouver les points dont la fonction assume le point maximum ou minimum. Sa méthode consiste à comparer la valeur de la fonction à un point f(x) et à un point voisin f(x+e). De façon générale, ces valeurs peuvent être distinctes, mais dans le voisinage d'un extrême (soit maximum ou minimum d'une fonction), ces valeurs peuvent être très proches. Pourtant, Fermat a suggéré d'égaler f(x) à f(x+e). Il faut noter que Fermat

considère que ces points existent et, par conséquent, qu'il est possible de les trouver en utilisant sa méthode. C'est essentiellement en cela que consiste l'idée de Fermat pour trouver ces points extrêmes, comme on peut le voir dans l'extrait du document Œuvres de Fermat rédigé par Fermat en 1636 et traduit par Paul Tannery en 1894.

Cependant, il est important de souligner qu'à cette époque-là, Fermat ne possédait pas la connaissance de la limite d'une fonction, ni même la connaissance du concept de fonction comme on les connait de nos jours. En effet, la notation fonctionnelle désormais classique f(x) n'a été introduite qu'au XVIII^e siècle par Leonhard Euler (1707-1783) (par exemple, dans son œuvre *Introductio in Analysin Infinitorum*). En outre, d'après Hitt (1994), si Bernoulli a donné en 1718 une définition de « fonction », Euler a mis le concept de fonction au centre des mathématiques, ce concept étant devenu la *colonne vertébrale* des mathématiques. Deux siècles plus tard, les représentations graphiques ont évolué grâce aux contributions de Descartes et de Fermat.

Si le XVIII^e siècle est marqué par des idées nouvelles, dont la caractéristique commune sera l'abandon, plus ou moins important, de la rigueur géométrique grecque, ces nouvelles méthodes ne sont pas une renonciation aux découvertes déjà faites par les anciens, mais plutôt une coexistence entre elles, qui peut conduire à des résultats féconds. En effet, ces deux démarches parallèles et concurrentes (l'heuristique et la démonstrative) vont coexister jusqu'à la fin du XVIII^e siècle, en attendant de nouveaux critères de validation ou de légitimation, c'est-à-dire jusqu'à la création de la conceptualisation rigoureuse du calcul infinitésimal proprement dit, ce que nous révèle la commission inter-IREM « Épistémologie et histoire des mathématiques » dans le livre *Aux origines du calcul infinitésimal* (p. 79 à 82).

Fermat expose sa nouvelle méthode qui permet non seulement de trouver le maximum et le minimum d'une courbe, mais aussi de chercher certaines tangentes. Par ailleurs, il a indiqué des généralisations d'applications possibles de sa méthode, comme pour les points d'inflexion des courbes, les centres de gravité, les asymptotes, etc., comme

mentionné par la commission inter-IREM, dans le livre Aux origines du calcul infinitésimal (p. 120 à 123).

De nos jours, il est connu que, si une fonction f dérivable en un extrémum est soit maximum ou minimum, alors la dérivée à ce point est nulle (f'(p) = 0).

5.2 Les méthodes de Fermat

Ainsi, on peut reconnaître à Pierre de Fermat (1601-1665) son importante contribution à la construction du calcul différentiel. Nous allons maintenant présenter deux méthodes créées par Fermat :

la méthode pour trouver les points extrémums en analysant la covariation entre variables (que dans notre cas, nous allons l'utiliser pour une approche fonctionnelle) et la méthode pour trouver la droite tangente a un point d'une courbe (pas nécessairement une représentation d'une fonction).

5.2.1 La méthode de Fermat pour trouver les points extrémums dans la covariation de deux variables

Pour des courbes associées à la covariation entre deux variables, Fermat a créé une méthode assez ingénieuse pour trouver les points dont la courbe assume le point maximum ou minimum. Sa méthode consiste à comparer la valeur d'une des variables (variable indépendante) en un point et la valeur de l'autre variable (variable dépendante) dans un point voisin de la première (x+e). De façon générale, ces valeurs de la variable dépendante peuvent être distinctes, mais, dans le voisinage d'un extrême (soit maximum ou minimum dans cette covariation), ces valeurs peuvent être très proches. Pourtant, Fermat a suggéré d'égaler la valeur de la deuxième variable (variable dépendante). Il faut noter que Fermat considère que ces points existent et que, par

conséquent, il est possible de les trouver en utilisant sa méthode. Cette méthode est essentiellement basée sur le mot « adégalité », comme on peut le voir dans l'extrait du document *Œuvres de Fermat* rédigé par Fermat en 1636 et traduit par Paul Tannery en 1894 (voir figure 5.1)





Pierre de Fermat

MÉTHODE

POUR LA

RECHERCHE DU MAXIMUM ET DU MINIMUM.

Toute la théorie de la recherche du maximum et du minimum suppose la position de deux inconnues et la seule règle que voici :

Soit a une inconnue quelconque de la question (qu'elle ait une, deux ou trois dimensions, suivant qu'il convient d'après l'énoncé). On exprimera la quantité maxima ou minima en a, au moyen de termes qui pourront être de degrés quelconques. On substituera ensuite a + e à l'inconnue primitive a, et on exprimera ainsi la quantité maxima ou minima en termes où entreront a et e à des degrés quelconques. On adégalera, pour parler comme Diophante, les deux expressions de la quantité maxima ou minima, et un retranchera les termes communs de part et d'autre. Cela fait, il se trouvera que de part et d'autre tous les termes seront affectés de e ou d'une de ses puissances. On divisera tous les termes par e, ou par une puissance de e d'un degré plus élevé, de façon que dans l'un au moins des termes de l'un quelconque des membres e disparaisse entièrement. On supprimera ensuite tous les termes où entrera encore e ou l'une de ses puissances et l'on égalera les autres, ou bien, si dans l'un des membres il ne reste rien, on égalera, ce qui revient au même, les termes en plus aux termes en moins. La résolution de cette dernière équation donnera la valeur de a, qui conduira au maximum ou au minimum, en reprenant sa première expression.

FERNAT. — III.

Figure 5.1 Original d'*Euvres de Fermat* qui date de 1636.

Comme nous le voyons dans l'extrait original de Ferrmat, sa méthode est basée fondamentalement sur le concept du mot « adégalité », qui est symbolisé par le signe ~. Selon Jacques Bair (2008.), « adégalité » est la traduction du mot latin « adeaqualitas », dont l'équivalent en langue anglaise est « approximate equality ». Dans le dictionnaire Larousse (2018), « aproximate » a été traduit par le mot « approximatif » (« qui est le résultat d'une approximation, qui est fait par approximation; somme, soustraction approximative »). Nous pouvons constater cette signification dans l'extrait (voir Figure 1) où Fermat écrit « On adégalera, pour parler comme Diophante... ». Ici, nous notons clairement l'érudition de Fermat, qui fait appel aux personnages de l'Antiquité (Castro, sous presse).

En somme, cette méthode pour trouver le maximum ou le minimum d'une courbe, dans son essence, consiste à percevoir que les valeurs de la variable dépendante ne sont pas égales, presque égales (sauf par un infinitésimal que Fermat va appeler e), et que plus petit est e, plus proche sera la pseudo-égalité de la vraie égalité. C'est pour cela que, prématurément, Ferrnat suggère la division par e et qu'ensuite il néglige le terme e en considérant que sa valeur est égale à zéro. Les résultats de cette dernière équation lui donnent les abscisses des points de maximum ou de minimum du polynôme. En effet, l'irruption de la géométrie analytique développée par Descartes et Fermat a été fondamentale pour le développement du calcul infinitésimal, car elle a permis à ces courbes d'être découvertes et étudiées. Chez Fermat, les infiniments petits ont surgi grâce aux problèmes mathématiques dans lesquels il s'est impliqué. Ces problèmes sont précisément le même genre de problèmes qui ont perturbé les mathématiciens de l'Antiquité. Fermat, en les étudiant, a créé des méthodes intéressantes que nous allons présenter maintenant. Le but de Fermat était de trouver des solutions à des problèmes géométriques et de présenter des arguments algébriques significatifs afin de justifier de telles méthodes.

Bair (2010), dans son article *Les infiniment petits selon Fermat : prémisses de la notion de dérivée*, souligne qu'en fait, Fermat présente plusieurs méthodes pour résoudre des problèmes de ce genre et qu'il illustre sa méthode par des exemples. Nous analyserons ici la méthode qui se trouve dans la publication *Œuvres de Fermat*, au début du chapitre intitulé « Méthode pour la recherche du maximum et du minimum » (p. 121 à 155) (Castro, sous presse).

Pour élucider cette méthode, partons du premier exemple donné par Fermat :

Soit partager la droite AC en E, de sorte que $AE \times EC$ soit maximum.



Posons $AC = \mathbf{b}$; soit \mathbf{a} un des segments, l'autre sera $\mathbf{b} - \mathbf{a}$, et le produit dont on doit trouver le maximum : $b\mathbf{a} - \mathbf{a}^2$. Soit maintenant $\mathbf{a} + \mathbf{e}$ le premier segment de \mathbf{b} , le second sera $\mathbf{b} - \mathbf{a} - \mathbf{e}$, et le produit des segments :

$$ba - a^2 + be - 2ae - e^2$$
.

Il doit être adégalé au précédent :

$$ba - a^2$$

Supprimant les termes communs :

$$be \sim 2ae + e^2$$
.

Divisant tous les termes par e :

$$b \sim 2a + e$$
.

Supprimez e:

$$b = 2a$$
.

Pour résoudre le problème, il faut donc prendre la moitié de b.

Il est impossible de donner une méthode plus générale.

Extrait du texte original de Fermat (1636), traduit par Paul Tannery en 1894.

5.2.2 L'interprétation géométrique de la méthode de Fermat

Tableau 5.1 Exemple de Fermat

Exemple de Fermat

Soit à partager la droite AC, en E, en sorte que AE **X** EC soit maximum.



Posons AC = b; soit a un des segments, l'autre sera b - a, et le produit dont on doit trouver le maximum : $ba - a^2$. Soit maintenant a + e le premier segment de b, le second sera b - a - e, et le produit des segments : $ba - a^2 + be - 2ae - e^2$:

Il droit être **adégaler** au précédent : ba —

 a^2 ;

Supprimant les termes communs

be $\sim 2ae + e^2$;

Divisant tous les termes par e: $b \sim 2a + e$;

Supprimez e:b=2a.

Divisant tous les termes par e: $b \sim 2a + e$;

Supprimez e:b=2a.

Pour résoudre le problème, il faut donc

prendre la moitié de b. Il est impossible de

Interprétation géométrique de Fermat

À des fins d'élucidation, nous pouvons expliciter en détail les idées de Fermat, ainsi :

1) Prenons un segment AC de mesure b et nous voulons le diviser en deux autres segments de telle sorte que le produit de ces segments soit maximal.



1) Posons AC = b , AE = a, AE X EC = MAX :

$$a(b-a)=V$$

$$V = -a^2 + ab$$

2) Prenons un point E' sur AC



3) Posons EE' = e.

Or,
$$EC = b - a$$
, $AE' = a + e$. $Alors, E'C = b - a - e$

Donc, si nous cherchons que le nouveau produit AE'X E'C soit maximal, nous avons :

$$(a+e)(b-a-e)=V_1$$

$$V_1 = -a^2 - e^2 - 2ae + ab + eb$$

4) V doit être adégaler à V_1 :

$$-a^2 + ab \sim -a^2 - e^2 - 2ae + ab + eb$$

En supprimant les termes communs :

donner une méthode plus générale. (Fermat

lui-même)

 $-a^2 + ab \sim -a^2 - e^2 - 2ae + ab + eb$

$$2ae + e^2 \sim eb$$

En divisant tous les termes par e :

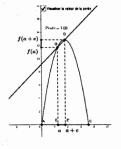
$$2a + e \sim b$$

Finalement en supprimant e:

$$b = 2a$$

Dans l'optique de Fermat, nous pouvons constater que dans son raisonnement, le symbole *e* semble désigner une variable tendant vers zéro.

Extrait du texte original de Fermat qui a été traduit par MM. Paul Tannery en 1894.



Le processus que Fermat a utilisé est presque le même qu'on utilise en calcul différentiel aujourd'hui, excepté que le symbole Δx ou h a interprété comme le petit e. En termes de mathématiques modernes, on peut l'interpréter comme :

Si une fonction f admet une valeur maximale ou minimale f(x), alors, dans un sens intuitif, il semble que la valeur de f(x) change très lentement proche de x; pourtant, si e est extrêmement petit, alors f(x) et f(x + e) sont approximativement égaux, c'est-à-dire:

$$f(x) \, \cong f(x+e)$$

Or, si f(x) est une courbe polynomiale, alors f(x + e) - f(x) pourrait être divisé par e. En faisant cette division, nous obtenons :

$$\left[\frac{f(x+e)-f(x)}{e}\right] \cong 0$$

Effectivement, la limite de ce quotient « égale zéro » est une approximation de la notion moderne de la dérivée, égalée à zéro pour trouver le maximum ou minimum associé. Néanmoins, dans ses écrits, Fermat n'a pas explicité un « processus de limite » où e tend vers zéro.

Si l'on reprend ce qui précède, nous voyons bien que la méthode engendrée par Fermat est ingénieuse, sur out à cause de l'interprétation géométrique qu'elle propose, car cette interprétation nous permet de regarder ce qui se passe aux points extrémums d'une fonction.

Une remarque intéressante est que cette méthode permet de comprendre comment, au XVIII^e siècle, bien avant la notion de fonction, on pouvait appréhender les notions de « minimum » et de « maximum » à travers la covariation entre deux variables. Il faut souligner qu'à cette époque-là, il manquait aussi d'autres connaissances mathématiques comme la définition de « fonction », la limite d'une fonction, la notion de dérivée, la notion de calcul infinitésimal ou différentiel et, encore, pour la résolution, la connaissance plus récente de l'analyse non standard de Robinson (1956) formalisation des infiniments petits (Castro, sous presse).

C'est pour cela que Fermat suggère prématurément la division par *e* et que, par la suite, il néglige le terme *e* en considérant que sa valeur est égale à zéro. Les résultats de cette dernière équation lui ont donné les abscisses des points de maximum ou de minimum dans la relation entre deux variables.

Par contre, il faut souligner qu'avec les connaissances mathématiques actuelles, nous croyons que Fermat propose une méthode intuitive pour développer la notion de tangente horizontale pour la recherche d'un maximum et d'un minimum d'une fonction continue, même si elle n'est pas formalisée dans l'analyse standard.

D'après Fermat (ibid.) lui-même :

Il est impossible de donner une méthode plus générale. [...] Cette méthode ne trompe jamais, et peut s'étendre à nombre des questions très belles; grâce à elle, nous avons trouvé les centres de gravité des figures terminées par des lignes droites et courbes, aussi bien que ceux de solides et nombre d'autres choses dont nous pourrons traiter ailleurs.

De nos jours, il est connu que, si une fonction f est dérivable en un extrémum, soit maximum ou minimum, alors la dérivée à ce point est nulle (f'(p) = 0).

5.2.3 Les conditions nécessaires et les conditions suffisantes pour avoir des points de maximum et de minimum locaux

Soit f une fonction et p un point intérieur du $D_f = R$, existe un intervalle ouvert I, avec $I \subset D_f$ et $p \in I \subset R$.

Supposons que f est dérivable en p. Une condition nécessaire, mais pas suffisante, pour que p soit le point maximum ou minimum local est que f'(p) = 0.

Théorème : soit f une fonction dérivable en p, où p est un point intérieur du D_f . Une condition nécessaire pour que p soit le point maximum ou minimum local est que f'(p) = 0.

Démonstration:

Supposons que p soit le point de maximum local. Donc, il existe r > 0, tel que

$$f(x) \le f(p)$$
 en $]p - r, p + r[\cap D_f]$.

Comme, pour l'hypothèse p est intérieur du D_f , nous pouvons choisir r de telle façon que

$$p-r, p+r [\cap D_f, \text{donc } f(x) \leq f(p) \text{ pour toute } x \text{ en }]p-r, p+r[$$
.

Comme f est dérivable (hypothèse) en p, les limites latérales :

$$\lim_{x \to p^+} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} \text{ et } \lim_{x \to p^-} \frac{f(x) - f(p)}{x - p}, \text{ existent et sont égales à } f'(p) :$$

$$f'(p) = \lim_{x \to p^+} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} = \lim_{x \to p^-} \frac{f(x) - f(p)}{x - p}.$$

Pour p < x < p + r, $\frac{f(x) - f(p)}{x - p} \le 0$; à cause de la conservation du signe

$$\frac{f(x) - f(p)}{x - p} \le 0 \text{ donc } f'(p) \le 0. \text{ Pour } p - r < x < p,$$

$$\frac{f(x) - f(p)}{x - p} \ge 0; \text{ donc:}$$

$$\lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} \ge 0.$$

Alors,

 $f'(p) \ge 0$. Comme $f'(p) \ge 0$ et $f'(p) \le 0$, nous avons comme résultat f'(p) = 0.

Remarque : la démonstration sera analogue si nous considérons p comme le point de minimum local.

Démonstration extraite du livre *Um Curso de Cálculc (*Guidorizzi, 1985 : volume 1, 284-285).

En revenant à 'h istoire, le XVIII est notamment marqué par des idées nouvelles, dont la caractéristique commune sera l'abandon, plus ou moins important, de l'approche géométrique en donnant petit à petit plus d'importance à l'approche algébrique. Par contre, ces nouvelles méthodes ne sont pas une renonciation des découvertes déjà connues des anciens, même si c'est justement la coexistence qui est

suggérée, car ces dernières conduisent à des résultats féconds. En effet, ces deux démarches parallèles et concurrentes : l'heuristique et la démonstrative vont coexister jusqu'à la fin du XVIII^e siècle en attendant de nouveaux critères de validation ou de légitimation, c'est-à-dire jusqu'à la création et la conceptualisation rigoureuse du calcul infinitésimal proprement dit. Ce qui nous révèle la Commission inter-IREM « Épistémologie et Histoire des Mathématiques » dans le livre Aux origines du calcul infinitésimal. (p.79 à 82).

5.2.4 La méthode de Fermat pour trouver des tangentes à une courbe quelconque

Fermat expose sa nouvelle méthode qui permet non seulement de trouver le maximum et le minimum d'une courbe, mais aussi de chercher les tangentes pour n'importe quelle courbe. Il a indiqué, par ailleurs, des généralisations d'applications possibles de sa méthode, comme pour les points d'inflexion des courbes, les centres de gravité, les asymptotes, etc., tel que mentionné par la commission inter-IREM, dans le livre *Aux origines du calcul infinitésimal* (p. 120 à 123). Une affirmation importante de cette commission (1987, 165) est la suivante :

Il [Fermat] est le premier à considérer les infiniment petits numériques, et pas seulement géométriques, comme les indivisibles de ses prédécesseurs. Le procédé d'adégalisation consiste non à les faire tendre vers 0, mais à les poser d'emblée égaux à 0.

Nous allons maintenant présenter la deuxième méthode de Fermat, celle-là servant à trouver des tangentes à une courbe quelconque. Pour ce faire, nous choisissons le deuxième exemple que Fermat a exposé dans Œuvres de Fermat (1636). Il y a utilisé la méthode précédente pour chercher non seulement l'extrémum d'une courbe, mais également les tangentes des courbes.

PIERRE DE FERMAT : MÉTHODE POUR LA RECHERCHE DU MAXIMUM ET DU MINIMUM (TROISIÈME EXTRAIT : DES TANGENTES AUX LIGNES COURBES, 1629/1637)

Nous attribuons à la méthode précédente l'invention des tangentes en des points donnés à des courbes quelconques.

Nous ramenons à la méthode précédente l'invention des tangentes en des points donnés à des courbes quelconques.

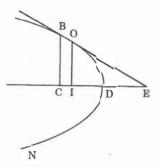


Figure 5.2 Invention des tangentes par Fermat

Soit donnée, par exemple, la parabole BDN, de sommet D, de diamètre DC; soit donné sur elle le point B, par lequel il faut mener la droite BE tangente à la parabole et rencontrant le point E qu'après démonstration deviendra le diamètre en E.

Si l'on prend sur la droite BE un point quelconque O, dont on mène l'ordonnée OI, en même temps que l'ordonnée BC du point B, le rapport de CD à DI sera plus grand que celui du carré de BC au carré de 01, puisque le point O est extérieur à la parabole.

Mais, à cause de la similitude des triangles, le carré de BC est au carré de OI comme le carré de CE est au carré de IE.

Donc, le rapport de CD & DI sera alus grand que celui du carré de CE au carré de IE.

Or le point B est donné, donc l'ordonnée BC, donc le point C, donc CD. Soit donc CD = d, donnée. Posons CE = a et CI = e;

Donc, le rapport de d à d - e sera plus grand que celui de a^2 à $a^2 + e^2$ - 2 ae.

Faisant le produit des moyens et des extrêmes:

 $da^2 + de^2 - 2dae$ sera plus grand que $da^2 - a^2e$.

Adégalons, donc, d'après la méthode précédente; on aura, en retranchant les termes communs:

 de^2 -2dae ~ - a^2e , ou, ce qui revient au même: $de^2 + a^2e \sim 2$ dae:

Par la suite, divisez tous les termes par e :

$$de + a^2 \sim 2 da$$

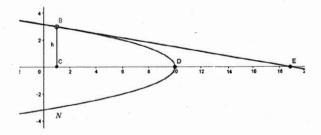
Finalement en supprimant de; il reste: $a^2 \sim 2 da$, donc: a = 2 d.

Nous prouvons ainsi que CE est double de CD, ce qui est conforme à la vérité. (Fermat, lui-même).

Pour faciliter la compréhension de telle méthode, nous allens maintenant donner une explication plus détaillée de cette méthode.

Soit donnée, par exemple, la parabole BDN, de sommet D, de diamètre DC; soit donné sur elle le point B, par lequel il faut mener la droite BE tangente à la parabole et rencontrant le diamètre en E.

Figure 5.3 Explication de la tangente 1



Si on coupe, par exemple, une conique par des droites parallèles, les milieux des cordes aussi obtenues sont alignés sur une droite appelée « un diamètre ». Pour une parabole, ils sont parallèles à l'axe qui nous appelons aujourd'hui de l'axe de symétrie de la parabole.

Alors, DC c'est l'axe de simetria de la parabole BDN.

Prennons maintenant un point quelconque O de la droite BE et pour B et O construisons les segments BC et OI, perpendiculaires à l'axe de symétrie.

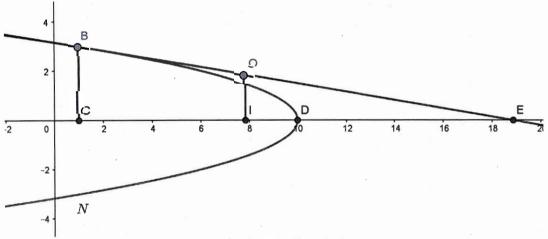


Figure 5.4 Explication de la tangente 2

Appelons l'intersection de la parabole BDN et le segment OI de O'

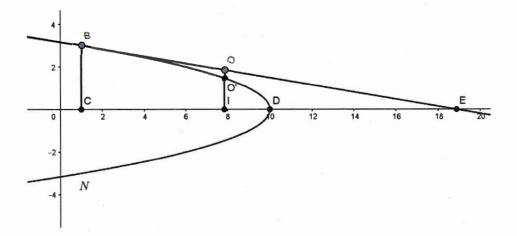


Figure 5.5 Explication de la tangente 3

En vertu de l'équation de la parabole, on a : $CD = (BC)^2$ et $DI = (O'I)^2$

Alors,
$$\frac{CD}{DI} = \frac{(BC)^2}{(OI)^2}$$
 et $\frac{CD}{DI} > \frac{(BC)^2}{(OI)^2}$ (I), car « O » est extérieur à la parabole.

Or, les triangles BCE et OIE sont notamment semblables (AAA_0)

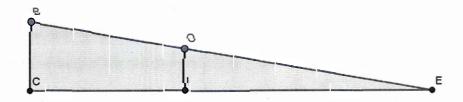


Figure 5.6 Explication de la tangente 4

Or,
$$\frac{BC}{OI} = \frac{CE}{IE}$$
, ce qui nous permet d'écrire : $\frac{(BC)^2}{(OI)^2} = \frac{(CE)^2}{(IE)^2}$ (II)

De (I) et (II), on aura :
$$\frac{CD}{DI} > \frac{(CE)^2}{(IE)^2}$$
.

Posons maintenant CD = d, CE = a et CI = e. Alors:

$$\frac{CD}{DI} > \frac{(CE)^2}{(IE)^2} = \frac{d}{d-e} > \frac{(a)^2}{(a-e)^2} \to \frac{d}{d-e} > \frac{a^2}{a^2 - 2ae + e^2}$$

$$d(a^2 - 2ae + e^2) > a^2(d - e) = da^2 - 2ade + de^2 > a^2d - a^2e$$

En supprimant les termes communs : $-2ade + de^2 > -a^2e$

Adégalons, donc, d'après la méthode précédente; on aura, en retranchant les termes communs:

 de^2 -2dae ~ - a^2e , ou, ce qui revient au même: $de^2 + a^2e \sim 2$ dae:

Par la suite, divisez tous les termes par e :

$$de + a^2 \sim 2 da$$
.

Finalement en supprimant de [en prenant $e = \theta$]; il reste: $a^2 \sim 2 \, da$, donc: $a = 2 \, d$.

Nous prouvons ainsi que CE est double de CD, ce qui est conforme à la vérité.

À des fins d'illustration, si l'on pense à une fonction, nous proposons la quadratique $y = x^2$

Représentation graphique de $y = f(x) = x^2$:

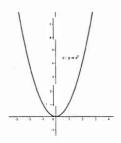


Figure 5.7 Généralisation de la tangente de Fermat

Soit donnée, la quadratique c, de sommet D, de diamètre DC; soit donné sur elle le point B, par lequel il faut mener la droite BE tangente à la parabole et rencontrant le diamètre en E.

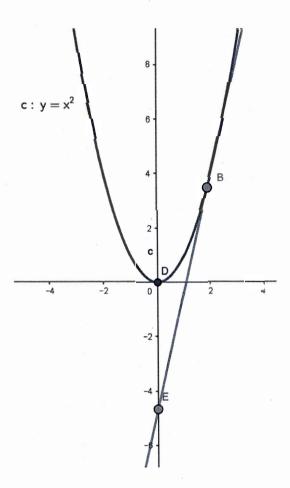


Figure 5.8 Généralisation de la tangente de Fermat partie 2

Prenons maintenant un point quelconque O de la droite BE et pour B et O construisons les segments BC et OI, perpendiculaires à l'axe de symétrie. Soit O' le point d'intersection entre OI et la parabole c.

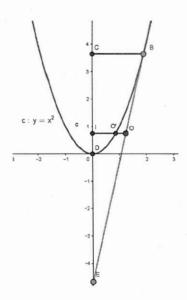


Figure 5.9 Généralisation de la tangente de Fermat partie 3

Pour hypothèse, appelons maintenant EC = a; CI = e et CD = d

En vertu de l'équation de la parabole, on a que $d = (BC)^2$ et $d - e = (O'I)^2 = DI$ Alors, OI > DI, car O est extérieur à la parabole. Or, $\frac{EC}{EI} = \frac{BC}{OI}$, car les triangles formés BCE et OIE sont notamment semblables (AAA_O) .

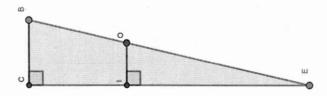


Figure 5.10 Généralisation de la tangente de Fermat partie 4

Ce qui nous permet d'écrire :

$$\frac{(EC)^2}{(EI)^2} = \frac{(BC)^2}{(OI)^2} et \frac{(BC)^2}{(OI)^2} < \frac{(BC)^2}{(O'I)^2}$$

Or,
$$(CE)^2 = a^2$$
 et $(EI)^2 = (a - e)^2$

Alors.

$$\frac{d}{d-e} > \frac{(a)^2}{(a-e)^2} \to \frac{d}{d-e} > \frac{a^2}{a^2 - 2ae + e^2}$$

$$d(a^2 - 2ae + e^2) > a^2(d - e) = da^2 - 2ade + de^2 > a^2d - a^2e$$

En supprimant les termes communs : $-2ade + de^2 > -a^2e$

Adégalons, donc, d'après la méthode précédente; on aura, en retranchant les termes communs:

 de^2 -2dae ~ - a^2e , ou, ce qui revient au même: $de^2 + a^2e \sim 2$ dae:

Par la suite, divisez tous les termes par e :

$$de + a^2 \sim 2 da$$
.

Finalement en supprimant de [prenons e = 0]; il reste: $a^2 \sim 2 \, da$, donc: $a = 2 \, d$.

Nous prouvons ainsi que CE est double de CD, ce qui est conforme à la vérité.

Nous voyons ici que les créateurs du calcul différentiel y compris Fermat se sont appuyés sur l'intuition géométrique. En effet, ils ont regardé ce qui se passait dans leur tête (dans leur imaginaire) à propos de la *trace* d'une « courbe continue ». Pour faire progresser ce qu'ils imaginaient, ils ont décrit le procédé pour mener une tangente à la

courbe en un de ces points. Pour ce faire, ils ont pris un point quelconque B sur la courbe, en supposant pour hypothèse que ce point est le point de la droite tangente à la courbe en ce point. Puis ils ont mené un autre point C sur la courbe, traçant la droite BC. Finalement, faisant, en pensée, le point C glisser sur la courbe tout le long de l'arc, de B en C, jusqu'à ce que C coïncide avec B, la corde BC ainsi obtenue, à sa position limite, est devenue la tangente BC à la courbe au point B, ce qu'ils cherchaient.

5.2.5 Notre interprétation aux idées intuitives de Fermat

Voyons maintenant notre interprétation par rapport aux idées intuitives de ce type de procédé. Prenons par exemple une courbe quelconque c et sur elle menons le point B :

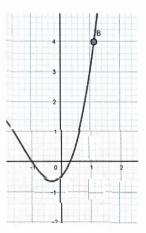


Figure 5.11 Interprétation de l'idée intuitive de Fermat 1

Prenons maintenant un autre point sur la courbe c, le point C, puis menons la droite BC:



Figure 5.12 Interprétation de l'idée intuitive de Fermat 2

En connaissant les coordonnées du point B (x,y) et les coordonnées du point C (x+a,y+b), nous pouvons établir la pente P de la droite $t:P=\frac{(y+b)-y}{(x+a)-x}$

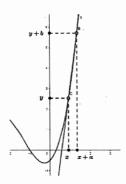


Figure 5.13 Interprétation de l'idée intuitive de Fermat 3

Faisant le point C glisser tout le long de la courbe vers le point B, on dirait qu'à la « position limite » la droite t sera tangente à la courbe c au point B. Finalement, si nous connaissons les coordonnées du point B et la pente de la droite t que passe pour B, c'est facile de tracer la droite, ce qui nous cherchons.

Notre raisonnement n'est pas exactement la méthode telle qu'exposée par Fermat, mais il s'en approche sensiblement, car, nous voyons ici que ce raisonnement revient au même procédé que celui proposé par Fermat. Alors, nous pouvons conclure que si l'on a la droite tangente à un point quelconque d'une courbe, la pente de cette droite sera le taux de variation de la courbe en ce point. L'idée fondamentale de cette notion c'est qu'une courbe peut être approchée par une droite à la proximité d'un point. Ainsi, la rapidité par laquelle une fonction varie en un point peut être associée au taux de variation de la meilleure droite qui s'approche de la fonction donnée au point considéré, ce qui nous appelons aujourd'hui la dérivée.

Par contre, Jacques Bair (idem) nous inquiète en soulignant que les représentations algorithmes présentées par Fermat en quatre étapes, comme nous avons vu ci en haut, soulèvent deux questionnements, à savoir :

1) Que représente *e* ? Est-ce que c'est-il un nombre par lequel on peut diviser les deux membres d'une *adégalité* (l'étape 3 de la méthode) ou 2) Est-il zéro comme Fermat a admis en fin du raisonnement à l'étape 4 de sa méthode?

Ces questionnements sont pertinenents, car on sait bien que si on admet ce petit *e* comme zéro la division impliquée au pas 4 d'une telle méthode nous amène à une impossibilité en mathématiques. Par contre, dans l'optique de Fermat, nous pouvons constater que son raisonnement, en ce qui concerne le symbole *e*, semble désigner donc une véritable variable *qui*, à la limite, est égale zéro⁵. De surcroit le raisonnement de Fermat peut-être considéré comme un prélude au concept de la dérivée.

En contrepartie, si nous regardons avec un peu plus d'attention, c'est-à-dire si on tient compte des proprietés mathématiques de la dérivée, nous voyons que le raisonnement

⁵ Interprétation qui a donné lieu à une célèbre controverse qu'une fois Newton a utilisée, lui a été fortement critiqué par Berkley (1685-1753).

de Fermat peut-être considéré comme un essai préliminaire, une entrée au concept de dérivée, mais affirmer qu'il a inventé la dérivée c'est un peu fort, car on ne trouve pas dans des travaux de Fermat un point essentiel qui est le fait de considérer que la dérivée f'(x) existe indépendamment de l'équation f'(x)=0, qu'elle comporte, cela c'est un point fondamental. Pour illustrer, Giusti (2009) dans son article Les méthodes de maxima et minima de Fermat, clarifie :

La dérivée c'est une opération qui prendre une fonction f est la transforme en une deuxième fonction f'. C'est seulement après avoir compris le caractère fonctionnel de la dérivée qu'il est possible de donner les règles de calcul de cette dernière, ainsi : calculer la somme de la dérivée comme la somme des dérivées; calculer la dérivée du produit ou bien de la racine. En effet, la méthode de Fermat ne permet pas de démontrer les règles du calcul différentiel qu'on connait. Si nous prenons, par exemple le cas d'une fonction f que peut-être écrit comme deux fonctions f = g+h, la dérivée f'=g'+h', mais l'équation f'=0 ne se divise pas en deux équations g'=0 et h'=0.

La critique exposée par Jacques Bair correspond exactement à la controverse critique de George Barkeley (1685-1753) et portant sur l'analyse newtonienne avec leur méthode des *fluxions*. Ceci ressemble précisément aux infiniments petits de Fermat.

Notamment, la critique de Berkeley va dans différentes directions du point de vue philosophique en passant par une critique d'ordre linguistique et finalement il donne une critique d'un point de vue des contradictions mathématiques qui touchent finalement l'axiomatisation des mathématiques.

Avant tout, il faut mentionner que Berkeley était un religieux catholique, mais que, du côté philosophique, il avait une vision très baconienne du savoir dans laquelle l'approche empiriste était omniprésente, même dans les mathématiques, ce que nous apprend Olivier Bruneau (2002, 1-3) dans son article intitulé *L'Analyste de Berkeley*

versus le Traité des Fluxions de Maclaurin : une certaine idée de la preuve en mathématiques.

Chez Berkeley, les mathématiques doivent prendre naissance dans l'expérience et, donc, doivent rendre compte d'un système du monde effectif, un monde qui nous entoure et qui ne doit pas posséder un degré d'abstraction très élevé comme celui présent dans les infiniment petits de Fermat et Newton. D'après Berkeley, la quantité que Newton appelait « fluxion » peut être considérée comme un infiniment petit, une quantité non nulle plus petite que ce que l'on voit. Dans ses investigations, par des manipulations de notations et de règles calculatoires, il arrive à la conclusion que cette fluxion que Newton utilisait est nulle. La critique de Berkeley repose essentiellement sur le questionnement du fait qu'en algèbre, une quantité ne peut être à la fois nulle et non nulle. Par conséquent, une fluxion n'est pas une quantité algébrique.

Sa critique, du côté linguistique, porte sur l'axiome philosophique qui affirme qu'il n'y a pas de raisonnement sur des choses dont nous n'avons aucune idée, donc pas de raisonnement sur les infinitésimaux (Bruneau, *ibid.*, p.3).

Finalement, la critique plus intéressante est celle d'ordre technique où Berkeley remet en question la démarche opérée dans les fluxions par Newton. Pour ce faire, Berkeley donne plusieurs exemples dans lesquels, selon lui, il y a des erreurs lors du raisonnement opéré.

Or, le raisonnement de Fermat est beau, et même génial pour l'époque, mais, comme toutes les innovations et évolutions en mathématiques dépendent de beaucoup d'efforts (le cas de la dérivée n'est pas différent), son évolution a dû attendre quelque temps pour poursuivre.

En effet, d'après Bell (1937 : 76), dans son livre *Les grands mathématiciens*, nous ne pouvions pas affirmer, jusqu'en 1934, que Newton avait eu connaissance de l'emploi que Fermat avait fait du calcul différentiel. Cependant, le professeur L.T. More, dans

sa biographie de Newton publiée cette année-là, a révélé que Newton avait écrit une lettre, jusqu'alors inédite, dans laquelle il déclarait que la méthode de Fermat pour tracer des tangentes à une courbe lui avait donné l'idée de la méthode du calcul différentiel.

L.T. More (*ibid.* 1934: 185) dit avoir trouvé dans la collection Portsmouth, section I, § XI, no 30, l'ébauche d'une lettre qui n'a jamais été publiée. Comme cette lettre donne une lumière importante et nouvelle sur les sources dont Newton a tiré les fluxions, L.T. More en a publié un extrait. Le document est très soigneusement rédigé, avec beaucoup d'effacements et réécritures :

I had the hint of this method from Fermat's way of drawing tangents and by applying it to abstract equations, directly and invertedly, I made it general. Mr. Gregory and Dr. Barrow used and improved the same method in drawing of tangents. A paper of mine gave occasion to Dr. Barrow [who?] showed on his method of tangents before he inserted it into this 10th Geometrical Lecture. For I am that friend which he then mentioned.

Isaac Newton (1642-1727)

J'ai eu l'idée de cette méthode dans la façon de Fermat de dessiner des tangentes, que j'ai appliquée aux équations abstraites, directement et inversement. Je l'ai rendue générale. M. Gregory et Dr Barrow ont utilisé et amélioré la même méthode dans le dessin de tangentes. Une de mes publications a donné l'occasion à Dr Barrow [qui?] a montré cette méthode de tangentes avant de l'insérer dans ce dixième cours de géométrie. Je suis cet ami qu'il a alors mentionné. (Notre traduction)

L.T. More (*ibid.* 1934: 215) dans un chapitre précédent de son livre, confirme que Laplace et Lagrange attribuent tous deux à Fermat le mérite d'avoir inventé le calcul, mais c'est la la première fois qu'une preuve directe de la lettre de Newton au sujet de Fermat est présentée.

Isaac Newton lui-même:

« Si j'ai pu voir un peu plus loin que d'autres, c'est que je me suis hissé sur les épaules des géants. »

Nous voyons ici clairement que Newton a fait allusion aux pensées des autres grands mathématiciens du passé. Parmi les plus grands de ces géants, il y avait Descartes, Fermat, Kepler, Galilée (Bell, *ibid.* : 105). En effet, le calcul différentiel est passé par plusieurs reformulations au long de l'histoire des mathématiques avant d'être bien formalisé, du point de vue du formalisme que l'analyse mathématique exige (Boyer, *ibid.* : 229-357).

5.3 La Méthode de Fermat et l'enseignement des mathématiques

Il est important d'avoir quelques connaissances préalables parce que, premièrement, nous croyons que, pour comprendre la dérivée, il est nécessaire de bien comprendre le concept de taux de variation ainsi que son influence sur la croissance ou la décroissance d'une fonction. Plus généralement, il faut comprendre les différentes façons qu'a une fonction de croitre ou de décroitre dans un intervalle. Deuxièmement, il est clair que le passage d'un intervalle à un point unique, entrainant l'inexistence du taux de variation, a posé un obstacle épistémologique fondamental et fondateur du calcal différentiel : le concept de nombre dérivé d'une fonction en un point, ce dernier étant une généralisation du taux de variation entre un point et lui-même.

Une fois découverts la notion de fonction (définition connée par Bernoulli en 1618 et dans l'œuvre d'Euler *Introductio in analysin infinitorum* en 1748) et le concept de limite actuel, nou: p ouvons faire une réinterprétation du travail de Fermat à la lumière du concept de fonction. Pour une fonction continue et différentiable dans un intervalle, nous pouvons suivre la méthode de Fermat :

Soit f une fonction dérivable dans un intervalle, soit e un infiniment petit.

Soit f une fonction derivable dans un intervalle, soit e un infiniment petit,

Méthode de Fermat	Interprétation actuelle avec la notion de fonction
 a) Nous analysons f(x) ~ f(x+e) b) Simplification et division par e, c) On fait une substitution de l'infiniment petit e=0, 	Maintenant, lorsque sous savons que la taux de variation d'une fonction $f(x)$ à un point quelconque de la courbe de cette fonction c'est la pente de la droite tangente en ce point, nous allons chercher une manière de calculer analytiquement, le taux de variation de la fonction à ce point, sans recourir directement au graphique. Pour ce faire, au lieu d'utiliser le petit e que
	Fermat a évoqué dans leurs raisonnements, nous allons utiliser $\frac{1}{n}$, $(n \in N)$ comme variation de la variable indépendante. D'un point didactique notre choix sera intéressant, car nous allons actualiser la méthode de Fermat, en garant l'essence de leur méthode.

Soit une fonction polynomiale f(x), si on cherche une valeur approximative du taux de variation de la fonction en un point choisi (x_1) , cette valeur indique la pente de la droite tangente au graphique de f(x) au point (x_1) considéré et cela est, en effet, le taux de variation de cette droite qui coïncide avec la valeur du taux de variation de la fonction au point considéré.

Comme nous l'avons vu, pour Fermat, la petite variation qu'il a appelée *e* représente en fait une petite variation de la fonction en un point quelconque considéré de cette fonction, et cela devrait être de même valeur que le taux de variation à la droite tangente en ce point.

Pour des raisons didactiques, nous allons appeler la petite variation e de Fermat $\frac{1}{n}$, $n \in N$, car cela va nous permettre d'opérationnaliser la méthode de Fermat de façon à l'utiliser dans des exemples de fonctions polynomiales et trigonométriques, justement pour élargir le champ d'utilisation de cette méthode.

5.4 La méthode de Fermat en action d'un point de vue numérique

Pour obtenir une valeur approximative significative du taux de variation de la fonction en un point x considéré, nous pouvons faire varier x d'une très petite valeur, $\left(\frac{1}{n}\right)$ par exemple, à partir de x et ensuite calculer la variation correspondante en f(x). Pour un intervalle assez petit, la valeur de f(x) en $x_1 + \frac{1}{n}$ (n, nombre naturel suffisamment grand) s'approche significativement de la valeur correspondante calculée dans l'équation de la droite tangente à ce point.

Nous allons donc appeler A_n la différence $f\left(x_1 + \frac{1}{n}\right) - f(x_1)$. Nous pouvons donc estimer pour le taux de variation de $f'(x_1)$ la valeur approximative $n.A_n$, car si on considère le taux de variation proportionnel de la droite tangente au point x_1 , on a :

Lorsque x_1 varie de $\frac{1}{n}$, la fonction f(x) varie de A_n . Ainsi :

$$n \cdot \left[f\left(x_1 + \frac{1}{n}\right) - f(x_1) \right] = n \cdot A_n \cong f'(x_1)$$

Plus grande est la valleur de n, plus petit sera l'intervalle $\frac{1}{n}$, et pourtant meilleure sera la valeur approximative obtenue pour le graphique de $f'(x_1)$. Pour obtenir la valeur la plus significative ou presque exacte de $f'(x_1)$, nous allons analyser l'expression n. A_n pour chercher la valeur de laquelle elle va s'approcher lorsque n est arbitrairement grand.

Si, pour des valeurs de n chaque fois plus grandes, les valeurs de $n \cdot A_n$ s'approchent chaque fois d'une valeur fixée a, alors le taux de variation autour du point x_1 considéré sera a. Alors, cette valeur est liée à ce que l'on nomme la valeur de la dérivée dans un point.

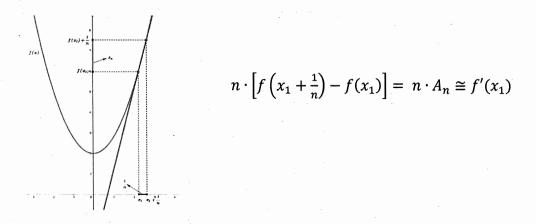


Figure 5.14 La dérivée

Si on cherche le taux de variation d'une fonction dans un point générique de l'abscisse x, on va trouver une fonction comme réponse, et la valeur de cette fonction à chaque point représente la pente de la droite tangente au graphique de f(x) à ce point. Cette fonction s'appelle « fonction dérivée de la fonction f(x) ». En symboles, on va représenter cette fonction par f'(x).

Voilà l'idée intuitive de Fermat pour tenter de comprendre la fonction dérivée f'(x). Autrement dit, pour calculer la dérivée f'(x), si nous faisons augmenter x d'une unité à partir de x et si l'on cherche à déterminer la différence f(x+1) - f(x), cette valeur peut différer significativement de la dérivée f'(x) étant donné que la droite tangente au point (x, f(x)) peut être loin du graphique de f(x) au point d'abscisse x+1.

Or, nous pouvons donc, pour obtenir une valeur approximative de la dérivée f'(x), faire varier x non de 1, mais de $\frac{1}{n}$, $(n \in N)$ à partir de x et calculer la variation correspondante en f(x). Pour un intervalle assez petit, la valeur de f(x) en $x + \frac{1}{n}$ s'approche de la valeur correspondante calculée à l'équation de la droite tangente.

Lorsque n est grand,
$$f(x + \frac{1}{n}) \to f(x)$$
, ainsi : $n \cdot \left[f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x) \right] = n \cdot A_n \cong f'(x)$

5.5 Interprétation de la méthode de maximums et minimums une fois construit le concept de fonction

Si une fonction f admet une valeur maximale ou minimale f(x), alors, dans un sens intuitif, il semble que la valeur de f(x) change très lentement proche de x. Pourtant, si $e = \frac{1}{n}$, n'est pas suffisamment grand, alors e est extrêmement petit, et donc f(x) et $f\left(x + \frac{1}{n}\right)$ sont approximativement égaux, c'est-à-dire:

$$f(x) \cong f\left(x + \frac{1}{n}\right).$$

Or, si f(x) est une courbe polynomiale, alors $f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x)$ pourrait être divisé par $\frac{1}{n}$. En faisant cette division, nous avons :

$$\left[\frac{f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x)}{\frac{1}{n}}\right] \cong 0, \text{ pour } n \text{ suffisamment grand.}$$

Effectivement, la limite de ce quotient s'approche de la définition moderne de la dérivée, et égalée à zéro. Né anmoins, dans les écrits de Fermat, nous ne trouvons pas de façon explicite que la variable $e \wr l$ aquelle Fermat a fait référence était infiniment

petite. Toutefois, à l'époque, Fermat n'avait pas la connaissance des limites des fonctions, et n'avait donc pas de moyens de démontrer quelle était la valeur de la limite de l'expression : $\left[\frac{f(x+e)-f(x)}{e}\right] \cong 0$, lorsque e s'approche de zéro.

5.6 Représentation géométrique de la méthode de maximums et minimums une fois construit le concept de fonction

Nous allons montrer un processus d'enseignement du concept de la dérivée qui pourrait être effectif dans la classe de mathématique. Pour ce faire, nous allons cibler le premier exemple donné par Fermat, en utilisant la technologie grâce au logiciel GeoGebra.

1) Prenons un segment AC de mesure b et divisons-le en deux autres segments de telle sorte que le produit de ces segments soit maximal.



2) Posons $m\overline{AC} = b$ (fixée), AE = x. Or, $m\overline{EC} = b - x$ et alors nous cherchons que le produit: $m\overline{AE} \times m\overline{EC}$ soit maximal.

Or, ce genre de problème nous permet d'écrire le produit maximal cherché par la fonction suivante :

f(x) = b (b - x), car la valeur b est fixée.

3) Prenons un point E' sur AC



4) Posons $m\overline{EE'} = \frac{1}{n}$. Or, $m\overline{ECEC} = b - x$, $m\overline{AE'} = x + \frac{1}{n}$. Alors, $m\overline{E'C} = b - x - \frac{1}{n}$

Donc, si nous cherchons que le nouveau produit : $m\overline{AE'} \times m\overline{E'C}$ soit maximale, nous avons :

$$f\left(x+\frac{1}{n}\right) = \left(x+\frac{1}{n}\right)\left(b-x-\frac{1}{n}\right)$$

5) Or, si f(x) c'est une courbe polynomiale alors $f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x)$ pourrait être divisé par $\frac{1}{n}$. En faisant cette division, nous avons :

$$\left[\frac{f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x)}{\frac{1}{n}}\right] \cong 0$$

6) Représentation graphique avec GeoGebra:

Le logiciel GeoGebra pourrait être utilisé pour nous amener à la bonne compréhension de la situation

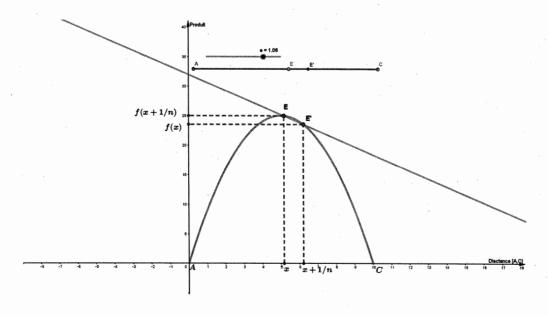


Figure 5.15 La dérivée et GeoGebra

En manipulant le curseur e, les étudiants pourront percevoir ce qui se passe avec la droite tangente et les points E et E' lorsque e se rapproche de zéro.

Du point de vue de la didactique des mathématiques, nous pouvons retenir l'aspect intuitif de la méthode de Fermat et, pour ne pas donner aux étudiants une idée fausse des mathématiques, il faut discuter cette division par e (qui, parfois, devient une division par zéro).

Amener les étudiants à une compréhension préalable plus générale du concept de la dérivée en respectant le processus historique de sa construction pourrait être intéressant, car le concept de dérivée a été construit avec les idées originales de ses créateurs, qui n'ont pas utilisé la limite d'une fonction pour ce faire.

Dans un deuxième temps, nous croyons que montrer les applications de la dérivée est possible et intéressant, car cela va contribuer à la conscientisation de l'importance du calcul différentiel et pousser les étudiants à aller plus loin dans le sens d'un apprentissage significatif.

L'aspect le plus complexe de notre proposition est le fait de surmonter le paradigme de laisser les applications du calcul différentiel à la fin, après avoir bien retenu les techniques de dérivation. Pour cela, il faut surmonter les obstacles épistémologiques qui viennent avec l'étude de la limite d'une fonction, ce que nous pensons être plus compliqué.

Comme nous l'avons mentionné auparavant, le conflit entre l'intuition et le concept scientifique comme c'est le cas avec le concept d'infini provoque un défi pour les processus d'enseignement et d'apprentissage des mathématiques. En effet, le concept d'infini a perturbé les mathématiciens et philosophes de toutes les époques. La découverte de plusieurs infinis en mathématiques a provoqué un débat sur leur existence depuis longtemps (à partir du Ve siècle av. J.-C., plus précisément (Hitt, 2013)).

Les obstacles épistémologiques pour surmonter l'apprentissage du calcul différentiel viennent donc de loin, comme nous pouvons le constater dans les éléments cités. C'est pourquoi, au début, nous pensions promouvoir des stratégies qui mettent l'accent sur les concepts de base, c'est-à-dire prioriser l'aspect intuitif, sans attribuer un rôle central à la notion de limite. Cela peut être efficace dans le sens d'un apprentissage significatif, surtout pour les étudiants débutants dans cette discipline si importante.

Notre but est de réveiller la curiosité par rapport à la dérivée. Nous croyons que, dans un deuxième temps, ces étudiants seront mieux préparés et pourront aller plus loin et confronter le lot des difficultés d'apprentissage qui viennent avec le formalisme mathématique nécessaire à la définition du calcul différentiel.

Notre proposition d'apprentissage de la dérivée, notamment, va de pair avec les idées originales de Fermat, qui sont centrées sur les concepts intuitifs de la dérivée, comme la proportionnalité, la linéarité, l'approximation linéaire et les droites tangentes. En plus, de tels concepts mathématiques sont déjà familiarisés par les étudiants à ce niveau, sauf le concept de droite tangente à une courbe, qui a un rôle crucial dans l'apprentissage de la dérivée. Nous allons donc porter une attention spéciale à ce concept.

Dans un premier temps, les obstacles cognitifs majeurs comme la limite d'une fonction seront évités pour ne pas compliquer la compréhension du contenu à définir, la dérivée.

Nous croyons que montrer l'évolution historique du calcul différentiel va donner aux apprenants une base plus solide de ce concept mathématique. De plus, nous croyons qu'en utilisant la modélisation mathématique pour cibler la dérivée, nous allons donner un sens à cette dernière, ce qui pourrait développer l'intérêt des étudiants dans leur apprentissage.

5.7 La systématisation de la dérivée avec les connaissances mathématiques du XVIII^e siècle.

L'importance de cette section c'est du fait qu'en élargissant le champ des techniques du calcul, nous pouvons faire progresser les idées intuitives du calcul vers la rigueur qu'il demande. Nous croyons également qu'à partir du moment où l'intuition des apprenants est réveillée, nous pouvons commencer un traitement complet de l'ensemble des nombres réels et développer le calcul pas-à-pas, d'une manière logique et rigoureuse. Cette approche va promouvoir l'équilibre sensible entre ces deux mondes : l'intuition et la rigueur.

Nous croyons que la connaissance de la procédure pratique pour calculer la dérivée explicitée par Fermat est intéressante, mais que, pour aller plus loin, pour élargir la connaissance de la dérivée, il est important d'avancer et, pour ce faire, nous allons promouvoir la construction systématique de la dérivée avec les connaissances mathématiques du XVIII^e siècle. Nous allons donc démontrer que les mathématiciens de cette époque, même s'ils n'avaient pas les connaissances mathématiques actuelles, comme on l'a déjà mentionné auparavant, ont été capables de calculer de manière systématique la valeur de la dérivée de fonctions de type polynomial, trigonométrique et bien d'autres, en plus de démontrer certaines règles du calcul différentiel, comme la dérivée du produit et la dérivée du quotient des fonctions, par exemple.

5.7.1 La systématisation de la dérivée de la fonction $f(x) = x^k$

Les fonctions polynomiales sont les fonctions plus simples, mais aussi les plus utilisées dans plusieurs phénomènes. Donc, pour commencer, nous développerons une manière systématique de calculer la dérivée des fonctions polynomiales sans avoir besoin de recourir à la procédure pratique que nous avons présentée dans les sections précédentes.

C'est-à-dire que nous allons montrer que si $f(x) = x^k, k \in \mathbb{N}$, alors $= f'(x) = k \cdot x^{k-1}$.

Dans les calculs que nous allons effectuer, un rôle important est accordé au développement de puissances du genre $(x + a)^k$. Ce développement est connu comme le théorème de Newton pour trouver le développement de la puissance $(x + a)^k$ avec $\{x, a\} \in R$ et $k \in N$. Par exemple :

$$(x+a)^0=1$$

$$(x+a)^1 = x+a$$

$$(x+a)^2 = x^2 + 2xa + a^2$$

$$(x+a)^3 = x^3 + 3x^2a + 3xa^2 + a^3$$

Notons que plus grande sera la puissance, plus grands seront les calculs à réaliser, car nous avons besoin de multiplier de toutes les manières possibles les trois facteurs (x ou a) que la puissance mathématique indique, en choisissant chacun d'entre eux dans une expression du crochet.

Par contre, en développant la puissance $(x + a)^3$:

$$(x+a)^3 = 1x^3 + 2x^2a + 1x^2a + 2xa^2 + 1xa^2 + 1a^3$$

$$(x+a)^3 = x^3 + 3x^2a + 3xa^2 + a^3,$$

nous voyons clairement que les termes x^3 et a^3 apparaissent une seule fois, et que les termes x^2a et xa^2 apparaissent trois fois. Ces résultat; p euvent être associés au calcul du nombre de combinaisons simples de n éléments pris k à k.

$$C_{k,p} = \frac{k!}{k! (k-p)!} \text{ avec } k, p \in N \text{ et } k \ge p$$

Autrement dit:

$$(x+a)^3 = C_{3,3}x^3 + C_{3,2}x^2a + C_{3,1}xa^2 + C_{3,0}a^3$$

Comme $C_{3,3} = 1$, $C_{3,2} = 3$, $C_{3,1} = 3$ et $C_{3,0} = 1$, nous avons :

$$(x+a)^3 = x^3 + 3x^2a + 3xa^2 + a^3$$

Newton, en se balisant pour ce raisonnement nous a démontré que pour la puissance $(x + a)^k$ avec $\{x, a\} \in R$ et $k \in N$, nous aurons :

$$(x+a)^k = x^k + k \cdot x^{k-1} \cdot a + \frac{k \cdot (k-1)}{2 \cdot 1} \cdot x^{k-2} \cdot a^2 + \frac{k \cdot (k-1) \cdot (k-2)}{3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot x^{k-3} \cdot a^3 + \dots + a^k$$

Pour ce faire, Newton a associé le numéro factoriel $\frac{k!}{k!(k-p)!}$ à ce qui est appelé coefficient binomial ou numéral binomial : $\binom{k}{p} = \frac{k!}{k!(k-p)!}$, avec $k, p \in N$ et $k \ge p$.

Alors, en termes de notation newtonienne, la proposition ci en haut, c'est représenté comme :

$$(x+a)^k = \binom{k}{o} x^0 a^k + \binom{k}{1} x^1 a^{k-1} + \binom{k}{2} x^2 a^{k-2} + \dots + \binom{k}{p} x^p a^{k-p} + \dots + \binom{k}{k} x^k a^0$$

Démonstration:

Pour commencer, observons que cette proposition est vraie pour k=0 et pour k=1

$$(x+a)^0 = 1 \leftrightarrow (x+a)^0 = C_{0,0} \cdot x^0 y^0$$

$$(x+a)^1 = x + a \leftrightarrow (x+a)^1 = a + x$$
, pourtant:

$$(x+a)^{1} = C_{1,0} \cdot x^{0} a^{1} + C_{1,1} \cdot x^{1} a^{0} \leftrightarrow (x+a)^{1} = \binom{1}{0} x^{0} a^{1} + \binom{1}{1} x^{1} a^{0}$$

Prouvons maintenant la validité de cette proposition pour tous nombres naturelles k avec $k \ge 2$.

Or, la puissance $(x + a)^k$ peut être représenté par : $(x + a) \cdot (x + a) \cdot ... \cdot (x + a)$, k facteurs.

Ainsi, en appliquant la propriété distributive, nous irons multiplier de toutes les manières possibles, k facteurs égaux à x et (k-p) facteurs égaux à a, avec $k \ge p$, en choisissant chaque un d'entre eux en une des expressions (x + a). Les possibilités de multiplier p facteurs égaux à x et (k-p) facteurs égaux à a c'est égale à $C_{k,p}$.

Alors, nous concluons:

$$(x+a)^k = C_{k,0}x^0a^k + C_{k,1}x^1a^{k-1} + C_{k,2}x^2a^{k-2} + \dots + C_{k,p}x^2a^{k-p} + \dots + C_{k,p}x^ka^0$$

Autrement dit, en notation newtonienne :

$$(x+a)^k = \binom{k}{o} x^0 a^k + \binom{k}{1} x^1 a^{k-1} + \binom{k}{2} x^2 a^{k-2} + \dots + \binom{k}{p} x^p a^{k-p} + \dots + \binom{k}{k} x^k a^0$$

Ou encore en uili sant une notation plus synthétique : $(x + a)^k = \sum_{i=1}^k \binom{k}{i} \cdot x^{k-i} \cdot a^i$, où

$$\binom{k}{i} = \frac{k!}{(k-i)!}, i = 0,1,2,3,...,k.$$

Maintenant, nous irons utiliser ce résultat pour démontrer que si $f(x) = x^k, k \in N$, alors $f'^{(x)} = k \cdot x^{k-1}$

D'après notre méthode d'auparavant pour calculer la dérivée de $f(x) = x^k$, soit k > 1, nous avons :

$$f(x) = x^k$$

$$f\left(x + \frac{1}{n}\right) = \left(x + \frac{1}{n}\right)^{k} = x^{k} + k \cdot x^{k-1} \cdot \frac{1}{n} + \frac{k \cdot (k-1)}{2 \cdot 1} \cdot x^{k-2} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^{2} + \frac{k \cdot (k-1) \cdot (k-2)}{3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot x^{k-3} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^{3} + \dots + \left(\frac{1}{n}\right)^{k}$$

$$A_n = \left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x) = k \cdot x^{k-1} \cdot \frac{1}{n} + \frac{k \cdot (k-1)}{2 \cdot 1} \cdot x^{k-2} \cdot \frac{1}{n^2} + \frac{k \cdot (k-1) \cdot (k-2)}{3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot x^{k-3} \cdot \frac{1}{n^3} + \dots + \frac{1}{n^k}$$

$$f'(x) \cong n \cdot A_n = n \left[k \cdot x^{k-1} \cdot \frac{1}{n} + \frac{k \cdot (k-1)}{2 \cdot 1} \cdot x^{k-2} \cdot \frac{1}{n^2} + \frac{k \cdot (k-1) \cdot (k-2)}{3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot x^{k-3} \cdot \frac{1}{n^3} + \dots \right] + \frac{1}{n^k}$$

Pourtant:

$$f'(x) \cong k \cdot x^{k-1} + \frac{k(k-1)}{2 \cdot 1} \cdot \frac{x^{k-2}}{n} + \frac{k \cdot (k-1) \cdot (k-2)}{3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot \frac{x^{k-3}}{n^2} + \dots + \frac{1}{n^{k-1}}$$

Notons que plus grande est la valeur de n, plus petits sont les termes où apparait le numéro n au dénominateur, lesquels s'approcheront de zéro.

Il en résulte que la dérivée de la fonction $f(x) = x^k (k \ naturel)$ est la fonction :

$$f'(x) = k \cdot x^{k-1}$$

Maintenant, nous avons une systématisation pour calculer la dérivée des fonctions polynomiales, ce qui est déjà important, car ces fonctions constituent une classe importante.

Cela est un fait intéressant, car, jusqu'à maintenant, nous nous en tenons aux connaissances mathématiques du XVIII^e siècle. En admettant la procédure pratique

pour calculer la dérivée explicitée par Fermat, nous pouvons également systématiser d'autres résultats importants du calcul différentiel, tels que :

- ✓ La dérivée de la fonction $f(x) = c \cdot g(x)$, avec c constant;
- ✓ La dérivée de la fonction f(x) = u(x) + v(x);
- ✓ La dérivée des fonctions exponentielles;
- ✓ La dérivée de la fonction exponentielle $f(x) = e^{kx}$ (k constante positive);
- ✓ La dérivée des fonctions sinus f(x) = senkx et cosinus f(x) = coskx (k constante positive);
- \checkmark La dérivée du produit $f(x) = u(x) \cdot v(x)$ et du quotient des fonctions $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$;
- ✓ La dérivée de la fonction $f(x) = e^{-x}$ (k naturel);
- ✓ La dérivée des fonctions composées et inverses;
- ✓ La dérivée de la fonction $f(x) = \sqrt[k]{x} (k \ naturel);$
- ✓ La dérivée de la fonction f(x) = lnx (logarithme de x à la base e);

Maintenant, nous pouvons donc construire pour les étudiants un cours de calcul différentiel avec une amplitude intéressante.

À titre d'exemple, nous choisissons la dérivée de la fonction exponentielle de base e, la fonction $f(x) = e^x$.

La fonction $f(x) = e^x$ définie pour tout x réél a des propriétés extrêmement importantes. Elle est adéquate pour la description de phénomènes parmi différentes aires scientifiques, par exemple les phénomènes liés à radioactivité, à la croissance des populations et à la propagation de maladies, entre autres.

Bien que, à son origine associée au calcul des intérêts, la fonction exponentielle de base e a prouvé son efficacité comme outil mathématique d'utilité multiple. Sa propriété fondamentale se réfère à la valeur de sa dérivée à chaque point. Avec notre technique, nous allons donc calculer la dérivée de $f(x) = e^x$.

D'ap rès notre méthode, on a :

$$\begin{cases} f(x) = e^x \\ f\left(x + \frac{1}{n}\right) = e^{x + \frac{1}{n}} = e^x \cdot e^{\frac{1}{n}} \end{cases}$$

$$A_n = f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x) = e^x \cdot e^{\frac{1}{n}} - e^x = e^x \cdot \left(e^{\frac{1}{n}} - 1\right).$$

Alors, le taux de variation $n \cdot A_n \cong n \cdot e^x \cdot \left(e^{\frac{1}{n}} - 1\right)$.

Pour une valeur de *n* assez grand, nous avons :

$$e \cong \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \to e^{\frac{1}{n}} \cong \left(1 + \frac{1}{n}\right) \to e^{\frac{1}{n}} - 1 \cong \frac{1}{n}.$$

Donc, $n \cdot A_n \cong n \cdot e^x \cdot \frac{1}{n} = e^x$. Dans ce cas, si $f(x) = e^x$, alors $f'(x) = e^x$.

$$f'(x) = e^x$$

En d'autres mots, la fonction $f(x) = e^x$ croît avec une rapidité f'(x), ce qui est égal à $f(x) = e^x$ en chaque point : f(x) = f'(x). Par exemple, si f(x) double leur valeur, la même chose se passe avec f'(x).

En vertu de cette proportionnalité, il nous semble raisonnable qu'ils aient la même description mathématique. Nous avons trouvé plusieurs phénomènes ayant des caractéristiques de cette proportionnalité, ce qui nous permet de les modéliser avec la fonction exponentielle de base e. Par exemple, un capital qui s'actualise à chaque instant, étant donné qu'elle croît avec une rapidité qui est égale à sa valeur actuelle; une population qui augmente avec une tâche proportionnelle à sa valeur à chaque instant; et bien d'autres où la relation $f'(x) = k \cdot f(x)$ avec k constant existe. En effet, en calculant la dérivée de $f(x) = e^{kx}$, on a obtenu $f'(x) = k \cdot e^{kx}$, c'est-à-dire, $f'(x) = k \cdot f(x)$.

Nous avons trouvé dans la littérature des auteurs qui ont créé de très belles œuvres contenant des propositions d'enseignement très intéressantes. Ces auteurs, avec une fine sensibilité, montrent qu'il est possible de reconstruire le calcul en respectant le développement rigoureux et l'intuition. Parmi ces livres, nommons par exemple les suivants: Vers l'infini pas à pas du Groupe Aha (2000) (approche euristique de l'analyse), Calculus du mathématicien Tom M. Apostol (1967) et Noções de Cálculo du professeur Nilson José Machado (1988). Ces livres nous ont inspirés à écrire notre proposition, car nous sommes bien d'accord avec ces auteurs et croyons qu'il est possible d'amener nos étudiants à une bonne compréhension intuitive du calcul avec l'analyse pour modéliser la réalité. Nous croyons également qu'à partir du moment où l'intuition des apprenants est réveillée, nous pouvons commencer un traitement complet de l'ensemble des nombres réels et développer le calcul pas-à-pas, d'une manière logique et rigoureuse. Cette approche va promouvoir l'équilibre sensible entre ces deux mondes: l'intuition et la rigueur.

En même temps, il est très important de se souvenir que le calcul a de fortes racines dans des situations problèmes de la physique, et que beaucoup de son pouvoir et de sa beauté dérivent de la variété et de l'amplitude de ses applications. C'est le fait de tenter de résoudre les situations problèmes qui a permis le développement du calcul, c'était de là que provenait l'inspiration.

Notre but est donc d'inspirer nos étudiants, de les amener à donner du sens à leur apprentissage afin de promouvoir une solide formation globale (technique et intuitive). C'est l'objectif du chapitre qui suit qui présente la séquence d'enseignement que nous avons construit sur le calcul différentiel. Ainsi, notre objectif est de présenter des tâches bien structurées sur la dérivée. Pour développer des activités d'enseignement pour des étudiants du collégial, nous allons prendre en compte le développement des idées mathématiques dans l'Histoire. Nous allons donc promouvoir l'intuition en utilisant les

infiniment petits liés à la méthode de Fermat et les applications de cette dernière au calcul des maximums et minimums.

CHAPITRE VI

SÉQUENCE D'ENSEIGNEMENT DONT LES ACTIVITÉS SONT BASÉES SUR LA MÉTHODE DE FERMAT À DES FINS DIDACTIQUES

6. Proposition d'enseignement de la dérivée

En accord à notre objectif spécifique de recherche à la section 2.8 du chapitre 2, le but principal de notre investigation repose sur une proposition d'enseignement pour la construction du concept de la dérivée niveau collégial. Étant donné que le programme québécois à l'école secondaire est basé sur la notion de compétences et sur la resolution de situation problème, nous allons cibler l'apprentissage du calcul différentiel dans un contexte de résolution de situations problèmes (SP) à travers un environnement d'apprentissage collaboratif, de débat scientifique et d'auto réflexion (méthode ACODESA, Hitt 2006; Hitt, Saboya & Cortés 2007).

Dans les chapitres précédents, nous avons avancé pour donner support à notre objectif spécifique de recherche. Dans les chapitres précédents, nous avons analysé les problèmes cognitifs associés à l'apprentissage du calcul et nous avons repéré que le problème principal est le passage de l'infini potentiel (intuitif) à l'infini actuel (formel). Le concept de limite est la difficulté principale pour l'introduction au calcul différentiel. Alors, nous avons mené un parcours historique qui donne une alternative en utilisant la méthode de Fermat pour arriver aux différentes notions du calcul différentiel de façon intuitive et qui pourrait donner lieu à des fondements solides pour l'apprentissage des concepts clés dans l'apprentissage du calcul différentiel. L'objectif

spécifique de recherche que nous avons explicité (section 2.8) est centré dans l'élaboration des situations qui pourraient utiliser les enseignants pour approcher le problème principal, l'enseignement du calcul différentiel.

Dans ce chapitre, nous allons présenter notre proposition d'enseignement qui pourrait servir aux enseignants pour motiver l'apprentissage de la dérivée dans une approche par la résolution de situations-problèmes, qui prend en compte le souci du Ministère et aussi de beaucoup d'enseignants autour des problèmes de l'humanité dans un contexte environnemental.

6.1 La stratégie adoptée dans l'élaboration des tâches pour l'enseignement de la dérivée

La stratégie abordée réside sur la modélisation mathématique, car nous croyons que les processus de modélisation mathématique vont promouvoir un apprentissage beaucoup plus significatif du calcul différentiel. L'objectif est de construire chez les étudiants un concept solide et ample de ce dernier, englobant les aspects intuitifs, les aspects algébriques et les aspects géométriques.

Notre but est de réveiller la curiosité des étudiants par rapport à la dérivée. Nous croyons qu'ainsi ces étudiants seront mieux préparés pour affronter le lot des difficultés d'apprentissage qui se présentent avec le formalisme mathématique nécessaire pour définir le calcul différentiel.

Notamment, notre proposition d'apprentissage de la dérivée est en accord avec les idées originales de Fermat qui sont centrées sur les concepts intuitifs de la dérivée comme la proportionnalité, la linéarité, et les droites tangentes. En plus, de tels concepts mathématiques sont déjà familiers pour les étudiants à ce niveau sauf le concept de

droite tangente à une courbe et qui joue un rôle crucial dans l'apprentissage de la dérivée. Nous allons donc porter une attention particulière à cette dernière.

Dans un premier temps, les obstacles cognitifs majeurs comme la limite d'une fonction seront évités pour ne pas compliquer la compréhension du contenu à définir, la dérivée.

Notamment, nous croyons que montrer l'évolution historique du calcul différentiel va donner chez les apprenants une base plus solide de ce concept mathématique, car ce dernier a été finalement construit et formalisé mathématiquement en prennent considération justement des raisonnements et des idées intuitives depuis de l'antiquité au XX^e siècle.

Nous croyons aussi qu'en utilisant la modélisation mathématique pour cibler la dérivée, nous allons donner du sens à cette dernière, ce qui peut développer l'intérêt pour leur apprentissage.

6.2 Notre proposition d'apprentissage du calcul différentiel basée sur la modélisation mathématique

L'une des spécificités du calcul différentiel, en lien avec le développement de l'étude des fonctions, est d'étudier le taux de variation d'une fonction, soit de comprendre les différentes manières pour lesquelles une fonction croit ou décroit dans un intervalle ou autour d'un point d'inflexion. Par conséquent, cette analyse va promouvoir l'idée fondamentale du calcul différentiel, qui est l'idée qu'une courbe, localement, peut être approchée par une droite, dont les caractéristiques de proportionnalité, constituent des composants facilitateurs à la compréhension et à l'analyse de la dérivée. Notamment, dans ce sens, le calcul différentiel est un outil utile, car l'étude des variations et la nécessité d'approximations locales sont présentes dans plusieurs phénomènes de presque tous les domaines de la connaissance.

Dans ce sens, Passaro (2015) souligne que les aspects de dépendance et de variation sont liés à la notion de dérivée dans la mesure où cette dernière peut être considérée comme un outil d'étude de la variation d'une fonction. En effet, pour Passaro (idem.), l'étude des variations concomitantes, consiste globalement pour l'étude de la covariation. Alors, la covariation nous permet, entre autres, de favoriser le passage vers la notion de dérivée et bien sûr elle permet de travailler la notion de fonction. En effet, le travail de Passaro peut à la fois nous inspirer pour travailler simultanément la fonction et la dérivée. La covariation constitue donc une piste intéressante à la mise en place d'un continuum entre les deux ordres du secondaire au collégial.

L'aspect plus complexe de notre proposition est de surmonter le paradigme de laisser les applications du calcul différentiel à la fin, après avoir bien retenu les techniques pour dériver. Pour cela, il faut surmonter les obstacles épistémologiques qui viennent avec l'étude de la limite d'une fonction et ce qui est, d'après nous, compliqué. Donc, nous croyons qu'amener les applications de la dérivée, au début de l'enseignement, est possible et que cela va contribuer à la conscientisation de l'importance du calcul différentiel, et va impulser les étudiants à aller plus loin dans le sens d'un apprentissage significatif.

En effet, le calcul différentiel est passé pour plusieurs reformulations au cours de l'histoire des mathématiques avant d'être bien formalisé du point de vue du formalisme que l'analyse mathématique exige (voir livre Historia da matemática de Carl B. Boyer, 1996, p.229-357.

6.3 Une séquence d'enseignement basée sur des activités mathématiques

Dans le curriculum au Québec (MELS 2007), une grande importance est donnée aux situations problèmes (SP), c'est la première compétence disciplinaire du domaine des mathématiques qui s'énonce « Résoudre une situation problème ». Pour être efficaces,

les SP doivent promouvoir une ouverture de la pensée afin de favoriser l'émergence de représentations fonctionnelles spontanées au sens Hitt (2006, 2007). C'est-à-dire, faire émerger les idées intuitives et ses représentations associées qui petit à petit pourraient être modifiées (évolution) par les étudiants avec l'aide des activités appropriées et avec l'aide de l'enseignant. Pour cela, effectivement, il est nécessaire une méthode d'enseignement d'apprentissage collaboratif comme proposé dans les chapitres précédents avec la méthode ACODESA.

Dans ce sens, nous allons proposer des activités mathématiques permettant de développer la modélisation mathématique avec le but de promouvoir l'apprentissage de la dérivée. Pour ce faire, nous proposons de mettre l'accent sur l'apprentissage du calcul différentiel dans un contexte de résolution de situations problème (SP), à travers un environnement d'apprentissage collaboratif, de débat scientifique et d'autoréflexion (méthode ACODESSA, Hitt 2006; Hitt, Saboya & Cortés 2007). Les propositions que nous allons faire sont en accord avec cette méthode d'enseignement, même si nous n'avons pas mené une expérimentation. D'un point de vue de la didactique expérimentale des mathématiques, les activités élaborées pour une expérimentation doivent prendre en considération, un cadre théorique et une méthode d'enseignement. Nous allons suivre les directives pertinentes dans ce contexte pour l'élaboration des activités qui compteront sur un milieu technologique.

La méthode ACODESA s'app uie sur lathéorie d'activité élargie par Engeström (1999) qui suggère la division du travail en phases pour une tâche donnée. Cela donne du sens aux phases individuelles, en équipes, en grand groupe (Hitt, 2013). De même, Hitt (idem), souligne que l'aspect principal dans la théorie de l'activité est la média ion (soit avec l'aide d'objets physiques soit avec la communication entre pairs).

L'approche avec la méthode ACODESA prend en compte premièrement la réflexion individuelle, moment pendant lequel l'étudiant fait un travail de compréhension de la situation et commence à développer ses premières idées pour résoudre une situation.

Deuxièmement, l'intéraction et la discussion en petits groupes sont mises en place pour enrichir l'approche individuelle développée dans la première phase individuelle. Troisièmement, la phase de débat en grand groupe est mise en place pour raffiner les idées développées dans les petits groupes. Dans cette phase, la médiation de l'enseignant est très importante. Par contre, sans fournir la réponse directe aux étudiants et afin de promouvoir le raffinement des idées et des représentations qui ont émergées dans les discussions. Ensuite, la phase d'autoréflexion (reconstruction de tout ce qui a été fait en classe) est proposée à des fins de raffinement individuel des idées émergées au début. Finalement la phase d'institutionnalisation est mise en place (l'enseignant propose les représentations officielles). Dans cette phase, le rôle de l'enseignant est d'analyser les productions des étudiants, les idées développées par les étudiants dans le but de faire les meilleurs choix d'idées pour résoudre SP proposée (Hitt, idem).

Ainsi, nous nous appuyons sur la méthode ACODESA pour faire notre proposition d'enseignement de la dérivée.

6.4 Les situations problèmes et les modélisations mathématiques

Est-ce que les connaissances mathématiques servent seulement à développer les habiletés intellectuelles des individus? Ou ces connaissances pourraient-elles être aussi utiles dans la vie quotidienne? Ces questionnements sont encore plus intéressants si on pense que la plupart des étudiants ne se souviendront que d'une petite partie des connaissances mathématiques étudiées au long de leur formation en mathématiques (Bassanezi, 2006 : 15). Nous considérons que l'apprentissage des mathématiques devrait être révélateur, devrait promouvoir la découverte et la signification des connaissances mathématiques. Dans ce sens, nous allons proposer aux étudiants des SP intéressantes qui les amènent à la réflexion et à la découverte des signifiés en mathématiques. Donc, d'un côté, nous allons cibler l'apprentissage du calcul

différentiel en nous appuyant sur le processus historique de sa construction et, de l'autre, nous allons promouvoir son apprentissage dans un contexte de résolution de SP à travers un environnement d'apprentissage collaboratif, de débat scientifique et d'autoréflexion (méthodologie ACODESA, Hitt, 2007; Hitt, Saboya & Cortés, 2017).

Évidemment, la théorie des représentations sémiotiques de Duval (1993) va nous donner un soutien théorique local pour baliser notre proposition, autour des représentations institutionnelles, et le cadre théorique de Hitt (2006) sur les représentations fonctionnelles-spontanées dans les cas des représentations non institutionnelles.

6.4.1 Importance des connaissances préalables

Il est important d'avoir quelques connaissances préalables parce que premièrement, nous croyons que pour comprendre la dérivée, il est nécessaire de bien comprendre le concept de taux de variation ainsi que son influence sur la croissance ou la décroissance d'une fonction. Plus généralement, de comprendre les différentes façons qu'a une fonction de croitre ou de décroitre dans un intervalle. Deuxièmement, il est clair que le passage d'un intervalle à un unique point, entrainant le calcul d'une valeur (la limite) qui est considéré comme la limite du taux de variation, a posé un obstacle épistémologique fondamental et fondateur du calcul différentiel : le concept de nombre dérivé d'une fonction en un point. Ce dernier étant une généralisation du taux de variation d'une fonction dans un intervalle et la limite dans un point de l'intervalle.

Donc, nous soulignons qu'il est attendu que ces étudiants ont déjà quelques connaissances préalables, ainsi :

- La notion de fonction mathématique d'un point de vue global, par exemple, les différents types de registres de représentation d'une fonction, et faire les transitions d'un registre à l'autre. (Duval, 1993)
- les notions de base de la géométrie analytique comme la construction de droites dans le plan cartésien et la notion de pente d'une droite.
- Les manipulations algébriques de base telles que la mise en évidence et la factorisation.
- Maximum, minimum, point d'inflexion.

6.4.2 La question d'arrière-plan

Aujourd'hui les impacts sur l'environnement sont incontournables. Toutefois, dans notre quotidien il y a beaucoup de situations dans lesquelles c'est possible d'éviter ou au moins de minimiser ces impacts.

Par exemple, étant donné que les produits industrialisés ont besoin toujours d'être emballés pour finalement être commercialisés, à quoi pensent les fabricants sur la question de l'environnement au moment de projeter leurs produits? En autres mots, est-ce que les emballages qu'on voit dans les commerces sont des emballages idéaux du point de vue environnemental? Voici notre question d'arrière-plan pour développer une situation d'apprentissage.

Premièrement, il faut clarifier ce qui représente un emballage idéal du point de vue environnemental. Évidement si l'on pouvait réduire le plus possible le gaspillage de matériel impliqué dans la fabrication des emballages, essentiellement nous allons contribuer à la réduction de l'impact sur l'environnement, étant donné que plus grand est le gaspillage et plus grand est cet impact. Dans ce sens, quel est l'emballage idéal qui minimise la quantité de matériel nécessaire à sa fabrication? En fait, le Ministère a

promu la production des manuels scolaires au secondaire avec une forte emphase sur les problèmes environnementaux que les humains rencontrent.

Donc, se pose la question : Comment les connaissances mathématiques peuvent aider l'environnement dans le cas de fabrication d'emballages ?

6.5 Les situations-problèmes comme forme d'enseignement

Tout d'abord on va préciser les différents types d'emballages : des emballages en forme de prisme droit à base rectangalaire et des emballages en forme de boite cylindrique.

Pour commencer, on propose un devoir à chaque étudiant, celui d'apporter des boites vides. Une fois que chaque étudiant est en possession de sa boite, on commence le travail :

La première question posée est la suivante : votre boite est-elle idéale d'un point de vue environnemental ?

Étant posée cette question, il est attendu que les étudiants comprennent que la réponse à la SP est de trouver les dimensions idéales que minimisent la quantité de matériel dispensée pour un volume fixé dans le cas de la boite cylindrique. Autrement dit, on souhaite un volume maximal, mais également la plus petite aire possible à cause de l'environnement. Donc, il faut qu'on détermine les valeurs du rayon de la base et de la hauteur de la boite cylindrique de telle façon que l'aire occupée par le cylindre soit minimale.

Dans le cas de la boite ayant le format de prisme droit à base rectangulaire, la réponse à la situation est de déterminer les valeurs de la longueur, de la hauteur et de la largueur qui maximisent le volume pour l'aire fixée.

Ce serait bien d'avoir une mise en situation élaborée comme décrit dans laquelle les étudiants sont plongés dans une situation de la vie réelle avec les contraintes à respecter.

Pour ce qui a trait à la méthode ACODESA, au début, chaque étudiant devrait commencer à développer sa propre stratégie pour comprendre la SP et concevoir le modélisation mathématique, le modèle qui décrit le mieux la situation. Après une dizaine de minutes, on divise les étudiants en groupes de trois étudiants pour commencer les débats en petits groupes. À ce moment l'enseignant devrait faire les médiations entre les groupes pour aider les étudiants à développer leurs stratégies pour développer le modèle mathématique. Ensuite, après le raffinement des discussions en petits groupes, on passe à la phase des discussions en grand groupe. Dans cette phase, l'enseignant intervient pour aider les étudiants à trouver le modèle mathématique qui décrit le mieux la situation investiguée. Finalement, la phase d'autoréflexion est mise en place à des fins de formalisation individuelle de leur propre modèle. Pour terminer, l'enseignant institutionnalise le processus de résolution de la SP. À ce moment, lorsqu'on pose le modèle mathématique institutionnalisé, chaque étudiant devrait répondre la question proposée au début.

Il s'agit donc d'amener les étudiants à une compréhension préalable plus générale du concept de dérivée en respectant le processus historique qui a mené à sa construction. C'est intéressant car cela a été construit avec les idées originales des créateurs qui n'ont pas utilisé la formalité de la limite d'une fonction comme on trouve dans l'approche actuelle.

Dans un deuxième temps, nous croyons que montrer les applications de la dérivée est possible et intéressant, car cela va contribuer à la conscientisation de l'importance du calcul différentiel et va impulser les étudiants à aller plus loin dans le sens d'un apprentissage significatif.

Le but de notre proposition est de construire le concept de la dérivée. Les idées intuitives de Fermat nous amènent à avoir une réflexion sur le corpus que l'on pourrait suivre dans l'enseignement des mathématiques.

Nous pouvons déduire de la méthode de Fermat, la possibilité de travailler cette méthode avec des fonctions. En suivant une approche intuitive dans la classe, on pourrait discuter sur :

- a) La notion d'approximation avec une utilisation des infiniments petits,
- b) La notion intuitive de tangente horizontale pour essayer de trouver le maximum ou le minimum,
- c) L'implémentation des processus numériques avant les algébriques pour trouver un résultat numérique de la valeur du maximum ou du minimum d'une fonction.
- d) L'implémention d'une méthode générale pour trouver la droite tangente à un point P quelconque d'une fonction continue et dérivable.

Nous allons suivre les processus de Fermat en utilisant une approche technologique :1) Soit une fonction polynomiale f(x), si on cherche une valeur approximative du taux de variation de la fonction en un point choisi, cette valeur indique la pente de la droite tangente au graphique de f(x) au point considéré et cela est, en effet, le taux de variation de cette droite qui coïncide avec la valeur de la variation de la fonction au point considéré.

- 6.6 La méthode de Fermat en action d'un point de vue numérique et sa généralisation (guide pour l'enseignant)
- 6.6.1 La méthode de Fermat et le calcul numérique du taux de variation instantané en un point

Comme nous avons déjà explicité au chapitre V dans la section 5.5, pour des raisons didactiques nous suggérons d'utiliser $\frac{1}{n}$ (n, nombre naturel suffisamment grand) au lieu de l'infiniment petit « e » comme variable indépendante. Cela va nous permettre d'opérationnaliser la méthode de Fermat de manière relativement facile du point de vue des connaissances mathématiques parce que les opérations mathématiques appliquées lors de la résolution de SP sont des connaissances que les étudiants sont habitués à utiliser. Notre intention c'est attirer l'attention pour promouvoir l'apprentissage du concept de la dérivée.

Notre méthode, apparemment facile à utiliser, a une grande puissance, car nous pouvons l'appliquer pour résoudre plusieurs SP dont les solutions passent par des modèles mathématiques de phénomènes qui sont gérés par des fonctions de type polynomiales, exponentielles, trigonométriques ou bien d'autres fonctions.

En utilisant notre suggestion, ça serait possible de manipuler les variables en jeu et d'exercer un contrôle pour modéliser les SP. De plus, l'utilisation de la méthode de Fermat sous une approche algébrique et visuelle renouvelée va promouvoir chez les apprenants la compréhension géométrique nécessaire pour la construction du concept de la dérivée.

Prenons maintenant quelques exemples pour expliquer l'efficacité de cette méthode. Les exemples ont comme finalité de montrer aux enseignants la possibilité d'introduire la méthode de Fermat dans un contexte intuitif que petit à petit les étudiants pourraient arriver à la systématisation des concepts abordés.

Considérons la fonction $f(x) = 3x^2 + 7$

Exemple 1 : Nous voulons calculer la taux de variation instantanée de f(x) au point x = 2.

Alors, le calcul de f'(2):

$$\begin{cases} f(2) = 3^2 + 7 = 19\\ f\left(2 + \frac{1}{n}\right) = 3(2 + \frac{1}{n})^2 + 7 = 19 + \frac{12}{n} + \frac{3}{n^2} \end{cases}$$

$$A_n = f\left(2 + \frac{1}{n}\right) - f(2) = \frac{12}{n} + \frac{3}{n^2}$$

$$f'(2) \cong n.A_n = n\left(\frac{12}{n} + \frac{3}{n^2}\right) = 12 + \frac{3}{n}$$

Alors,
$$f'(2) \cong 12 + \frac{3}{n}$$

Plus grande est la valeur de n et plus la valeur n. A_n s'approche de 12, car $\frac{3}{n}$ s'approche de zéro.

Si
$$n = 1000$$
, alors $n. A_n = 12 + \frac{3}{1000} = 12,003$.

Si
$$n = 10\,000$$
, alors $n.A_n = 12 + \frac{3}{1000} = 12,0003$.

Si
$$n = 100 000$$
, alors $n.A_n = 12 + \frac{3}{100000} = 12,00003$.

Si
$$n = 1000 000$$
, alors $n.A_n = 12 + \frac{3}{1000 000} = 12,000003$.

Si
$$n = 1000\ 000\ 000$$
, alors $n.A_n = 12 + \frac{3}{1000\ 000\ 000} = 12,000000003$.

Donc, nous pouvons, intuitivement proposer que f'(2) = 12.

Exemple 2 : Nous voulons calculer le taux de variation instantané de f(x) au point x = -3.

Alors, on fait le calcul de f'(-3):

$$\begin{cases} f(-3) = 3(-3)^2 + 7 = 34\\ f\left(-3 + \frac{1}{n}\right) = 3(-3 + \frac{1}{n})^2 + 7 = 34 - \frac{18}{n} + \frac{3}{n^2} \end{cases}$$

$$A_n = f\left(-3 + \frac{1}{n}\right) - f(-3) = -\frac{18}{n} + \frac{3}{n^2}$$

$$f'(2) \cong n. A_n = n\left(-\frac{18}{n} + \frac{3}{n^2}\right) = -18 + \frac{3}{n}$$

Alors,
$$f'(-3) \cong -18 + \frac{3}{n}$$

Plus grande est la valeur de n et plus la valeur n. A_n s'approche de -18, car $\frac{3}{n}$ s'approche de zéro.

Donc, nous pouvons conclure que f'(-3) = -18

b) Le calcul de f'(-3), alors le taux de variation de la fonction f(x) en x = -3

$$\begin{cases} f(-3) = 3(-3)^2 + 7 = 34\\ f\left(-3 + \frac{1}{n}\right) = 3(-3 + \frac{1}{n})^2 + 7 = 34 - \frac{18}{n} + \frac{3}{n^2} \end{cases}$$

$$A_n = f\left(-3 + \frac{1}{n}\right) - f(-3) = -\frac{18}{n} + \frac{3}{n^2}$$

$$f'(2) \cong n.A_n = n\left(-\frac{18}{n} + \frac{3}{n^2}\right) = -18 + \frac{3}{n}$$

Plus grande est la valeur de n, plus la valeur n. A_n s'approche de -18, car $\frac{3}{n}$ s'approche de zéro.

Donc, nous pouvons proposer que f'(-3) = -18

Exemple 3 : Nous voulons calculer la taux de variation de f(x) au point x = 0.

Alors, on fait le calcul de f'(0):

$$\begin{cases} f(0) = 7\\ f\left(0 + \frac{1}{n}\right) = 3\left(\frac{1}{n^2}\right) + 7 = 7 + \frac{3}{n^2} \end{cases}$$

$$A_n = f\left(\frac{1}{n}\right) - f(0) = \frac{3}{n^2}$$

$$f'(0) \cong n.A_n = n.\frac{3}{n^2} = \frac{3}{n}$$

Alors,
$$f'(0) \cong \frac{3}{n}$$

Plus grande est la valeur de n, plus la valeur n. A_n s'approche de zéro, car $\frac{3}{n}$ s'approche de zéro. Donc, nous pouvons proposer que f'(0) = 0

6.7.2 La méthode de Fermat et le calcul numérique généralisé du taux de variation instantané pour n'importe quel point

Prenons maintenant, la fonction $f(x) = 3x^2 + 7$ de l'exercice précédent. Nous allons calculer la dérivée f'(x) de cette fonction en un point quelconque d'abscisse x.

$$\begin{cases} f(x) = 3x^2 + 7\\ f\left(x + \frac{1}{n}\right) = 3\left(x + \frac{1}{n}\right)^2 + 7 = 3x^2 + \frac{6x}{n} + \frac{3}{n^2} + 7 \end{cases}$$

$$A_n = f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x) = 3x^2 + \frac{6x}{n} + \frac{3}{n^2} + 7 - 3x^2 - 7$$

$$A_n = f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x) = \frac{6x}{n} + \frac{3}{n^2}$$

$$f'(x) \cong n. A_n = n. \left(\frac{6x}{n} + \frac{3}{n^2}\right)$$

Alors,
$$f'(x) = 6x + \frac{3}{n}$$

Plus grande est la valeur de n, plus la valeur n. A_n s'approche de 6x, car $\frac{3}{n}$ s'approche de zéro. Donc, nous pouvons proposer que f'(x) = 6x

Prenons maintenant ces résultats:

Soit
$$f(x) = 3x^2 + 7$$
, en:

$$x_1 = 2 \rightarrow f'(2) = 12$$

$$x_2 = -3 \rightarrow f'(-3) = -18$$

$$x_3=0\to f'(0)=0$$

Nous avons calculé la dérivée f'(x) de cette fonction dans un point quelconque d'abscisse x: f'(x) = 6x.

La taux de variation (la dérivée) à un point de la courbe d'une fonction fournit une valeur approximative de la valeur calculée pour la droite tangente à ce point. Ce résultat est nommé la dérivée en un point.

Donc, lorsque nous cherchons le taux de variation instantané de f(x) à un point générique quelconque x nous trouvons comme résultat une autre fonction. Maintenant nous pouvons associer ces résultats en nommant cette fonction trouvée comme fonction dérivée f'(x).

La valeur de cette fonction en chaque point représente la valeur de la pente de la droite tangente au graphique de f(x) en ces points.

Ainsi;

Soit
$$f(x) = 3x^2 + 7 \rightarrow f'(x) = 6x$$

 $f'(x) = 6x \rightarrow f'(2) = 6.2 = 12$
 $f'(x) = 6x \rightarrow f'(-3) = 6. -3 = -18$

 $f'(x) = 6x \rightarrow f'(0) = 6.0 = 0$

6.7 Les dérivées successives et leur signifiée

Nous savons déjà que lorsque nous cherchons le taux de variation de f(x) à un point générique quelconque x nous trouvons comme résultat une autre fonction f'(x).

Étant donné que f'(x) représente le taux de variation def(x), nous savons pourtant que les valeurs du signe de f'(x) fournissent des informations sur la croissance ou la décroissance def(x). Soit donc, un intervalle I du domaine def(x):

- Si $f'(x) \ge 0$ en $I \to f(x)$ est croissante en I
- Si $f'(x) \le 0$ en $I \to f(x)$ est décroissante en I

Par analogie, les valeurs du signe de f'(x) fournissent des informations sur la croissance ou la décroissance de f(x). Soit donc, un intervalle I du domaine de f(x):

- Si $f''(x) \ge 0$ en $I \to f'(x)$ est croissante en I
- Si $f''(x) \le 0$ en $I \to f'(x)$ est décroissante en I

D'ailleurs, nous pouvons également conclure que :

Le fait que f'(x) soit croissante en $I \to le$ graphique de f(x) est concave vers le haut en I.

Le fait que f'(x) soit décroissante en $I \to le$ graphique de f(x) est concave vers le bas en I.

Par conséquent, nous pouvons associer ces deux résultats et conclure que dans un intervalle *I*:

- Si $f''(x) \ge 0 \rightarrow$ le graphique de f(x) est concave vers le haut en I
- Si $f''(x) \le 0 \to \text{le graphique de } f(x) \text{ est concave vers le bas en } I$

$$Maximum \leftrightarrow v'(x) = 0 \ et \ v''(x) \le 0; \ Minimum \leftrightarrow v'(x) = 0 \ et \ v''(x) \ge 0$$

$$Maximum \leftrightarrow v'(x) = 0 \ et \ v''(x) \le 0; \ Minimum \leftrightarrow v'(x) = 0 \ et \ v''(x) \ge 0$$

6.7.1 Les dérivées successives et leurs représentations graphiques

Prenons, par exemple les fonctions $f(x) = x^3 - 6x + 9$, $f'(x) = 3x^2 - 6$ et f''(x) = 6x. En analysant le comportement de ces fonctions, nous savons que les points extrêmes de f(x), soit le maximum et le minimum sont fournis à partir des informations de la dérivée première, car f'(x) représente le taux de variation de f(x). Autrement dit, nous savons que les valeurs du signe de f'(x) fournissent des informations sur la croissance ou la décroissance de f(x). Ainsi, en premier lieu nous allons obtenir ces points où le taux de variation f(x) sera zéro :

Le taux de variation de f(x) sera zéro, lorsque $f'(x) = 0 \rightarrow 3x^2 - 6 = 0$. Donc:

 $3x^2 - 6 = 0 \rightarrow x_a = \sqrt{2}$ ou $x_b = -\sqrt{2}$. Obtenons, à présent les valeurs de ces points extrêmes :

Le taux de variation de f(x) sera zéro, lorsque $f'(x) = 0 \rightarrow 3x^2 - 6 = 0$. Donc:

 $3x^2 - 6 = 0 \rightarrow x_a = \sqrt{2}$ ou $x_b = -\sqrt{2}$. Obtenons, à présent les valeurs de ces points extrêmes :

$$f(x) = x^3 - 6x + 9$$
; $f(\sqrt{2}) = -4\sqrt{2} + 9$ et $f(-\sqrt{2}) = 4\sqrt{2} + 9$. Ainsi, les points :

 $A(\sqrt{2}, -4\sqrt{2} + 9)$ et $B(-\sqrt{2}, 4\sqrt{2} + 9)$ ce sont les points extrêmes de f(x). Ensuite, nous allons analyser lequel est le point maximum et lequel est le point minimum. Pour ce faire, nous devrons nous fier sur les informations sur la croissance et la décroissance de f'(x) et les valeurs du signe de f''(x).

Si dans un intervalle
$$I$$

$$\begin{cases} f''(x) \ge 0 \\ et \\ f'(x) \text{ est croissante} \end{cases} \to f(x) \text{ est concave vers le haut en } I$$

Pour
$$x \ge 0$$

$$\begin{cases} f''(x) \ge 0 \\ et \\ f'(x) \text{ est croissante} \end{cases} \to f(x) \text{ est concave vers le haut à cet intervalle.}$$

Ou simplement du fait que soit $f''(x) \ge 0 \rightarrow$ le graphique de f(x) est concave vers le haut

Donc, le point $A(\sqrt{2}, -4\sqrt{2} + 9)$ est le point de minimum de f(x). Voici la fonction de la deuxième dérivée.

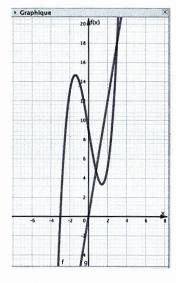


Figure 6.1 Point de minimum

$$Minimum \leftrightarrow v'(x) = 0 \ et \ v''(x) \ge 0$$

Par analogie, si dans un intervalle $I \begin{cases} f''(x) \le 0 \\ et \\ f'(x) \ est \ d\'{e}croissante \end{cases} \to f(x)$ est concave

vers le bas en I.

Pour
$$x \le 0$$

$$\begin{cases} f''(x) \le 0 \\ et \\ f'(x) \text{ est d\'ecroissante} \end{cases} \rightarrow f(x) \text{ est concave vers le bas à cet intervalle.}$$

Ou simplement par le fait que soit $f''(x) \le 0 \to \text{le graphique de } f(x)$ est concave vers le bas.

Donc, le point $B(-\sqrt{2}, 4\sqrt{2} + 9)$ c'est le point de maximum de f(x).

$$Maximum \leftrightarrow v'(x) = 0 \ et \ v''(x) \le 0$$

C'est intéressant de visualiser les graphiques de f(x), f'(x) et f''(x) ensemble, car ce regard peut aider à comprendre les signifiés géométriques des dérivées successives.

Encore, les variables significatives sont mieux aperçues lorsque nous promouvons la visualisation vers les représentations algébriques correspondantes, la sémoisis vers la noésis, Duval (1993).

Les signifiés géométriques des dérivées successives :

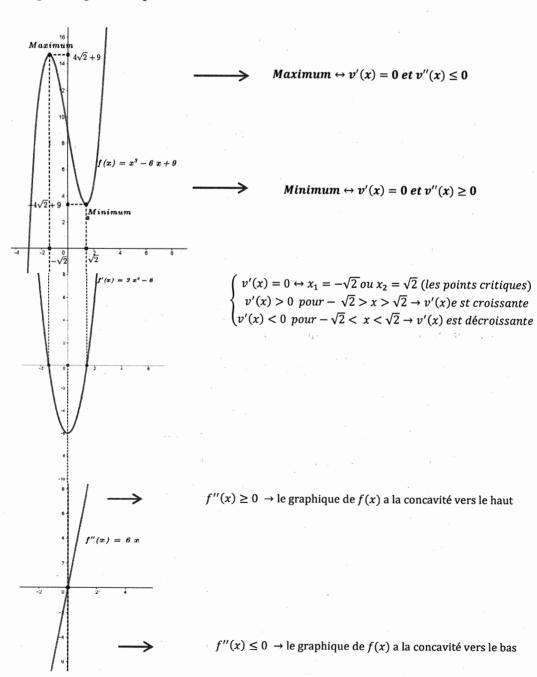


Figure 6.2 Les points extrêmes des fonctions

6.7.2 Points d'inflexion d'une fonction

En un point d'abscisse x_i , dans lequel il y a un changement de concavité de la représentation graphique d'une fonction f(x), la valeur du signe de la dérivée seconde f''(x) change aussi.

Lorsque f''(x), varie continument, en assumant toutes les valeurs possibles entre les valeurs positives, d'un côté, et les valeurs négatives, de l'autre cote, cela se traduit géométriquement par un « collage » parfait des deux parties de la représentation graphique de f(x), avant et après de x_i . Dans ce cas, nous devons avoir $f''(x_i) = 0$. Autrement dit, la dérivée seconde f''(x) s'annule aux points où se produit un changement de concavité de de la fonction f(x). Donc, ces points sont appelés **points** d'inflexion de la représentation graphique de f(x).

En un point d'inflexion x_i , nous avons toujours $f''(x_i) = 0$, nous pouvons avoir ou non $f'(x_i) = 0$ à ce point. Lorsqu'en un point d'inflexion, nous avons simultanément $f''(x_i) = 0$ et $f'(x_i) = 0$, ou simultanément $f''(x_i) = 0$ et $f'(x_i) \neq 0$. Dans le premier cas $(f''(x_i) = 0)$ et $f'(x_i) = 0$, nous disons que ce point d'inflexion est horizontal. Par contre, si n'est pas le cas, nous disons juste point d'inflexion de la représentation graphique de f(x).

Pour comprendre bien cette idée, prenons la même fonction de l'exemple développé pour comprendre les points extrêmes d'une fonction, soit la fonction $f(x) = x^3 - 6x + 9$. Nous allons maintenant établir une manière de trouver le point d'inflexion $I = x^3 - 6x + 9$.

 $(x_i, f(x_i))$ de f(x). Pour ce faire, premièrement nous allons calculer la dérivée première et la dérivée seconde de f(x).

Ainsi, $f'(x) = 3x^2 - 6$ et f''(x) = 6x. Analysons maintenant le comportement de ces fonctions à partir de la représentation graphique du point d'inflexion de f(x).

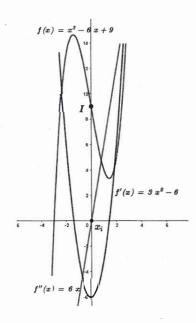


Figure 6.3 Point d'inflexion

Nous voyons bien ici que, pour $x_i = 0$, $f''(x_i) = 0$, pourtant la dérivée seconde s'annule à ce point. Du fait que $f'(x_i) \neq 0$ en $x_i = 0$, la fonction f(x) passe par un changement « suave » de concavité de sa représentation graphique et pourtant se produit un *point d'inflexion* de la fonction f(x), c'est-à-dire, que la concavité de f(x) change à partir de x_i . De plus, on a dans notre exemple, $f(0) = 0^3 - 6 \cdot 0 + 9 = 9$. Par conséquent, le point d'inflexion x_0 cherché est bien $x_0 = 9$.

6.7.3 Les registres de représentations comme moyen de contrôle

Nous voyons que le fait de reconnaître des points d'inflexion, des signifiés des valeurs du signe des fonctions et de leurs fonctions dérivées permet d'avoir un contrôle algébrique et numérique du comportement des courbes associées à ces fonctions.

Par contre, pour une bonne compréhension heuristique de tels concepts mathématiques, c'est fondamental non seulement de procéder à la reconnaissances et aux traitements dans un seul système de représentation identifiable, mais encore il faut faire toutes les articulations dans chacun des différents systèmes de représentations possibles. Cela est la phase de l'apprentissage la plus importante appelée la sémiosis par Duval (1993). C'est la conversion entre les représentations qu'il faut prendre en compte, c'est cela qui produit la construction de registres de représentations efficaces. En fait, un concept mathématique ne peut être développé avec une seule représentation, car à elle seule, elle ne peut pas exprimer toutes les caractéristiques du concept étudié (Duval, Ibid.)

Pour l'apprentissage des fonctions et par complétude de la dérivée, il faut rendre compte des traitements de conversions entre les différents registres de représentations algébriques, les registres de représentations graphiques, la table des valeurs, etc. (la sémiosis), c'est le cœur d'un apprentissage heuristique et significatif d'un tel concept mathématique (la noésis).

6.7.4 L'articulation entre les registres de représentations pour promouvoir l'apprentissage heuristique de la dérivée des fonctions

Afin de justifier le cadre théorique de notre proposition d'enseignement par Duval, nous devons, avant tout, clarifier certains aspects théoriques.

Pour commencer, il faut clarifier deux concepts ciblés par Duval, celui de la variable visuelle pertinente et celui des unités symboliques significatives. D'après Duval (1988), les variables visuelles pertinentes sont celles qui correspondent aux caractéristiques significatives d'une écriture algébrique, par exemple la pente d'une

droite. Les unités symboliques sont les unités propres à chaque registre de représentation. La distinction des unités propres à une expression algébrique est relativement évidente, par exemple :

- Les symboles relationnels $(<, \le, >, \ge =, \cong, \dots etc.)$
- Les symboles d'opération ou de signe (+, -, ÷, ×)
- Les symboles de variable
- Les symboles d'exposant, de coefficient et de constante.

Par exemple, dans l'étude des fonctions et par conséquent dans l'étude de la dérivée de fonctions, il faut comprendre que l'ensemble tracé forme une figure qui représente un « objet » décrit par une expression algébrique et que toute la modification à cet objet entraine une modification à l'écriture correspondante. Ces modifications déterminent les variables visuelles pertinentes. En plus, la lecture des représentations graphiques implique la distinction des variables visuelles pertinentes et l'appréhension des variables représentantes de l'écriture algébrique.

Ce regard heuristique va promouvoir une analyse de congruence qui exige la discrimination des unités significatives propres à chaque registre de représentation ainsi que l'examen des transformations implicites éventuelles qui vont ensemble (Hitt, 2016, notes de cours MAT7191). Cela nous amène à comprendre l'adaptation parfaite des deux parties d'une articulation, la courbe et l'expression algébrique.

Dans cette phase, il est notamment important d'identifier toutes les modifications pertinentes possibles. En définitive, le fait de voir conjointement la forme et l'expression algébrique correspondante amène à comprendre la congruence présente dans ceten semble. Ce regard est le noyau de l'appréhension des concepts comme celui de fonctions et permet une vue comp lète de la dérivée (Duval Ib id.)

Nous croyons que regarder conjointement de toutes les manières possibles la fonction et sa dérivée va promouvoir la compréhension heuristique du calcul différentiel. En

d'autres mots, faire toutes les articulations dans chacun des différents systèmes de représentation possibles de la fonction et de sa dérivée amènera vers l'appréhension globale de ce qu'est la dérivée.

Au section 3.2, on a exploité la théorie des représentations sémiotiques de Duval (Ibid.). On peut observer que la conversion entre représentations de différents registres est l'activité principale dans la construction des concepts et c'est à travers les tâches de conversion que l'on propose aux étudiants qu'on va promouvoir la sémiosis. L'étudiant, dans un processus « d'abstraction réflexive », va construire l'articulation entre les registres de représentations pour finalement arriver à l'appréhension du concept mathématique envisagé (la noésis).

Analysons, la fonction $f(x) = x^3 - 6x + 9$. Soit la dérivée première de f(x) égale à $f'(x) = 3x^2 + 6$ et la dérivée seconde égale à f''(x) = 6x.

En un point d'inflexion, nous savons que nous avons toujours f''(x) = 0. Par contre, en un point d'inflexion, nous savons également que nous pouvons avoir ou non f'(0) = 0.

Soit $I = (x_i, f(x_i))$ le point d'inflexion de f(x). Du fait que $f'(x_i) \neq 0$ en $x_i = 0$, la fonction f(x) passe pour un changement « suave » de concavité de sa représentation graphique.

Or, dans un point d'inflexion la dérivée seconde f''(x) = 6x s'annule. Donc, en $x_i = 0 \rightarrow f''(x_i) = f''(0) = 0$. Et de ce fait f(0) = 9; nous concluons que le point d'inflexion def(x), $I = (x_i, f(x_i))$ est alors I = (0,9).

De plus, , les conditions pour qu'une fonction f(x) puisse avoir des points extrêmes sont:

Maximum de
$$f(x) \leftrightarrow v'(x) = 0$$
 et $v''(x) \le 0$;

Minimum de
$$f(x) \leftrightarrow v'(x) = 0$$
 et $v''(x) \ge 0$.

Finalement, en balisant toutes les informations sur les variables visuelles (les points extrêmes et points d'inflexion), sur les signifiés des fonctions dérivées successives, nous pouvons établir un croquis puis finalement construire la représentation graphique de f(x).

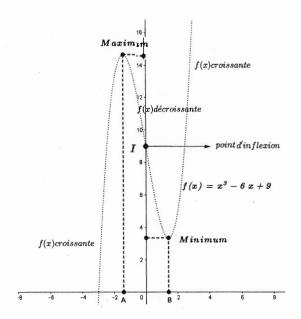


Figure 6.4 La construction de la représentation graphique de $f(x) = x^3 - 6x + 9$.

6.8 La Méthode de Fermat et la notion de taux de variation égale à zéro

Pour promouvoir l'approche géométrique et l'approche numérique pour les maximums et minimums, nous allons proposer aux étudiants une séquence de diverses (S²). Nous suggérons de commencer par une SP simple et peu à peu nous amènerons les étudiants vers des SP plus complexes afin de promouvoir l'apprentissage du concept de la

dérivée, celles-ci iront élargir les compétences vers la construction de modèles mathématiques.

Pour résoudre les SP, nous suggérons premièrement que les apprenants utilisent la procédure pratique explicitée par Fermat auparavant. L'utilisation de cette méthode va promouvoir la visualisation. Les approches géométrique et numérique pour les maximums et minimums viennent de façon naturelle, alors les étudiants pourront développer leur intuition mathématique ce qui va promouvoir une construction solide et globale du concept de dérivée.

Puis, dans un deuxième temps, pour les SP qui suivent, nous pourrons utiliser des systématisations pour calculer les dérivées, comme les dérivées de fonctions polynomiales $(f(x) = x^n \to f'(x) = n \cdot x^{n-1})$, k naturel). Notre but sera non seulement d'élargir le champ d'utilisation de notre méthode, mais aussi de faire le plus possible des approches aux techniques du calcul comme nous utilisons aujourd'hui. Nous croyons que cela est important dans le sens de la promotion d'un apprentissage significatif du calcul différentiel, mais sans perdre l'intuition proposée dès le début.

6.9 La résolution de problèmes de maximums et minimums avec la Méthode de Fermat et la notion de taux de variation instantanée

Pour guider l'enseignant dans la construction du concept ciblé qui est la compréhension globale du concept de dérivée, nous allons donc donner des exemples de propositions d'enseignement qui s'appuie sur le cadre théorique.

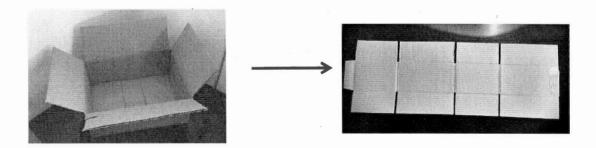
Pour ce faire, la résolution de problèmes de maximums et minimums en utilisant la méthode de Fermat sera exploitée.

Proposition de situation problème 1 (SP1): Une petite boite avec un couvercle de volume maximal

Introduction.

Pour commencer, nous pensons proposer aux étudiants d'amener une boite en format de prisme droit à base rectangulaire en carton. Cette boite sera le point de départ pour la construction d'un modèle mathématique. Nous avons préféré cette option à celle de leur demander de créer un patron au hasard ou encore de leur fournir un patron de boite. Nous croyons que de cette façon nous serons plus proches de la réalité, c'est-à-dire de la vraie situation trouvée dans la vie. En plus, il y a beaucoup de possibilités pour former les patrons de boite en format de prisme droit à base rectangulaire, car cela rentre des le domaine des graphes. Nous sommes intéressés à nous approcher de la réalité avec des situations réelles, c'est important, mais les graphes ne sont pas notre sujet d'intérêt dans ce mémoire. De plus, si nous laissons à la charge de l'étudiant de choisir le patron qu'il désire, une quantité énorme de suggestions émergera dans la classe, ce qui rend difficile l'enseignement. Donc, nous analyserons dans un premier temps les boites de type standard, ce qui va quand même rendre l'activité intéressante parce que nous pourrions trouver des solutions étonnantes qui pourtant vont promouvoir de riches discussions.

Tout d'abord, nous suggérons que chaque étudiant démantèle sa propre boite pour regarder le patron formé. Ensuite vient l'étape de modélisation de la situation et enfin l'étape de résolution de la situation.



Pour progresser, après une analyse a priori du type du patron formé, nous allons proposer aux étudiants de résoudre la tâche suivante :

À la recherche de l'optimisation.

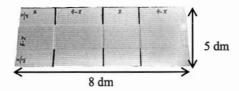
En utilisant la méthode de Fermat présentée auparavant, essaye de répondre à la question suivante :

Étant donnée une feuille de papier carton en format rectangulaire ayant comme mesures de côtes de 8 dm sur 5 dm, il est demandé de construire une boite avec couvercle en format de prisme droit à base rectangulaire de telle sorte que la capacité (le volume) obtenue soit maximale.

Autrement dit, dire pourquoi on souhaite un volume maximal, mais la plus petite aire possible. Pourquoi l'aire minimale? Parce que nous sommes sensibles aux problèmes de l'environnement.

La résolution de la tache.

Étape 1 : Prise de données et modèle mathématique



Les mesures de la contrainte sont 8 dm pour 5 dm. Alors, nous pouvons écrire les dimensions du prisme comme étant : 5 - x; 4 - x et x

Étape 2 : Trouver l'équation qui modélise le problème

Le volume maximal est modélisé par la fonction : v(x) = (5 - x)(4 - x)x, x > 0

$$v(x) = x^3 - 9x^2 + 20x, \qquad x > 0$$

$$Dv = \left\{ x \in \frac{R}{0} < x \le 4 \right\} \text{ et } Im \ (v) = \left\{ y \in R / y \le y_M \right\}$$

 $y_M = la \ valeur \ maximale \ de \ la \ fonction \ v(x).$

En utilisant la méthode de Fermat, nous avons:

$$v(x) = x^3 - 9x^2 + 20x$$

$$v(x+e) = x^3 - 9x^2 + 20x + 3x^2e + 3xe^2 + e^3 - 18xe - 9e^2 + 20e$$

Il doit adégalé v(x) à v(x + e)

$$x^3 - 9x^2 + 20x \sim x^3 - 9x^2 + 20x + 3x^2e + 3xe^2 + e^3 - 18xe - 9e^2 + 20e$$

En suprimant les termes communs:

$$0 \sim 3x^2e + 3xe^2 + e^3 - 18xe - 9e^2 + 20e$$

En divisant tous les termes par e

$$0 \sim 3x^2 + 3xe + e^2 - 18x - 9e + 20$$

Suprimez e:

$$0 = 3x^2 - 18x + 20$$

$$x_1 = 3 + \frac{\sqrt{21}}{3} \approx 4,53$$
 (Minimum) ou $x_2 = 3 - \frac{\sqrt{21}}{3} \approx 1,47$ (Maximum)

Comme nous cherchons le volume maximal, le point qui nous intéresse est bien :

$$x_2 = 3 - \frac{\sqrt{21}}{3} \approx 1,47 \ (Maximum)$$

En substituant $x_1 \approx 1,47$ dans la fonction v(x), nous trouverons la valeur maximale de v(x) qui est égale à 13,13 dm^3 .

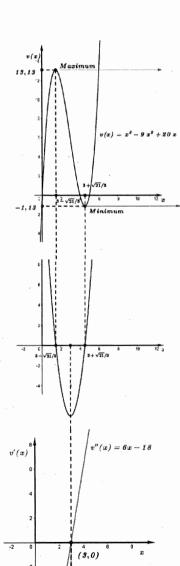
Puis, en utilisant le logiciel GeoGebra, nous pouvons exploiter la visualisation mathématique ce qui est crucial pour la bonne compréhension du problème dans le sens de promouvoir la sémiosis pour arriver à la noésis (Duval, 1993).

Le point maximal sur le graphique de v(x) est confirmé par la négativité du signe de la dérivée seconde dans un intervalle du domaine de v(x). Comme v''(x) < 0 sur l'intervalle considéré, nous concluons alors que ce point est maximal. Donc, la valeur maximale de la fonction est 13,13 dm^3 .

Autrement dit, le candidat au point de maximum est obtenu en égalant à zéro la dérivée prime. Puis en le remplaçant sur la deuxième dérivée, la valeur acquise nous fournit les informations sur la croissance ou la décroissance de v(x).

Une autre façon de le faire est tout simplement d'observer le graphique de la fonction v(x).

Pour ce faire, regardons, à l'instant les graphiques de la (SP)1 :



$$Maximum \leftrightarrow v'(x) = 0 \ et \ v''(x) \le 0$$

$$Minimum \leftrightarrow v'(x) = 0 \ et \ v''(x) \ge 0$$

Analyse du signe de v'(x):

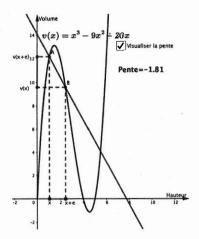
$$\begin{cases} v'(x) = 0 \leftrightarrow x_1 = 3 + \frac{\sqrt{21}}{3} \text{ ou } x_2 = 3 - \frac{\sqrt{21}}{3} \text{ (les points critiques)} \\ v'(x) > 0 \text{ pour } 3 + \frac{\sqrt{21}}{3} < x < 3 - \frac{\sqrt{21}}{3} \to v'(x) \text{ est croissante} \\ v'(x) > 0 \text{ pour } 3 - \frac{\sqrt{21}}{3} < x < 3 + \frac{\sqrt{21}}{3} v'(x) \text{ est décroissante} \end{cases}$$

Analyse du signe de v''(x)

$$\begin{cases} v''(x) = 0 \leftrightarrow x = 3\\ v''(x) > 0 \quad pour \quad x > 3 \rightarrow v'(x) \text{ est croissante}\\ v''(x) > 0 \quad pour \quad x < 3 \rightarrow v'(x) \text{ est décroissante} \end{cases}$$

$$\text{Max}: v'(x) = 0 \text{ et } v''(x) < 0 \text{ et Min}: v'(x) = 0 \text{ et } v''(x) > 0$$

(Conditions pour les points critiques)



6.10 La résolution de la tâche avec l'approche opérationnelle $\frac{1}{n}$

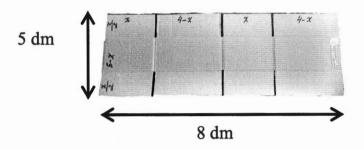
Au chapitre 5, nous avons décidé d'opérationnaliser la méthode de Fermat avec une approche systématique. Nous irons appliquer cette approche dans les situations proposées.

Pour ce faire, au lieu d'utiliser le petit e que Fermat a évoqué dans ses raisonnements, nous allons utiliser $\frac{1}{n}$, $(n \in N)$ comme variation de la variable indépendante. D'un point didactique notre choix est intéressant, car nous allons, d'un côté nous débarrasser du symbole d'égalité par Fermat et de l'autre cote nous allons éviter la division par zéro ce qui a provoqué et encore provoque des controverses. Par contre, notre systématisation ne va pas s'éloigner de l'intuition mathématique ce qui est l'essence de notre travail.

Cela va nous permettre d'opérationnaliser la méthode de Fermat de manière relativement facile du point de vue des connaissances mathématiques.

Alors pour guider l'enseignant nous allons montrer la résolution détaillée de cet exercice avec la systématisation pour trouver la fonction dérivée des fonctions polynomiales.

Étape 1 : Prise de données et modèle mathématique



Étant donnée une feuille de papier carton en format rectangulaire ayant comme mesures de côtes de 8 dm sur 5 dm, il est demandé de construire une boite avec couvercle en format de prisme droit à base rectangulaire de telle sorte que la capacité (le volume) obtenue soit maximale. Autrement dit, pourquoi on souhaite un volume maximal, la plus petite aire possible du carton? Il faut retenir que la cause est liée à l'environnement.

Or, les mesures de la contrainte sont 8 dm pour 5 dm. Alors, nous pouvons écrire les dimensions du prisme comme : 5 - x; 4 - x et x

Étape 2 : Trouver l'équation qui modélise le problème

Le volume maximal est pourtant modelé par la fonction : v(x) = (5 - x)(4 - x)x, x > 0

$$v(x) = x^3 - 9x^2 + 20x, \qquad x > 0$$

$$Dv = \left\{ x \in \frac{R}{0} < x \le 4 \right\} \text{ et } Im (v) = \left\{ y \in R / y \le y_M \right\}$$

 $y_M = la \ valeur \ maximale \ de \ la \ fonction \ v(x).$

D'après notre méthode, viens :

$$v(x) = x^3 - 9x^2 + 20x$$

$$v\left(x+\frac{1}{n}\right) = \left(x+\frac{1}{n}\right)^3 - 9\left(x+\frac{1}{n}\right)^2 + 20\left(x+\frac{1}{n}\right)^3$$
$$v\left(x+\frac{1}{n}\right) = x^3 + \frac{3x^2}{n} + \frac{3x}{n^2} + \frac{1}{n^2} - 9x^2 - \frac{18x}{n} + \frac{9}{n^2} + 20x + \frac{20}{n}$$

Puis, en calculant la différence $A_n = v\left(x + \frac{1}{n}\right) - v(x)$, on a:

$$A_n = \frac{3x^2}{n} + \frac{3x}{n^2} - \frac{18x}{n} + \frac{10}{n^2} + \frac{20}{n}$$

Finalement, en calculant le taux de variation $n \cdot A_n$:

$$n \cdot A_n = n \cdot \left(\frac{3x^2}{n} + \frac{3x}{n^2} - \frac{18x}{n} + \frac{10}{n^2} + \frac{20}{n}\right) = 3x^2 - 18x + 20 + \frac{3x}{n} + \frac{10}{n}$$

Si nous prenons n suffisamment grand, les termes où il y a n comme dénominateur s'approcheront tous de zéro. Donc, $n \cdot A_n = 3x^2 - 18x + 20$

Lorsque *n* est grand,
$$v(x + \frac{1}{n}) \to v(x)$$
, ainsi : $n \cdot \left[v\left(x + \frac{1}{n}\right) - v(x) \right] = n$. $A_n \cong f'(x)$

Nous voulons maximiser le volume, ainsi :

$$3x^2 - 18x + 20 = 0 \rightarrow x_1 = 3 + \frac{\sqrt{21}}{3}$$
 ou $x_2 = 3 - \frac{\sqrt{21}}{3}$

Comme nous cherchons le volume maximal, le point qui nous intéresse est bien :

$$Maximum \leftrightarrow v'(x) = 0$$
 et $v''(x) \le 0$. En $x_2 = 3 - \frac{\sqrt{21}}{3} \rightarrow v''(x) < 0$, alors: $x_2 = 3 - \frac{\sqrt{21}}{3} \approx 1,47$ c'est le point $Maximum$ cherché. En substituant $x_1 \approx 1,47$ dans la fonction $v(x)$, nous trouverons la valeur maximale de $v(x)$ qui est égale à 13,13 dm^3 Finalement, avec les connaissances mathématiques actuelles, nous pouvons résoudre la (SP), comme :

$$v(x) = x(4-x)(5-x) = v(x) = x^3 - 9x^2 + 20x$$

Donc le volume v est une fonction de x:

$$v(x) = x^3 - 9x^2 + 20x, \qquad x > 0$$

$$Dv = \left\{ x \in \frac{R}{0} < x \le 4 \right\} \text{ et } Im (v) = \left\{ y \in R / y \le y_M \right\}$$

 $y_M = la \ valeur \ maximale \ de \ la \ fonction \ v(x).$

On calcule v'(x) et on l'égale à zéro

$$v'(x) = 3x^2 - 18x + 20$$

$$v'(x) = 0 \leftrightarrow 3x^2 - 18x + 20 = 0$$

$$3x^2 - 18x + 20 = 0 \rightarrow x_1 = 3 + \frac{\sqrt{21}}{3}$$
 ou $x_2 = 3 - \frac{\sqrt{21}}{3}$

Comme nous cherchons le volume maximal, le point qui nous intéresse est bien :

$$Maximum \leftrightarrow v'(x) = 0$$
 et $v''(x) \leq 0$. En $x_2 = 3 - \frac{\sqrt{21}}{3} \rightarrow v''(x) < 0$, alors:

 $x_2 = 3 - \frac{\sqrt{21}}{3} \approx 1,47$ c'est le point *Maximum* cherché. En substituant $x_1 \approx 1,47$ dans la fonction v(x), nous trouverons la valeur maximale de v(x) qui est égale à 13,13 dm^3

Autrement dit, le candidat au point de maximum est obtenu en égalant à zéro la dérivée prime. Puis en le remplaçant sur la deuxième dérivée, la valeur acquise nous fournit les informations sur la croissance ou la décroissance de v(x).

Pour progresser, nous allons donner un deuxième exemple dont nous sommes intéressés au point minimum de la fonction. Alors, la prochaine situation-problème c'est la suivante :

6.11 À la recherche de l'optimisation. Situation-problème 2 :

De toutes les boîtes cylindriques avec un volume de $300 cm^3$, quelle est celle qui a l'aire totale minimale?



Étape 1: Prise de données et modèle mathématique

Soit r le rayon de la boite cylindrique et h leur hauteur, nous voulons déterminer les valeurs de r et h de telle façon que l'aire totale soit minimale.

Étape 2: Trouver les équations

 $A = 2\pi rh + 2\pi r^2$ (Aire latérale + Aire de la base) et $V = \pi r^2 h$

 $V = \pi r^2 h = 300$; h et r > 0.

Alors, $h = \frac{300}{\pi r^2}$ et $A = 2\pi r \cdot \frac{300}{\pi r^2} + 2\pi r^2$. Pourtant l'aire A est une fonction du rayon r:

$$A(r) = \frac{600}{r} + 2\pi r^2$$

En utilisant la méthode de Fermat pour trouver les extrémums d'une fonction viennent :

$$A(r) = \frac{600}{r} + 2\pi r^2 \ et \ A(r+e) = \frac{600}{r+e} + 2\pi r^2 + 4\pi re + 2\pi e^2$$

Il doit adégalé A(r) à A(r + e)

$$\frac{600}{r} + 2\pi r^2 \sim \frac{600}{r+e} + 2\pi r^2 + 4\pi re + 2\pi e^2$$

En suprimant les termes communs:

$$\frac{600}{r} \sim \frac{600}{r+e} + 2\pi e^2 + 4\pi re$$

En divisant tous les termes par e

$$\frac{600}{r(r+e)} \sim 4\pi r + 2\pi e$$

Suprimez e:

$$\frac{600}{r^2} \sim 4\pi r \rightarrow r^3 = \frac{150}{\pi} \rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{150}{\pi}} \cong 3,628 \ cm$$

Comme nous cherchons l'aire minimale, le point qui nous intéresse est bien $r \cong 3,628 \ cm$. En substituant $r \cong 3,628 \ cm$ dans la fonction A, nous trouverons la valeur minimale qui est égale à $248,08 \ cm^2$.

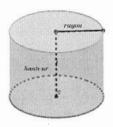
$$A(r) = \frac{600}{r} + 2\pi r^2$$

$$A(r) = \frac{600}{3.628} + 2\pi (3,628)^2 = 248,08 \text{ cm}^2$$

Cette exercice nous révèle une curiosité, car la boite cylindrique qui a l'aire totale minimale pour un volume fixé c'est donc laquelle qui a le rayon $r=\sqrt[3]{\frac{150}{\pi}}$ et $h=\frac{300}{\pi r^2}$, $=2\cdot\sqrt[3]{\frac{150}{\pi}}\cong 7,256$. Alors, la hauteur est égale au diamètre de la base de la boîte cylindrique.

Ceci est un résultat classique du calcul différentiel qui illustre bien le pouvoir d'application de cette discipline si cruciale pour les mathématiques.

Alors, pour généraliser, soit une boite cylindrique de rayon r et de la hauteur h. Pour un volume fixé en v, cette boite sera optimale lorsque nous aurons :



L'aire minimal pour une volume fixe
$$\mathbf{v} \leftrightarrow \begin{cases} r = \sqrt[3]{\frac{v}{2\pi}} \\ h = 2 \cdot \sqrt[3]{\frac{v}{2\pi}} \end{cases}$$

Nous suggérons de laisser à la charge de l'étudiant de trouver par lui-même le résultat de cette généralisation, car cela va promouvoir non seulement l'autonomie et la confiance, mais encore va les habituer à travailler avec la méthode. En plus, nous renforcerons l'intuition lors d'exercices de généralisation.

Pour cet exercice, l'application de notre technique est relativement facile. Par contre, au moment de faire la généralisation demandée (pour que l'aire soit minimale, il faut que la hauteur soit égale au double du rayon), les étudiants peuvent présenter des difficultés lors des transformations algébriques et numériques impliquées. Alors, pour guider l'enseignant, nous montrerons la résolution de la tâche attendue.

De toutes les boîtes cylindriques avec un volume fixe v, quelle est celle qui a l'aire totale minimale?

Résolution de la tâche avec l'approche opérationnelle $\frac{1}{n}$:

Soit r le rayon de la boite cylindrique et h leur hauteur, nous voulons déterminer les valeurs de r et h de telle façon que l'aire totale soit minimale.

Étape 2 : Trouver les équations

 $A = 2\pi rh + 2\pi r^2$ (Aire latérale + Aire de la base) et $v = \pi r^2 h$

 $v = \pi r^2 h$; $h \ et \ r > 0$.

Alors, $h = \frac{v}{\pi r^2}$ et $A = 2\pi r \cdot \frac{v}{\pi r^2} + 2\pi r^2$. Étant donné que le volume v est fixe, l'aire A est une fonction du rayon r:

$$A(r) = \frac{2 \cdot v}{r} + 2\pi r^2$$

En utilisant la méthode de Fermat pour trouver les extrémums d'une fonction, on obtient :

$$A(r) = \frac{2 \cdot v}{r} + 2\pi r^2$$

 $A\left(r+\frac{1}{n}\right) = \frac{2v}{r+\frac{1}{n}} + 2\pi \cdot \left(r+\frac{1}{n}\right)^2$ En faisant toutes les opérations et simplifications possibles, viens :

$$A\left(r + \frac{1}{n}\right) = \frac{2v}{r + \frac{1}{n}} + 2\pi r^2 + \frac{4\pi r}{n} + \frac{2\pi}{n^2}$$

Nous pouvon déterminer la différence $A_n = A\left(r + \frac{1}{n}\right) - A(r)$

$$A_n = \frac{2v}{r + \frac{1}{n}} + 2\pi r^2 + \frac{4\pi r}{n} + \frac{2\pi}{n^2} - \frac{2v}{r} - 2\pi r^2 = \frac{2v}{r + \frac{1}{n}} - \frac{2v}{r} + \frac{4\pi r}{n} + \frac{2\pi}{n^2}$$

Et alors, en calculant la taux de variation $n \cdot A_n$, on arrive à :

$$n \cdot \left(\frac{2v}{r + \frac{1}{n}} - \frac{2v}{r} + \frac{4\pi r}{n} + \frac{2\pi}{n^2}\right) = n \cdot \left(\frac{2v}{r + \frac{1}{n}} - \frac{2v}{r}\right) + n \cdot \left(\frac{4\pi r}{n} + \frac{2\pi}{n^2}\right) =$$

$$= 2vn \cdot \left(\frac{1}{r + \frac{1}{n}} - \frac{1}{r}\right) + 4\pi r + \frac{2\pi}{n} = 2vn \cdot \left(\frac{r - r - \frac{1}{n}}{r + \frac{1}{n}} - \frac{1}{r}\right) + 4\pi r + \frac{2\pi}{n} =$$

$$= 2vn \cdot \left(\frac{-\frac{1}{n}}{r\left(r+\frac{1}{n}\right)}\right) + 4\pi r + \frac{2\pi}{n} = \left(\frac{-2v}{r^2 + \frac{r}{n}}\right) + 4\pi r + \frac{2\pi}{n} =$$

$$n \cdot A_n = \left(\frac{-2v}{r^2 + \frac{r}{n}}\right) + 4\pi r + \frac{2\pi}{n}$$

Mais lorsque nous prenons n naturel suffisamment grand les termes $\frac{r}{n}$ et $\frac{2\pi}{n}$, s'approcheront de plus en plus de zéros. Pourtant: $n \cdot A_n \cong \frac{-2v}{r^2} + 4\pi r$. Si nous voulons que le taux de variation $n \cdot A_n$ soit zéro, alors on doit avoir $\frac{-2v}{r^2} + 4\pi r = 0$

$$\frac{-2v}{r^2} + 4\pi r = 0 \to r^2 \cdot \left(\frac{-2v}{r^2} + 4\pi r\right) = 0 \cdot r^2 = 4\pi r^3 - 2v = 0$$

 $r^3 = \frac{2v}{4\pi} \rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{v}{2\pi}}$ (I) Donc, partons pour trouver la valeur de la hauteur h:

Nous savons que $v = \pi r^2 h$, pourtant $h = \frac{v}{\pi r^2}(II)$ En substituant (I) en (II), on obtient:

$$h = \frac{v}{\pi \left(\left(\frac{v}{2\pi} \right)^{\frac{1}{3}} \right)^2} = \frac{v}{\pi \left(\left(\frac{v}{2} \right)^{\frac{1}{3}} \right)^2} = \frac{v}{\pi \left(\left(\frac{v}{2} \right)^{\frac{2}{3}} \right)} = \frac{2\left(\frac{v}{2} \right)}{\pi \left(\frac{v}{2} \right)^{\frac{2}{3}}} = \frac{2\left(\frac{v}{2} \right)^{\frac{1}{3}}}{\pi^{\frac{1}{3}}} = 2 \cdot \left(\frac{\frac{v}{2}}{\pi} \right)^{\frac{1}{3}} \text{ Or, } \frac{\frac{v}{2}}{\pi} = \frac{v}{2\pi}$$

Alors, $h = 2 \cdot \sqrt[3]{\frac{v}{2\pi}}$ et comme $r = \sqrt[3]{\frac{v}{2\pi}}$ nous arrivons à la preuve que la valeur de **h**est égale audouble du rayon comme nous voulions démontrer.

Ici, nous voulons souligner que les connaissances préalables comme les factorisations et les propriétés des exposantes sont importantes. Il faut se fier à l'algèbre.

« L'algèbre est généreuse : fréquemment, elle nous donne plus que l'on a demandé »

Jean Le Rond d'Alembert (1717-1783)

 $DA = \{r \in R^*\}$ et $Im(A) = \{y \in R/y \le y_M\}$. En utilisant les connaissances mathématiques actuelles, nous pouvons résoudre la SP2 (volume fixé en $300cm^3$) comme :

$$A(r) = \frac{600}{r} + 2\pi r^2$$

 $y_M = la \ valeur \ maximale \ de \ la \ fonction \ v(x).$

En calculant A'(r) et en égalant à zéro :

$$A'(r) = \frac{-600}{r^2} + 4\pi r$$

$$A'(r) = 0 \rightarrow 4\pi r = \frac{600}{r^2} \rightarrow r^3 = \frac{150}{\pi} \rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{150}{\pi}} \rightarrow r \cong 3,62$$

Finalement en calculant A''(r):

$$A''(r) = -600.(-2).r^{-3} + 4\pi = \frac{1200}{r^3} + 4\pi > 0$$

Donc, A''(r) > 0 dans le point critique, pourtant tel point est un point de minimum.

Alors on conclut:

$$r = \sqrt[3]{\frac{150}{\pi}} \cong 3,62 \text{ et } h = \frac{300}{\pi r^2} \to h = 2\sqrt[3]{\frac{150}{\pi}} \cong 7,256 \text{ cm}$$

Alors, la valeur minimale de la fonction est $248,08 cm^2$.

Pour promouvoir l'intuition à travers la visualisation, nous pouvons également construire avec Geogebra les graphiques des fonctions A(x), A'(x) et A''(x). Le regard sur le comportement de ces fonctions aide à comprendre les résultats suivants :

$$Max : A'(x) = 0$$
 et $A''(x) < 0$ et $Min : A'(x) = 0$ et $A''(x) > 0$

6.12 La proposition d'enseignement

Dans un premier temps, nous croyons que c'est intéressant que les étudiants résolvent les situations problème en utilisant la méthode de Fermat. Le but est de promouvoir une approche intuitive et géométrique en même temps ce qui est à la base les raisonnements proposés par Fermat. Puis, dans le sens de Duval (1993), à la phase initiale de l'apprentissage, il est fondamental de promouvoir les traitements à l'intérieur de chaque registre et les conversions entre différents registres de représentations possibles (numérique, graphique et algébrique).

Ce regard heuristique va promouvoir une analyse de congruence qui exige la discrimination des unités significatives propres à chaque registre de représentation ainsi que l'examen des transformations implicites éventuelles qui vont ensemble.

Donc, nous allons séparer les activités en deux phases. Dans la première, la méthode de Fermat traitée à la base sera exigée. Puis, dans la seconde phase, les étudiants pourront utiliser les systématisations travaillées déjà comme la dérivée des fonctions exponentielles. Autrement dit, nous pourrons travailler avec les notations de dérivée comme nous les utilisons aujourd'hui, mais sans s'éloigner de l'essence, sans perdre son caractère essentiel. À cette phase, notre but sera de faire développer d'autres compétences mathématiques comme la modélisation mathématique.

6.13 Les activités mathématiques à utiliser directement dans la classe

Les difficultés chez les élèves pourront être mitigées en utilisant la méthode d'enseignement ACODESA (voir la tâche au complet).

Page 0 Informations sur l'activité et recommandation pour l'enseignant

NOM DE L'ACTIVITÉ:

La Méthode de Fermat pour une approche d'enseignement plus intuitive du calcul différentiel.

OBJET DE L'ACTIVITÉ:

Notre objectif est de construire chez les étudiants un concept solide du calcul différentiel, englobant les aspects intuitifs, les aspects historiques, les aspects algébriques et les aspects géométriques.

DEGRÉ ACADÉMIQUE SUSCEPTIBLE D'ÊTRE MIS EN ŒUVRE:

Cette activité est destinée aux étudiants de la première année universitaire ou collégiale.

CONTENU MATHÉMATIQUE ADRESSÉ:

Introduction au calcul différentiel, les points extremum des fonctions (maximale et minimale) et introduction au concept de dérivée.

DURÉE APPROXIMATIVE :

Chaque activité a une durée estimée à 50 minutes.

MATÉRIEL NÉCESSAIRE:

Papier, crayon, calculatrice et le logiciel GeoGebra.

RECOMMANDATIONS POUR L'ENSEIGNANT :

D'abord il est recommandé un travail individuel d'investigation ensuite formation d'équipes de trois étudiants pour la suite de l'investigation et à la fin, discussion globale en grand groupe. Une étape d'autoréflexion (retour individuel à la situation),

et finalement l'étape d'institutionnalisation, de la part du professeur, du concept mathématique envisagé est menée pour finaliser.

Nous allons proposer 4 activités dans lesquelles le degré de difficultés va augmenter peu à peu. L'objectif est de familiariser l'étudiant à la modélisation mathématique et à l'utilisation de la méthode de Fermat pour trouver les points extrémums d'une fonction mathématique.

Pour les deux premières activités, les objectifs sont d'introduire chez les étudiants l'utilisation de la méthode de Fermat pour trouver les points maximum ou minimum d'une fonction et de montrer l'efficacité de la méthode pour la résolution de situations problèmes. Tandis que pour les deux dernières activités, nous allons remplir les objectifs envisagés dans les deux premières activités et aussi contextualiser le concept de la dérivée dans des situations de la vie quotidienne.

De plus, nous croyons que montrer les applications de la dérivée est possible et intéressant. Ceci va contribuer à la conscientisation de l'importance du calcul différentiel et peut impulser les étudiants à aller plus loin dans le sens de construire un apprentissage significatif.

Ainsi, les situations problèmes 3 et 4 que nous proposons s'appuient sur une conscientisation de l'environnement, car aujourd'hui nous voyons que le gaspillage de matériel pour la fabrication de produits industrialisés prend de plus en plus d'ampleur. Face à ce constat, on peut se poser la question de savoir si les formes des emballages qui existent dans nos supermarchés sont convenables pour l'environnement. À l'aide des mathématiques est-il possible de susciter une réflexion sur ces formes dans le but d'améliorer notre contexte environnemental?

Le format proposé est bien détaillé dans la SP1 (Situation problème 1), et il est suggéré de le suivr pour les autres situations problèmes, car les étapes pour la construction de l'activité sont les mêmes.

« Une étincelle suffit, si le combustible est beau, le feu apparaitra »

Pedro Castro

Page 1

À la recherche de l'optimisation

Page 2

Situation-problème 1

En utilisant la méthode de Fermat présentée auparavant, essaie de répondre à la question suivante :

De tous les rectangles ayant 60 cm de périmètre, lequel a l'aire maximale?

Remarque pour l'enseignant : Cette première activité semble être très simple et elle l'est en effet. Par contre, notre choix est de commencer la modélisation mathématique chez les étudiants de façon solide et pour ce faire nous allons débuter pour les cas plus simples et graduellement, nous allons amener les étudiants aux cas plus complexes où les connaissances mathématiques devront émerger naturellement. De cette manière, nous croyons que l'apprentissage sera plus intéressant et stimulant, car les étudiants vont développer l'auto confiance pour progresser dans l'apprentissage.

Page 3

RÉFLEXION INDIVIDUELLE

Dans cette section, l'étudiant est autorisé à exprimer individuellement ses idées initiales (représentations fonctionnelles spontanées) sur la situation présentée. On s'attend à une première approche de la situation et à un processus de réflexion avant la discussion entre les membres de l'équipe. Il est possible que les étudiants débutent par une approche de modélisation mathématique.

Il est possible d'ajouter dans cette section des directives ou des suggestions qui soutiennent la formulation des approches des étudiants. Par exemple, l'utilisation des instruments de mesure, l'utilisation du logiciel GeoGebra pour faire les premières investigations, entre autres.

Dans cette étape est attendu que les étudiants comprennent bien la situation proposée et, de plus, qu'ils soient capables de trouver la fonction mathématique qui modélise le problème.

Page 4

Discussion en équipe

En équipes de trois participants, les étudiants discuteront des stratégies utilisées et compareront leurs différentes procédures ainsi que les réponses obtenues. Dans cette section, il est possible que plus d'une idée centrale apparaisse dans l'équipe et qu'il soit important de l'écrire.

Au cours de la discussion, les étudiants pourront utiliser la technologie pour vérifier leurs réponses ou générer des idées qui répondent à leurs questions. Parmi eux, l'utilisation de *GeoGebra* peut être introduite dans cette section.

Dans cette page devront être soulevées quelques lignes directrices de discussion dans l'équipe pour une plus grande réflexion.

Pour cette première activité, la fonction qui modélise le problème est la fonction quadratique. Des connaissances préalables peuvent être nécessaires comme la formule pour trouver le sommet de la représentation du polynôme de 2^e degré, ce qui est intéressant à valoriser. Par contre, la question posée demande d'utiliser la méthode de Fermat pour répondre la question, donc il est attendu que les étudiants qui n'ont pas utilisé la méthode enseignée par Fermat reviennent à la situation du début pour confronter leurs résultats et utiliser la méthode enseignée pour répondre la question proposée.

Chaque équipe choisit un représentant pour expliquer au groupe les idées discutées au sein de l'équipe. L'enseignant cherche à poser des questions qui motivent une discussion sur les réponses trouvées. Dans cette section, les étudiants peuvent écrire ou enregistrer les idées d'autres équipes et les intégrer à leurs procédures.

Page 6

AUTOREFLEXION

L'autoréflexion est une partie de l'activité à laquelle on répond à la maison (tâche) ou en quelques jours après l'application de l'activité. Son objectif est de permettre à l'étudiant de reproduire les procédures choisies par le groupe pour résoudre le problème de recherche. Il est possible de proposer des activités similaires à celles proposées lors de la réflexion individuelle.

Comme suggestion d'activité, nous proposerons aux étudiants de généraliser la situation problème :

De tous les rectangles ayant le périmètre fixé m, lequel a l'aire maximale?

Remarque : Il est attendu dans cette proposition que les étudiants concluent que de tous les rectangles ayant le périmètre fixé *m*, celui qui a l'aire maximale, c'est bien le carré.

À la recherche de l'optimisation. Situation-problème 2 :

En utilisant la méthode de Fermat présentée auparavant, essaie de répondre à la question suivante :

De tous les rectangles ayant $4m^2$ d'aire, lequel a le périmètre minimal?

Comme devoir nous suggérons aux étudiants de généraliser la situation problème :

De tous les rectangles ayant l'aire fixée A, lequel a le périmètre minimal ?

De la même manière que pour la situation 1, nous cherchons la fonction qui modélise le problème. Par la suite, nous sommes intéressés à trouver le point optimal pour répondre à la question proposée. Par contre, dans cette proposition, la fonction qui modélise le problème n'est pas une fonction triviale comme la fonction quadratique présentée dans la situation-problème 1 et pourtant nous provoquerons l'étud ant, car ses connaissances préalables, telles que la formule pour trouver le sommet de la courbe liée à la fonction ne rentrent pas dans la solution. Notamment, nous croyons que les situations de conflit comme celle-ci sont une manière efficace de stimuler l'apprentissage.

À la recherche de l'optimisation - Situation problème 3 :

De la même manière que les situations proposées auparavant, nous cherchons la fonction qui modélise le problème. Ensuite, notre rôle est de trouver le point optimal qui maximise la fonction modulatrice. De plus, pour la prochaine phase de l'apprentissage, nous sommes intéressés au développement de la modélisation mathématique et pour ce faire nous allons nous pencher sur des situations où la modélisation mathématique est prise en compte.

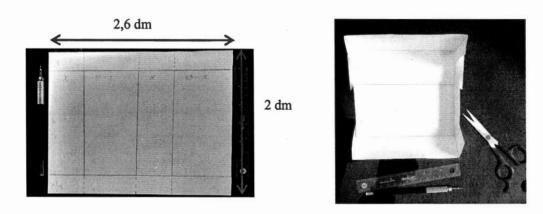
Pour cette étape, premièrement, nous allons approfondir les discussions sur les boites ayant comme forme un prisme à base rectangulaire. Nous demanderons aux étudiants en groupe de discuter de la façon de construire des boites avec une couverture ayant la capacité volumétrique maximale. Ils devront raisonner sur les conditions pour lesquelles nous pouvons trouver le format idéal.

Pour cette activité, nous suggérons que les étudiants, en groupe, modélisent les situations proposées. Pour ce faire, en prenant des feuilles de papier pour construire les boites, ils doivent construire leurs modèles mathématiques.

Pour ce genre de boite, notre contrainte sera les dimensions fixes du rectangle qui est pris en compte pour former le patron de la boite. À partir de la construction des boites,

les étudiants devront trouver les fonctions qui modélisent la situation et puis finalement trouver le point maximal cherché. C'est intéressant de fixer la contrainte (les dimensions du rectangle) pour ne pas différer les données, ce qui va faciliter le rôle de l'enseignant au moment de systématiser la connaissance. Alors nous pouvons fixer la contrainte à 2 dm X 2,6 dm.

Voici la boite construite:



Il est attendu que les étudiants considèrent toutes les possibilités de former la boite. Ainsi pour une boite de prisme rectangulaire, c'est possible de former des boites comme dans le tableau suivant :

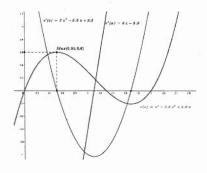
	Résolutions de la tâche
Raisonnements possibles	
1) C'est possible que les étudiants	Alors, selon ce raisonnement les dimensions
pensent que la boite idéale est celle	idéales seront : (0.7); (0,65) et (0.65) dm.
pour laquelle on prend la moitié de chaque côté. Dans ce cas, le volume trouvé est donné par les multiplications $(2-1,3); \left(\frac{1,3}{2}\right); (1,3)$	Pourtant le volume maximal par rapport à cette contrainte est : $v = 0.7 \times 0.65 \times 1.3 = 0.5915 \ dm^3$
$(2-1,3), (\frac{2}{2}), (1,3)$	

2) Une autre possibilité est de trouver la solution en cherchant le point maximal à partir de la fonction qui modélise le problème. Dans ce cas, les étudiants pourront considérer que la boite peut avoir de grands rabats collés.



Alors, selon ce raisonnement, les dimensions idéales seront trouvées en cherchant le point maximal de la fonction : $v(x) = x^3 - 3.3x^2 +$ 2,6x

Alors, volume maximal est : v = $0,60 \ dm^3$



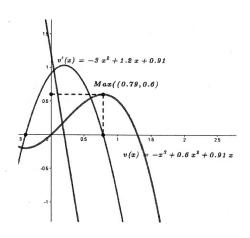
Max: v'(x) = 0 et v''(x) < 0

3) Les étudiants peuvent considérer collés et dans ce cas la fonction qui haximal de la modélise le problème diffère du premier cas.

Alors, selon ce raisonnement, les dimensions que la boite peut avoir de petits rabats déales seront trouvées en cherchant le point fonction: $v(x) = -x^3 +$ $v(x) = -x^3 + 0.6x^2 + 0.91x$

Alors, le volume maximal est :

$$v=0,\!60\;dm^3$$



$$Max: v'(x) = 0 \ et \ v''(x) < 0$$

Ici, nous voyons que le volume ne change pas si les rabats qui sont collés sont les petits ou les grands, ce qui est curieux. Nous pouvons donc demander aux étudiants d'expliquer quelles sont les implications géométriques qui justifient ce résultat.

4) Une dernière possibilité'est de commencer le pliage de la feuille de papier dans l'autre direction. Autrement dit, si nous commençons à plier à la moitié du côté plus court (2 dm), est-ce que cela va changer les résultats?

Dans ce cas, nous voyons que le volume maximisé par la nouvelle fonction est inférieur au cas Alors, selon ce nouveau raisonnement, les dimensions idéales seront trouvées en cherchant le point maximal de la fonction :

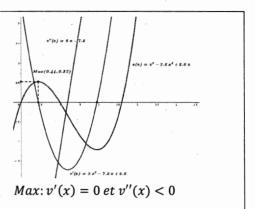
$$v(x) = x^3 - 3x^2 + 2.6x$$

Alors, le volume maximal est :

$$v = 0.53 dm^3$$

précédent. Donc, ce type de pliage n'est pas l'idéal.

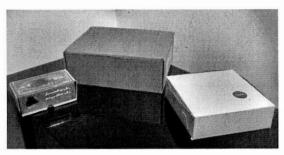
Les conclusions peuvent être discutées en grand groupe et chaque petit groupe peut être invité à présenter devant la classe les solutions trouvées.



À la recherche de l'optimisation. Situation-problème 4 :

Pour cette activité, nous suggérons que chaque étudiant amène des boites en forme de prisme rectangulaire, mais au contrairement aux situations antérieures, nous allons nous pencher sur des situations où les boites ne sont pas de type standard ce qui va enrichir l'activité, car cette activité a comme but de relier les mathématiques à partir d'une situation plus proche de la quotidienne des étudiants. Nous rentrerons dans des situations reliées à des situations concrètes, dans des situations de modélisation mathématique qui ont le caractère fonctionnel lié à la vie de tous les jours.

De plus, les discussions seront enrichies si nous pensons que pour fermer les boites de genre standard, il faut qu'on utilise toujours les adhésifs en plastique, ce qui implique des processus chimiques pour les fabriquer. Du côté de l'environnement cela va impliquer plus de gaspillages, comme le gaspillage d'énergie pour fabriquer ces adhésifs et par conséquent plus de pollution, etc.



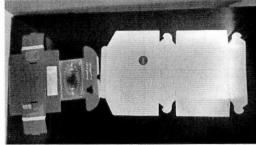


Figure 6.5 Exemples de boites prismatiques non standards de base rectangulaire

Ce genre de boites est fermé et n'a pas besoin d'adhésifs en plastique, ce qui est intéressant du point de vue de l'environnement.

Ici, nous voyons que les patrons gérés ne sont pas du genre standard comme dans les activités précédentes. D'abord, nous suggérons que chaque équipe choisisse une boite pour être analysée. Pour ce faire, les étudiants devront démanteler la boite choisie et à partir de l'analyse du patron formé, il est demandé aux étudiants de modéliser la situation pour trouver les dimensions idéales de la boite élue.

Pour commencer, il faut donc se rappeler que la contrainte dans les cas des boites prismatiques à base rectangulaire est toujours les dimensions du rectangle dont le patron est fait.

Pour guider l'enseignant, à titre d'exemple, nous allons pour notre étude choisir la boite de dattes fraiches de la photo en bas :

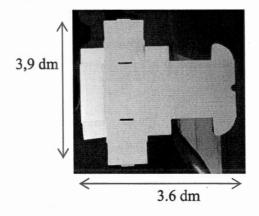


Alors, partons-nous à la résolution de la tâche

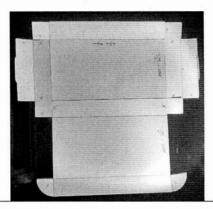
Modélisation mathématique

La boite choisie est la boite pour emballer des dattes fraiches.

En démantelant la boite nous trouvons le patron :



La comparaison du patron original par rapport au patron construit :



Résolution de la tâche

Or, les dimensions du rectangle de contrainte sont égales à 3,63 $dm \times 3,9 dm$ et les dimensions de la boite sont : $(1,52 \times 9,2 \times 5,5)$ dm

Alors, la boite originale a comme volume :

$$v = 0.769 \ dm^3$$

Par la suite, nous allons construite notre modèle de patron pour comparer avec la boite originale.

Alors, la fonction modulatrice est :

$$v(x) = (-4x + 3.9)(-1.5x + 1.815)(x)$$

$$v(x) = 6x^3 - 13,11x^2 + 7,08x$$

Nous cherchons le volume maximal, alors :

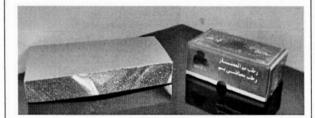
$$Max: v'(x) \ et \ v''(x) < 0$$

$$v'(x) = 18x^2 - 26,22x + 7,08$$

$$v'(x) = 0 \rightarrow x_1 = 0.36 \text{ ou } x_2 = -1.098$$

La comparaison de la boite originale par rapport à la boite construite :

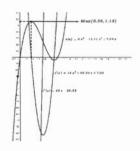
Selon nos calculs, notre boite a une capacité volumétrique plus grande. Cependant, notre boite a les dimensions qui peuvent ne pas être intéressantes pour la fabrication à cause d'autres contraintes qui influençent le choix de la boite.



(les points critiques)

Comme $x_1 = 0.36 \rightarrow v''(x) < 0$, alors ce lui c'est le point qui nous intéresse.

La représentation graphique



$$v(Max) = 1,13 \ dm^3$$

Ici, nous voyons qu'on a gagné 30% de plus en capacité volumétrique, car la boite originale a comme volume $0,769 \ dm^3$.

Du point de vue des mathématiques, notre boite est la plus intéressante. Par contre, il faut considérer que c'est possible que la fabrication ait d'autres contraintes à respecter, comme la palette, le camion, le marketing, etc. Cela nous l'analyserons dans la prochaine activité.

Évidemment, il faut souligner que pour une consultation complète sur les formats des emballages, il est nécessaire de considérer les autres contraintes telles que la palette impliquée dans la situation, le camion et le dépôt où la boite sera gardée et même le produit qui sera déposé sur la boite. Également, il y a d'autres contraintes reliées à la publicité et à l'ergonomie du produit, par exemple.

6.13.1 Analyse d'un cas réel d'une boite standard

Nous allons présenter un cas réel de consultation. Cela c'est intéressant, car nous pouvons montrer à nos étudiants que dans les situations de la vie quotidienne, nous pouvons en vrai, utiliser les connaissances mathématiques pour améliorer les emballages utilisés dans les usines. Pour notre étude nous choisissons l'entreprise Pousse-menu.

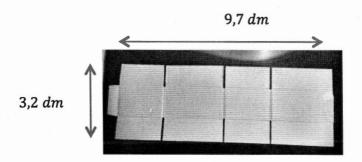
La ferme Pousse-menu, certifiée biologique, est un nouveau concept, celui de *la ferme urbaine*: une unité de production capable d'approvisionner une agglomération métropolitaine en denrées fraiches de haute qualité sur une base quotidienne. Cette usine produit des grains frais qui doivent être emballés pour finalement être commercialisés et par conséquent ces emballages doivent s'adapter aux contraintes du produit, de la palette utilisée pour le transfert vers le camion ou bien vers les rangs où ils seront estoqués.

Nous allons pourtant montrer une étude de cas qui tourne autour de l'emballage utilisé par la ferme Pousse-menu. La publication du résultat de cette étude a été autorisée par l'entreprise. C'est ce que nous allons présenter maintenant.

Le produit choisi est les grains frais de radis daikon. Ce produit est emballé dans des petits sacs contenant 200 g chacun puis ils sont mis dans des boites prismatquies à base rectangulaire de dimensions $(2,794 \times 2,32 \times 1,016)$ dm. La boite est conçue pour garder 12 sacs de grains.



La contrainte dans le cas de cette boite prismatique à base rectangulaire est les dimensions du rectangle dont le patron est fixé : $9.7 \ dm \times 3.2 \ dm$



En posant ces données, nous pouvons modéliser mathématiquement la situation et présenter nos résultats.

Alors les contraintes pour le coupage sont x; (4.85 - x) et (3.2 - x). Pourtant, la fonction modulatrice est $v(x) = x^3 - 8.05x^2 + 15.52$.

Nous cherchons, donc le point maximal de v(x). Donc, $Max \ v(x) \leftrightarrow v'(x) = 0$ et v''(x) < 0

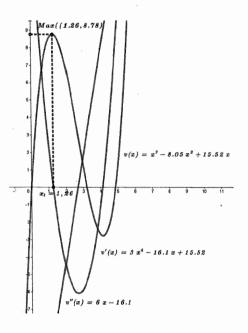
Soient les fonctions dérivées de v(x):

$$v'(x) = 3x^2 - 16,11x + 15,52$$
 et $v''(x) = 6x - 16,11$

$$v'(x) = 0 \rightarrow 3x^2 - 16,11x + 15,52 = 0 \leftrightarrow x_1 = 1,26 \ ou \ x_2 = 4,11$$

Comme en $x_1 = 1,26 \ v''(x) < 0$, x_1 c'est le point qui nous intéresse. Donc, le volume maximal produit par cette boite est $v = 8,78 \ dm^3$

La représentation graphique :



Si nous comparons le volume obtenu par notre boite $(8,78 \ dm^3)$ avec le volume de la boite original, nous arrivons comme résultat qu'on a gagné 34,3% de plus en capacité volumétrique, étant donné que la boite originale a comme volume $5,768 \ dm^3$.

Jusqu'à l'instant nous sommes bien du côté mathématique, mais il reste encore à nous questionner s'il y a d'autres contraintes à analyser. Bien, premièrement, il faut absolument que notre boite soit capable de ranger les sacs de grains qui vont dedans. En analysant les dimensions du sac de grains, nous concluons que notre boite est correcte. En effet, les dimensions du sac sont très bien adaptées à notre boite, plus que

dans la boite originale où les sacs vont être très serrés. Donc, d'après cette première analyse nous sommes gagnants. Par contre, pour assurer que les sacs soient bien placés dans les boites, il faut que nous fassions de petits ajustements aux dimensions de notre boite.

Pour faire une estimation approximative du volume qu'un sac occupe, nous allons le considérer comme un prisme à base rectangulaire. Ainsi, les dimensions approximatives du petit sac sont : $(1.9 \times 1.1 \times 0.25) dm^3$.

Les dimensions optimales de notre boite sont : $(35.9 \times 19.4 \times 1.26) \ dm^3$. Pour ranger les sacs nous changerons un peu ces dimensions. Les nouvelles mesures seront : $(3.6 \times 2 \times 1.2) \ dm^3$. Le nouveau volume de notre boite sera donc : $v = 8.64 \ dm^3$, ce qui peut différer du volume optimal trouvé qui était de $8.78 \ dm^3$.

Ces deux étapes étant comprises, nous arrivons à la conclusion que notre boite est encore la meilleure, car nous gagnons en capacité volumétrique. Par contre, même si nous n'avons pas changé la contrainte initiale (les dimensions du rectangle, dont le patron est fixé), les petits sacs rentrent mieux dans la nouvelle boite que dans la boite originale. Pour conclure, notre boite est intéressante vu que le sac est placé correctement, cela va garantir une bonne présentation au consommateur final et en plus le produit ne risque pas d'être déchiré à cause du serrement.

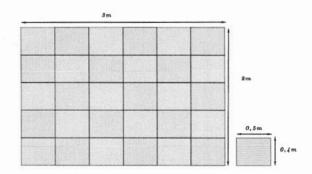
Finalement, pour compléter la consultation demandée par la ferme Pousse-menu, il nous reste encore à faire une analyse de la palette utilisée pour transporter ces boites. Malgré que les connaissances mathématiques impliquées dans l'optimisation de palettes par rapport aux boites ne rentrent pas en étude dans ce mémoire, c'est intéressant de donner quelques explications brèves pour enrichir un cours de calcul différentiel. Ainsi, dans la prochaine sous-section nous allons faire une brève analyse de ce thème.

6.13.2 La palette versus les boites

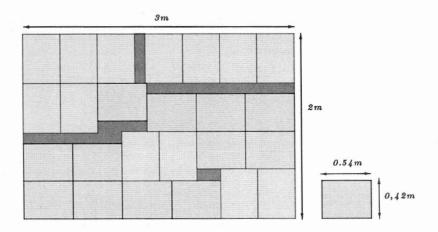
Les usines utilisent toujours des palettes pour transporter leurs produits vers l'entrepôt ou vers les moyens de transport de charge (trains, bateau et camions). Pour les usines, l'optimisation des palettes est crucial, car une palette optimisée va garantir un transport efficace dans le sens d'économiser de l'espace et du temps estimé pour faire les déplacements nécessaires.

Pour l'optimisation de palettes, la question à poser est très simple : étant donné une palette de dimensions $A \times B$ et les boites de dimensions $a \times b$, $(a \ge b)$, il est donc demandé de placer la plus grande quantité de boites sur la superficie de la palette. Autrement dit, l'aire occupée par la palette doit être remplacée de façon optimale par les superficies des boites (les aires occupées par la base plus grande de la boite). Cependant, la question est simple, mais les solutions peuvent être très complexes.

Pour illustrer le tout, nous donnons premièrement un exemple simple: imaginons que nous avons des boites prismatiques de base rectangulaire ayant les dimensions $0.5 m \times 0.4 m$ et la palette utilisée ayant les dimensions $3 m \times 2 m$. Dans ce cas, la solution est très simple, car si on prend l'aire de la surface de la palette $(3 m \times 2 m = 6 m^2)$, nous voyons que l'aire d'une boite $(0.5 m \times 0.4 m = 0.2 m^2)$ rentre 30 fois dans la palette : $(6 \div 0.2) = 30$.

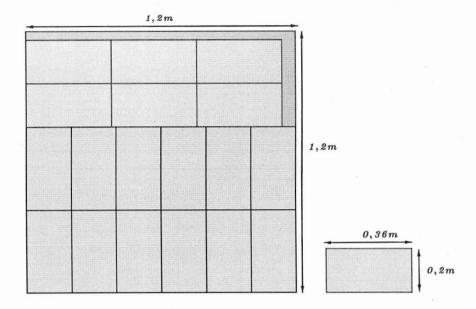


Par contre, si les dimensions tant de la palette que de la boite ne sont compatibles directement comme dans l'exemple ci en haut, la solution peut être complexe. Par exemple, si les boites ont les dimensions de contrainte égales à $0.54 \, m \times 0.42 \, m$ et les dimensions de la palette sont $3 \, m \times 2 \, m$, la solution optimale sera :



Dans ce cas, nous voyons que la quantité maximale des boites est de $25 \times (0.54 \times 0.42)$ m par rapport aux dimensions de la palette. Cela est un résultat étonnant, car si on prend l'aire de la palette $(3 \times 2 = 6)$ et nous divisons par l'aire de la boite $(0.54 \times 0.42) = 0.2268$, nous allons donc trouver comme résultat $\frac{6}{0.2268} \cong 26.46$ et pourtant la suggestion (25 boites par palette) est intéressant.

D'après ces exemples, nous pouvons donner la solution pour la palette de la ferme Pousse-menu. La palette utilisée a les dimensions $(1,2 \times 1,2)m$ et les dimensions de notre boite sont $(0,36 \times 0,2)m$. Donc, notre solution sera :



Dans le cas de notre boite, nous voyons que la quantité maximale des boites est de $18 \times (0.36 \times 0.2)$ m^3 par rapport aux dimensions de la palette.

Ceci est un résultat intéressant, car si on prend l'aire de la palette $(1,2 \times 1,2 = 1,44)$ et que nous le divisons par l'aire de la boite $(0,36 \times 0,2) = 0,072$, nous allons trouver comme résultat $\frac{1,44}{0,072} = 20$ et pourtant la solution (18 boites par palette) est bonne.

En somme, d'après les solutions optimales présentées pour la boite et pour la palette, nous concluons sur la consultation demandée par la ferme Pousse-menu.

6.13.3 L'emballage pour le yogourt : Un cas spécial

Pour terminer notre proposition d'enseignement, nous aimerons donner à titre d'illustration l'exemple de l'emballage pour le yogourt qui est un des emballages les plus sophistiqués, car ce genre d'emballage demande plus d'attention que les

emballages communs. Le yogourt est un produit délicat. Par contre, pour le fabriquer c'est un produit simple : du lait fermenté seul ou bien du lait fermenté avec des fruits. Alors, pourquoi leur emballage est-il complexe ?

Pour répondre à cette question, nous allons montrer la liste de contraintes impliquées à la fabrication d'un emballage poour le yogourt.

- 1) Premièrement, la contrainte de base est toujours de trouver la plus petite aire de la superficie pour un certain volume donné (maximum volume et minimale quantité de matériau). De plus, la plus petite aire de la superficie est importante pour que le yogourt reste plus de temps possible avec la température du réfrigérateur du supermarché. Si cette exigence est remplie, le yogourt va chauffer plus lentement parce que si l'aire de l'emballage est minimale alors elle ne va pas beaucoup échanger avec la température ambiante. Les yogourts ne supportent pas de rester à la température ambiante longetemps (surtout pour des températures en haut de 26 degrés Celsius). En d'autres mots, si le yogourt reste à la température ambiante, il va pourrir dans un délai de temps précis, délai qui n'est pas long. En effet, les choses se compliquent encore plus si le yogourt est formé de lait avec des fruits. Dans ce cas, le délai de temps pour que le produit soit impropre pour la consommation est encore plus court.
- 2) Un emballage qui a la plus grande résistance possible est encore demandé (à cause des empilements et des possibles chocs qui peuvent provoquer la destruction du produit).
- 3) Finalement, la dernière contrainte demande que l'emballage ait la meilleure convexion naturelle possible. Cette exigence provient du fait de ne pas former des quantités d'eau à la superficie interne de l'emballage. En autres mots, la fabriquant désire que le yogourt ait une uniformité de son contenu, et que si de l'eau qui est à la superficie interne apparait lorsque nous l'ouvrons cela donne une mauvaise impression du produit. Normalement, les emballages qui n'ont pas ce souci demandent au

consommateur de secouer à l'avance l'emballage pour que le yogourt soit mélangé avec l'eau de la superficie.

Pourtant un emballage optimal pour le yogourt exige que nous trouvions la courbe qui satisfasse les contraintes 1, 2 et 3 explicités en haut. (Notes de cours de calcul appliqué réalisé à l'école Prandiano en 2010 au Brésil).

Par exemple, juste pour satisfaire la première exigence (trouver la courbe en re deux points A et B qui tourne autour de l'axe des abscisses, elle produit un solide de révolution d'aire minimale), ce qui implique de résoudre l'intégrale :

$$S = \int_A^B 2\pi y \sqrt{1 + y^2} \, dx \,.$$

Nous terminons notre proposition pour l'enseignement en croyant qu'une approche intuitive par la résolution de situations problèmes peut réveiller la curiosité et ouvrir l'esprit des étudiants dans le sens de les faire progresser dans leurs études. Surmonter le paradigme que le calcul différentiel est destiné à peu de gens qui ont une capacité extra normale est notre but. Pour ce faire, nous croyons que l'envie de faire des mathématiques passe par arriver à découvrir les mathématiques, à bien comprendire les notions et les théories. Notre proposition va dans ce sens.

Il faudra poser de belle s et bonnes questions pour réveiller la curiosité chez nos apprenants. Comme disait Leonard da Vinci (1452-1519) :

« La simplicité c'est la sophistication suprême »

6.14 Perspective du mémoire

Les chapitres précédents nous montrent une idée globale pour approcher un enseignement significatif dans un cours de Calcul différentiel. L'intuition, la visualisation et une méthode d'enseignement ont été proposées pour construire un cours qui prenne l'histoire d'un concept mathématique comme point essentiel. La tâche que nous nous sommes proposée tout au début de ce mémoire a été largement dépassée et cela a provoqué un manque d'expérimentation.

La construction de quelques exemples a demandé un grand effort et cela nous a empêché de réaliser une expérimentation appropriée qui pourrait donner lumière à notre hypothèse d'amélioration de l'apprentissage de la dérivée chez les cégépiens.

Mais, en même temps, il faut dire que la complexité de l'apprentissage du calcul différentiel demandait une approche profonde sur les tâches que nous pourrions utiliser dans la classe de mathématiques. Cette complexité est devenue énorme au fur et mesure que l'on avançait dans le mémoire. Le pas suivant sera la mise en pratique des idées présentées dans le mémoire dans un cégep. Nous espérons que ce mémoire pourra représenter un point de départ pour l'élaboration de tâches dans le cours de calcul différentiel.

BIBLIOGRAPHIE

- Amiotte et Hamel. (2007). Calcul différentiel. Éditions du renouveau pédagogique (ERPI), Québec.
- Apostol, T. M. (1967). Calculus. New York: J. Wiley.
- Bair, J. (2008). Les infiniment petits selon Fermat : prémisses de la notion de dérivée. Récupéré de http://www.bibnum.education.fr/mathematiques/analyse/methode-pour-la-recherche-du-minimum-et-du-maximum.
- Bachelard, G. (1938). La formation de l'esprit scientifique : contribution à une psychanalyse de la connaissance. Paris : Vrin.
- Bardi, J.S. (2008). A guerra do calculo, Les éditions Record. São Paulo, Brésil.
- Bassanezi, R.C. (2006). Ensino-aprendizagem com modelagem matematica, Contexto,. São Paulo, Brésil.
- Bell, E.T. (1961). Les grands mathématiciens, Les éditions Payot, Paris.
- Blum, W. et Niss, M. (1989). Mathematical Problem Solved, Modeling, Chinchester.
- Boyer, C.B. (1996). História da matemática. São Paulo, Brésil.
- Brousseau, G. (1976). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. Dans Vanhamme, J. et Vanhamme, W. (éd.), La problématique et l'enseignement des mathématiques. Comptes rendus de la XXVIII^e rencontre organisée par la Commission Internationale pour l'Etude et l'Amélioration de l'Enseignement des Mathématiques (pp. 101-117). Louvain la Neuve.
- Brousseau, G. (1983). Les obstacles épistémologiques et la didactique des mathématiques. Recherches en didactique des mathématiques, 4(2), 165-198.
- Bruneau, O (2002). L'Analyste de Berkeley vs le Traité des Fluxions de Maclaurin : une certaine idée de la preuve en methématiques. La Preuve, Nantes, France. pp.1:83-197. Récupéré de https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01179928

- Brunelle, E. et Désautels, M.A. (2011). *Calcul Différentiel*. les éditions CEC inc. Québec.
- Castela, C. (1995). Apprendre avec et contre ses connaissances antérieures: Un exemple concret, celui de la tangente. Recherches en didactique des mathématiques, 15(1), 10-47.
- Castro, (2018, sous presse). Les problèmes d'apprentissage du calcul différentiel et l'apporte de la méthode de Fermat pour une approche d'enseignement plus intuitive. Seminario Nacional de Tecnologia en la ensenanza y el apprentissage de las marématicas, 2018.
- Cornu, Bernard (1981). Apprentissage de la notion de limite: Modèles spontanés et modèles propes. Dans *Proceedings PME (Psychology of Mathematics Education)*, Grenoble, France, 1981, pp. 322-326.
- Corriveau, C. et Tanguay, D. (2007). Formalisme accru du secondaire au collégial : les cours d'Algèbre linéaire comme indicateur. *Bulletin de l'Association Mathématique du Québec, XLVII* (1), 10-25.
- Commission inter-IREM (Épistémologie et histoire des mathématiques). (1999). *Aux origines du calcul infinitésimal*. Lyon : Ellipse.
- Duval, R. (1988). Graphiques et équations : L'articulation de deux registres. *Annales de Annales de didactique et de sciences cognitives*, 1,235-253.
- Duval R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives* 5, 235-253.
- Duval, R. (1995). Sémiosis et pensée humaine : Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels. Berne: Peter Lang.
- Dufour, S. (2011). L'utilisation des représentations par deux enseignantes du collégial pour l'introduction de la dérivée. [Mémoire de maîtrise]. *Montréal*: *Université du Québec à Montréal*.
- Deborah Hughes-Hallett (1999). *Fonctions d'une variable*. Éditeur: Montréal : Chenelière/McGraw-Hill
- Ervynk, G. (1981). Difficultés conceptuelles des étudiants de première année d'université lors de l'acquisition de la notion de limite. Dans *Proceedings PME* (Psychology of Mathematics education), Grenoble, France, 1981, 330-333.

- Fermat, P. (1636). Œuvres de Fermat, publiées par les soins de MM. Paul Tannery et Charles Henry, Gauthier-Villars, 1896 (Tome troisième, extrait 121-123)
- Hitt, F. (1994). Teachers' difficulties with the construction of continuous and discontinuous functions. *Focus on Learning Problems in Mathematics*. Center for Teaching/Learning of Mathematics, *16*(4), 10-20.
- Hitt, F. (2003). Le caractère fonctionnel des représentations. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 8, 255-271.
- Hitt, F. (2006a). Students' functional representations and conceptions in the construction of mathematical concepts. An Exemple: The concept of limit. *Annales de didactiques et de sciences cognitives*, 11, 251-267.
- Hitt, F. (2006b). Apprentissage en collaboration, débat scientifique et autoréflexion (ACODESSA). Actes de la Commission internationale pour l'étude et l'amélioration de l'enseignement des Mathématiques (CIEAEM-58), 121-126.
- Hitt, F. (2007). Utilisation de calculatrices symboliques dans le cadre d'une méthode d'apprentissage collaboratif, de débat cognitif et d'auto-réflexion. Dans Baron, M., Guin, D. et Trouche, L. (Éd.). Environnements informatisés pour l'éducation et la formation scientifique et technique: modèles, dispositifs et pratiques (65-88). Paris: Hermes.
- Hitt, Saboya & Cortés. (2017). ACODESA, méthodologie.
- Hitt, F. et Passaro, V. (2007). De la résolution de problèmes à la résolution de situations problèmes : Le rôle des représentations spontanées. Dans Commission Internationale pour l'Étude et l'Amélioration de l'Enseignement des Mathématiques (CIEAEM-59). Dobogókö, Hongrie.
- Hitt, F. (2013). Théorie de l'activité, interactionnisme et socioconstructivisme. Quel cadre théorique autour des représentations dans la construction des connaissances mathématiques? Dans Annales de Didactique et des sciences cognitives, 18, p.9-27., IREM de Strasbourg.
- Hitt, F. (2016). Note de cours MAT7191 : Didactique du calcul différentiel. Format éléctronique.
- Hitt, F. (2018). Notes de cours MAT3225 : Didactique de la variable et les fonctions. p. 261.

- Hitt, F., Guzmán, J. et Páez, R. (2001). Que signifie être compétent dans une théorie des représentations des concepts mathématiques? Dans Actes du Colloque Annuel du Groupe des Didacticiens des Mathématiques du Québec (173-187). Montréal: GDM.
- Hitt, F. et Morasse, C. (2009). Advanced numerical-algebraic thinking: constructing the concept of covariation as a prelude to the concept of function. *Electronic journal of research in educational psychology*, 7(1), 244-260.
- Giusti, E. (2009). Les méthodes de maxima et de minima de Fermat, Tome XVIII, (2), 59-85. Récupéré de http://afst.cedram.org/item?id=AFST_2009_6_18_S2_59_0
- Guidorizzi, L. (1985). *Um Curso de Cálculo* : volume 1, LTC (p.284-285). São Paulo, Brésil.
- Groupe Aha (1999). (approche euristique de l'analyse) Vers l'infini pas à pas. Bruxelles De Boeck-Wesmael.
- Kiem, M. T. (2011). Apprentissage des fonctions au lycée avec un environnement logiciel: situations d'apprentissage et genèse instrumentale des élèves. Mathématiques générales [math.GM]. Université Paris-Diderot Paris VII.
- Laporte, C. (2017). (Rapport de recherche), Université du Québec à Montréal (p.12-14).
- Larousse (2018). Dictionnaire.
- Machado, N.J. (1988). Noções de Cálculo, les éditions Scpione. São Paulo, Brésil.
- Menard, J. (1970). *Calcul différentiel et intégral I,* Collection mathématique Nouvelles, Ottawa.
- Meneghetti R.G. et Bicudo, I. (2001) O que a historia do desenvolvimento do calculo pode nos ensinar quando questionamos o saber matématico, seu ensino e seus fundamentos. *USP Brasil UNESP Brasil Revista Brasileira de História da Matemática Vol 2 n3 (Abril/2002) pag. 103 118 Publicação Oficial da Sociedade Brasileira da História da Matemática* ISSN 1519-955X RBHM.
- More, L.T. (1962, c1934). *Issac Newton A biography by Louis Trenchard*. Collection Léon-Lortie, Les éditions New York: Dover.

- Ministère de l'Éducation et de l'Enseignement supérieur. (2016). Sciences de la nature : programme d'études préuniversitaires. Récupéré le 8 juin 2016 de http://www.education.gouv.qc.ca/fileadmin/contenu/documents_soutien/Ens_Sup/Collegial/Form_collegiale/Programmes_etudes_preuniversitaires/200.B0_Sciences_nature_VF.pdf
- Passaro, V. (2007). Étude expérimentale sur le développement du concept de covariation entre deux grandeurs révélé par une analyse des représentations spontanées d'élèves du premier cycle du secondaire. (Mémoire de maîtrise). Université du Québec à Montréal, Canada.
- Passaro V. (2013). Jouer avec le concept de fonction ou explorer la fonction par l'étude covariationnelle. Association mathématique du Québec Bulletin AMQ, (LIII)3 octobre 2013 73 Textes du 56e congrès.
- Passaro, V. (2015). Analyse du raisonnement covariationnel favorisant le passage de la fonction à la dérivée et des situations qui en sollicitent le déploiement chez des élèves de 15 à 18 ans. (Thèse de doctorat). Montréal : Université de Montréal.
- REIS, Frederico da Silva. A tensão entre rigor e intuição no ensino de Cálculo e Análise: a visão de professores pesquisadores e autores de livros didáticos. (Thèse de doctorat). Université de Campinas, FE/Unicamp, 2001.
- Selden, J., Mason, A., et Selden, A. (1989). Can Average Calculus Students Solve Non routine Problems? Journal of Mathematical Behavior, 8, 40-50.
- Selden, J., Selden, A. et Mason, A. (1989). Peuvent les étudiants moyens en calcul réscualre des problèmes non routiniers? Supported by a Faculty instructional Improvement Grant from Tennessee Technological University. Journal of Mathematical Behavior, 8, 40-50.
- Sierpinska, A. (1985). Obstacles épistémologiques relatifs à la notion de limite. Recherches en Didactique des Mathématiques, 6(1), 10-67
- Tall et Vinner. (1981). Concept image and concept definition in mathematics whit particular reference to limites and continuity. Education Studies in mathematics (12), 151-169.
- Youscak evitch, A. P. (1981). Le concept de fonction jusqu'au milieu du 19ème siècle. Fragments d'histoire des mathématiques. *Brochure APMEP*, (41), 7-68.

Zandieh, M. (2000). A theoretical framework for analyzing student understanding of the concept of deriv- ative. Dans E. Dubinsky, A. Schoenfeld, & J. Kaput (Eds.), Research in collegiate mathematics education, IV (Vol. 8, pp. 103-127). Providence, RI: American Mathematical Societ.