

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL

ARBRES DE PENROSE PLEINEMENT FEUILLUS

MÉMOIRE
PRÉSENTÉ
COMME EXIGENCE PARTIELLE
DE LA MAÎTRISE EN MATHÉMATIQUES

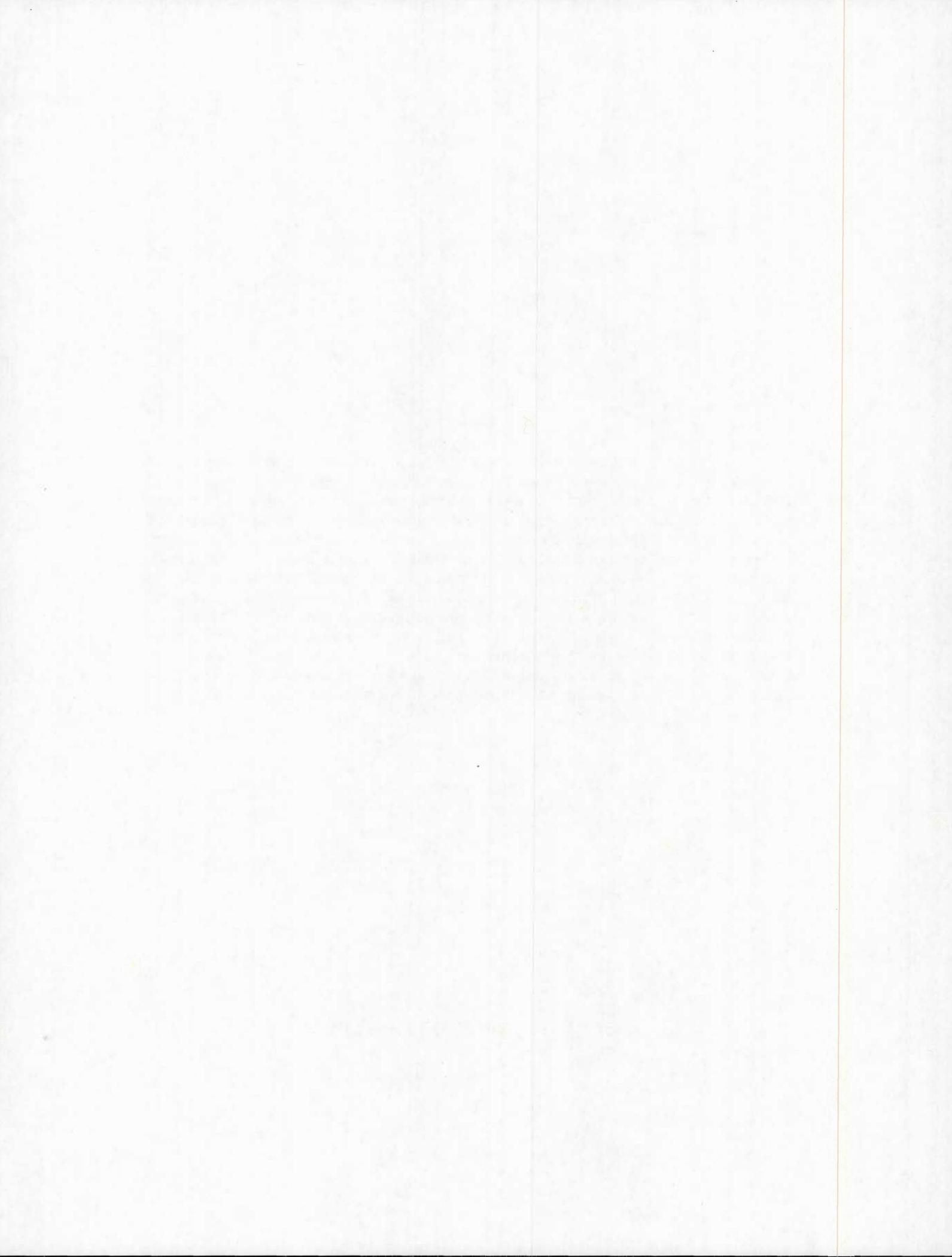
PAR
CAROLE PORRIER

AVRIL 2019

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL
Service des bibliothèques

Avertissement

La diffusion de ce mémoire se fait dans le respect des droits de son auteur, qui a signé le formulaire *Autorisation de reproduire et de diffuser un travail de recherche de cycles supérieurs* (SDU-522 – Rév.10-2015). Cette autorisation stipule que «conformément à l'article 11 du Règlement no 8 des études de cycles supérieurs, [l'auteur] concède à l'Université du Québec à Montréal une licence non exclusive d'utilisation et de publication de la totalité ou d'une partie importante de [son] travail de recherche pour des fins pédagogiques et non commerciales. Plus précisément, [l'auteur] autorise l'Université du Québec à Montréal à reproduire, diffuser, prêter, distribuer ou vendre des copies de [son] travail de recherche à des fins non commerciales sur quelque support que ce soit, y compris l'Internet. Cette licence et cette autorisation n'entraînent pas une renonciation de [la] part [de l'auteur] à [ses] droits moraux ni à [ses] droits de propriété intellectuelle. Sauf entente contraire, [l'auteur] conserve la liberté de diffuser et de commercialiser ou non ce travail dont [il] possède un exemplaire.»



REMERCIEMENTS

Quelques personnes ont grandement marqué mes deux années de maîtrise à l'UQAM. Je tiens à remercier avant tout mon directeur de recherche Alexandre Blondin Massé pour son soutien, tant moral qu'intellectuel et financier, depuis le début de ma formation ici. Sa bienveillance m'a été d'une grande aide dans les périodes difficiles. Un grand merci également à Gilbert Labelle, mon codirecteur de recherche, et à la fondation de l'UQAM pour leur soutien financier, sans lequel je n'aurais pas pu continuer.

Je suis également reconnaissante envers Marie-Jean Meurs et Louise Laforest, qui m'ont accordé leur confiance en me donnant mes premiers contrats d'assistante d'enseignement à l'UQAM et n'ont cessé de la renouveler par la suite. Outre l'apport financier, j'ai pris beaucoup de plaisir à enseigner et cela m'a permis de reprendre confiance en moi après une mauvaise expérience à l'éducation nationale française.

Je voudrais aussi remercier les membres du LaCIM. Il règne dans ce laboratoire un climat propice tant à la détente qu'au travail, aussi bien grâce aux étudiants qu'aux professeurs. J'ai également trouvé ma place à l'UQAM au sein d'associations étudiantes, notamment auprès de mes amis du comité jeux qui sont comme une seconde famille pour moi.

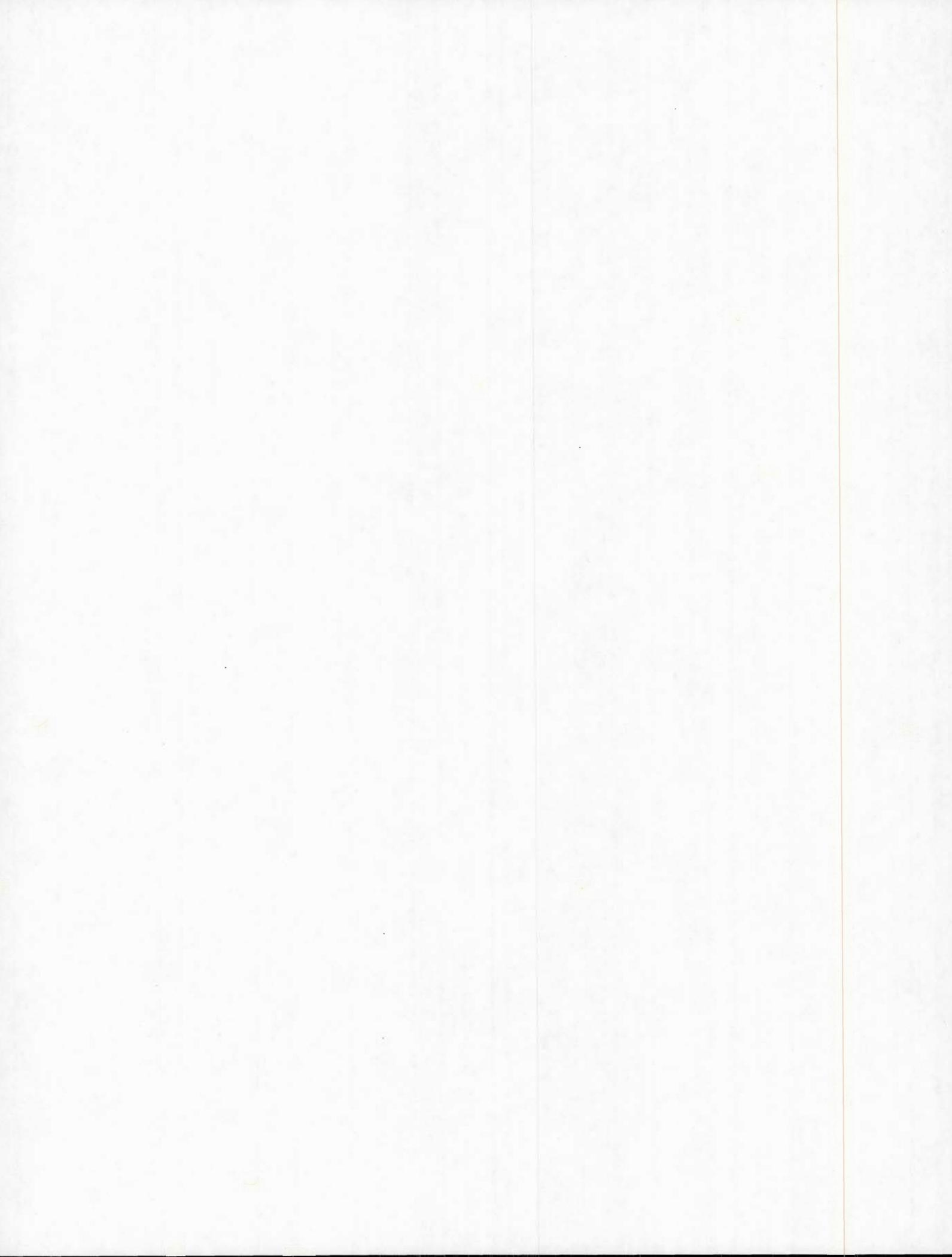
Hors de l'UQAM, j'ai pu compter sur la précieuse amitié d'Isabelle, qui m'a permis de rencontrer d'autres personnes formidables. Enfin, que serais-je sans ma mère, dont le soutien a été inébranlable tout au long de ma vie ?

TABLE DES MATIÈRES

LISTE DES TABLEAUX	ix
LISTE DES FIGURES	xi
RÉSUMÉ	xv
INTRODUCTION	1
CHAPITRE I THÉORIE DES GRAPHES	5
1.1 Notions de base	5
1.2 Familles de graphes	12
1.3 Arbres et sous-arbres	16
CHAPITRE II PAVAGES : SYMÉTRIES ET APÉRIODICITÉ	25
2.1 Définitions de base	25
2.2 Symétrie, transitivité et régularité	33
2.3 Pavages normaux ou équilibrés, théorème d'extension	39
2.4 Pavages apériodiques	43
2.4.1 Pavages à similitudes	45
2.4.2 Les pavages de Robinson et d'Ammann	48
CHAPITRE III PAVAGES DE PENROSE	53
3.1 Trois ensembles de prototyles intimement liés	53
3.2 Génération de pavages de Penrose	63
3.2.1 Avec des losanges de Penrose	63
3.2.2 Avec des cerfs-volants et fléchettes	64
3.2.3 Autres méthodes de génération des pavages de Penrose	65
3.3 Propriétés des pavages "cerfs-volants et fléchettes"	66
3.4 Barres d'Ammann et suites musicales	75
CHAPITRE IV SOUS-ARBRES INDUITS PLEINEMENT FEUILLUS	81

4.1	Présentation du problème	82
4.2	Fonctions feuilles dans quelques familles de graphes finis	85
4.3	Arbres pleinement feuillus dans des grilles régulières	86
4.3.1	Définitions et notations	88
4.3.2	Fonction feuille pour les polyominos-arbres	89
4.3.3	Polyhexes-arbres et polyamants-arbres pleinement feuillus	93
4.3.4	Polycubes-arbres pleinement feuillus	94
4.4	Algorithme général pour la fonction feuille d'un graphe	96
CHAPITRE V ARBRES PLEINEMENT FEUILLUS DANS DES PAVAGES DE PENROSE		97
5.1	Explorations préliminaires	97
5.1.1	Graphes induits par les pavages de Penrose	98
5.1.2	Résultats des expérimentations	102
5.2	Contraintes particulières sur les arbres de Penrose	104
5.2.1	Degré maximal d'un sommet dans un arbre de Penrose	105
5.2.2	Sous-arbres dans les royaumes	108
5.3	Chenilles de Penrose le long des <i>Conway worms</i>	112
5.3.1	Tuiles forcées autour des <i>worms</i>	112
5.3.2	Chenilles pleinement feuillues dans quelques <i>patches</i> de base	114
CONCLUSION		119
ANNEXE A PROGRAMME PYTHON POUR LA FONCTION FEUILLE		121
ANNEXE B CODE SAGE POUR LES PAVAGES DE PENROSE		125
B.1	Génération d'un <i>patch</i> "rhombes"	125
B.2	Génération d'un <i>patch kites and darts</i>	127
B.3	Configurations de sommets dans un pavage <i>kites and darts</i>	128
B.4	Fonction iteration corrigée	130
B.5	Fonction d'adjacence dans un graphe "kites and darts"	130

B.6 Construction du graphe pour un pavage "rhombes"	131
RÉFÉRENCES	132
INDEX	137



LISTE DES TABLEAUX

Tableau	Page
5.1 Fonction feuille pour le <i>patch</i> de la figure 5.2 (25 rhombes).	103
5.2 Fonction feuille pour le <i>patch</i> de la figure 5.3 (33 rhombes).	103
5.3 Fonction feuille pour le <i>patch</i> de la figure 5.1 (30 cerfs-volants et fléchettes).	104
5.4 Fonctions feuilles pour les royaumes de l' <i>étoile</i> (L_{star}), du <i>valet</i> (L_{jack}) et de la <i>dame</i> (L_{queen}).	111

LISTE DES FIGURES

Figure	Page
1.1 Exemple de graphe	6
1.2 Sous-graphe, sous-graphe induit et sous-graphe couvrant	8
1.3 Une forêt	11
1.4 Cycles C_n pour $n \in \{3, 4, 5, 6\}$	13
1.5 Roues W_n pour $n \in \{3, 4, 5, 6\}$	13
1.6 Graphes complets pour $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$	14
1.7 Quelques graphes bipartis complets	14
1.8 Hypercubes Q_n pour $n \in \{1, 2, 3, 4\}$	15
1.9 Graphe de Petersen et Snark de Szekeres	16
1.10 Profondeur des sommets dans un arbre.	22
1.11 Quelques chenilles	23
2.1 Pavages dessinés par Johannes Kepler.	27
2.2 Pavage bord-à-bord, adjacence et incidence	29
2.3 Congruence et égalité de pavages.	30
2.4 Construction d'un <i>patch</i>	31
2.5 Critère de Conway.	33
2.6 Isométries du plan.	34
2.7 Parallélogramme période dans un pavage périodique.	36
2.8 Pavages isoédraux, k -isoédraux.	38
2.9 Pavages monogonaux, isogonaux, isotoxaux, réguliers – drapeaux.	40

2.10	Tuiles n'étant pas des disques topologiques.	41
2.11	Tuiles d'un pavage non normal.	42
2.12	Pavage non périodique constitué de carrés.	44
2.13	Pavage par composition	46
2.14	Pavages à similitudes	47
2.15	L'ensemble apériodique $R1$ de tuiles de Robinson	49
2.16	Carrés se chevauchant dans un pavage de Robinson.	50
2.17	L'ensemble apériodique $A1$ de six prototuiles d'Ammann.	51
2.18	L'ensemble apériodique $A5$ de deux prototuiles d'Ammann.	52
3.1	Les tuiles de Penrose	54
3.2	Composition d'un pavage $P1$ de Penrose	55
3.3	Décomposition triangulaire de Robinson.	57
3.4	Pavage par des losanges de Penrose avec marquage	59
3.5	Liens entre les différents pavages de Penrose.	60
3.6	Pavage par des "cerfs-volants et fléchettes" de Penrose avec marquage	61
3.7	Barres d'Ammann sur les "cerfs-volants et fléchettes" de Penrose. .	62
3.8	Décomposition des triangles d'or	64
3.9	Rhombe large inflaté six fois.	65
3.10	Décomposition des cerfs-volants et fléchettes.	66
3.11	Motifs <i>kites and darts</i> inflatés 5 fois	67
3.12	<i>Cartwheel tiling</i> et <i>Conway worms</i>	68
3.13	<i>Patch</i> dont le groupe de symétrie est D_5	69
3.14	Les sept voisinages de sommets d'un pavage "cerfs-volants et fléchettes".	69
3.15	Nœuds papillons (<i>bow ties</i>) et leur inflation.	72

3.16 Croisements de <i>Conway worms</i>	73
3.17 Centres des empires du <i>roi</i> et de la <i>reine</i>	75
4.1 Sous-arbre induit pleinement feuillu.	83
4.2 Quelques polyoïdes. – <i>Images de David Goodger</i>	87
4.3 Polyominos-arbres pleinement feuillus.	90
4.4 Polyomino-arbre pleinement feuillu.	92
4.5 Bijection entre les polyamants-arbres et les polyhexes-arbres.	93
4.6 Polyamants-arbres pleinement feuillus.	94
4.7 Polyhexes-arbres pleinement feuillus.	94
4.8 Un polycube-arbre pleinement feuillu.	95
5.1 L' <i>étoile</i> après 2 décompositions et le graphe associé	101
5.2 Losange large après 3 décompositions et son graphe.	101
5.3 Demi-losange large après 4 décompositions.	103
5.4 Les sept voisinages de sommets d'un pavage "cerfs-volants et fléchettes".	105
5.5 Contraintes d'adjacence sur les cerfs-volants.	106
5.6 Quelques petits arbres de Penrose pleinement feuillus.	108
5.7 Royaumes des voisinages de sommets.	110
5.8 Deux arbres de Penrose dans des royaumes.	111
5.9 Un <i>Conway worm</i>	112
5.10 Nœud papillon long dans le royaume de la <i>dame</i>	113
5.11 Nœud papillon court dans le royaume du <i>valet</i>	114
5.12 Chenilles pleinement feuillues dans les <i>patches</i> papillons.	115
5.13 Un ensemble de barres d'Ammann parallèles le long d'un <i>worm</i>	116

RÉSUMÉ

En théorie des graphes, la question des arbres pleinement feuillus, c'est-à-dire ayant le plus grand nombre de feuilles possible pour un nombre de sommets fixé, a récemment été étudiée dans des pavages réguliers du plan et de l'espace par Blondin Massé et al., et on peut se demander ce qu'il en est dans d'autres pavages. On s'intéresse ici plus particulièrement à l'étude de cette question dans les pavages de Penrose, qui ont la particularité d'être apériodiques.

La question que l'on se pose ici est donc la suivante : dans les pavages de Penrose, parmi les sous-arbres induits par le graphe sous-jacent, combien les arbres pleinement feuillus ont-ils de feuilles en fonction de leur taille n ? La question étant déjà complexe dans certaines grilles régulières, nous présentons pour l'instant des résultats expérimentaux et théoriques partiels ainsi que des pistes de recherche.

En subdivisant le problème, on obtient d'abord une majoration de la fonction feuille, puis l'étude de chenilles suivant les *worms* nous donne une minoration.

Mots clés : graphe, arbre, pavage, pavage de Penrose, sous-arbre induit pleinement feuillu, chenille, suite musicale, mot de Fibonacci.

INTRODUCTION

Dans un article de 1974, Roger Penrose dévoile pour la première fois des pavages étonnants : ils sont aperiodiques et présentent une symétrie pentagonale. Au-delà de leur beauté, ces pavages fascinent par leurs propriétés, ainsi que leurs liens avec la suite de Fibonacci et le nombre d'or. Des mathématiciens comme John H. Conway, Robert Ammann et Raphael M. Robinson les étudient (Grünbaum et Shephard, 1987, 2016), et les travaux algébriques de Nicolaas de Bruijn sur ces pavages (de Bruijn, 1981) ouvrent la voie à la découverte des *quasi-cristaux*, c'est-à-dire des cristaux dont la structure n'est pas périodique (Steinhardt et Ostlund, 1987).

Tout comme les mathématiciens ont longtemps cru que les pavages non périodiques n'existaient pas, les cristallographes considéraient qu'un cristal avait nécessairement une structure périodique, ce qui excluait une symétrie d'ordre 5. La définition d'un cristal a par la suite été modifiée pour inclure les quasi-cristaux, et il a tout de même fallu attendre 2009 pour découvrir un quasi-cristal naturel, non synthétisé en laboratoire (Bindi *et al.*, 2009).

Il n'est pas rare qu'une découverte mathématique *a priori* à visée esthétique ou récréative (juste pour le plaisir des mathématiciens) trouve des applications significatives dans d'autres domaines. Ce pourrait être le cas de l'étude des arbres pleinement feuillus, car l'article de Blondin Massé *et al.* (2018b) a mis en évidence des structures s'apparentant à des molécules dans le cas des polycubes.

En théorie des graphes, il est fréquent de s'intéresser aux arbres, et parfois aux sous-arbres d'un graphe donné. Un sous-arbre est alors dit *pleinement feuillu* s'il

maximise le nombre de feuilles parmi les sous-arbres ayant le même nombre de sommets. Diverses variantes existent, notamment celles se restreignant aux arbres de recouvrement ou aux sous-arbres induits, avec des applications en biologie, forage de données et réseaux de communications.

Blondin Massé *et al.* (2018a) se concentrent sur le cas des sous-arbres induits et nomment le problème *FLIS* (*Fully Leafed Induced Subtree*), qui se présente comme suit : étant donné un graphe simple G de n sommets, quel est le nombre maximal $L_G(i)$ de feuilles qui peut être réalisé par un sous-arbre induit de G comptant i sommets ? La fonction objectif L_G est alors appelée *fonction feuille*. Outre une approche générale du problème, présentant notamment un algorithme, l'article donne les fonctions feuilles pour quelques familles de graphes finis.

Un autre article (Blondin Massé *et al.*, 2018b) examine la question pour les polyominos et les polycubes, c'est-à-dire quand le graphe G considéré est respectivement la grille carrée et la grille cubique, et donne des fonctions récursives qui répondent au problème. Ces résultats, avec leurs démonstrations, sont repris dans Blondin Massé *et al.* (2018), qui ajoutent les cas des grilles triangulaires et hexagonales. En résumé, la question a été résolue pour les trois grilles régulières du plan ainsi que dans la grille cubique de l'espace en trois dimensions.

Ce qu'on voudrait faire ici c'est répondre à la même question mais dans le quasi-treillis (treillis de quasi-cristal) constitué par les pavages de Penrose. La difficulté vient naturellement du caractère aperiodique de ces pavages, d'autant que le sujet n'a pas encore été étudié dans des pavages périodiques non réguliers. Néanmoins, comme les démonstrations dans les grilles régulières reposent principalement sur des comportements locaux et que les pavages de Penrose reposent essentiellement sur des règles d'assemblage locales, il est raisonnable d'espérer trouver une solution au problème.

Il convient donc de bien étudier d'une part les propriétés des pavages de Penrose, d'autre part les spécificités des sous-arbres induits pleinement feuillus, avant de combiner ces deux domaines. En outre, comme un programme de recherche de la fonction feuille pour un graphe fini quelconque existe, il est utile d'implémenter les pavages de Penrose, ainsi que leurs graphes sous-jacents. Cette implémentation permet également de réaliser des illustrations, comme toutes les figures de ce mémoire pour lesquelles aucune source n'est indiquée.

C'est le logiciel *SageMath* qui a été utilisé, pour plusieurs raisons. D'abord, le programme IMT de recherche de la fonction feuille est écrit en Python, qui est compatible avec Sage ; ensuite, Sage contient une classe de graphes déjà implémentée et un tutoriel était disponible pour une première implémentation des pavages de Penrose ; enfin, il permet de réaliser assez facilement de beaux graphiques.

Malgré les possibilités computationnelles et l'étude attentive des propriétés, il s'avère que la complexité, liée notamment au fait que les pavages contiennent deux tuiles différentes au lieu d'une, nécessite de se concentrer sur des sous-problèmes, pour tenter ensuite de les combiner, avec la stratégie "diviser pour régner".

On étudie donc d'abord les voisinages de sommets et leurs "empires", puis les contraintes particulières sur les degrés des sommets dans un arbre, qui nous permettent de majorer la fonction feuille. Aussi, les comportements autour des *worms* qui sillonnent les pavages nous amènent à revenir aux suites musicales, nous permettant de trouver une borne inférieure pour la fonction feuille.

Ce mémoire se divise comme suit. Dans un premier temps, nous rappelons les notions de base de la théorie des graphes dont nous avons besoin, présentons quelques familles de graphes et bien sûr insistons un peu plus sur les arbres et sous-arbres, qui sont au cœur de notre recherche. Le deuxième chapitre est consacré aux pavages, partant des notions générales pour aller progressivement vers les

pavages apériodiques, en passant par les symétries. Il est un préalable nécessaire au chapitre 3 dans lequel nous mettons l'accent sur les pavages de Penrose. Nous présentons d'abord ces pavages dans leur diversité et présentons une implémentation d'une méthode de génération de pavages de Penrose, avant de se concentrer sur ceux de type *kites and darts* dont nous détaillons les propriétés.

Nous revenons au chapitre 4 vers les graphes, pour faire un état de l'art sur les sous-arbres induits pleinement feuillus, incluant la présentation du problème général et les résultats pour certaines familles de graphes finis et infinis, dont des graphes correspondant à des pavages. Enfin, le dernier chapitre présente les apports originaux sur notre sujet de départ, c'est-à-dire la question des sous-arbres induits pleinement feuillus dans les pavages de Penrose. Nous commençons par quelques expérimentations, puis posons des observations concernant les contraintes particulières imposées par les pavages de Penrose, et enfin nous penchons sur le sous-problème des chenilles pleinement feuillues dans des régions particulières des pavages. On conclut par une minoration de la fonction feuille, qui vient compléter la majoration trouvée plus tôt.

CHAPITRE I

THÉORIE DES GRAPHERS

Dans ce chapitre, nous rappelons les définitions de base de la théorie des graphes et abordons les notions nécessaires à la bonne compréhension des problèmes étudiés dans ce mémoire. La principale référence utilisée ici est l'ouvrage de Bollobás (1998), complétée par la version en français de l'ouvrage de Rosen (2002).

1.1 Notions de base

Un *graphe (simple)* G est un couple (V, E) d'ensembles tels que E est un sous-ensemble de $V^{(2)}$, où $V^{(2)}$ est l'ensemble des paires *non ordonnées*¹ de V , c'est-à-dire l'ensemble des parties de V de cardinalité 2. Les éléments de $V = V(G)$ sont appelés *sommets (vertices - au singulier : vertex)* et ceux de $E = E(G)$ *arêtes (edges)*. En l'absence d'une mention contraire, on considère des graphes finis, c'est-à-dire tels que V et E sont des ensembles finis²; le nombre de sommets du graphe G est alors appelé *ordre* de G , noté $|G|$ – on a donc $|G| = |V(G)|$, c'est-à-dire la cardinalité de l'ensemble V – et le nombre d'arêtes $|E(G)|$ est la

1. Les parenthèses dans $V^{(2)}$ servent à le distinguer de $V^2 = V \times V$, l'ensemble des paires ordonnées d'éléments de V .

2. Même si nous travaillons sur des graphes infinis, chaque problème abordé dans ce mémoire peut être vu comme l'étude de graphes finis.

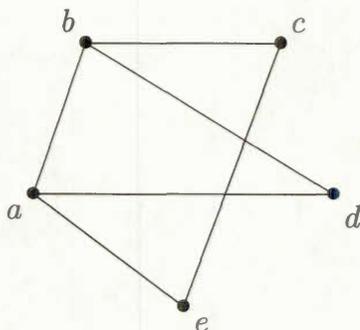


Figure 1.1: Graphe (V, E) où $V = \{a, b, c, d, e\}$ et $E = \{ab, ad, ae, bc, bd, ce\}$

taille de G , notée $e(G)$. On utilise les notations G^n pour un graphe arbitraire d'ordre n et $G(n, m)$ pour un graphe d'ordre n et de taille m . Précisons aussi que par abus de notation, on écrit souvent $x \in G$ en parlant d'un sommet x de G .

On dit qu'une arête $\{x, y\}$, également notée xy ou indifféremment yx , joint les sommets x et y , qui sont les *extrémités* (*endvertices*) de cette arête. Si $xy \in E$ alors on dit que les sommets x et y sont *adjacents* (ou *voisins*), et que chacun d'eux est *incident* à l'arête xy . La relation d'incidence est symétrique si on la définit sur $(V \cup E)^2$ plutôt que sur $V \times E$ ou $E \times V$, puisqu'on dit aussi qu'une arête est incidente à chacune de ses extrémités. Enfin, deux arêtes sont dites *adjacentes* si elles ont exactement un sommet en commun. Par exemple, dans le graphe représenté à la figure 1.1 les sommets a et b sont adjacents mais pas a et c , e est incident à ce et ab est adjacente à ae . Notons que quand on dessine un graphe, les positions des sommets n'ont pas d'importance car ce sont les relations d'adjacence (donc les arêtes) qui nous intéressent.

Par définition, un graphe ne peut pas contenir plus d'une arête entre deux sommets, ni de *boucle*, c'est-à-dire d'arête joignant un sommet à lui-même. On précise parfois que l'on parle de graphe *simple*, par opposition à un *multigraphe* dans lequel les boucles ainsi que les *arêtes parallèles* ou *multiples* (plusieurs arêtes entre deux mêmes sommets) sont autorisées. Un multigraphe peut être pratique dans

l'étude de certains problèmes mais comme ce n'est pas notre cas, nous ne nous étendons pas sur le sujet.

Une autre variante de graphe mérite d'être mentionnée : même si ce n'est pas le cas pour nous, il arrive que des arêtes puissent être traversées dans un sens mais pas dans l'autre afin de bien modéliser une situation. Les arêtes sont dans ce cas *orientées* et on les appelle *arcs* ; le graphe correspondant est alors dit *orienté*. Un arc est donc un couple (x, y) , noté aussi xy , dans lequel l'ordre compte : l'arc part de x et arrive en y . Il arrive que E contienne à la fois xy et yx , mais pas plus d'une fois chacun. De façon analogue à ci-dessus, on parle de *multigraphe orienté* si l'on permet les arcs parallèles (plusieurs dans le même sens) et/ou les boucles. La plupart des notions définies pour les graphes simples sont facilement adaptées aux graphes orientés.

Revenons maintenant aux graphes simples, pour aborder l'une des notions centrales de notre travail de recherche : on dit que $G' = (V', E')$ est un *sous-graphe* de $G = (V, E)$ si $V' \subseteq V$ et $E' \subseteq E$, et on note $G' \subseteq G$. Si G' contient toutes les arêtes de G joignant deux sommets de V' , on dit que G' est le sous-graphe *induit* par V' (*induced*) et on note $G' = G[V']$. Autrement dit, si $\mathcal{P}_2(V')$ est l'ensemble de parties de V' de cardinalité 2, alors $G[V'] = (V', E \cap \mathcal{P}_2(V'))$. La figure 1.2 montre deux sous-graphes de celui de la figure 1.1 : celui du milieu est induit mais pas celui de gauche car il lui manque les arêtes ae et bd . Une façon simple de s'assurer que l'on a bien le sous-graphe induit voulu est de considérer le complémentaire $\overline{V'}$ de l'ensemble V' de sommets qui nous intéressent et de ne retirer de G que les sommets de $\overline{V'}$ et les arêtes incidentes à ces sommets. Un autre cas particulier de sous-graphe survient quand $V' = V$, on dit alors que le sous-graphe est *couvrant* (à droite dans la figure 1.2).

On est souvent amené à construire de nouveaux graphes à partir de graphes déjà

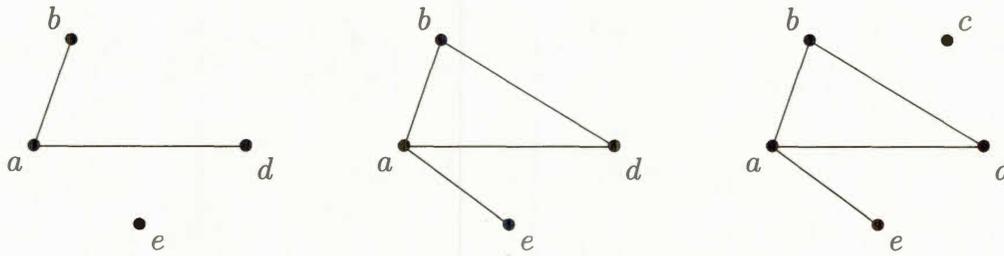


Figure 1.2: Un sous-graphe, un sous-graphe induit et un sous-graphe couvrant du graphe de la figure 1.1, avec $V' = \{a, b, d, e\}$ pour les deux premiers.

existants, notamment dans des algorithmes ou simplement pour mettre à jour les données représentées par ces graphes. Certaines notations peuvent alors être utiles pour alléger l'écriture : si $W \subseteq V(G)$ alors $G - W = G[V \setminus W]$ est le sous-graphe induit par $V \setminus W$, si $E' \subseteq E(G)$ alors $G - E' = (V(G), E(G) \setminus E')$, si $W = \{w\}$ et $E' = \{xy\}$ alors on simplifie respectivement en $G - w$ et $G - xy$. De façon analogue, si x et y sont des sommets non adjacents de G alors $G + xy$ est obtenu en ajoutant à G l'arête xy .

Comme mentionné plus haut, seules les relations d'adjacence entre sommets nous intéressent vraiment dans un graphe. C'est pourquoi en l'absence d'étiquettes ou de distinctions sur l'ensemble des sommets, on considère les graphes à *isomorphisme près* : deux graphes sont *isomorphes* s'il existe une correspondance entre leurs sommets qui préserve les relations d'adjacence. Plus formellement, $G' = (V', E')$ est isomorphe à $G = (V, E)$ s'il existe une bijection $\phi : V \rightarrow V'$ telle que $xy \in E$ si et seulement si $\phi(x)\phi(y) \in E'$. On note alors $G \cong G'$, ou plus simplement $G = G'$.

Considérant un sommet $x \in G$, l'ensemble des sommets qui lui sont adjacents est noté $\Gamma(x)$ et le *degré* de x est $d(x) = |\Gamma(x)|$, soit le nombre de sommets adjacents à x . Assez naturellement, on dit d'un sommet de degré 0 qu'il est *isolé* et d'un sommet de degré 1 qu'il est *pendant*, ou encore qu'il s'agit d'une *extrémité* du

graphe (*endpoint*). Pour lever toute ambiguïté, notamment quand on s'intéresse à des sous-graphes de G , on peut mettre en indice le nom du graphe dans lequel on se place : si $x \in H = G[W]$, alors $\Gamma_H(x) = \{y \in H \mid xy \in E(H)\} = \Gamma_G(x) \cap W$. On note respectivement $\delta(G)$ et $\Delta(G)$ le *degré minimal* et le *degré maximal* (le plus petit et le plus grand degrés) d'un graphe G . Si $\delta(G) = \Delta(G) = k$, alors tous les sommets de G sont de degré k et on dit que G est *k-régulier* ou *régulier de degré k*. Un graphe est dit *régulier* s'il existe un k pour lequel il est k -régulier.

Il peut être pratique de considérer les sommets en fonction de leur degré. Si $V(G) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ alors $(d(x_i))_{i=1}^n$ est la *suite des degrés* de G . Comme l'ordre des sommets n'a généralement pas d'importance en soi, on peut au besoin les renommer de façon à ce que la suite des degrés soit monotone (croissante ou décroissante, au sens large), pour avoir $\delta(G) = d(x_1) \leq \dots \leq d(x_n) = \Delta(G)$ par exemple. Comme chaque arête a deux extrémités, la somme des degrés est égale au double du nombre d'arêtes :

$$\sum_{i=1}^n d(x_i) = 2e(G) \quad (1.1.1)$$

On en déduit le *lemme des poignées de mains* : la somme des degrés des sommets d'un graphe est paire. Le nom de ce lemme réfère au fait que dans une assemblée le nombre total de mains serrées est pair. De façon équivalente, cela revient à dire que le nombre de sommets de degré impair est pair. Il découle aussi de l'équation 1.1.1 que $\delta(G) \leq \lfloor 2e(G)/n \rfloor$ et $\Delta(G) \geq \lceil 2e(G)/n \rceil$, où $\lfloor \cdot \rfloor$ et $\lceil \cdot \rceil$ désignent respectivement les fonctions plancher et plafond³.

Un *chemin* ou une *chaîne* est un graphe (ou sous-graphe) $P = (V, E)$ de la forme $V(P) = \{x_0, x_1, \dots, x_\ell\}$, $E(P) = \{x_0x_1, x_1x_2, \dots, x_{\ell-1}x_\ell\}$. On le note générale-

3. C'est-à-dire que pour tout réel x , $\lfloor x \rfloor = \max\{y \in \mathbb{Z} \mid y \leq x\}$ et $\lceil x \rceil = \min\{y \in \mathbb{Z} \mid y \geq x\}$.

ment $x_0x_1 \cdots x_\ell$, et on dit que c'est un *chemin* de x_0 à x_ℓ , noté *chemin* $x_0 - x_\ell$. Les sommets x_0 et x_ℓ sont les *extrémités* de P et $\ell = e(P)$ est sa *longueur*. Dans certains cas, notamment dans le cadre d'un algorithme ou d'une démonstration, on peut souligner le fait que le sommet de départ est x_0 et celui d'arrivée x_ℓ en les appelant respectivement sommets *initial* et *final*. Deux chemins sont dits *indépendants* s'ils n'ont aucun sommet en commun en dehors de leurs extrémités; ainsi, les chemins P_1, P_2, \dots, P_k de x à y sont indépendants si chaque fois que $i \neq j$ on a $V(P_i) \cap V(P_j) = \{x, y\}$.

La *distance* $d(x, y)$ entre deux sommets x et y d'un graphe est la longueur minimale d'un chemin joignant x à y . S'il n'y a aucun chemin de x à y alors $d(x, y) = \infty$; cette convention est particulièrement utile dans certains algorithmes, notamment pour chercher un plus court chemin. Dans certains cas, on s'intéresse aussi à deux grandeurs définies à partir de la distance, le diamètre et le rayon d'un graphe : le *diamètre* d'un graphe $G = (V, E)$ est défini par $\text{diam } G = \max_{x, y \in V} d(x, y)$ et son *rayon* par $\text{rad } G = \min_{x \in V} \max_{y \in V} d(x, y)$.

Diverses notions importantes sont définies à partir des chemins. Un graphe est *connexe* si pour toute paire $\{x, y\}$ de sommets distincts il existe un chemin de x à y . On appelle *composante connexe* d'un graphe G tout *sous-graphe connexe maximal*, c'est-à-dire tout sous-graphe induit connexe qui perdrait sa connexité si on lui ajoutait n'importe quel autre sommet de G ainsi que les arêtes nécessaires pour qu'il s'agisse toujours d'un sous-graphe induit. On appelle *point d'articulation* un sommet dont la suppression augmenterait le nombre de composantes connexes, et *isthme* ou *pont* (*bridge*) une arête ayant le même effet. Ainsi, retirer un point d'articulation ou un pont d'un graphe connexe rend le graphe non connexe.

Parmi les chemins, on s'intéresse particulièrement aux cycles : un *cycle* est un chemin qui commence et se termine au même sommet, c'est-à-dire tel que $x_0 = x_\ell$

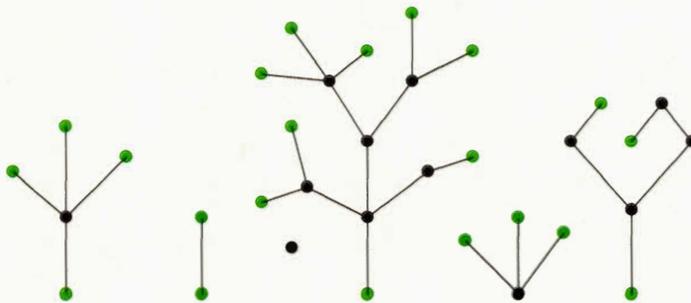


Figure 1.3: Une forêt

dans la terminologie ci-dessus. Un chemin ou cycle est *simple* s'il ne passe pas par la même arête plus d'une fois. En réalité, c'est l'absence de cycle qui caractérise les sous-graphes que nous allons étudier dans les chapitres 4 et 5. On appelle *forêt* ou graphe *acyclique* un graphe qui ne contient aucun cycle, et *arbre* une forêt connexe. En d'autres termes, une forêt est une union disjointe d'arbres, ou encore un graphe dont chaque composante est un arbre. Un exemple est donné dans la figure 1.3, et la section 1.3 approfondit ces sujets.

Les forêts appartiennent à une importante catégorie de graphes : les bipartis. $G = (V, E)$ est un *graphe biparti* si V est l'union disjointe de deux ensembles V_1 et V_2 non vides, appelés *classes*, tels que toute arête de E a pour extrémités un sommet de V_1 et un sommet de V_2 (c'est-à-dire qu'aucune arête ne joint deux sommets de V_1 ou deux sommets de V_2). Par exemple, les cycles pairs sont bipartis mais pas les cycles impairs. Cette notion est étendue à un nombre quelconque r d'ensembles disjoints : $G = (V, E)$ est un *graphe r -parti* si V est l'union disjointe de r ensembles V_1, V_2, \dots, V_r non vides tels qu'aucune arête ne joint deux sommets d'une même classe. L'étude des graphes r -partis est liée aux problèmes de coloration de graphes⁴, le nombre de couleurs nécessaires étant précisément

4. Ce sujet n'est pas étudié ici mais le lecteur intéressé et/ou simplement curieux peut se référer à une abondante littérature.

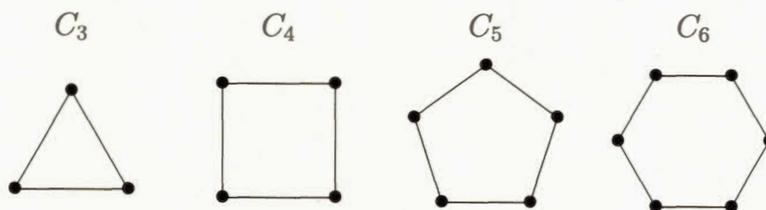
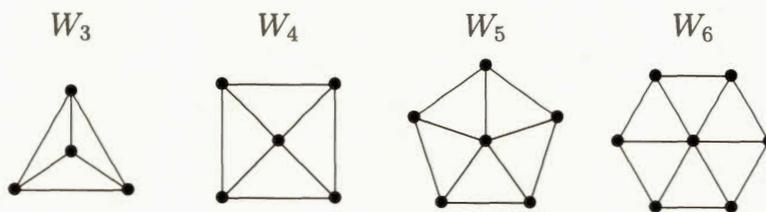
r (une couleur par classe), ce qui donne à ces questions un certain attrait. Le *graphe r -parti complet* $K(n_1, \dots, n_r)$ est tel que V_i contient n_i sommets (pour tout $i \in \{1, \dots, r\}$) et E contient toutes les arêtes joignant deux sommets de classes distinctes. Pour alléger l'écriture, on note souvent $K_{m,n}$ au lieu de $K(m, n)$ (par analogie avec le graphe complet) et $K_r(n)$ au lieu de $K(n, n, \dots, n)$.

Certaines opérations sont assez courantes dans les algorithmes de graphe ou pour la résolution de certains problèmes en géométrie computationnelle. Ainsi, on définit simplement l'*union* de deux graphes G et H par $G \cup H = (V(G) \cup V(H), E(G) \cup E(H))$ et on note kG l'union de k copies disjointes de G , c'est-à-dire l'union de k graphes isomorphes à G , dont les ensembles de sommets sont disjoints deux à deux. Cette dernière construction permet par exemple de trouver de façon optimale un plus court chemin ou $K^{\text{ème}}$ plus court chemin entre deux points dans un domaine polygonal (Hershberger et Suri, 1999; Hershberger *et al.*, 2014). À partir de l'union $G \cup H$, on obtient la *jointure* $G + H$ en ajoutant toutes les arêtes possibles entre G et H . Ainsi par exemple $K_{2,3} = E_2 + E_3$ (voir figure 1.7) et $K_r(n) = E_n + \dots + E_n$, où E_k est le graphe vide d'ordre k défini ci-dessous pour tout entier positif k .

1.2 Familles de graphes

Certains graphes (toujours à isomorphisme près) se définissent par une caractéristique donnée, qui peut leur conférer des propriétés particulières. On définit ainsi des familles de graphes, une famille regroupant les graphes définis d'une même manière pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$ (ou à partir d'une valeur minimale de n).

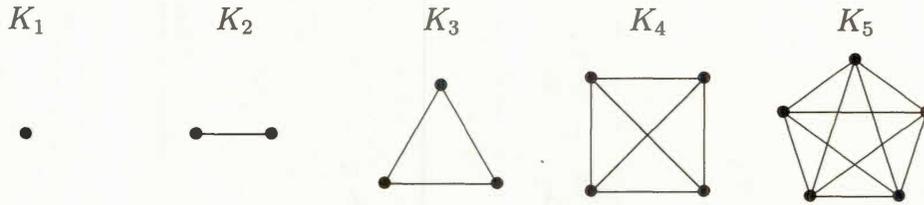
L'exemple le plus simple est probablement celui des graphes vides : pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, le *n -graphe vide* ou *discret* E_n est le graphe d'ordre n ne contenant aucune arête, c'est-à-dire le 0-graphe régulier d'ordre n . Bien que ces graphes ne soient pas

Figure 1.4: Cycles C_n pour $n \in \{3, 4, 5, 6\}$ Figure 1.5: Roues W_n pour $n \in \{3, 4, 5, 6\}$

intéressants à étudier, ils ne sont pas inutiles puisqu'on les rencontre régulièrement dans les algorithmes de graphes, notamment au moment de l'initialisation d'un graphe que l'on va construire ou parfois comme étape finale après avoir éliminé toutes les arêtes.

Les chemins simples P_ℓ constituent aussi une famille, pour toute longueur $\ell \in \mathbb{N}^*$ (ℓ désignant le nombre d'arêtes, le nombre de sommets est égal à $\ell + 1$). Par ailleurs, pour tout entier $n \geq 3$, on note C_n le cycle d'ordre n . Ces cycles forment une famille dont les premiers éléments sont représentés à la figure 1.4. On note que C_3 est un triangle, C_4 un quadrilatère, C_5 un pentagone, etc. En outre, à partir d'un cycle C_n , on définit la *roue* (*wheel*) W_n en y ajoutant un sommet relié à chacun des sommets de C_n , tel que présenté à la figure 1.5 pour les petites valeurs de n .

Un autre exemple simple à définir est le *n-graphe complet* K_n : le graphe d'ordre n dans lequel tous les sommets sont joints deux à deux. Quelques graphes complets sont représentés à la figure 1.6. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le graphe complet a donc $\binom{n}{2}$

Figure 1.6: Graphes complets pour $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$

arêtes, soit le nombre de combinaisons de 2 parmi n , qui est le plus grand nombre d'arêtes qu'un graphe simple d'ordre n peut compter. Le degré de chaque sommet d'un n -graphe complet est $n - 1$, ce qui en fait un graphe $(n - 1)$ -régulier. On peut noter que pour $n = 1$ on a $K_1 = E_1$, que l'on appelle graphe *trivial*.

Les graphes *bipartis complets* $K_{m,n}$, avec $m, n \in \mathbb{N}$, forment une autre famille de graphes connue. Les rôles de m et n étant symétriques, on peut se contenter de considérer les cas où $m \leq n$. Quelques graphes bipartis complets sont représentés à la figure 1.7. On note par exemple que $K_{1,1} = K_2 = P_1$, $K_{1,2} = P_2$, $K_{1,n}$ est un arbre pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et $K_{2,2} = C_4$ (rappelons que la disposition des sommets dans les figures ne compte pas, seuls les liens comptent).

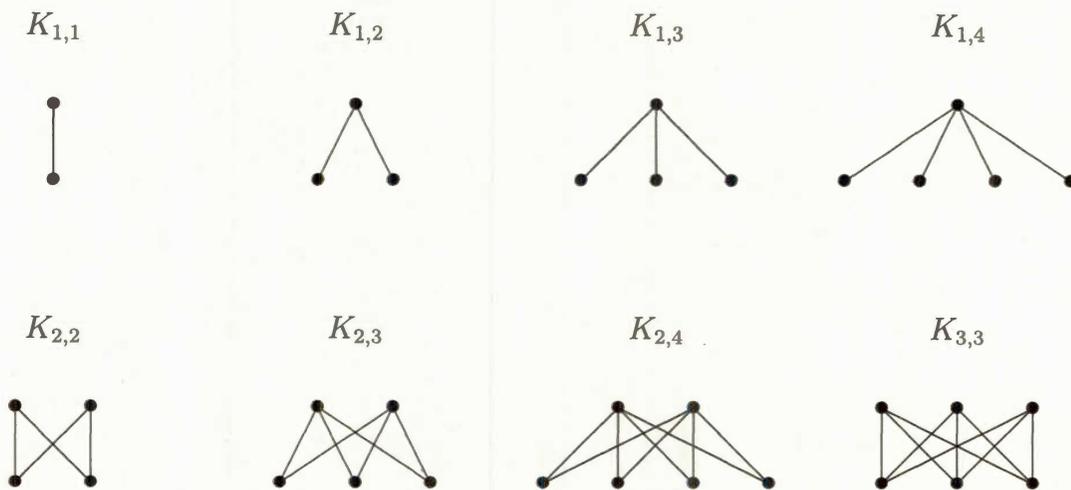


Figure 1.7: Quelques graphes bipartis complets

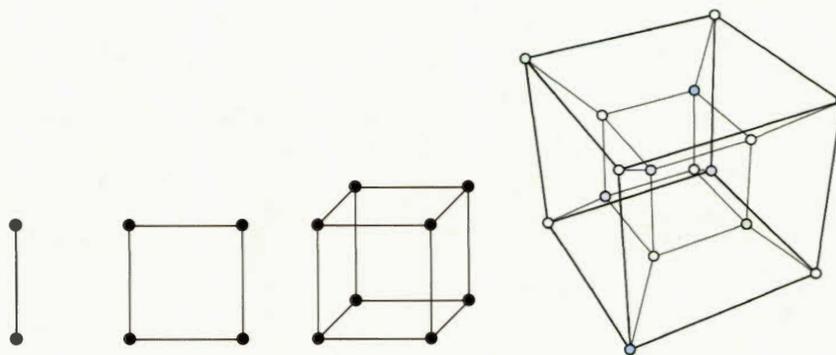
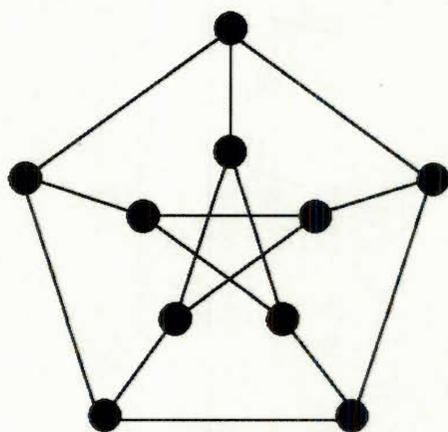


Figure 1.8: Hypercubes Q_n pour $n \in \{1, 2, 3, 4\}$

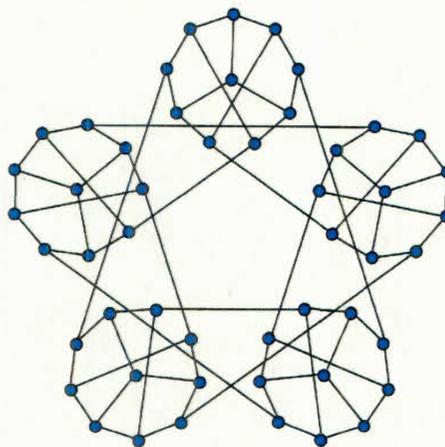
– L'image de Q_4 a été créée par Tilman Piesk et est extraite de Wikipedia.

Certains graphes, malgré la simplicité de leur définition, sont assez complexes à étudier. C'est le cas des *hypercubes*, ou *cubes de dimension n* : dans un hypercube Q_n , chaque sommet porte comme étiquette un mot de longueur n sur l'alphabet $A = \{0, 1\}$, et deux sommets sont adjacents si et seulement si leurs étiquettes diffèrent d'exactly un caractère. Les premiers hypercubes sont représentés à la figure 1.8.

Avec certaines règles définissant l'appartenance à une famille, on peut obtenir de beaux graphes – l'aspect visuel n'est pas négligeable! – dans lesquels il est intéressant (car non trivial) de chercher des propriétés combinatoires. Le *graphe de Petersen* appartient à au moins deux familles généralisant certaines de ses propriétés : les *snarks* et les *graphes de Kneser*. La figure 1.9 montre le graphe de Petersen et un autre snark : un snark est un graphe simple connexe, cubique, sans pont et d'indice chromatique 4, c'est-à-dire un graphe simple connexe dans lequel tout sommet est de degré 3 (cubique), qui reste connexe quand on lui retire n'importe quel sommet (sans pont) et dont les arêtes ne peuvent être colorées avec trois couleurs sans que deux arêtes adjacentes aient la même couleur (d'indice chromatique 4).



(a) Graphe de Petersen



(b) Snark de Szekeres

Figure 1.9: Graphe de Petersen et Snark de Szekeres.

- (a) Image extraite d'une page de Clément Charpentier.
- (b) Image extraite de Wikipedia.

1.3 Arbres et sous-arbres

Considérant qu'un arbre est par définition une composante (connexe) d'une forêt⁵, observons de quelles façons peut s'exprimer le fait d'être une composante d'un graphe. Soit x un sommet d'un graphe G et soit W l'ensemble des sommets de la composante contenant x . Alors un sommet y de G appartient à W si et seulement s'il existe un chemin entre x et y , ce qui est équivalent à dire que $d(x, y) < \infty$. On peut également exprimer W à l'aide d'une relation : soit R la relation définie sur $V(G)$ par $uRv \Leftrightarrow uv \in E(G)$, et soit \tilde{R} la plus petite relation d'équivalence sur V contenant R , alors W est la classe d'équivalence de x . Par suite, les composantes d'un graphe forment une partition de ce dernier. De l'acyclicité des arbres (et plus généralement des forêts), on peut aussi déduire certaines propriétés. Par exemple, on peut affirmer que tout arbre est un graphe biparti grâce au théorème suivant :

5. Pour alléger le texte, nous omettons parfois le mot "connexe", dans la mesure où il n'y a pas d'ambiguïté.

THÉORÈME 1.3.1 – *Un graphe est biparti si et seulement s'il ne contient pas de cycle impair.*

Démonstration : soit G un graphe biparti avec comme classes de sommets V_1 et V_2 , et soit $x_1x_2\cdots x_\ell$ un cycle de G . Si V_1 est la classe contenant x_1 , alors nécessairement on a $x_2 \in V_2$ puis $x_3 \in V_1$, $x_4 \in V_2$, etc. En d'autres termes, $x_i \in V_1$ ssi i est impair. Or $x_\ell \in V_2$ (car adjacent à x_1) donc ℓ est pair. Réciproquement, soit G un graphe ne contenant pas de cycle impair. En observant qu'un graphe est biparti si et seulement si chacune de ses composantes l'est, on peut se contenter d'étudier le cas où G est connexe. Soit alors un sommet x de G ; posons $V_1 = \{y \in G \mid d(x, y) \text{ est paire}\}$ et $V_2 = V \setminus V_1$. Supposons qu'il existe $\{u, v\} \in E$ telle que u et v sont tous les deux dans V_1 (ou dans V_2). Il existe donc un chemin P_u de x à u et un chemin P_v de x à v dont les longueurs sont de même parité, de sorte qu'il existe un cycle (composé de $P_u, \{u, v\}, P_v$) de longueur impaire, ce qui contredit l'hypothèse. Donc G est biparti. \square

Cette caractérisation des graphes bipartis permet de prouver le théorème suivant :

THÉORÈME 1.3.2 – *Un graphe G est une forêt si et seulement s'il contient au plus un chemin de x à y pour toute paire $\{x, y\}$ de sommets distincts.*

Démonstration : En effet, si G n'est pas une forêt alors par définition il contient au moins un cycle $x_1x_2\cdots x_\ell$, et dans ce cas $x_1x_2\cdots x_\ell$ et x_1x_ℓ sont deux chemins distincts de x_1 à x_ℓ dans G . Autrement dit, s'il y a au plus un chemin de x à y pour toute paire $\{x, y\}$ alors G est une forêt. Réciproquement, si G contient deux chemins distincts $P_1 = x_0x_1x_2\cdots x_\ell$ et $P_2 = x_0y_1y_2\cdots y_kx_\ell$ entre deux sommets x_0 et x_ℓ , soit $i + 1$ le plus petit indice tel que $x_{i+1} \neq y_{i+1}$ (on a donc $x_i = y_i$ et $i < \ell$) et j le plus petit indice tel que $j \geq i$ et y_{j+1} est un sommet de P_1 , en posant au besoin $y_{k+1} = x_\ell$. Posons $x_h = y_{j+1}$, alors $x_ix_{i+1}\cdots x_hy_jy_{j-1}\cdots y_{i+1}$ est

un cycle dans G . Donc si G est une forêt, il ne peut contenir plus d'un chemin entre deux sommets. \square

Après les graphes bipartis puis les forêts, penchons-nous enfin un peu plus sur les arbres. Considérant qu'il est souvent utile d'avoir différentes caractérisations d'une même notion, permettant de travailler dans différents contextes, en voici quelques-unes :

THÉORÈME 1.3.3 – *Soit G un graphe, les assertions suivantes sont équivalentes :*

- i. G est un arbre.
- ii. G est un graphe connexe minimal, c'est-à-dire que G est connexe et pour toute arête $xy \in E(G)$, $G - xy$ n'est pas connexe (i.e. toute arête est un isthme).
- iii. G est un graphe acyclique maximal, c'est-à-dire que G est acyclique et pour tous sommets x, y non adjacents de G , $G + xy$ contient un cycle.

Démonstration : Si G est un arbre, soit $xy \in E(G)$, alors xy est l'unique chemin de x à y dans G , donc $G - xy$ ne contient pas de chemin de x à y et par conséquent il n'est pas connexe. On en conclut que G est un graphe connexe minimal. Par ailleurs, si x et y sont deux sommets non adjacents de G , comme G est connexe il existe un chemin (autre que xy) de x à y . Par conséquent, $G + xy$ contient deux chemins distincts de x à y , et donc un cycle. G est donc un graphe acyclique maximal.

Si maintenant G est un graphe connexe minimal, supposons que G contienne un cycle $xz_1z_2 \cdots z_ky$ ($k \geq 1$), alors $G - xy$ est encore connexe puisque tout chemin passant par xy dans G peut être prolongé en un chemin contenant $xz_1z_2 \cdots z_ky$ à la place, ce qui contredit la minimalité de G . Par conséquent, G est acyclique et

comme il est connexe c'est un arbre.

Enfin, si G est un graphe acyclique maximal, supposons G non connexe et soient alors deux sommets x et y appartenant à deux composantes différentes. Alors l'ajout de l'arête xy à G ne crée pas de cycle, ce qui contredit la maximalité de G . Par conséquent G est connexe en plus d'être acyclique ; c'est donc un arbre. \square

À la section 1.1, nous avons défini la notion de sous-graphe couvrant d'un graphe G . Quand un tel sous-graphe est un arbre on l'appelle *arbre de recouvrement* (*spanning tree*) : il s'agit donc d'un arbre, sous-graphe de G , dont l'ensemble des sommets est $V(G)$. Maintenant, pour tout graphe connexe G , en partant du théorème précédent et considérant un sous-graphe couvrant connexe minimal, on obtient le corollaire suivant :

COROLLAIRE 1.3.4 – *Tout graphe connexe G contient un arbre de recouvrement, c'est-à-dire un arbre contenant tous les sommets de G .*

Il existe plusieurs procédures permettant de mettre en évidence un arbre de recouvrement dans un graphe G . L'une des plus connues consiste à partir d'un sommet $x \in G$ et de construire une suite d'arbres T_1, T_2, \dots, T_k tels que T_1 contient seulement x et $T_1 \subset T_2 \subset \dots \subset T_k \subset G$ où T_i est d'ordre i pour tout i . On sait que T_1 est un arbre, maintenant si on a pu construire cette suite jusqu'à un certain $k < n = |G|$ alors comme G est connexe il existe deux sommets $y \in V(G) \setminus V(T_k)$ et $z \in T_k$ tels que y et z sont adjacents. Alors $T_{k+1} = T_k + yz$ est un sous-graphe connexe de G , et comme z n'est lié à aucun sommet de T_{k+1} autre que y on peut affirmer que l'arête yz n'a pas formé de cycle dans T_{k+1} ; par conséquent, T_{k+1} est un arbre. Par récurrence, on voit que la suite d'arbres T_i peut être continuée jusqu'à T_n , et ce dernier arbre contient les n sommets de G donc c'est un arbre de recouvrement.

La procédure ci-dessus est un cas particulier de l'algorithme de Prim, algorithme

glouton permettant de trouver un arbre de recouvrement minimal dans un graphe (simple) connexe *valué*, c'est-à-dire dans lequel un poids est attribué à chaque arête. L'arbre de recouvrement est dit *minimal* si son poids total (somme des poids des arêtes qui le constituent) est minimal sur l'ensemble des arbres de recouvrement du graphe G considéré. Quand le graphe n'est pas valué, il suffit de fixer tous les poids à 1. L'algorithme de Kruskal donne une façon alternative de résoudre le même problème, utilisant aussi une stratégie gloutonne.

Notons que dans la procédure décrite, pour tout k on a $e(T_k) = k - 1$, puisque $e(T_1) = 0$ et T_{k+1} a une arête de plus que T_k . Par conséquent, tout arbre de recouvrement ainsi obtenu est d'ordre n et de taille $n - 1$. Comme un arbre de recouvrement est obtenu en prenant un sous-graphe connexe minimal couvrant, tout arbre est son *unique* arbre de recouvrement. On en déduit une observation de Listing (1862) :

COROLLAIRE 1.3.5 – *Un arbre d'ordre n est de taille $n - 1$. Une forêt d'ordre n divisée en k composantes est de taille $n - k$.*

Une autre caractérisation des arbres vient de ce corollaire : un graphe d'ordre n est un arbre si et seulement s'il est connexe et de taille $n - 1$.

Les arbres de recouvrement sont un exemple de sous-graphes correspondant à une définition plus large : un *sous-arbre* d'un graphe G est simplement un sous-graphe de G qui est un arbre. Il en découle naturellement la notion de *sous-arbre induit* : un sous-graphe induit qui est un arbre. Contrairement à un arbre de recouvrement qui inclut tous les sommets, un sous-arbre induit les contient rarement tous puisque toutes les arêtes entre les sommets sélectionnés doivent être gardées : en effet, dès lors que des sommets forment un cycle dans G on ne peut tous les garder dans un sous-graphe induit de G sans qu'il y ait un cycle. Comme par ailleurs un sous-graphe contenant tous les sommets ne peut être connexe si le

graphe de départ ne l'est pas, il s'ensuit qu'un graphe G possède un sous-arbre induit contenant tous les sommets si et seulement si G est un arbre.

Comme nous l'avons mentionné en introduction, on s'intéresse dans ce travail aux feuilles de certains arbres, c'est-à-dire aux sommets ayant un certain degré : une *feuille* est un sommet de degré 1, c'est-à-dire un sommet pendant dans un arbre. On appelle *sommet interne* tout sommet qui n'est pas une feuille. Dans la figure 1.3 représentant une forêt, les feuilles des arbres sont les sommets verts. Un autre corollaire du théorème 1.3.3 concerne justement les feuilles :

COROLLAIRE 1.3.6 – *Un arbre d'ordre supérieur ou égal à 2 contient au moins deux feuilles.*

Démonstration : Soit $d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_n$ la suite des degrés d'un arbre T d'ordre $n \geq 2$. Comme T est connexe, $d_1 \geq 1$ donc si T avait au plus un sommet de degré 1, par l'équation 1.1.1 et le corollaire 1.3.5 on aurait

$$2n - 2 = 2e(T) = \sum_{i=1}^n d_i \geq 1 + 2(n - 1),$$

ce qui est absurde. □

Dans un arbre T , pour tout $d \in \mathbb{N}$, le nombre de sommets de degré d est noté $n_d(T)$, et on note $n(T) = |V|$ le nombre de sommets de T (son ordre). À partir des degrés dans un arbre, on définit récursivement la *profondeur* d'un sommet u dans T , notée $depth_T(u)$, par

$$depth_T(u) = \begin{cases} 0 & \text{si } \deg_T(u) \leq 1 \\ 1 + depth_{T'}(u) & \text{sinon} \end{cases}$$

où T' , le *dérivé* de T , est l'arbre obtenu de T en retirant toutes ses feuilles. Un

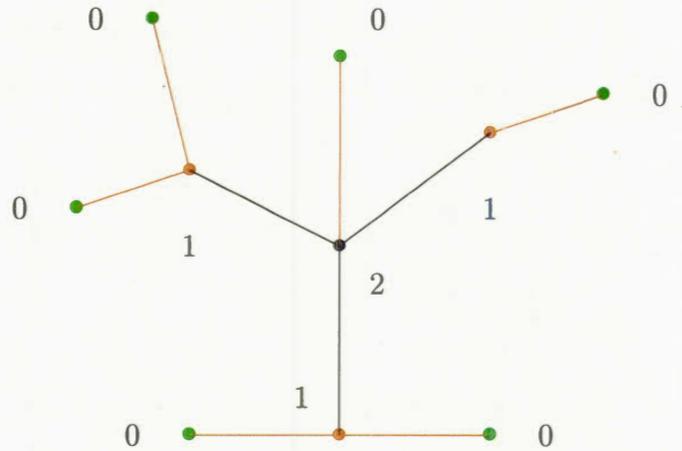


Figure 1.10: Profondeur des sommets dans un arbre.

exemple est donné à la figure 1.10.

PROPOSITION 1.3.7 – Si un arbre T_1 est un sous-arbre d'un arbre T_2 , alors T_2 a au moins autant de feuilles que T_1 .

Démonstration : L'ajout d'un sommet de T_2 à T_1 (de sorte qu'on obtient un sous-arbre plus grand) va soit créer une nouvelle feuille, soit "remplacer" une feuille par une autre en prolongeant une branche T_1 , mais jamais joindre deux feuilles entre elles car cela créerait un cycle ou supposerait que T_1 n'est pas connexe. \square

Finissons cette section avec une définition imagée : selon Harary et Schwenk (1973), une *chenille* (*caterpillar*) est "un arbre qui se métamorphose en chemin quand on le défait de son cocon d'extrémités"⁶. De façon moins poétique mais plus claire, une chenille est un arbre qui devient un chemin quand on retire ses feuilles (et les arêtes adjacentes)⁷.

6. Phrase originale : "A caterpillar is a tree which metamorphoses into a path when its cocoon of endpoints is removed."

7. Harary et Schwenk (1973) commencent par définir le dérivé G' d'un graphe G , obtenu à partir de G en retirant toutes ses extrémités, puis une chenille est un arbre T d'ordre au moins 3 dont le dérivé T' est un chemin. On note enfin que les extrémités d'un arbre sont ses feuilles.

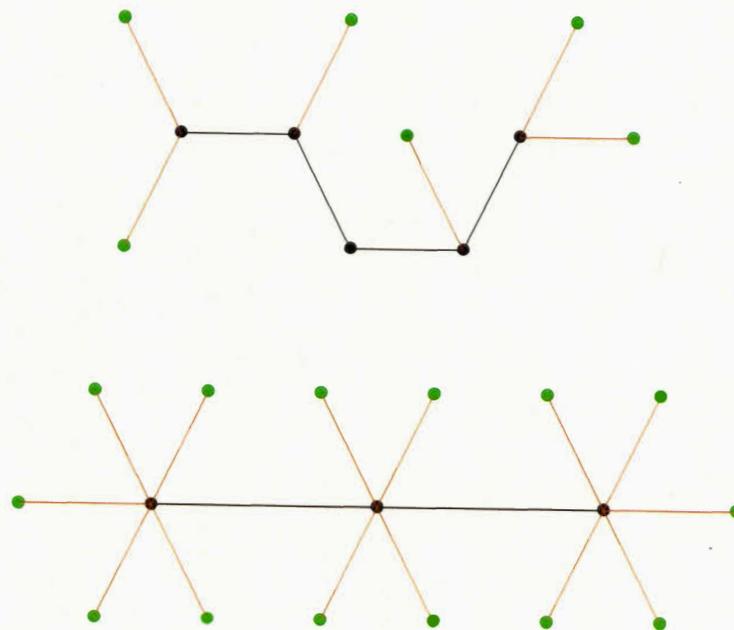


Figure 1.11: Deux chenilles : en vert les feuilles, en marron les arêtes incidentes (aux feuilles) et en noir le chemin dérivé.



CHAPITRE II

PAVAGES : SYMÉTRIES ET APÉRIODICITÉ

L'une des particularités de notre étude est de faire le lien entre deux domaines de recherche le plus souvent séparés : les graphes et les pavages. Nous nous concentrons maintenant sur le second. L'ouvrage de référence en la matière, et notre principale source bibliographique, est le livre *Tilings and Patterns* de Grünbaum et Shephard (1987, 2016). Nous ne présentons ici qu'un aperçu du sujet, en espérant donner au lecteur l'envie d'en découvrir beaucoup plus ! Dans ce chapitre, nous abordons les notions de base et l'apériodicité¹.

2.1 Définitions de base

Un *pavage*² du plan est une famille dénombrable d'ensembles fermés $\mathcal{T} = \{T_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de \mathbb{R}^2 qui constituent à la fois un recouvrement du plan (*covering*) et un empilement compact (*packing*) ; autrement dit, il couvre le plan

- sans trou : les *tuiles* T_1, T_2, \dots vérifient $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} T_n = \mathbb{R}^2$ (recouvrement)
- et sans superposition : $\forall i \neq j, \text{int}(T_i) \cap \text{int}(T_j) = \emptyset$ (empilement compact).

1. Les pavages de Penrose sont examinés plus en détail au chapitre 3.

2. Synonymes : carrelage, dallage. En anglais : *tiling, tessellation, paving, mosaic, parqueting*.

Nous ne considérons ici que des pavages dans lesquels chaque tuile est un disque topologique, c'est-à-dire un ensemble du plan homéomorphe³ à un disque fermé⁴. En d'autres termes, un disque topologique est un ensemble dont la frontière consiste en une boucle fermée simple, comme par exemple les tuiles utilisées par Johannes Kepler dans les dessins de la figure 2.1. En outre, dans les pavages qui nous intéressent, chaque disque circulaire du plan ne rencontre qu'un nombre fini de tuiles.

Dans tout pavage, l'intersection d'un nombre fini d'au moins deux tuiles se réduit à des points et/ou courbes isolés, ou à l'ensemble vide. Considérant une telle intersection non vide, les points sont appelés *sommets* (*vertices*) et les courbes *arêtes* (*edges*); tout sommet est l'extrémité de plusieurs arêtes. Les *éléments* d'un pavage sont ses sommets, arêtes et tuiles.

Illustrons ces notions avec la figure 2.1. Dans les dessins D, E et F, les sommets et arêtes des tuiles coïncident exactement avec les sommets et arêtes des polygones. Dans le pavage Aa en revanche, l'intersection entre une étoile et un pentagone, quand elle n'est ni vide ni réduite à un point, est l'union de deux segments; cette union de segments est donc une arête du pavage, et le point joignant les deux segments n'est pas un sommet du pavage puisqu'il n'est pas une intersection de tuiles (alternativement, il n'est pas l'extrémité de plusieurs arêtes). Le pentagone central de Bb est intéressant car ses sommets (en tant que polygone) ne sont pas des sommets du pavage mais chacune de ses arêtes contient deux sommets

3. En topologie, un homéomorphisme est une application bijective continue, d'un espace topologique dans un autre, dont la bijection réciproque est continue. Dans ce cas, les deux espaces topologiques sont dits homéomorphes (Wikipedia).

4. Dans un espace métrique (E, d) , la boule fermée $\mathcal{B}'(P, r)$ centrée en un point $P \in E$ et de rayon réel $r > 0$ est l'ensemble $\mathcal{B}'(P, r) = \{M \in E \mid d(M, P) \leq r\}$. Un disque fermé est une boule fermée de \mathbb{R}^2 .

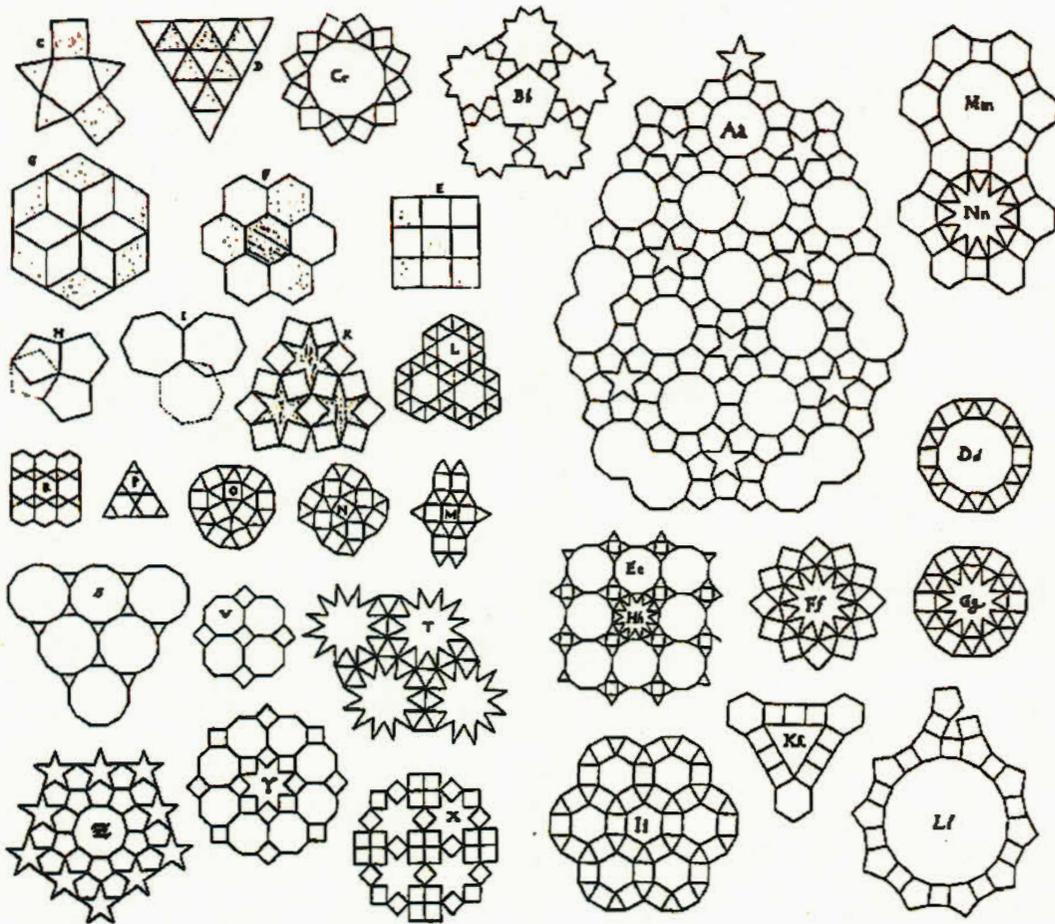


Figure 2.1: Dessins de Johannes Kepler (1580-1630) représentant des pavages, publiés en 1619 dans son livre *Harmonice Mundi* (volume 2) et reproduits dans l'ouvrage de Grünbaum et Shephard (2016) dont est extraite cette image. Les dessins D, E et F montrent comment on peut paver le plan avec uniquement des triangles équilatéraux, des carrés ou des hexagones réguliers, alors que les dessins H et I illustrent le fait qu'on ne peut paver le plan avec des pentagones réguliers ni avec des heptagones réguliers. Utilisant des tuiles de différentes formes, le pavage Aa peut être étendu à tout le plan, tout comme Mm, S et V par exemple.

du pavage : chacun est l'intersection du gros pentagone, d'un petit pentagone et d'une étoile.

À l'instar du degré dans un graphe, la *valence* d'un sommet du pavage est le nombre d'arêtes dont il est une extrémité (toujours supérieur ou égal à 3). Un pavage est dit *j-valent* si tous ses sommets ont la même valence j . Par exemple, les pavages D, E et F de la figure 2.1 sont respectivement 6-valent, 4-valent et 3-valent. G n'est pas *j-valent* car le sommet central a pour valence 6 alors que les autres (à l'intérieur de la région pavée) ont pour valence 3. Parmi les pavages composés de différentes formes, K est 6-valent (seules les pointes des étoiles constituent des sommets du pavage), Ii est 4-valent, Mm, S et V sont 3-valents mais Bb, X, Y et Z ne sont pas *j-valents*.

De nombreux pavages ont pour tuiles des polygones. Dans ce cas, pour éviter toute confusion et toute lourdeur (comme ci-dessus), les sommets et arêtes des polygones sont appelés *coins* et *côtés*, respectivement. Un pavage de polygones est dit *bord-à-bord* (*edge-to-edge*) si les coins et côtés des polygones coïncident avec les sommets et arêtes du pavage. La figure 2.2 illustre cette notion.

Différents termes réfèrent à une notion de proximité dans les pavages, selon que les éléments considérés sont du même type ou non et selon que cette proximité est plus ou moins "forte" :

- Deux tuiles sont dites *adjacentes* si elles ont une arête en commun. Deux arêtes sont *adjacentes* si elles ont une extrémité commune.
- Deux tuiles sont *voisines* si leur intersection est non vide. Le *voisinage* $\mathcal{N}(T)$ d'une tuile T dans un pavage \mathcal{T} est l'union de T et de l'ensemble de ses tuiles voisines.
- Le mot *incident* est utilisé pour décrire la relation entre une tuile et ses som-

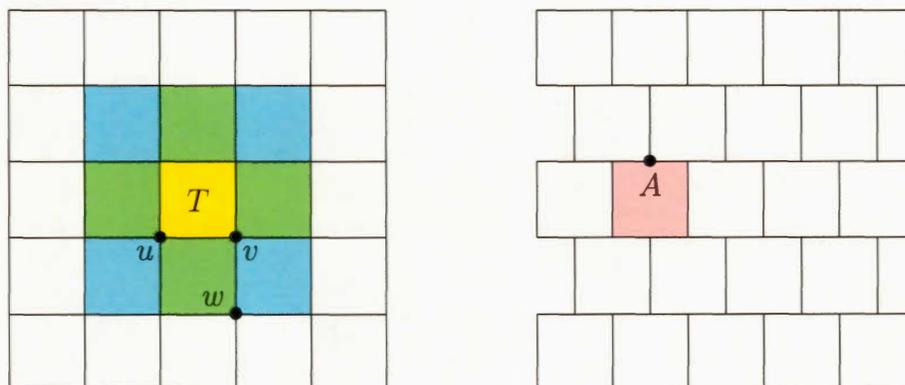


Figure 2.2: À gauche un pavage bord-à-bord, à droite le pavage n'est pas bord-à-bord car le point A est un sommet du pavage mais pas un coin du carré rose. Dans le pavage de gauche, toutes les tuiles colorées constituent le voisinage de la tuile jaune T (les voisines étant les vertes et les bleues) mais seules les tuiles vertes sont adjacentes à T . L'arête uv est adjacente à vw et incidente aux sommets u et v ainsi qu'à T ; mais w n'est pas adjacent à u , et vw n'est pas incidente à T .

ments et arêtes, ainsi que celle entre une arête et ses extrémités. Notons que la relation d'incidence est symétrique, dès lors qu'on la définit sur l'ensemble contenant à la fois les tuiles, les arêtes et les sommets.

Il est également essentiel de définir de quelle façon différents pavages peuvent être comparés et selon quels critères ils sont considérés comme égaux. Pour cela, on définit d'abord la notion de congruence : deux pavages \mathcal{T}_1 et \mathcal{T}_2 sont *congrus* s'il existe une transformation rigide du plan, pouvant inclure la réflexion, qui permet de faire coïncider \mathcal{T}_1 avec \mathcal{T}_2 . Alors deux pavages sont *égaux* ou *les mêmes* si un changement d'échelle permet de les rendre congrus, c'est-à-dire s'il existe une similitude du plan qui envoie l'un des deux pavages sur l'autre. Ces notions sont illustrées par la figure 2.3. Il peut paraître étrange que la congruence soit une condition plus forte que l'égalité entre pavage, mais c'est ce choix dans la définition d'égalité qui permet de considérer "le" pavage par des hexagones réguliers par exemple, indépendamment de leur taille. Il faut donc voir la congruence comme une étape intermédiaire pour définir une notion d'égalité somme toute intuitive :

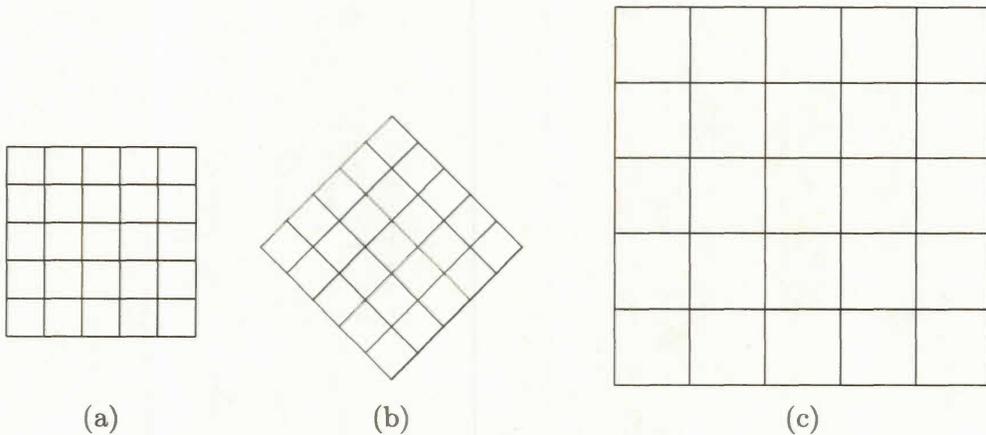


Figure 2.3: Les pavages (a) et (b) sont congrus : une isométrie permet de passer de l'un à l'autre. (a) et (c) ne sont pas congrus en raison du changement d'échelle. Les trois pavages sont égaux : une similitude du plan permet de passer de l'un à l'autre.

on se défait de la position et de la distance auxquelles on se trouve quand on regarde le pavage.

Dans certains cas, il est intéressant de se contenter d'étudier des parties bornées d'un pavage ; on introduit pour cela la notion de *patch* : un *patch* de tuiles dans un pavage est un nombre fini de tuiles tel que l'union de ces tuiles forme un disque topologique. La procédure pour construire le *patch* $\mathcal{A}(D, \mathcal{T})$ généré par un ensemble D (quelconque) dans un pavage \mathcal{T} est la suivante : Soit \mathcal{S} l'ensemble des tuiles de \mathcal{T} qui rencontrent D . Si \mathcal{S} ne forme pas un *patch*, on lui ajoute juste assez de tuiles pour remplir les "trous", comme dans l'exemple de la figure 2.4. Notons que le *patch* généré par une tuile ne coïncide pas nécessairement avec son voisinage.

De nombreux pavages sont constitués d'un nombre fini de formes que l'on réutilise autant de fois que nécessaire pour paver tout le plan. On s'intéresse donc au nombre de formes ainsi utilisées, et diverses notions permettent de classer les pavages par "types".

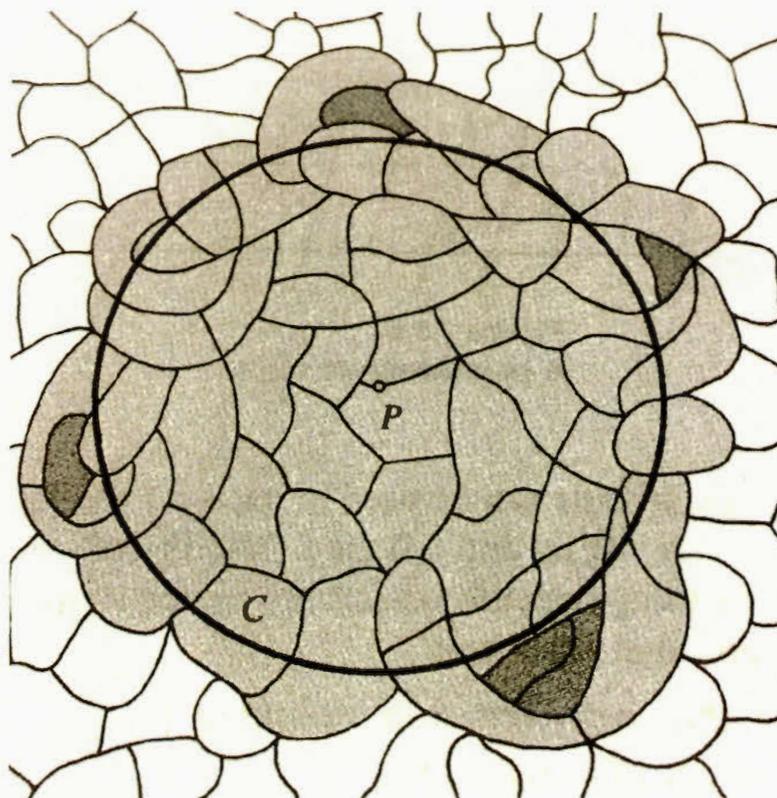


Figure 2.4: Construction du *patch* $\mathcal{A}(D, \mathcal{T})$ généré par un ensemble D : soit D le disque centré en P et ayant pour frontière le cercle C sur la figure ; alors le *patch* $\mathcal{A}(D, \mathcal{T})$ doit contenir toutes les tuiles gris clair puisqu'elles intersectent D , auxquelles on doit ajouter les tuiles gris foncé pour qu'il n'y ait pas de trou. Le cercle C génère le même *patch*, alors que le *patch* généré par le point P ne contient que deux tuiles (de part et d'autre du point P).

– Image extraite de l'ouvrage de Grünbaum et Shephard (2016).

Commençons par le plus simple : un pavage \mathcal{T} est *monoédral* si toute tuile de \mathcal{T} est congrue à un ensemble donné T , c'est-à-dire si toutes les tuiles ont la même forme et la même taille. L'ensemble T est appelé *prototuile* de \mathcal{T} et on dit que la prototuile T *admet* le pavage \mathcal{T} . Un exemple simple est le *pavage parallélogramme* pour un parallélogramme P , c'est-à-dire un pavage bord-à-bord constitué de tuiles congrues à P dans lequel chaque arête est parallèle à l'une des deux directions correspondant aux côtés de P .

De la même manière, un pavage \mathcal{T} est *diédral* si chacune de ses tuiles T_i est congrue à l'une ou l'autre de deux prototuelles T et T' (non congrues). Plus généralement, un pavage *triédral*, *4-édral*, ..., *n-édral* est composé à partir de 3, 4, ..., n prototuelles distinctes. Dans la figure 2.1, les pavages D, E, F et G sont monoédraux, de K à X les pavages sont diédraux, Hh et Nn sont 4-édraux et les autres sont triédraux⁵.

La question de savoir si une prototuille admet un pavage du plan est très complexe. Il s'agit d'une instance particulière du *Tiling problem* : étant donné un ensemble de prototuelles \mathcal{S} , existe-t-il un algorithme ou une procédure standard permettant de savoir si \mathcal{S} pave le plan ? On sait maintenant que ce problème est indécidable, même quand \mathcal{S} ne contient qu'une prototuille. Hao Wang a créé une procédure permettant de savoir si \mathcal{S} admet un pavage périodique mais cette procédure ne termine pas si \mathcal{S} est un ensemble apériodique de prototuelles⁶. On a donc cru le problème décidable jusqu'à ce que Robert Berger prouve le contraire. Toutefois, des algorithmes permettent de savoir si certaines formes (notamment des polygones) pavent le plan, en observant la frontière de la prototuille, et s'arrêtent dans tous les cas après avoir testé certaines conditions. La proposition 2.1.1, illustrée par la figure 2.5 donne des exemples de cas dans lesquels on peut déterminer si un ensemble pave le plan.

PROPOSITION 2.1.1 – *Soit T un disque topologique fermé. On considère six points A, B, C, D, E, F sur la frontière de T (en ordre cyclique) divisant cette dernière en six arêtes.*

(a) *Si AB est un translaté de ED , BC un translaté de FE et CD un translaté de AF , alors T est la prototuille d'un pavage monoédral.*

5. Dans Bb, les petits et grand pentagones ne sont pas congrus et correspondent donc à deux prototuelles distinctes.

6. Cette notion est définie à la section 2.4.

(b) Critère de Conway : Si AB est un translaté de ED et que chaque autre arête a un centre de symétrie⁷, alors T est la prototuille d'un pavage monoédral.

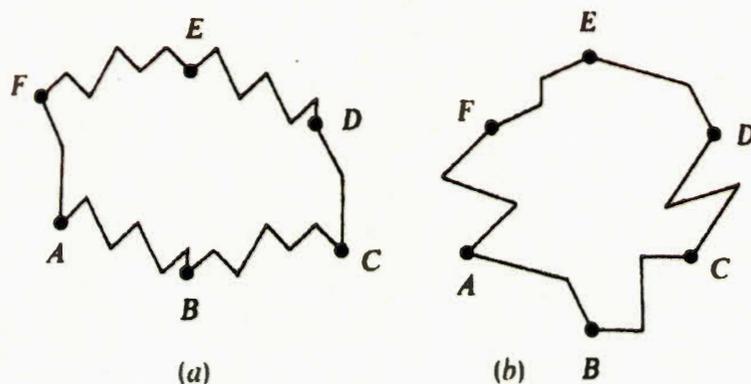


Figure 2.5: Deux exemples de prototuelles vérifiant les conditions de la proposition 2.1.1 : (a) par translations et (b) critère de Conway.

– Image extraite de l'ouvrage de Grünbaum et Shephard (2016).

2.2 Symétrie, transitivité et régularité

Les propriétés liées à la symétrie, la transitivité et la régularité comptent parmi les principales caractéristiques des pavages. Nous allons donc rappeler ce qu'est une isométrie du plan avant d'établir le lien avec les pavages.

Une *isométrie* (ou *transformation de congruence*) est une application σ du plan Euclidien \mathbb{R}^2 dans lui-même qui préserve les distances, c'est-à-dire que pour tous points A, B du plan on a $\text{dist}(A, B) = \text{dist}(\sigma(A), \sigma(B))$, où $\text{dist}(A, B)$ est la distance euclidienne. On note σS l'image de S par σ . On compte quatre types d'isométrie (voir figure 2.6) :

(a) *Rotation* de centre O et d'angle θ (modulo 2π). Le point O est appelé *centre*

7. Voir définition de la rotation page suivante.

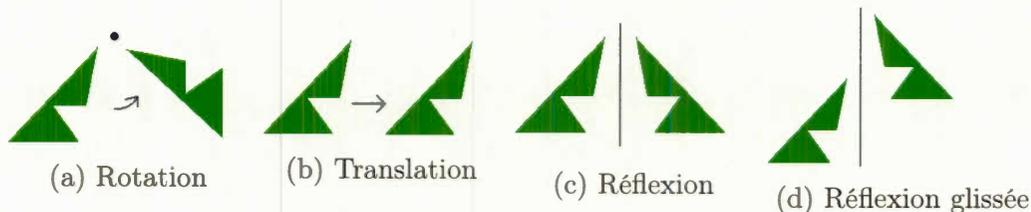


Figure 2.6: Isométries du plan.

de rotation. Si $\theta = \pi$, cette transformation est aussi appelée *symétrie centrale*, ou *symétrie de centre O* .

- (b) *Translation* déterminée par sa direction, son sens et sa longueur.
- (c) *Réflexion* ou *symétrie axiale* par rapport à une droite D (l'*axe de symétrie*).
- (d) *Réflexion glissée* (*glide reflection*) : symétrie d'axe L combinée avec une translation dans une direction parallèle à L .

Les isométries de types (a) et (b) sont dites *directes* car si trois points A, B, C sont les sommets d'un triangle nommés en ordre horaire alors il en sera de même pour leurs images par l'isométrie σ . Les isométries de types (c) et (d) sont dites *indirectes* ou *réflexives* car les images des points A, B, C par de telles isométries seront les sommets d'un triangle nommés en ordre antihoraire.

Une *symétrie* d'un ensemble S est une isométrie σ qui renvoie S sur lui-même, c'est-à-dire telle que $\sigma S = S$. Tout ensemble compte au moins une symétrie : l'*isométrie identité*, pour laquelle chaque point de l'ensemble est sa propre image. Parmi les symétries existantes, certaines vont particulièrement nous intéresser pour les pavages de Penrose : la symétrie rotationnelle d'ordre 5. Pour un entier positif n quelconque, le point O est un centre de *symétrie rotationnelle* d'ordre n si la rotation de centre O et d'angle $2\pi/n$ est une symétrie d'un ensemble donné.

Pour toute tuile T , on note $S(T)$ l'ensemble des symétries de T . Alors $S(T)$ est un

groupe, qui a pour ordre la cardinalité de $S(T)$. Des notations ont été introduites pour les *groupes de symétrie* les plus fréquents :

1. C_1 est le groupe ne contenant que l'isométrie identité.
2. Le *groupe cyclique d'ordre n* , noté C_n ($n \geq 2$), est le groupe des rotations d'angle $2\pi j/n$ pour $j = 0, 1, \dots, n-1$, autour d'un même centre de rotation.
3. Le *groupe diédral d'ordre $2n$* , noté D_n ou D_{2n} ($n \geq 1$), est le groupe contenant les isométries de C_n ainsi que les réflexions en n droites formant $2n$ angles égaux autour du centre de symétrie. Nous utiliserons ici la notation D_n .

Selon les valeurs de n , on peut préciser ce qu'est D_n :

1. D_1 contient simplement l'identité et la réflexion par rapport à une droite.
2. D_2 contient l'identité, les réflexions par rapport à deux droites perpendiculaires se croisant en un point O et la symétrie de centre O (rotation d'angle π).
3. Pour $n \geq 3$, D_n est le groupe des isométries du plan conservant un polygone régulier à n côtés.
4. Le *groupe de rotation D_∞* contient toutes les rotations de centre O (pour un certain point O) et les réflexions par rapports à toutes les droites passant par O . C'est le groupe de symétrie d'un disque circulaire.

Les groupes C_n et D_n ($n \geq 1$) ont tous pour propriété de garder un point fixe, c'est-à-dire que dans chacun de ces groupes toutes les isométries ont un même point fixe (le centre de symétrie). Ces groupes sont les seuls qui peuvent être des groupes de symétrie d'un ensemble compact, donc d'une tuile dans les pavages qui nous intéressent.

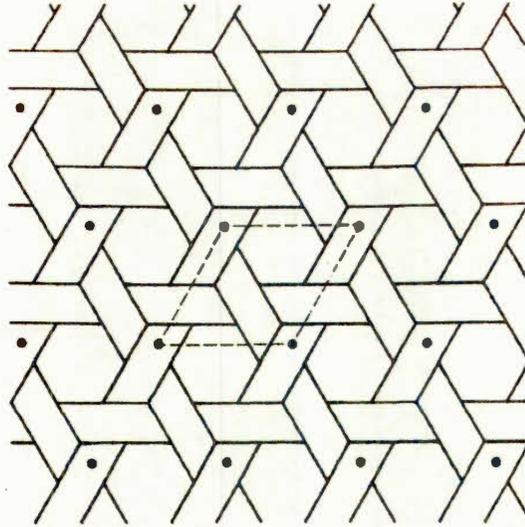


Figure 2.7: Pavage périodique diédral dans lequel les points formant l'un des treillis possibles ainsi qu'un parallélogramme période correspondant.

– Image extraite de l'ouvrage de Grünbaum et Shephard (2016).

Si \mathcal{T} est un pavage, une isométrie σ est une *symétrie de \mathcal{T}* si l'image par σ de chaque tuile de \mathcal{T} est une tuile de \mathcal{T} . On note $S(\mathcal{T})$ le groupe des symétries de \mathcal{T} . Certaines extensions de cette définition peuvent être très utiles pour certains pavages, et en particulier pour les pavages de Penrose :

1. Si le pavage est *marqué*, c'est-à-dire s'il y a un *marquage* ou *motif* sur chaque tuile, alors une symétrie du *pavage marqué* est une isométrie faisant correspondre non seulement les tuiles entre elles mais aussi les marquages de la tuile originale et de son image.
2. Dans le cas d'un pavage coloré, une *symétrie préservant les couleurs* est une isométrie associant à chaque tuile une tuile de la même couleur.

Un pavage est dit *symétrique* s'il admet au moins une symétrie autre que l'identité. Parmi les pavages symétriques, on distingue notamment les *pavages périodiques* : un pavage est dit périodique si son groupe de symétrie contient au moins deux

translations dans des directions non parallèles. Il est clair que si \mathcal{T} est un pavage périodique et que \vec{u} et \vec{v} sont ses deux vecteurs de translation non parallèles, alors $S(\mathcal{T})$ contient toutes les translations de vecteurs $n\vec{u} + m\vec{v}$ où n, m sont des entiers. En outre, en partant de n'importe quel point O du plan, l'ensemble des images de O par ces translations $n\vec{u} + m\vec{v}$ ($n, m \in \mathbb{Z}$) forme un *treillis* (*lattice*)⁸.

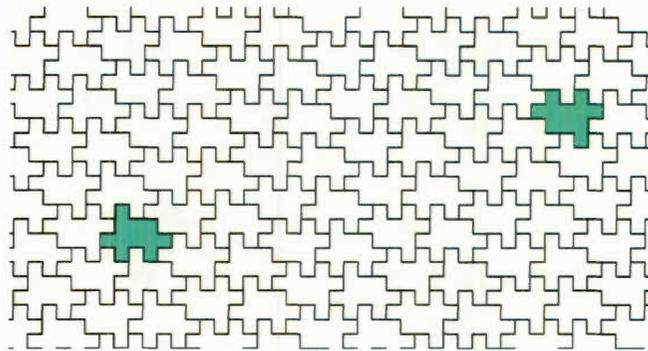
L'exemple le plus simple est probablement la *grille carrée* (*unit square lattice*), c'est-à-dire \mathbb{Z}^2 muni de la relation d'adjacence⁹. Plus généralement, à chaque pavage périodique on peut associer un treillis, et les points de ce treillis peuvent être vus comme l'ensemble des sommets d'un pavage parallélogramme \mathcal{P} . Les tuiles de \mathcal{P} sont alors appelées *parallélogrammes périodes* (figure 2.7).

Si un pavage n'est pas périodique mais que ses symétries incluent des rotations autour d'un point fixe, alors ce point est appelé le *centre du pavage*. Par ailleurs, on peut aussi considérer les symétries des tuiles du pavage : soit T une tuile d'un pavage \mathcal{T} quelconque. Le *groupe de tuiles induit*, ou *stabilisateur*, de T dans \mathcal{T} , noté $S(\mathcal{T} | T)$, est le groupe des symétries de la tuile T qui sont aussi des symétries du pavage \mathcal{T} .

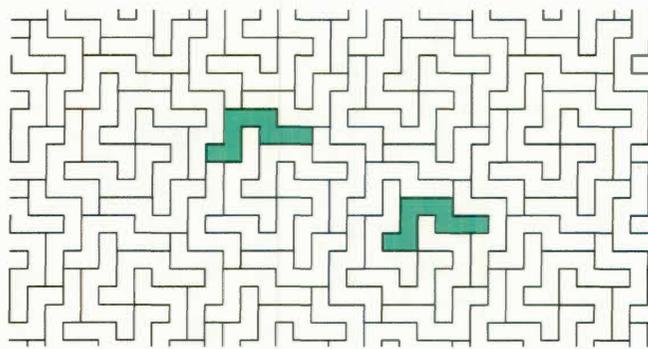
On dit que deux tuiles T_1, T_2 d'un pavage \mathcal{T} sont *équivalentes* si le groupe de symétrie $S(\mathcal{T})$ contient une transformation pour laquelle T_2 est l'image de T_1 . L'ensemble des tuiles de \mathcal{T} qui sont équivalentes à T_1 est appelé *classe de transitivité* de T_1 . On dit qu'un pavage est *isocébral*, ou *face-transitif*, si toutes ses tuiles forment une unique classe de transitivité, et *k-isocébral* s'il contient exactement k classes de transitivité. Des exemples sont donnés dans la figure 2.8.

8. Un treillis est un ensemble E muni d'une relation d'ordre telle que pour tous éléments a et b de E , il existe une borne supérieure et une borne inférieure à l'ensemble $\{a, b\}$.

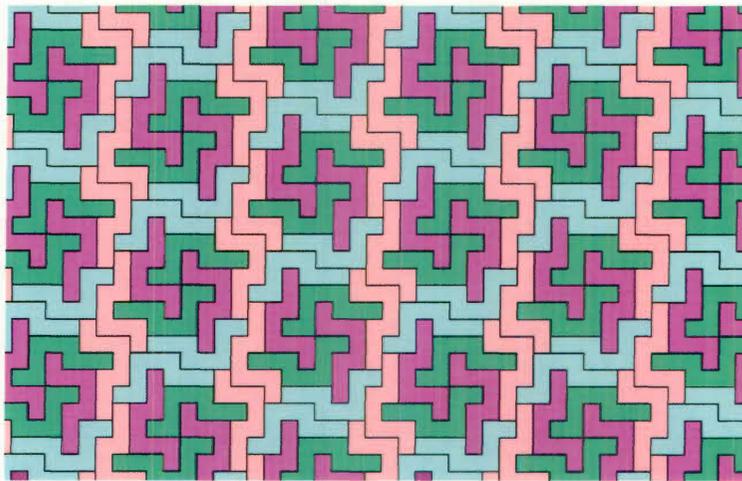
9. Une définition plus formelle est donnée à la section 4.3.1.



(a)



(b)



(c)

Figure 2.8: (a) Pavage isoédral : toute tuile peut être obtenue à partir de toute autre par une isométrie du pavage entier (translation ou symétrie centrale). (b) Pavage non-isoédral : la translation permettant de transformer l'une des tuiles colorées en l'autre n'est pas une symétrie du pavage puisque les tuiles adjacentes ne sont pas disposées de la même manière. (c) Pavage 4-isoédral dans lequel chaque couleur correspond à une classe de transitivité.

– Images extraites d'une présentation d'Andrew Winslow.

Si au lieu de considérer les tuiles on se base sur l'observation des sommets et/ou des arêtes, alors d'autres propriétés du pavage peuvent émerger, illustrées dans la figure 2.9 :

- Un pavage \mathcal{T} est *isogonal* (respectivement *isotoxal*) si tous ses sommets (resp. arêtes) forment une unique classe de transitivité, c'est-à-dire si chaque sommet (resp. arête) de \mathcal{T} est l'image d'un autre sommet (resp. arête) par une transformation de $S(\mathcal{T})$.
- \mathcal{T} est *k-isogonal* si ses sommets forment exactement k classes de transitivité.
- Un pavage est *monogonal* si chaque sommet considéré avec ses arêtes incidentes forme une figure congrue à celle d'un autre sommet avec ses arêtes incidentes.
- On définit de façon similaire le terme *monotoxal*, en inversant les mots "sommets" et "arêtes" dans la définition de monogonal.

Un *drapeau* dans un pavage est un triplet (V, E, T) constitué d'un sommet V , d'une arête E et d'une tuile T mutuellement incidents. Un pavage \mathcal{T} est *régulier* si son groupe de symétrie $S(\mathcal{T})$ est transitif pour les drapeaux de \mathcal{T} . Il n'y a que trois pavages réguliers, à savoir les pavages bord-à-bord constitués de carrés, de triangles équilatéraux ou d'hexagones réguliers (E, D et F dans la figure 2.1).

2.3 Pavages normaux ou équilibrés, théorème d'extension

Certains pavages, même s'ils ne possèdent aucune des propriétés précédemment citées, se comportent tout de même suffisamment bien pour que l'on puisse les étudier en profondeur. Nous allons donc aborder ici certaines conditions sous lesquelles on peut travailler sans trop de difficulté.

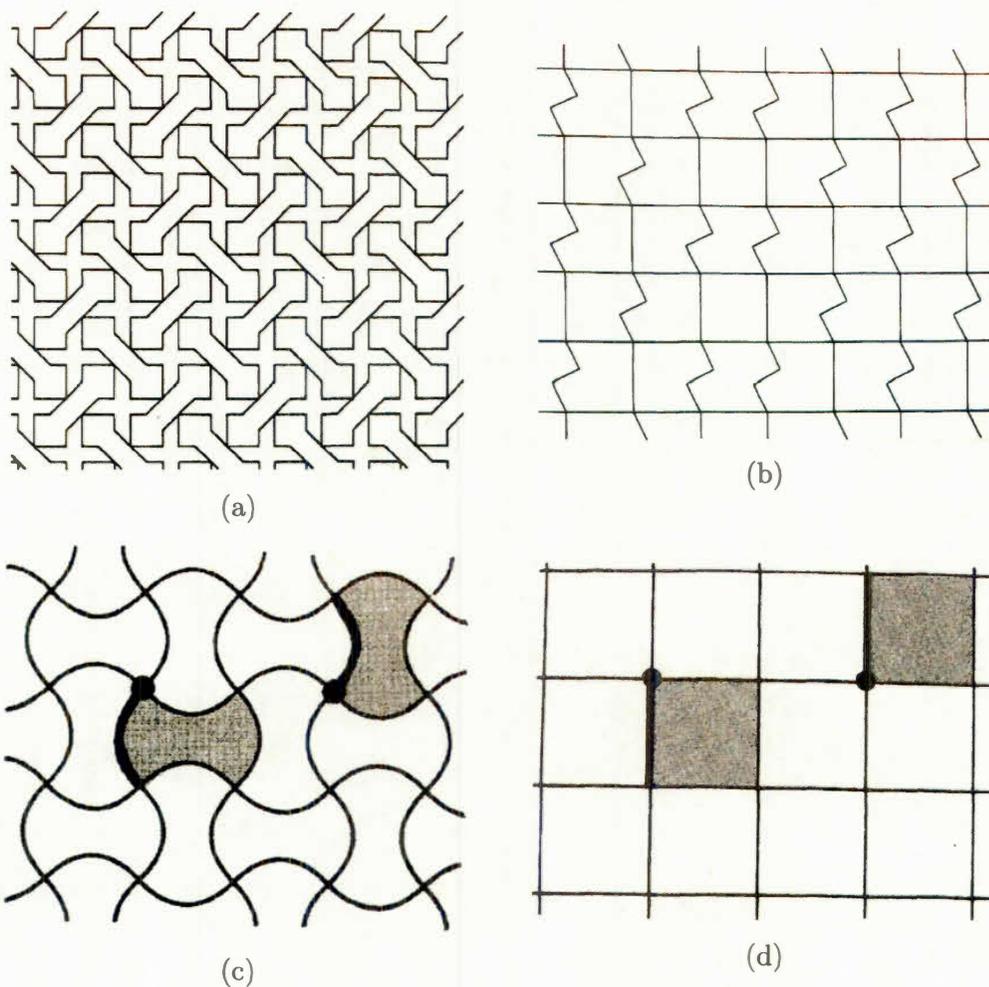


Figure 2.9: (a) Pavage diédral isogonal et isotoxal. (b) Pavage monogonal mais pas isogonal. (c) et (d) Pavages isoédraux, isogonaux et isotoxaux, sur lesquels des drapeaux sont mis en évidence; (c) est régulier car tous ses drapeaux sont équivalents; (d) ne l'est pas car ses drapeaux appartiennent à deux classes d'équivalence distinctes (l'arête du drapeau peut être "en creux" ou "en bosse").

– Images extraites de l'ouvrage de Grünbaum et Shephard (2016).

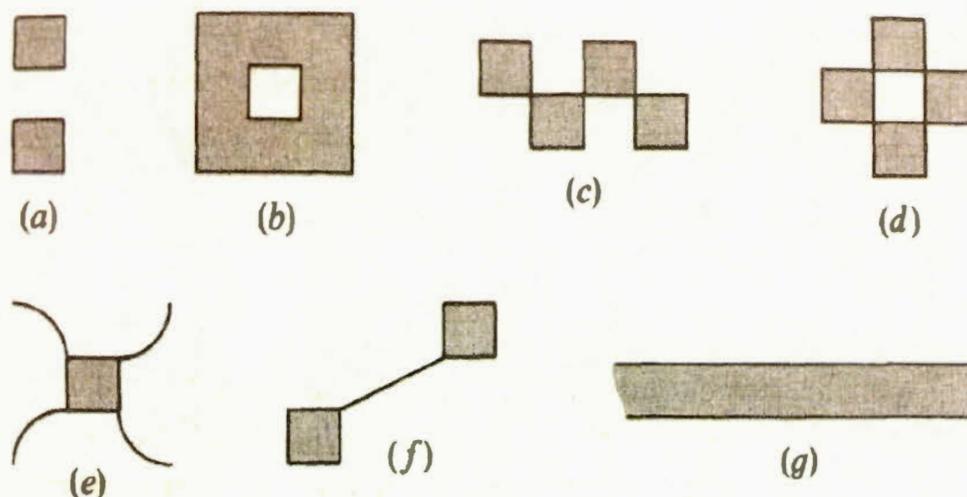


Figure 2.10: Tuiles n'étant pas des disques topologiques (la tuile (g) n'est pas fermée).

– Image extraite de l'ouvrage de Grünbaum et Shephard (2016).

Tout d'abord, un pavage \mathcal{T} est dit *normal* s'il satisfait les conditions suivantes :

- N.1 Toute tuile de \mathcal{T} est un disque topologique.
- N.2 Toute intersection non vide de deux tuiles de \mathcal{T} est un ensemble connexe.
- N.3 Les tuiles de \mathcal{T} sont uniformément bornées, c'est-à-dire qu'il existe deux nombres positifs u et U , appelés *paramètres* du pavage, tels que toute tuile contient un disque circulaire de rayon u et est contenue dans un disque circulaire de rayon U .

Des exemples de tuiles ou pavages ne respectant pas ces conditions sont donnés dans les figures 2.10 et 2.11. Il est clair que si toutes les tuiles d'un pavage sont des convexes fermés de \mathbb{R}^2 (d'intérieur non vide) alors ce pavage est normal. Cette notion nous intéresse ici car certaines prototiles des pavages de Penrose ne sont pas convexes mais donnent tout de même un pavage normal.

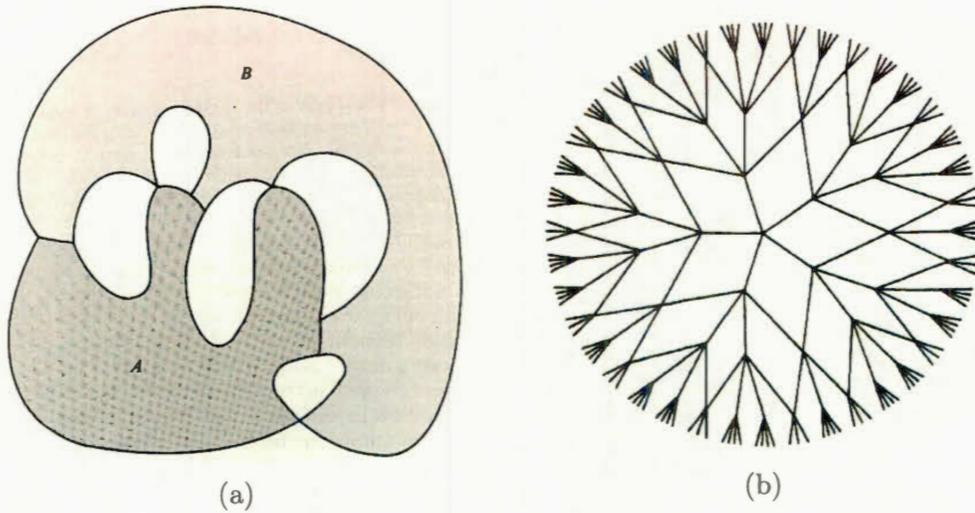


Figure 2.11: (a) L'intersection des tuiles A et B n'est pas connexe. (b) En poursuivant ce pavage à l'infini, on ne peut pas trouver de paramètre u pour satisfaire la condition N.3 car l'aire des tuiles tend vers 0 quand on s'éloigne du centre. – Images extraites de l'ouvrage de Grünbaum et Shephard (2016).

En plus d'être normal, un pavage peut présenter une forme d'équilibre intéressante. Commençons par introduire quelques notations : choisissons deux axes (non parallèles) du plan et considérons un carré $S(r)$ de taille $2r \times 2r$ dont les côtés sont parallèles à ces axes. On construit le *patch* $\mathcal{A}(S(r), \mathcal{T})$ généré par $S(r)$ (voir section 2.1) et on note respectivement $t_{S(r)}$, $e_{S(r)}$ et $v_{S(r)}$ les nombres de tuiles, d'arêtes et de sommets dans $\mathcal{A}(S(r), \mathcal{T})$. Alors un pavage normal \mathcal{T} est dit *métriquement équilibré* si pour tout $\epsilon > 0$, il existe des nombres R , $V(\mathcal{T})$, $E(\mathcal{T})$ et $T(\mathcal{T})$ tels que pour tout $r > R$,

$$(1 - \epsilon)T(\mathcal{T}) \leq t_{S(r)}/4r^2 \leq (1 + \epsilon)T(\mathcal{T})$$

$$(1 - \epsilon)E(\mathcal{T}) \leq e_{S(r)}/4r^2 \leq (1 + \epsilon)E(\mathcal{T})$$

$$(1 - \epsilon)V(\mathcal{T}) \leq v_{S(r)}/4r^2 \leq (1 + \epsilon)V(\mathcal{T})$$

Intuitivement, cela signifie que tous les *patches* “carrés” de même dimension ont tous à peu près le même nombre de tuiles, d’arêtes et de sommets : la valeur de R dépend uniquement du pavage \mathcal{T} et de ϵ , mais *pas de la position* du carré $S(r)$. Il est clair que tout pavage périodique est métriquement équilibré, et que cette propriété ne fait donc une différence que dans les pavages non périodiques.

Enfin, une question se pose quand on souhaite paver le plan de façon non périodique avec un ensemble de prototiles : comment déterminer si l’on va réussir ? Il arrive en effet que l’on soit capable de paver une région du plan mais sans pouvoir continuer. Le théorème d’extension nous donne une condition simple assurant qu’un ensemble de prototiles donné admet un pavage du plan. Précisons d’abord la terminologie utilisée : on dit qu’un ensemble fini de prototiles \mathcal{S} pave *sur* une partie D du plan si \mathcal{S} admet un *patch* \mathcal{A} tel que l’ensemble des tuiles de \mathcal{A} contient D . On dit alors que \mathcal{A} *couvre* D .

THÉORÈME 2.3.1 (THÉORÈME D’EXTENSION) – *Soit \mathcal{S} un ensemble fini de prototiles, chacune étant un disque topologique fermé. Si \mathcal{S} pave sur des disques circulaires arbitrairement grands, alors \mathcal{S} admet un pavage du plan.*

La démonstration (voir Grünbaum et Shephard (2016), pages 151-155) est omise, comme toutes celles de ce chapitre, car cela dépasse le cadre de ce mémoire.

2.4 Pavages apériodiques

Parmi les pavages non périodiques, on s’intéresse notamment à ceux qui sont constitués d’un ensemble fini de prototiles. S’il est facile de constituer un pavage non périodique à partir d’une simple prototile comme par exemple un carré (figure 2.12), il a été beaucoup moins évident de trouver un ensemble fini de prototiles qui admet un pavage non périodique du plan mais aucun pavage périodique (contrairement au carré qui donne, entre autres, la grille carrée). Un tel

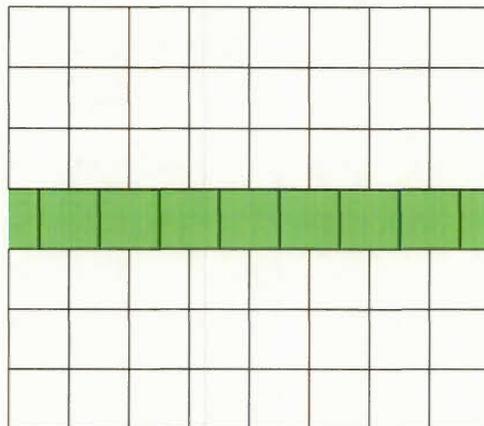


Figure 2.12: Pavage non périodique constitué de carrés : si tous les carrés sont bord-à-bord à l'exception d'une ligne qui est décalée (en vert), alors le groupe de symétrie du pavage ne contient de translations que dans une direction donc le pavage n'est pas périodique.

ensemble de tuiles est dit *apériodique*, et admet en fait une infinité de pavages non périodiques du plan.

Nous devons le premier ensemble de tuiles apériodique à Robert Berger, qui a démontré en 1966 que l'on pouvait paver le plan en utilisant 20 426 tuiles de Wang – c'est-à-dire des tuiles carrées avec des marquages de différentes couleurs sur les bords, qu'on ne peut assembler entre elles que si les marquages coïncident sur l'arête commune (sans rotation ni réflexion) –, alors que Wang lui-même conjecturait qu'un tel ensemble ne pouvait exister.

Par la suite, des ensembles plus petits ont rapidement été trouvés, et l'on retient notamment un ensemble de 6 tuiles découvert en 1971 par Raphael M. Robinson (avec rotations et réflexions). Roger Penrose a, sans avoir eu connaissance du travail de Robinson, proposé son premier ensemble de 6 tuiles en 1973, puis s'est rapidement rendu compte qu'il pouvait modifier ses propres tuiles pour réduire son ensemble à quatre, puis deux prototuiles dès 1974, proposant même deux ensembles différents de cette taille !

Les pavages apériodiques peuvent avoir des propriétés amusantes ou surprenantes, ce qui les rend fascinants. Il s'agit souvent de "pavages à similitudes", c'est pourquoi nous commençons par quelques définitions avant de parler rapidement des ensembles de prototyles de Robinson et d'Ammann, puis plus longuement de ceux de Penrose.

2.4.1 Pavages à similitudes

La notion de *pavage à similitudes* renvoie à deux concepts différents :

- un pavage comptant des similitudes parmi ses symétries ;
- un pavage qui est égal à une *composition* de lui-même.

Comme nous l'avons vu en abordant la notion d'égalité entre pavages, une similitude du plan est définie par une isométrie suivie d'une homothétie, c'est-à-dire une expansion ou une contraction. Quant au deuxième concept, on dit qu'un pavage \mathcal{T}_1 est obtenu par *composition* à partir d'un pavage \mathcal{T}_2 si chaque tuile de \mathcal{T}_1 est une union de tuiles de \mathcal{T}_2 . Ainsi chaque arête de \mathcal{T}_1 est une union d'arêtes de \mathcal{T}_2 , et chaque sommet de \mathcal{T}_1 est un sommet de \mathcal{T}_2 (mais l'inverse n'est généralement pas vrai). La figure 2.13 donne un exemple de composition. On parle plus précisément de *k-composition* si chaque tuile de \mathcal{T}_1 est l'union de k tuiles de \mathcal{T}_2 . Si \mathcal{T}_1 est composition de \mathcal{T}_2 , alors \mathcal{T}_2 est une *décomposition* de \mathcal{T}_1 : on découpe chaque tuile de \mathcal{T}_1 (en suivant le procédé inverse de la composition) pour obtenir \mathcal{T}_2 . Enfin, l'*inflation* est un agrandissement du pavage suivi d'une décomposition, de sorte que chaque tuile du nouveau pavage ait la même taille que celles du pavage original. C'est ce qu'on observe à la figure 2.14 quand par exemple un petit L est agrandi puis découpé en quatre L de la même taille que le L de départ.

Un pavage monoédral \mathcal{T} (constitué à partir d'une seule prototyle) est un *pavage*

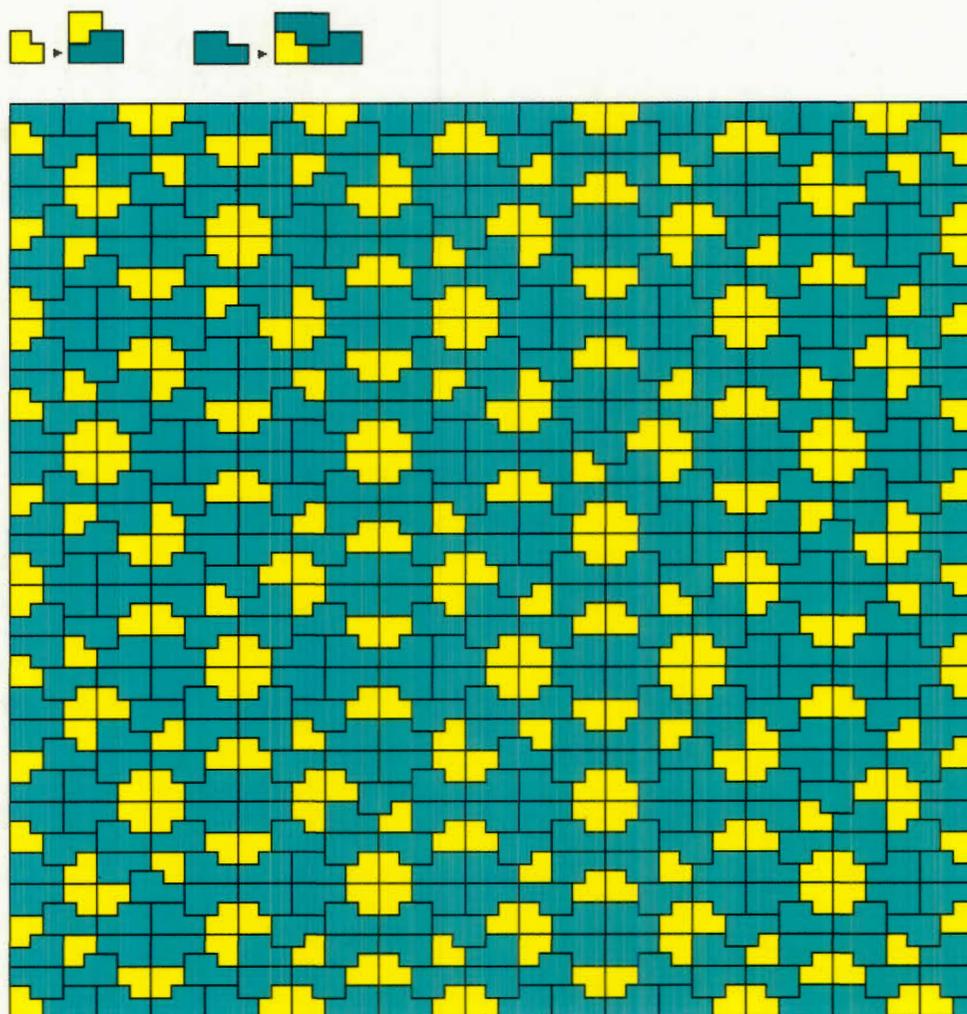


Figure 2.13: Pavage par composition : ici les prototiles constituant \mathcal{T}_1 et \mathcal{T}_2 sont les mêmes, il s'agit de deux tuiles en forme de L dans lesquelles les rapports de longueur sont des puissances du nombre d'or. Considérant que le pavage montré ici est \mathcal{T}_1 , un pavage \mathcal{T}_2 peut être obtenu en divisant chaque tuile comme indiqué en haut : chaque petite (en jaune) donne une petite et une grande, et chaque grande (en bleu) donne une petite et deux grandes. Alternativement, considérant que le pavage montré ici est \mathcal{T}_2 , un pavage \mathcal{T}_1 est obtenu en regroupant des tuiles dans le sens inverse. Ces pavages ont été conçus par Robert Ammann, comme ceux présentés à la section 2.4.2.

– Image extraite du blog de John J. G. Savard

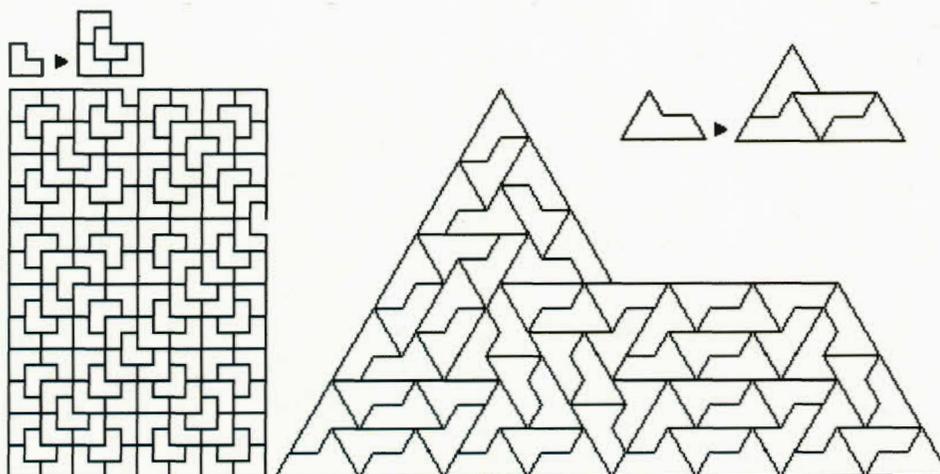


Figure 2.14: Deux pavages à similitudes d'ordre 4 : l'un s'inscrivant dans la grille carrée, l'autre dans la grille triangulaire. Celui de gauche a inspiré à Goodman-Strauss (1999) un ensemble apériodique de deux prototyles.

– Image extraite du blog de John J. G. Savard

à similitudes d'ordre k s'il est égal à une k -composition de lui-même ($k > 1$) et que cette propriété n'est valable pour aucune valeur inférieure à k . Par exemple, la grille carrée est un pavage à similitudes d'ordre 4, puisque chaque carré unitaire peut être divisé en quatre carrés (mais pas moins) de même dimension et que cette division en plus petits carrés redonne la grille carrée, à un changement d'échelle près. On appelle *tuile k -rep* une tuile T qui peut être découpée en k parties congrues entre elles (c'est-à-dire de même forme et même dimension) T' , chacune de ces parties étant similaire à T (c'est-à-dire de même forme mais d'échelle différente). Deux exemples sont donnés à la figure 2.14.

Il existe une méthode pour construire de façon systématique un pavage monoédral à similitudes d'ordre k : pour une tuile k -rep T donnée, on trouve une façon d'arranger k copies de T de sorte que la forme obtenue soit celle de T (on a donc en fait assemblé des copies de T' de sorte à obtenir T , à changement d'échelle près) ; il suffit alors de répéter cet arrangement de tuiles, en prenant des groupements de

tuiles formant des copies de plus en plus grosses de T , pour obtenir un pavage du plan. On observe alors la propriété suivante :

PROPOSITION 2.4.1 – *Si le processus décrit ci-dessus pour un pavage monoédral à similarités d'ordre k est unique, alors \mathcal{T} est non périodique.*

Voyons maintenant quelques exemples d'ensembles apériodiques de prototiles et certaines propriétés remarquables qu'ils peuvent partager.

2.4.2 Les pavages de Robinson et d'Ammann

L'ensemble apériodique de six prototiles de Robinson (1971) est représenté à la figure 2.15a, assorti de sa représentation symbolique à la figure 2.15b. Les tuiles a et b sont appelées *croix* (*crosses*) et ont la même représentation, à l'exception de marques qui permettent de distinguer celle qui est *cornée* (a) de celle qui est *sans coin* (b). Les quatre autres prototiles sont appelées *bras* (*arms*) et n'ont pas de coins. Dans la représentation symbolique, les têtes des flèches représentent les bosses, tandis que les queues représentent les entailles. Pour que les tuiles s'assemblent, les têtes doivent rencontrer les queues (en nombre égal des deux côtés) et chaque sommet doit compter exactement un coin marqué (une corne). Les entailles et bosses symétriques sont représentées par des flèches centrales (uniques) alors que les asymétriques sont représentées par deux flèches dont une centrale.

Il est intéressant de constater qu'un même ensemble de prototiles peut être vu de différentes manières, notamment en altérant les côtés de tuiles carrées ou en utilisant un marquage. Mais alors, puisque ces tuiles s'inscrivent dans une grille carrée (régulière), la première propriété remarquable de cet ensemble de prototile est la suivante :

PROPOSITION 2.4.2 – *L'ensemble $R1$ de prototiles de Robinson est apériodique.*

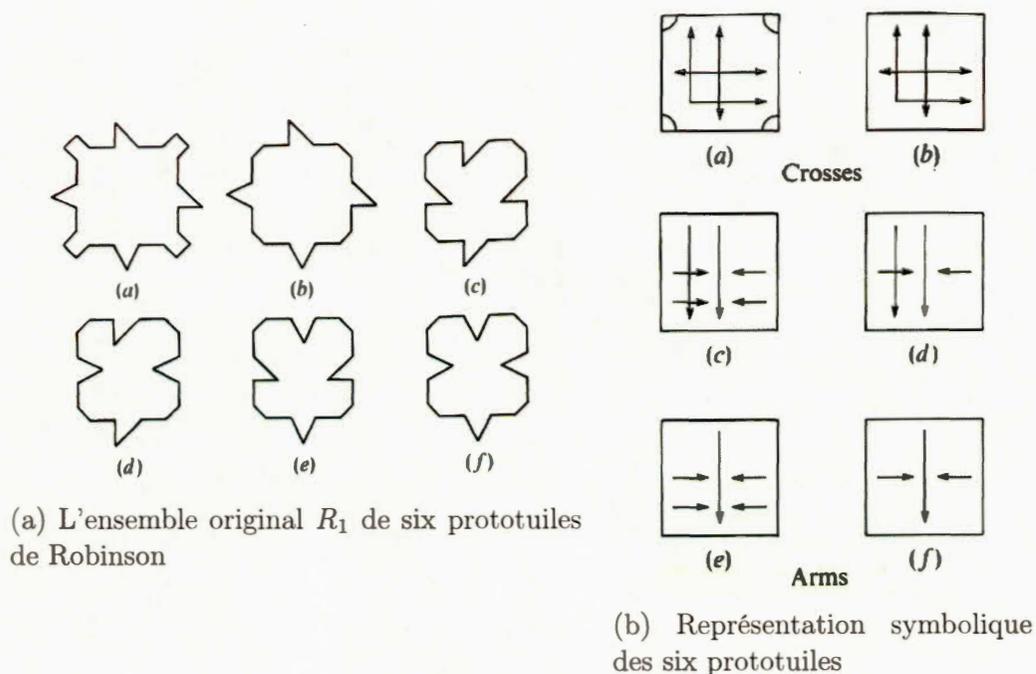


Figure 2.15: L'ensemble aperiodique R_1 de tuiles de Robinson.
 – Images extraites de l'ouvrage de Grünbaum et Shephard (2016).

Avant de décrire, dans le cadre de cet ensemble, une propriété que l'on retrouve dans d'autres ensembles aperiodiques, il nous faut définir un terme propre à R_1 : un *couloir* (*corridor*, ou *fault*) est une colonne ou ligne infinie de tuiles de types (d) ou (f). Nous pouvons maintenant voir une première version d'une propriété appelée *isomorphisme local* : dans un pavage de Robinson \mathcal{T} , tout *patch* de tuiles ne contenant pas deux couloirs perpendiculaires est répété une infinité de fois dans \mathcal{T} . En outre, si aucune tuile d'un couloir n'est incluse dans le *patch*, alors celui-ci apparaît une infinité de fois dans chaque pavage par des tuiles de Robinson.

Mais le plus intéressant est certainement la propriété de similarité des pavages de Robinson : avec un marquage suivant les flèches de la représentation symbolique, on voit que le pavage contient des carrés arbitrairement grands qui se chevauchent, comme le montre la figure 2.16.

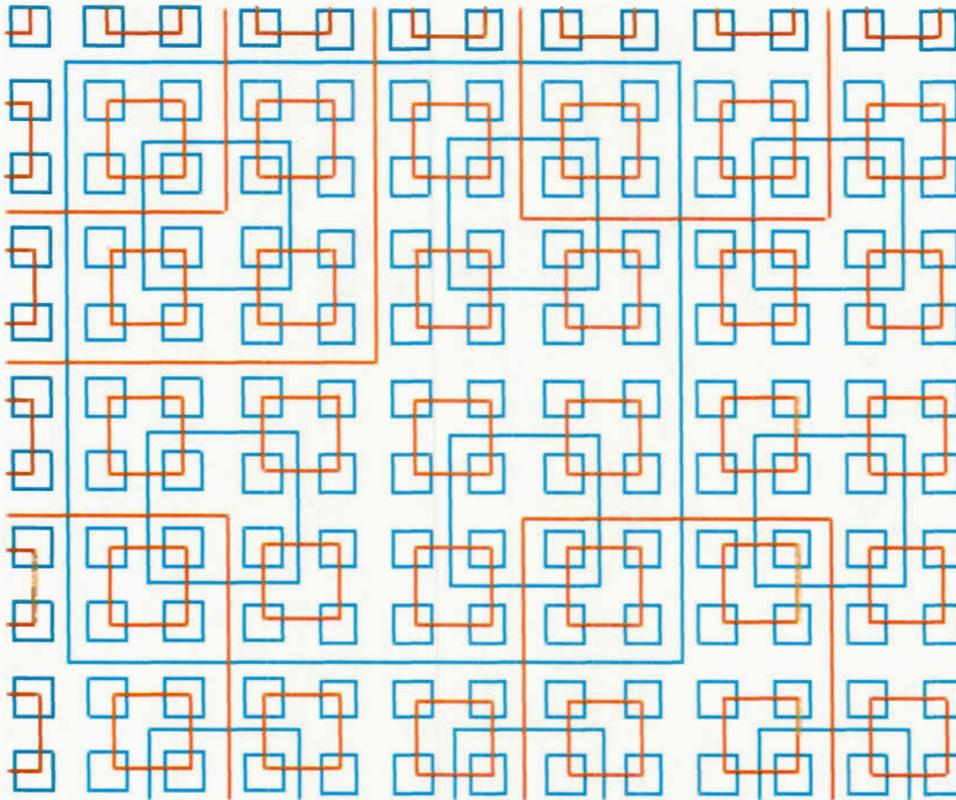
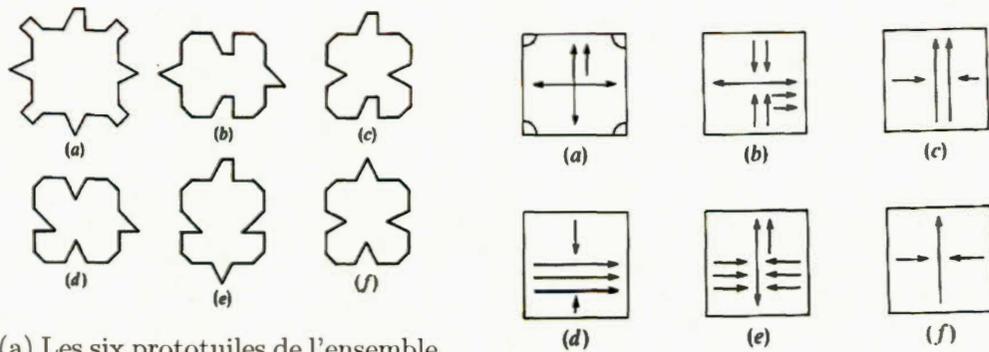


Figure 2.16: Carrés se chevauchant dans un pavage de Robinson.
 – Image extraite du site de l'AMS (American Mathematical Society).

En 1977, Robert Ammann a décrit un ensemble de tuiles similaire à celui de Robinson (figure 2.17). Là encore une seule des prototuiles est cornée mais cette fois les projections et indentations sont de trois formes différentes (2.17a), représentées symboliquement par des flèches simples, doubles et triples (2.17b) avec des règles d'assemblages similaires. Seule la dernière tuile peut être utilisée dans n'importe quel sens, les autres ne peuvent faire l'objet d'une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ (seules les réflexions par rapport à un axe vertical ou horizontal sont permises). On trouve aussi dans ces pavages l'apériodicité, l'isomorphisme local ainsi qu'une propriété de similarité.

Finissons ce chapitre avec un autre ensemble d'Ammann qui a la particularité de



(a) Les six prototiles de l'ensemble original A1 d'Ammann

(b) Marquage alternatif des prototiles

Figure 2.17: L'ensemble aperiodique A1 de six prototiles d'Ammann.
 – Images extraites de l'ouvrage de Grünbaum et Shephard (2016).

ressembler au troisième ensemble de Penrose, mais qui est plus tardif. L'ensemble A5 d'Ammann et Beenker ne contient que deux prototiles : un carré et un losange, avec un marquage approprié pour assurer l'aperiodicite. La figure 2.18 montre un *patch* composé de ces tuiles.

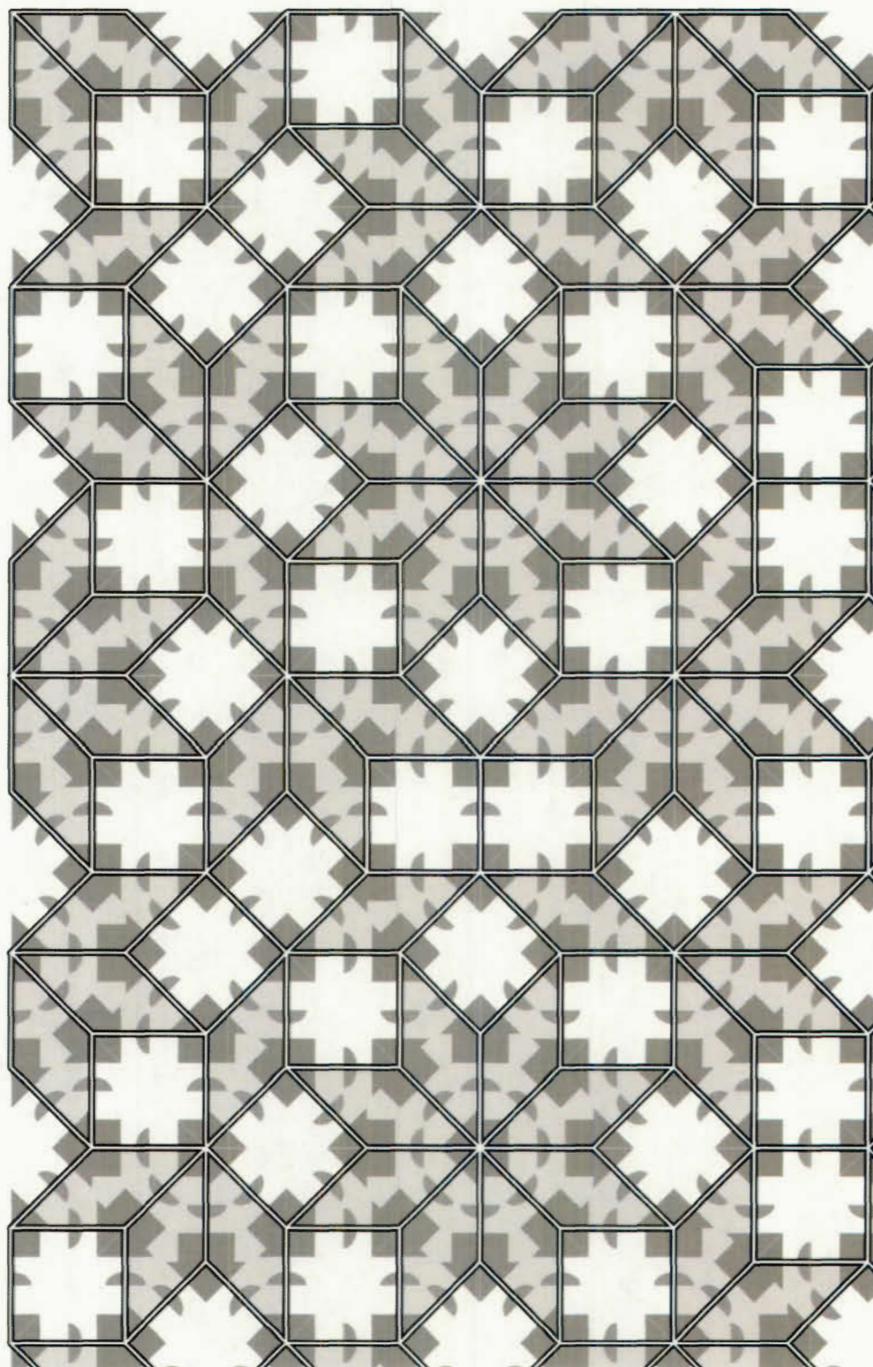


Figure 2.18: L'ensemble apériodique A5 de deux prototyles d'Ammann. Beenker a aussi découvert ce pavage, indépendamment, c'est pourquoi il est connu sous le nom d'Ammann-Beenker.

– Image créée par Chaim Goodman-Strauss et extraite de Wikipedia.

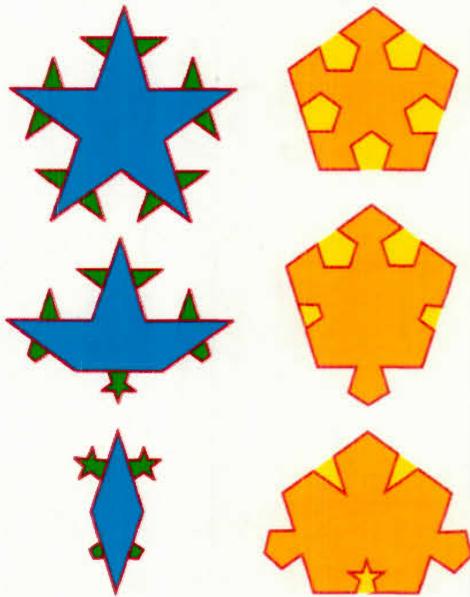
CHAPITRE III

PAVAGES DE PENROSE

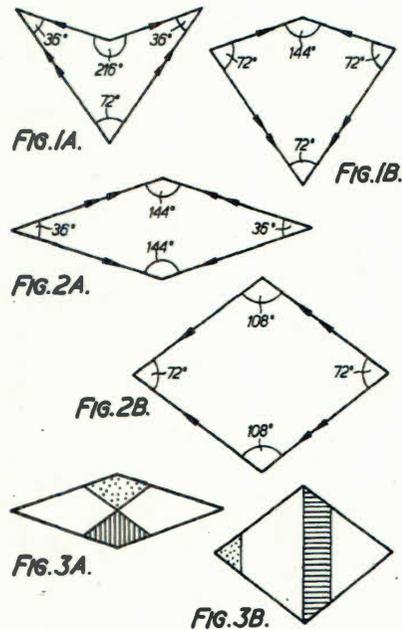
Les pavages de Penrose sont multiples : trois ensembles de prototiles donnent chacun une infinité de pavages aperiodiques. Si le premier ensemble (1973), composé de six prototiles, a été découvert plus tard que celui de Robinson (1971), il se distingue en ne suivant pas la grille carrée et en étant le père de deux autres ensembles, constitués chacun de seulement deux prototiles. Roger Penrose mentionne le premier dans son article *The Role of Aesthetics in Pure and Applied Mathematical Research* (1974) avant de le décrire plus amplement dans des publications ultérieures, où les deux autres ensembles sont présentés : *Pentaplexity* (1978) et *Set of tiles for covering a surface* (1979).

3.1 Trois ensembles de prototiles intimement liés

Le premier ensemble découvert par Roger Penrose, noté P1, est constitué des six prototiles de la figure 3.1a : une étoile à cinq branches (*pentacle*), une demi-étoile (*half-pentacle*) ou "bateau en papier" ("*paper boat*"), un losange et trois pentagones réguliers dont les côtés sont modifiés par des dents (protubérances vertes ou oranges) et des entailles (creux jaunes). Ces modifications, au lieu d'être visibles dans le pavage, sont généralement remplacées par des étiquettes 0, 1, 2, $\bar{0}$, $\bar{1}$, $\bar{2}$, auquel cas la règle d'assemblage est que 0 va avec $\bar{0}$, 1 avec $\bar{1}$ et 2 avec $\bar{2}$.



(a) L'ensemble P1 contenant 6 prototiles.



(b) Les ensembles P2 et P3.

Figure 3.1: Les tuiles de Penrose : (a) le premier ensemble P1 constitué de 6 prototiles; (b) en haut les deux tuiles du pavage "cerfs-volants et fléchettes" P2 (FIG.1), au milieu les deux losanges (*rhombi*) de P3 (FIG.2) et en bas les mêmes rhombi avec marquage (FIG.3).

– Image (a) extraite de Penrose (1978), image (b) extraite de Penrose (1979).

Nous avons déjà défini les processus de composition, décomposition et inflation à la section 2.4.1, il convient de préciser que les règles locales d'assemblage et/ou les étiquettes ou marquages utilisés doivent aussi être conservés le cas échéant. En utilisant la composition, on peut trouver six patchs de tuiles équivalents aux six prototiles originales, comme le montre la figure 3.2. Cette composition permet de prouver le théorème suivant :

PROPOSITION 3.1.1 – *L'ensemble P1 de prototiles de Penrose est apériodique.*

Démonstration : Comme chaque tuile peut être décomposée en tuiles plus petites, on peut répéter une infinité de fois le processus d'inflation, avec un ratio d'agrandissement de $\varphi^2 : 1$ où $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ est le *nombre d'or*. La région du plan

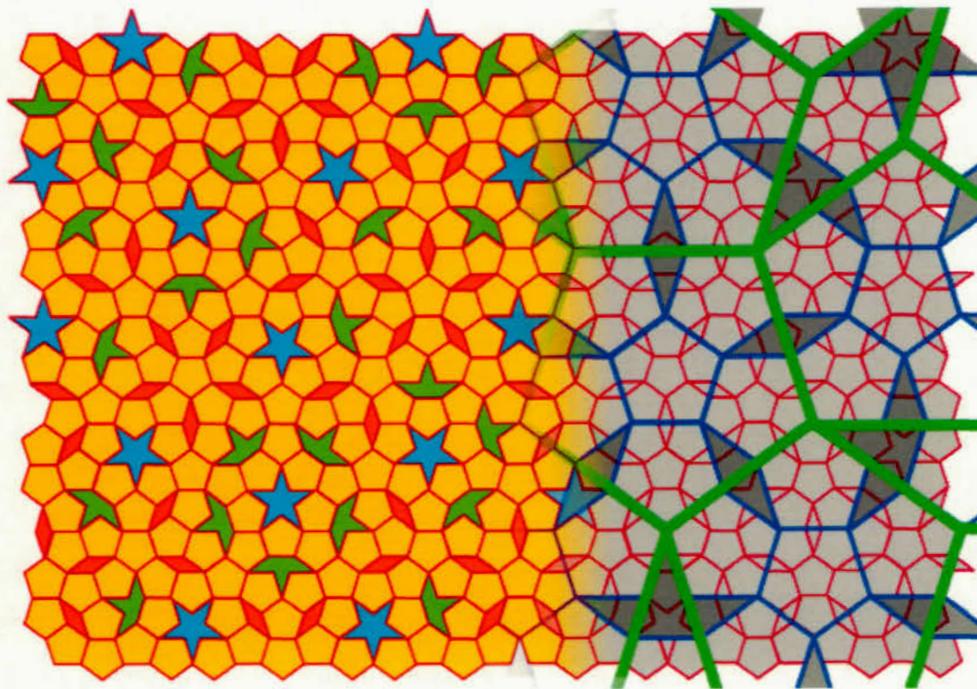


Figure 3.2: Composition d'un pavage P1 de Penrose : à gauche le pavage original, à droite une première composition est mise en évidence en bleu, servant de base à une deuxième en vert.

– Image extraite de l'article "Pentaplexity" (Penrose, 1978).

couverte pouvant être arbitrairement grande, le théorème 2.3 (théorème d'extension) nous assure que P1 admet un pavage du plan. Maintenant supposons ce pavage périodique, alors après inflation on aurait un pavage admettant le même parallélogramme période. En répétant le processus d'inflation suffisamment de fois pour que les tuiles soient plus grandes que ce parallélogramme, on obtient une contradiction : la translation mènerait un sommet à l'intérieur d'une tuile. Par conséquent, le pavage est nécessairement non périodique. \square

Le deuxième ensemble, noté P2 et communément appelé *Penrose kites and darts*¹, est constitué de la *fléchette* (*dart*) intitulée "FIG.1A." et du *cerf-volant* (*kite*)

1. Les noms des tuiles ont été suggérés par John Conway.

intitulé “FIG.1B.” dans la figure 3.1b. Ces deux quadrilatères ont chacun deux côtés de longueur 1 et deux côtés de longueur φ , tous leurs angles sont des multiples de $\theta = \frac{\pi}{5}$ ($= 36^\circ$) et les flèches sur les côtés donnent les règles d’assemblage : deux tuiles ne peuvent s’assembler que par des côtés ayant le même nombre de flèches et dans le même sens² – ainsi, par exemple, on ne peut les assembler en losange.

Les pavages de Penrose ont suscité un vif intérêt chez plusieurs mathématiciens, dont notamment Robert Ammann et Raphael M. Robinson qui ne se sont pas contentés de travailler sur leurs propres pavages, Martin Gardner qui a grandement contribué à faire connaître ces pavages (Gardner, 1997), et surtout John H. Conway à qui l’on doit une grande partie du vocabulaire spécifique aux pavages de Penrose et de nombreuses observations particulièrement utiles au présent travail de recherche. Les chapitres de Grünbaum et Shephard (1987) consacrés aux pavages de Penrose sont basés sur des travaux de ces quatre chercheurs et de Roger Penrose lui-même, principalement des notes non publiées et des communications privées.

La *décomposition triangulaire* proposée par Robinson est un outil de travail assez pratique dans l’étude de certaines propriétés : en découpant chaque tuile suivant son axe de symétrie en deux triangles, on obtient deux tuiles triangulaires appelées *tuiles A*, que l’on note respectivement L_A et S_A pour la plus grande et la plus petite (figure 3.3a). L’assemblage des tuiles doit respecter les couleurs des sommets ainsi que le sens de la flèche (les réflexions sont permises). Tout pavage “cerfs-volants et fléchettes” peut être transformé en un pavage *A* (i.e. fait avec des tuiles *A*), et réciproquement.

2. Tout marquage ou toute déformation des côtés menant aux mêmes règles d’assemblage peut être utilisé(e).

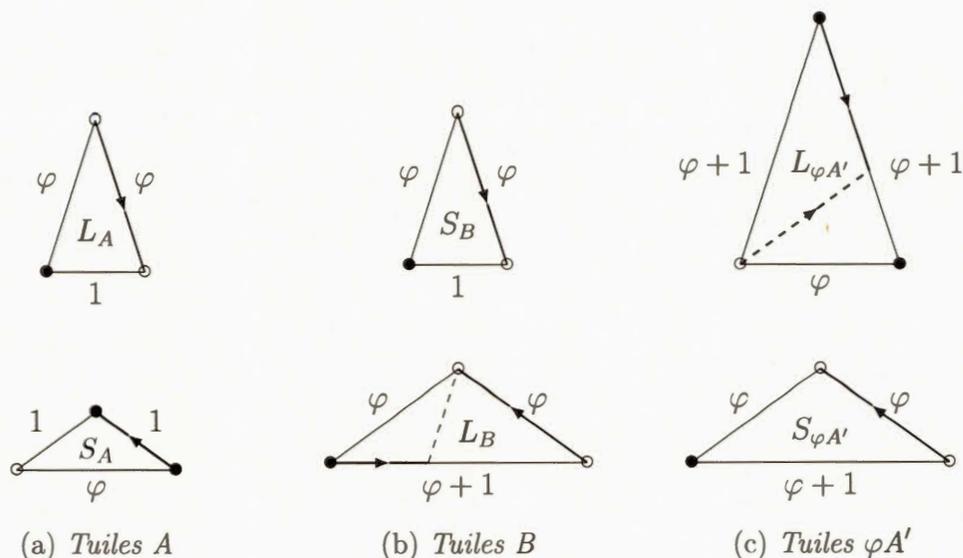


Figure 3.3: Décomposition triangulaire de Robinson. (Note : $\varphi^2 = \varphi + 1$.)

Des *tuiles B* peuvent ensuite être formées à partir des tuiles A, comme le montre la figure 3.3b : les deux tuiles A sont collées pour former la grande tuile L_B et la grande L_A devient la petite S_B , en gardant les couleurs de sommets et les flèches. En composant une nouvelle fois, on obtient les *tuiles $\varphi A'$* de la figure 3.3c, qui sont un agrandissement des tuiles A de rapport $\varphi : 1$ où les couleurs des sommets ont été inversées (l'inversion étant symbolisée par le prime). Les compositions suivantes donneront successivement des tuiles $\varphi B'$ puis $\varphi^2 A$, etc. Il est toujours possible d'obtenir par composition un pavage de tuiles B à partir d'un pavage de tuiles A, et cette composition est unique.

Le troisième ensemble de Penrose, noté P3 et appelé *rhombes* ou *losanges de Penrose* (*Penrose rhombs*)³, est justement obtenu à partir des tuiles B : on considère les tuiles L'_B et S'_B , symétriques de L_B et S_B respectivement par rapport au long côté de L_B et au côté court de S_B , ce qui nous donne un gros losange composé de

3. Dans la suite, on emploie le mot rhombes sans guillemets pour parler des tuiles, et avec guillemets pour parler du type de pavage.

L_B et L'_B ainsi qu'un losange fin composé de S_B et S'_B , présentés à la figure 3.1 ("FIG.2B." et "FIG.2A.")⁴. Les dessins "FIG.3B." et "FIG.3A." au bas de la même figure proposent un marquage pouvant remplacer les flèches, avec pour avantage de faire ressortir certains motifs comme le montre la figure 3.4.

On note que certains motifs sont des pentagones, ou plus généralement ont une symétrie rotationnelle d'ordre 5. En réalité, on peut même trouver des motifs arbitrairement grands ayant une telle symétrie, et même parfois des pavages entiers : il y a exactement deux pavages "cerfs-volants et fléchettes" et deux pavages "rhombes" dont le groupe de symétrie est D_5 . Des deux pavages "cerfs-volants et fléchettes" concernés, l'un a en son centre un *soleil* (*sun*) constitué de cinq cerfs-volants et l'autre une *étoile* (*star*) composée de cinq fléchettes (voir figure 3.11). D'autres pavages de Penrose ont pour groupe de symétrie D_1 mais tous sont apériodiques. Avec le même raisonnement que pour la proposition 3.1, on peut en effet montrer la proposition suivante :

PROPOSITION 3.1.2 – *Avec les règles d'assemblage données, les deux tuiles A forment un ensemble de prototiles apériodique. Il en va de même pour les tuiles B, ainsi que pour les ensembles P2 et P3.*

Une autre façon de montrer l'apériodicité vient de l'équation 3.3.5 que nous voyons plus loin : dans chacun de ces pavages, le rapport du nombre de cerfs-volants sur le nombre de fléchettes dans un pavage fait de *kites and darts*, de même que le rapport du nombre de rhombes larges sur le nombre de rhombes fins, est égal au rapport de deux nombres consécutifs de la suite de Fibonacci (le plus grand sur le plus petit), qui tend vers φ ; or dans un pavage périodique ce rapport tendrait nécessairement vers un nombre rationnel, ce qui prouve l'apériodicité.

4. Les conditions d'assemblage sont symbolisées de manière différente mais sont exactement les mêmes.

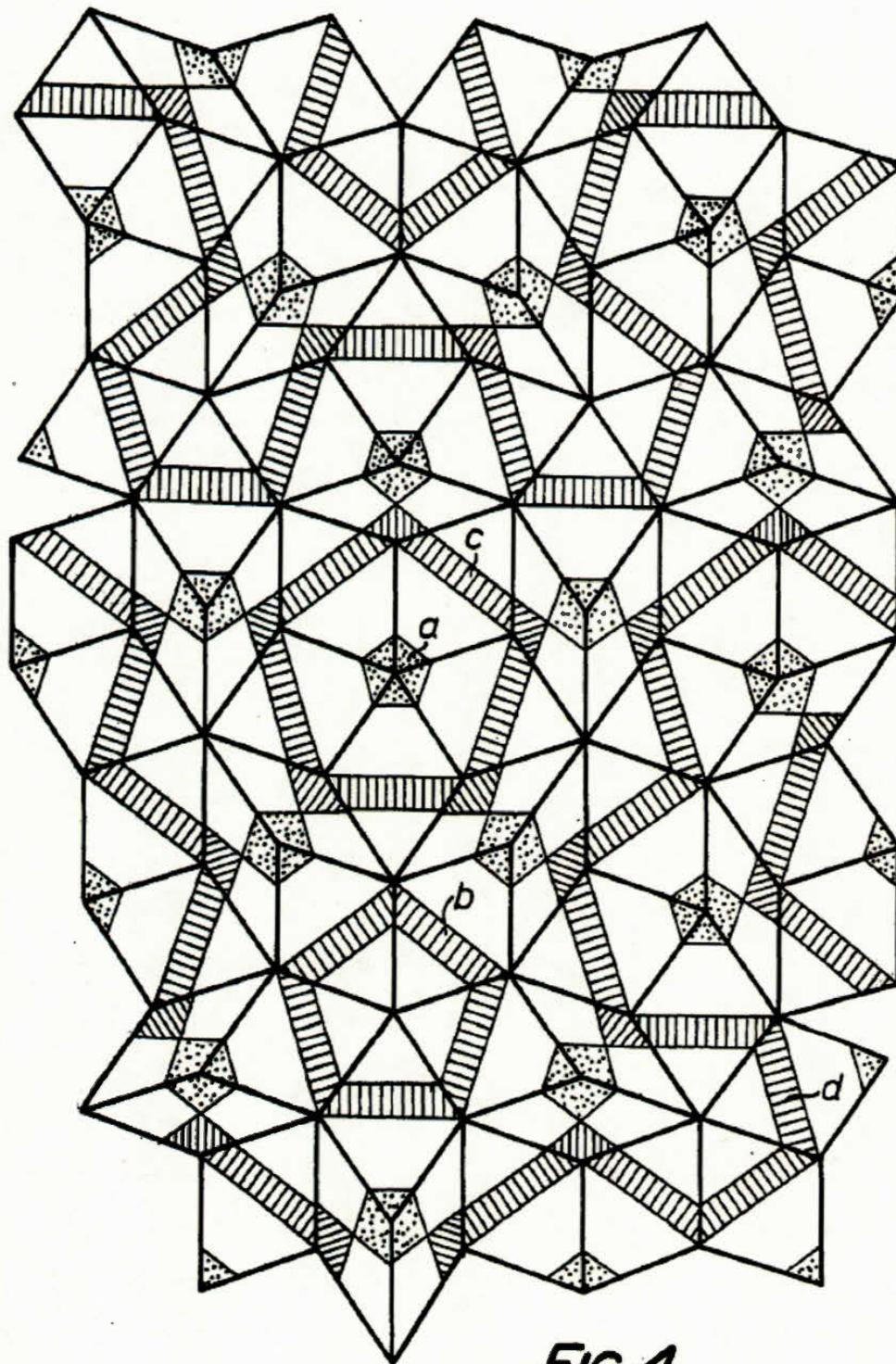
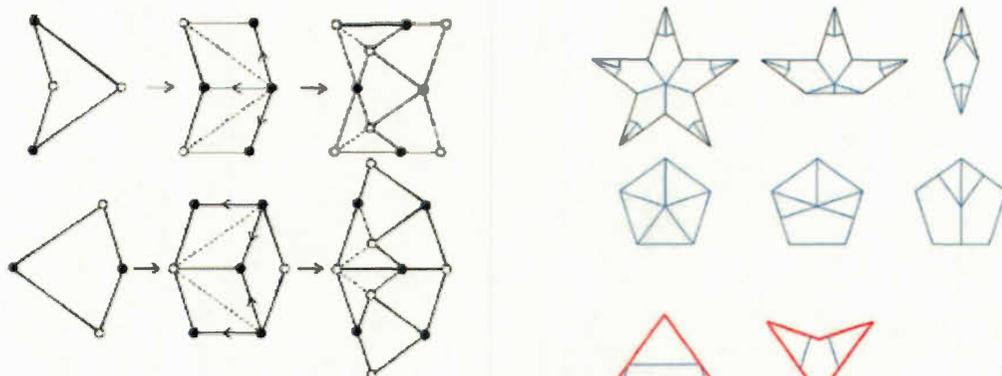
**FIG.4.**

Figure 3.4: Pavage par des losanges de Penrose avec marquage.
– Image extraite de l'article "Set of tiles for covering a surface" (Penrose, 1979).



(a) Décompositions permettant de passer de P2 à P3 puis de P3 à P2.
 – Image extraite du livre *Tilings and patterns* (Grünbaum et Shephard, 1987)

(b) Marquages permettant de passer de P1 à P2, et de P2 à P1.
 – Image de Graham Shawcross

Figure 3.5: Liens entre les différents pavages de Penrose.

Tout comme des processus de composition et décomposition lient les tuiles A aux tuiles B , on peut décomposer chaque tuile de P2 en tuiles B puis compléter avec les symétriques des triangles pour obtenir des tuiles de P3. De même, les losanges de P3 sont composés de tuiles A que l'on peut compléter avec le symétrique de chaque tuile L_A pour former des cerfs-volants et fléchettes. Ces processus sont montrés à la figure 3.5a. Outre ce lien entre P2 et P3, un marquage approprié permet d'obtenir un pavage P2 à partir d'un pavage P1, de même que pour l'inverse. Les tuiles marquées sont celles de la figure 3.5b. Notons que le marquage seul n'est pas suffisant : les arêtes et sommets de P1 doivent être supprimés afin de voir P2, et réciproquement. On dit alors que P2 est obtenu par *recomposition* à partir de P1 : on décompose P1 en tuiles plus petites selon un marquage des prototiles puis on compose selon des règles d'assemblage différentes de celles qui mèneraient de nouveau à P1.

Comme nous l'avons mentionné plus haut, les marquages menant à des conditions d'assemblage équivalentes aux flèches et aux sommets colorés ont pour avantage de

faire ressortir les symétries des tuiles et/ou du pavage. Il est notamment courant d'utiliser le marquage fait de courbes de la figure 3.6 pour les tuiles de P2, et un marquage comme celui de la figure 3.4 pour P3. On note alors la propriété suivante :

PROPOSITION 3.1.3 – *Quand les tuiles sont marquées telles que décrites ci-dessus, toute courbe ou bande fermée a pour groupe de symétrie D_5 . De plus, dans chaque pavage au plus deux courbes ou bandes de chaque couleur ne sont pas fermées et le patch de tuile à l'intérieur de chaque courbe ou bande fermée a aussi pour groupe de symétrie D_5 .*

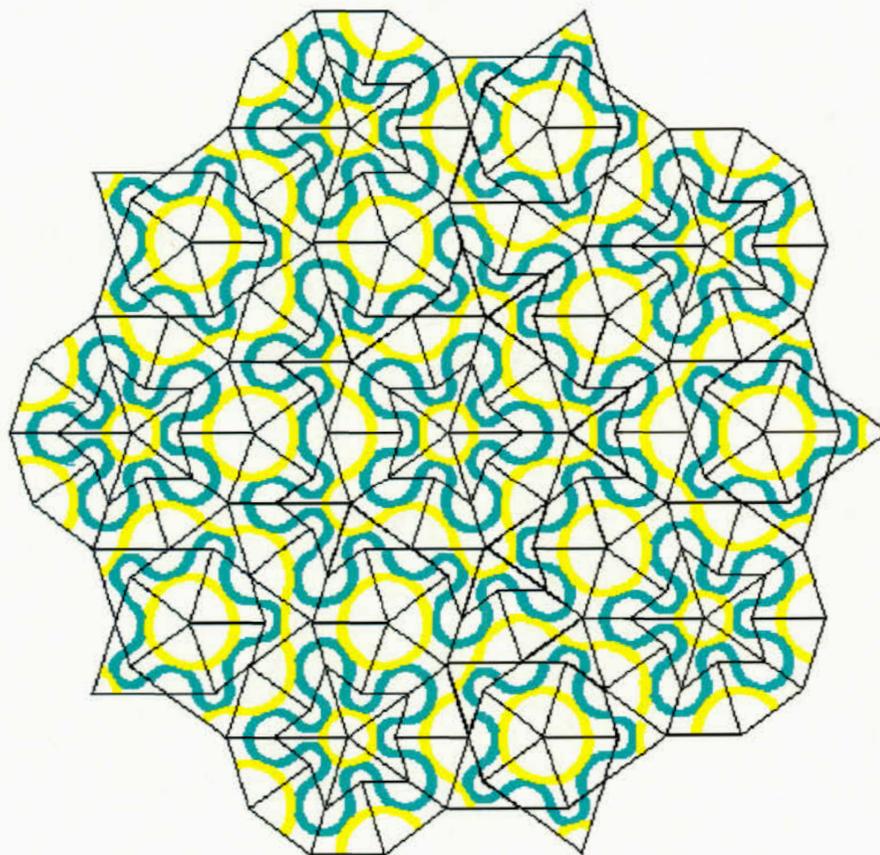


Figure 3.6: Pavage par des “cerfs-volants et fléchettes” de Penrose avec un marquage proposé par John Conway. – Image extraite du site de Steve Edwards.

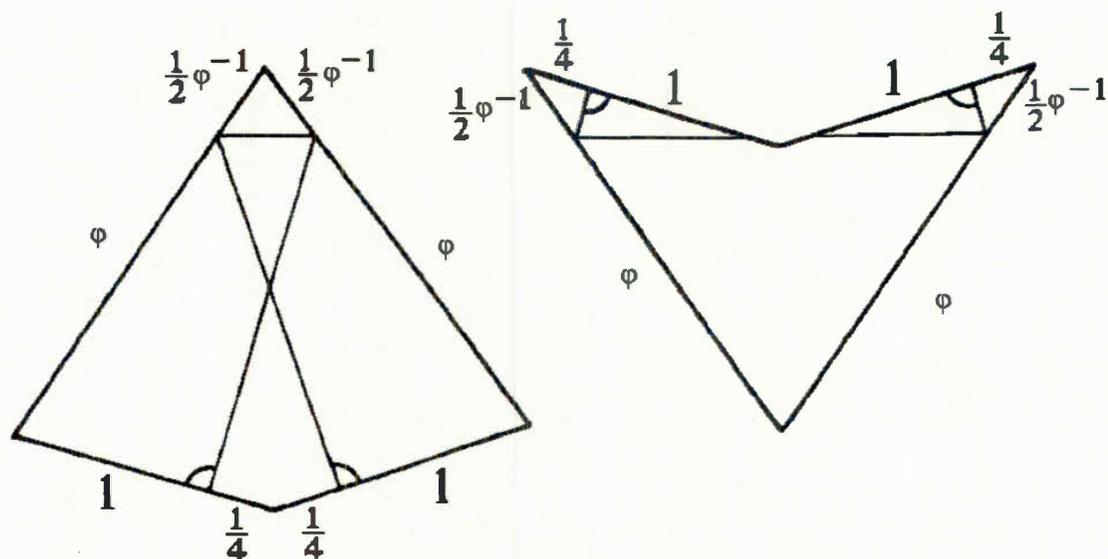


Figure 3.7: Barres d'Ammann sur les “cerfs-volants et fléchettes” de Penrose. Tel que précédemment, $\varphi = (1 + \sqrt{5})/2$ désigne le nombre d'or.
 – Image extraite du site de Steve Edwards.

Enfin, il est aussi possible de marquer les tuiles, avec des règles d'assemblage équivalentes, de sorte à obtenir des droites traversant les arêtes : les *barres d'Ammann* (*Ammann bars*). Alors qu'il peut être difficile d'assembler les tuiles “à la main” de façon à paver le plan entier sans créer régulièrement de situations non valides, le marquage décrit à la figure 3.7 pour les tuiles de P2 nous assure de ne pas faire d'erreur : on doit créer des lignes droites ininterrompues dans trois directions⁵. Les barres d'Ammann méritent une section (3.4) car leurs implications sont nombreuses et particulièrement utiles au présent travail.

5. Il existe un équivalent pour P3 mais dans la suite nous nous concentrons principalement sur P2.

3.2 Génération de pavages de Penrose

3.2.1 Avec des losanges de Penrose

On utilise la décomposition triangulaire décrite précédemment (figure 3.3), dans un processus d'inflation, pour générer *par substitution* des *patches* de tuiles de plus en plus grands, virtuellement jusqu'à paver tout le plan. En raison de leurs proportions de $\varphi : 1$, faisant intervenir le nombre d'or, les tuiles obtenues sont appelées *triangles d'or* ; on distingue le triangle d'or aigu (TA , isomorphe à L_A) du triangle d'or obtus (TO , isomorphe à S_A), indépendamment de la phase dans laquelle on se trouve (A , B ou $\varphi A'$ par exemple). Rappelons que tous les angles sont des multiples de $\pi/5$ et notons que $\varphi = \cos(2\pi/5)$.

Pour générer par inflations successives un pavage avec des losanges de Penrose, on part d'un petit *patch* de tuiles (pouvant se limiter à une seule tuile) et on découpe chaque losange en deux : un losange étroit coupé selon sa petite diagonale donne deux triangles d'or aigus, et un losange large coupé selon sa grande diagonale donne deux triangles d'or obtus. La figure 3.8 montre la décomposition de chaque triangle ainsi obtenu, avant agrandissement de rapport $\varphi : 1$. Chacun des triangles a un angle marqué permettant de lui donner un sens (outre les noms des sommets, qui varient au cours du processus) et on ne marque pas les côtés de sommets qui sont (ou sont destinés à être) à l'intérieur des losanges. À chaque inflation, on obtient un nouveau *patch* d'un pavage "rhombes".

Le code complet permettant de réaliser ce processus en *SageMath* se trouve à l'annexe B.1. On définit d'abord le nombre d'or (ϕ), les deux triangles de base (TA et TO), un pavage de base dans `base_tiling` (choisi arbitrairement, ici un losange large), puis une fonction `plot_triangle` permettant d'afficher un triangle avec l'apparence voulue. On définit ensuite une fonction `subdivise` qui décompose

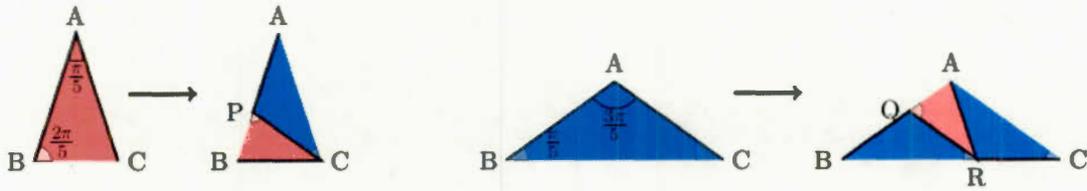


Figure 3.8: Décomposition des triangles d'or permettant de générer par inflation un pavage de type P3 (“rhombes”). – Image du tutoriel SageMath de Thierry Monteil.

chaque triangle comme dans la figure 3.8, qu'on utilise ensuite dans une fonction `iteration` permettant d'effectuer n décompositions successives de toutes les tuiles d'un ensemble donné⁶. Enfin, la fonction `plot_tiling` permet d'afficher le résultat. En prenant comme *patch* de départ un losange large, après 6 inflations successives on obtient la figure 3.9.

3.2.2 Avec des cerfs-volants et fléchettes

Pour les cerfs-volants et fléchettes, comme le suggère la figure 3.5a vue plus haut, si l'on veut passer directement de P2 à P2 sans passer par P3, il n'est pas nécessaire de tout décomposer en triangles puisque les nouveaux cerfs-volants restent entièrement dans les tuiles de départ. Par ailleurs, comme on sait que chaque demi-fléchette (triangle obtus) donnera une fléchette, on peut simplement dessiner les fléchettes entières puis supprimer les doublons. La “décomposition” (qui n'en est plus exactement une) se fait donc comme indiqué à la figure 3.10. Ce choix est justifié par le fait que nous avons besoin de tuiles entières dans la suite (chapitre 5), et pas seulement d'une apparence de pavage “cerfs-volants et fléchettes”. Il en résulte que la forme de la figure obtenue après un nombre fini d'inflations n'est

6. Notons que nous omettons la phase d'homothétie puisque le pavage est insensible aux changements d'échelle, que le but n'est pas ici d'effectivement paver le plan et que les images peuvent être redimensionnées au besoin.

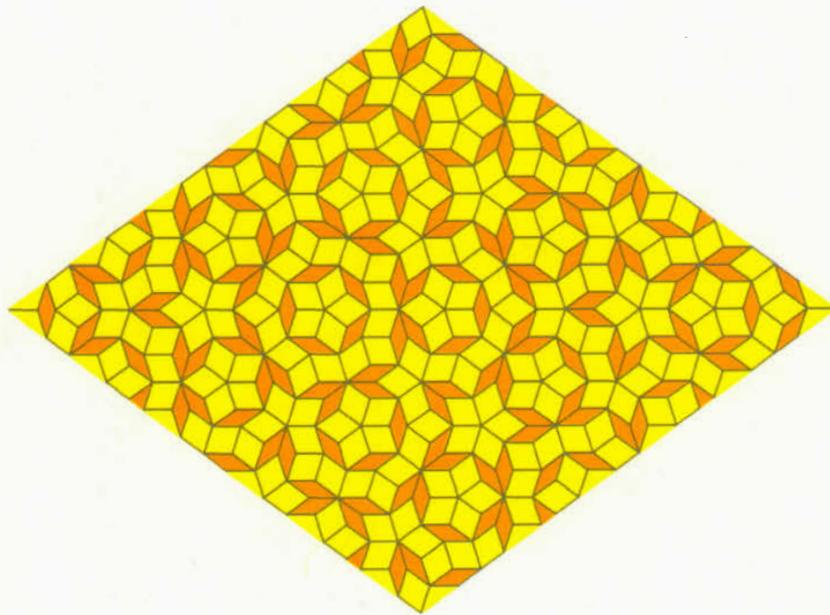


Figure 3.9: Extrait de pavage de Penrose obtenu à partir d'un losange large après 6 inflations.

pas la même que la forme du *patch* de départ, comme on peut le constater à la figure 3.11⁷.

3.2.3 Autres méthodes de génération des pavages de Penrose

La génération de pavages de Penrose par substitution (inflation) que nous venons de décrire est la première méthode à avoir été proposée, dès l'article fondateur de Roger Penrose (1974). Une autre méthode, par projection, a été trouvée quelques années plus tard par de Bruijn (1981) : il s'agit de projeter une grille régulière d'un espace à cinq dimensions sur un plan de pente irrationnelle. Cette méthode peut être très intéressante pour certains sujets d'études, d'où sa popularité, mais

7. Dans cette figure, l'échelle n'a pas été respectée, afin que les motifs de base ne soient pas trop petits, ni les motifs inflatés trop grands.

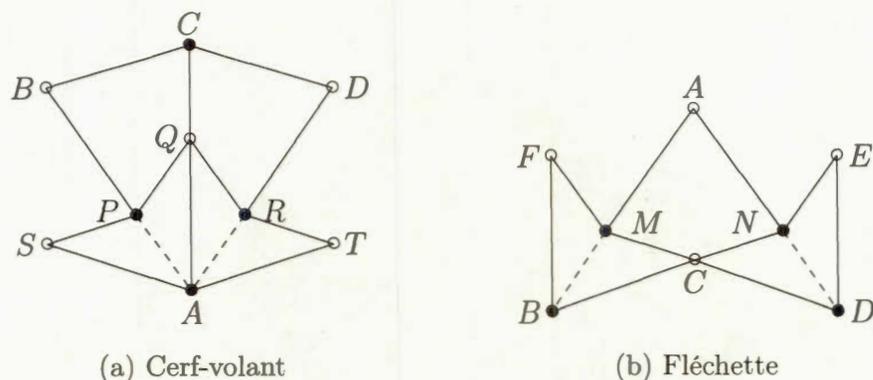


Figure 3.10: Décomposition des cerfs-volants et fléchettes.

ne présente pas d'avantage particulier ici.

D'autres méthodes, géométriques, ont été proposées notamment par Ramachandrarao *et al.* (1991); Sinha et Kande (2006); Sinha et Modi (2014), mettant en évidence un "quasi-treillis" et des conditions de parité. Les articles en question ne parlent cependant que du motif "rhombes" de Penrose.

3.3 Propriétés des pavages "cerfs-volants et fléchettes"

Comme on peut passer de l'un à l'autre par composition, pour toute propriété d'un pavage de type P2 il existe une propriété équivalente pour le type P3. Cependant, ces analogues demandent parfois un certain travail et il est donc préférable pour la suite de se concentrer sur un seul type de pavages. Le choix se porte ici sur ceux constitués de cerfs-volants et fléchettes (prototyles de P2), en partie parce que les propriétés dont nous avons besoin sont déjà regroupées dans l'ouvrage de Grünbaum et Shephard (1987), et aussi car la présence de tuiles non convexes fascine !

Un pavage particulier, le *pavage roue* (*Cartwheel tiling*) montré à la figure 3.12, permet à lui seul d'observer bien des propriétés intéressantes. On le construit de

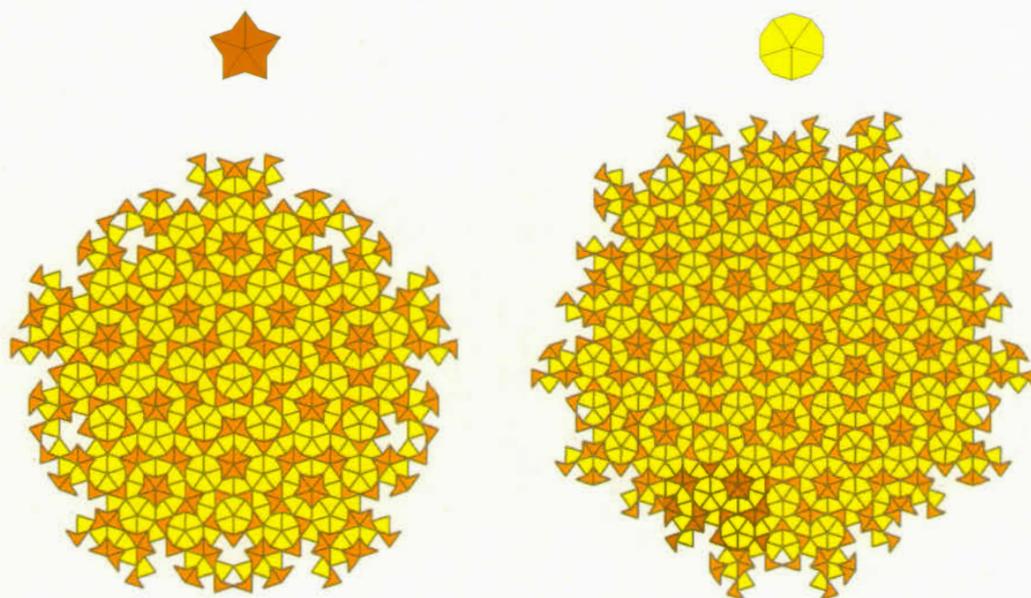


Figure 3.11: Extraits de pavage obtenus à partir de deux motifs *kites and darts* simples (l'*étoile* et le *soleil* en haut) après 5 inflations. On peut noter que les pavages obtenus à partir de ces motifs sont duaux, dans le sens où les inflations successives voient alterner *soleil* et *étoile* au centre, de sorte qu'avec un nombre impair d'inflations on a un *soleil* (respectivement une *étoile*) au centre du motif obtenu à partir d'une *étoile* (resp. d'un *soleil*). En poursuivant les inflations à l'infini, on obtient les deux pavages *kites and darts* ayant pour groupe de symétrie D_5 .

la façon suivante : un *as* (*ace*), composé de deux cerfs-volants et d'une fléchette, sert de point de départ et constitue un *patch* C_0 (au centre) ; après une inflation et une rotation de 180° , on obtient le *patch* C_1 , surnommé *Batman*, composé de l'*as* central et des sept tuiles qui l'entourent (délimité en gras) ; on répète ce processus pour obtenir des *patches* successifs C_2, C_3, \dots , délimités par les lignes en gras et de plus en plus étendus. Le décagone C_2 est alors appelé *roue du premier ordre*, C_4 est la *roue du second ordre* et plus généralement C_{2n} est appelé *roue d'ordre n*.

Chaque *patch* C_i a pour groupe de symétrie D_1 mais l'union des tuiles de chaque roue (pas la roue C_{2i} elle-même) est un polygone ayant pour groupe de symétrie

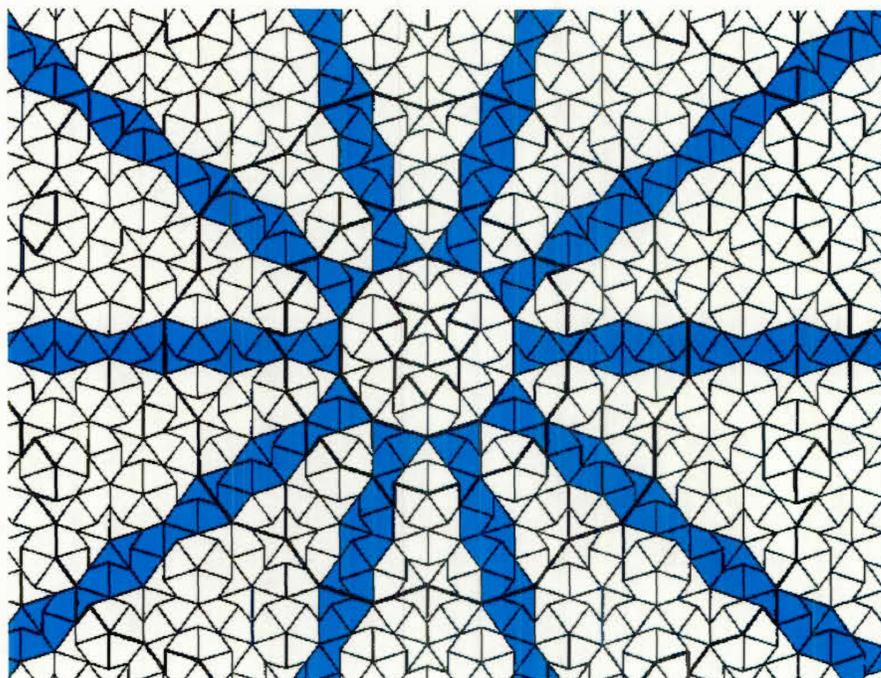


Figure 3.12: Pavage roue (*Cartwheel tiling*) et *Conway worms*.
– Image extraite du site de Steve Edwards.

D_5 . Par ailleurs, pour tout $n > 1$, la roue C_{2n} contient son prédécesseur $C_{2(n-1)}$ et a le même centre. On appelle *limite d'inclusion des roues* le pavage contenant toutes les roues C_{2n} ($n \geq 0$), centrées en un point fixe du plan.

À l'exception de l'as central et des quatre fléchettes qui lui sont adjacentes dans la figure 3.12, toute tuile du pavage roue est contenue dans un *patch* D_5 , c'est-à-dire un *patch* dont le groupe de symétrie est D_5 , comme par exemple celui de la figure 3.11 vue plus haut, qui contient (entre autres) celui de la figure 3.13, contenant lui-même plusieurs *patches* D_5 . L'étude du pavage roue permet notamment d'arriver à la propriété suivante :

PROPOSITION 3.3.1 – *Dans tout pavage "cerfs-volants et fléchettes", toute tuile T se trouve dans une roue C_{2n} pour tout entier $n \geq 1$.*

On appelle *voisinage de sommet* (*vertex neighborhood*) $\mathcal{N}(v)$ d'un sommet v dans

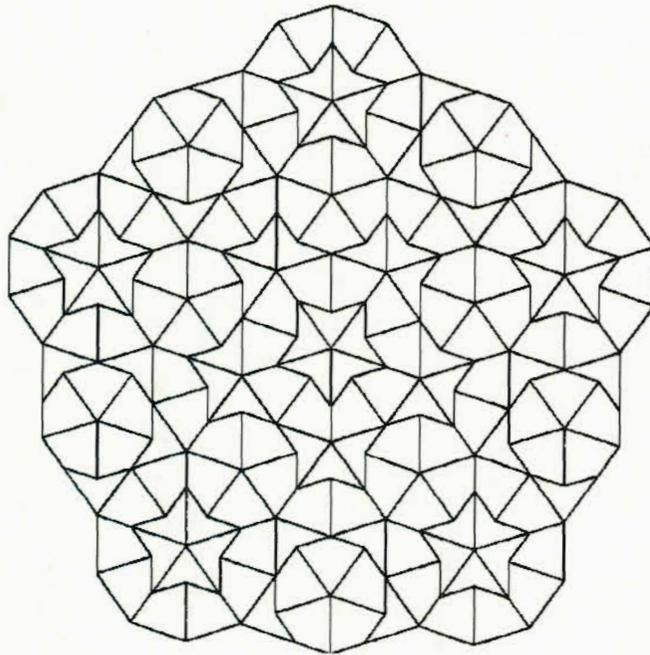


Figure 3.13: *Patch* dont le groupe de symétrie est D_5 .
– Image extraite du site de Steve Edwards.

un pavage \mathcal{T} un *patch* minimal de tuiles entourant complètement v . En utilisant des tuiles de P2, il y a exactement sept voisinages de sommets, c'est-à-dire sept façons valides d'assembler des tuiles autour d'un sommet. Ces configurations, montrées à la figure 3.14, apparaissent chacune une infinité de fois dans chaque pavage fait de cerfs-volants et fléchettes de Penrose.

En réalité, on peut même aller plus loin que la simple répétition des voisinages de sommets : on retrouve en effet dans les pavages de Penrose la propriété d'isomor-

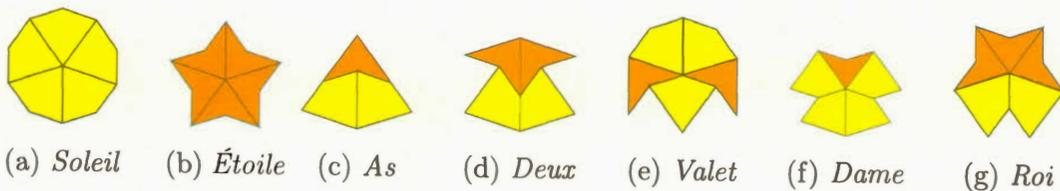


Figure 3.14: Les sept voisinages de sommets d'un pavage "cerfs-volants et fléchettes".

phisme local énoncée dans la proposition 3.3.2.

PROPOSITION 3.3.2 (ISOMORPHISME LOCAL) – *Tout patch de tuiles d'un pavage avec des cerfs-volants et fléchettes de Penrose est congru à une infinité de patches dans tout pavage constitué des mêmes prototuiles.*

On peut même montrer que pour tout patch \mathcal{A} , la distance à parcourir dans le pavage pour trouver une copie de \mathcal{A} n'est jamais très grande. Conway a en effet trouvé une majoration de la distance entre deux copies par $d \frac{\varphi^3}{2}$ (soit environ $2,118 \cdot d$), puis ce résultat a été affiné : soit \mathcal{A} un patch de diamètre $d(\mathcal{A})$ et soit $p(\mathcal{A})$ la distance minimale entre deux copies de \mathcal{A} , alors $p(\mathcal{A}) \leq (\frac{1}{2} + \varphi) d(\mathcal{A})$. En se rappelant la définition donnée à la section 2.3, il s'ensuit la propriété suivante :

PROPOSITION 3.3.3 – *Tout pavage avec des cerfs-volants et fléchettes de Penrose est métriquement équilibré⁸.*

Précisons donc combien une unité d'aire du plan contient de cerfs-volants et fléchettes en moyenne, en commençant par compter les triangles d'or. Notons kL_A et kS_A les tuiles obtenues en agrandissant les tuiles A (respectivement L_A and S_A) par une homothétie de rapport k . Alors d'après la figure 3.8 on a $\varphi L_A = 2L_A + S_A$ et $\varphi S_A = L_A + S_A$, dans le sens où d'une part chaque tuile φL_A est composée de deux tuiles L_A et d'une tuile S_A , et d'autre part φS_A est composée d'une tuile L_A et une tuile S_A . Par conséquent, $\varphi^2 L_A = 5L_A + 3S_A$ et $\varphi^2 S_A = 3L_A + 2S_A$, puis par induction pour tout $n \geq 1$,

$$\begin{aligned}\varphi^n L_A &= f_{2n+1} L_A + f_{2n} S_A \\ \varphi^n S_A &= f_{2n} L_A + f_{2n-1} S_A\end{aligned}\tag{3.3.4}$$

8. La définition de "métriquement équilibré" a été donnée à la section 2.3.

où f_n est le $n^{\text{ème}}$ terme de la suite de Fibonacci, définie par $f_0 = 0$, $f_1 = 1$ et $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n \quad \forall n \geq 0$. On sait notamment que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_{n+1}}{f_n} = \varphi$, et que la convergence est très rapide.

Soit S une région du plan couverte exactement (sans trou ni débordement) par des copies des tuiles $\varphi^n L_A$ et $\varphi^n S_A$ d'un pavage par des tuiles $\varphi^n A$. Alors si $\rho(S)$ est le ratio du nombre de tuiles A larges sur le nombre de tuiles A petites dans une telle région, les équations 3.3.4 donnent

$$\frac{f_{2n}}{f_{2n-1}} \leq \rho(S) \leq \frac{f_{2n+1}}{f_{2n}} \quad (3.3.5)$$

Maintenant, en notant K un cerf-volant et D une fléchette (dans le même sens que L_A pour une tuile A large par exemple) et en adaptant les notations pour l'inflation, la figure 3.5a nous donne $\varphi K = 2 \cdot K + 2 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot D\right) = 2K + D$ et $\varphi D = K + 2 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot D\right) = K + D$, soit les mêmes relations que pour les triangles. Par conséquent, on obtient par induction

$$\begin{aligned} \varphi^n K &= f_{2n+1}K + f_{2n}D \\ \varphi^n D &= f_{2n}K + f_{2n-1}D \end{aligned} \quad (3.3.6)$$

et par suite, pour une région S couverte exactement par des cerfs-volants et fléchettes, si $\rho(S)$ est le ratio du nombre de cerfs-volants sur le nombre de fléchettes dans S , alors l'équation 3.3.5 est encore valable.

La figure 3.15 montre deux petits *patches* particuliers des pavages "cerfs-volants et fléchettes", appelés *nœuds papillons court* et *long* (*short* et *long bow ties*), ainsi que les *patches* obtenus après une inflation de ces nœuds papillons. On appelle *Conway worm* une séquence de nœuds papillons placés bout à bout.

Le pavage roue contient dix *worms* semi-infinis, en bleu sur la figure 3.12, par-

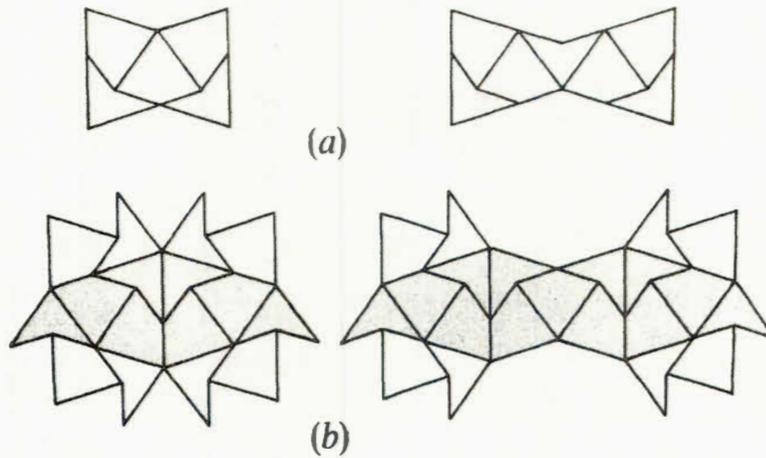


Figure 3.15: Nœuds papillons (*bow ties*) et leur inflation.
 – Image extraite de l'ouvrage de Grünbaum et Shephard (2016).

tant de chaque côté du décagone central C_2 (roue du premier ordre). Comme on peut le voir, deux paires d'entre eux se rejoignent au centre de sorte que deux *worms* infinis sont formés et se croisent, avec pour intersection l'as central C_0 . La proposition 3.3.2 (isomorphisme local) nous permet donc d'affirmer la proposition suivante :

PROPOSITION 3.3.7 – *Tout pavage "cerfs-volants et fléchettes" contient des worms finis arbitrairement longs.*

Notons que seul le pavage roue contient deux *worms* infinis qui se croisent. Un *worm* W_1 ne peut se terminer qu'en croisant un ensemble \mathcal{W} de *worms* (pouvant ne contenir qu'un seul *worm*), et dans ce cas un autre *worm* W_2 (une "continuation" de W_1) commence de l'autre côté de \mathcal{W} . Quand deux *worms* se croisent à 72° , ils ne peuvent le faire que de deux manières, montrées à la figure 3.16.

Les *suites d'indices* (*index sequences*) sont une façon de numériser les tuiles d'un pavage afin de pouvoir mieux en étudier les propriétés algébriques et combinatoires. Nous donnons ici la façon dont ces suites sont définies dans un pavage

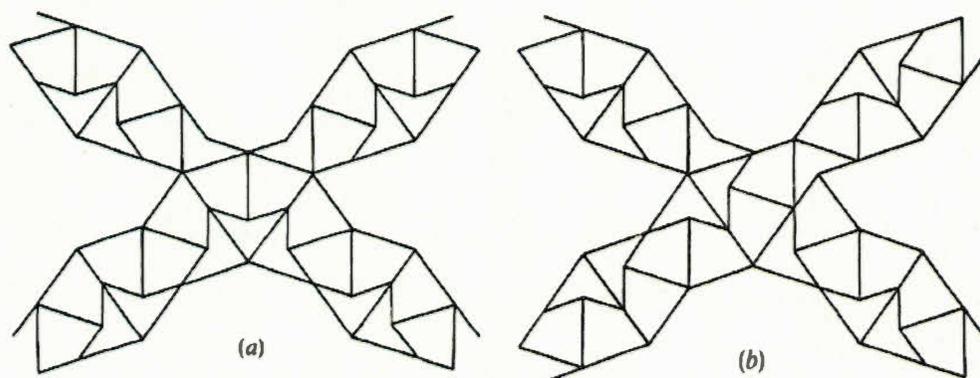


Figure 3.16: Croisements de *Conway worms* : deux *worms* ne peuvent se croiser sans s'interrompre que des deux façons ci-dessus.

– Image extraite de l'ouvrage de Grünbaum et Shephard (2016).

“cerfs-volants et fléchettes”⁹.

Notre point de départ est un pavage “cerfs-volants et fléchettes” \mathcal{T} , et on appelle \mathcal{T}_A le pavage de tuiles A correspondant. Des compositions successives mènent à un pavage \mathcal{T}_B de tuiles B , puis un pavage $\mathcal{T}_{\varphi A'}$ de tuiles $\varphi A'$, puis des pavages $\mathcal{T}_{\varphi B'}$, etc. Pour tout point P qui ne se trouve pas sur une arête du pavage \mathcal{T}_A , la suite d'indices $i(\mathcal{T}, P)$ est une suite infinie $(x_0, x_1, x_2, \dots) \in \{0, 1\}^*$ telle que $x_0 = 1$ ou 0 selon que P est dans une tuile L_A ou S_A , $x_1 = 1$ ou 0 selon que P est dans une tuile L_b ou S_b ; $x_2 = 1$ ou 0 selon que P est dans une tuile $L_{\varphi A'}$ ou $S_{\varphi A'}$, etc. On remarque que dans une suite d'indices on ne peut pas avoir deux 1 consécutifs et on peut noter le résultat suivant :

PROPOSITION 3.3.8 – *Toute suite infinie dont les termes sont dans $\{0, 1\}$ et qui ne contient pas deux termes consécutifs égaux à 1 est la suite d'indices $i(\mathcal{T}, P)$ d'un point P dans un pavage \mathcal{T} de cerfs-volants et fléchettes.*

Pour le démontrer, il suffit de voir que la suite donne simplement des instructions

9. On peut aussi construire des suites d'indices pour les autres pavages de Penrose, ainsi que pour les pavages de Robinson, d'Ammann et bien d'autres.

sur la façon de construire le pavage, par compositions successives à partir d'une tuile. Il découle de cette proposition que si σ est une symétrie du pavage \mathcal{T} , alors les suites d'indices $i(\mathcal{T}, P)$ et $i(\mathcal{T}, \sigma P)$ sont identiques. Réciproquement, si les suites d'indices $i(\mathcal{T}, P)$ et $i(\mathcal{T}', P')$ sont identiques, alors $\mathcal{T} = \mathcal{T}'$ et soit P est dans la même tuile A que P' , soit il est l'image d'un tel point par σ . En outre, en constatant que deux points d'un même pavage se trouveront nécessairement dans un même *patch* de tuiles $\varphi^n A$ pour un certain n puis que le reste du pavage se poursuivra de la même manière pour les deux, on montre le résultat suivant :

PROPOSITION 3.3.9 – *Pour tous points P_1, P_2 dans un même pavage \mathcal{T} , les suites d'indices $i(\mathcal{T}, P_1)$ et $i(\mathcal{T}, P_2)$ diffèrent seulement en un nombre fini de termes. Réciproquement, si deux suites d'indices diffèrent seulement en un nombre fini de termes, alors elles correspondent à deux points d'un même pavage.*

Comme il existe une infinité de suites définies sur l'alphabet $\{0, 1\}$ et qui ne contiennent pas deux 1 consécutifs, on peut déduire des propositions 3.3.8 et 3.3.9 l'un des résultats les plus importants concernant les pavages de Penrose :

PROPOSITION 3.3.10 – *Il existe une infinité de pavages distincts constitués de cerfs-volants et fléchettes de Penrose.*

Finissons par quelques exemples notables de pavages que l'on peut distinguer dans cette infinité. Un pavage "cerfs-volants et fléchettes" a pour groupe de symétrie D_5 avec un soleil en son centre si et seulement si la suite d'indices de tout point de ce pavage est égale à $(0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, \dots)$ à partir d'un certain rang. Si son groupe de symétrie est D_5 mais avec une étoile au centre, alors la suite d'indices de tout point sera égale à $(1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, \dots)$ à partir d'un certain rang. Enfin un pavage est le pavage roue si et seulement si la suite d'indices de tout point ne contient qu'un nombre fini de 1, c'est-à-dire si à partir d'un certain rang elle est égale à $(0, 0, 0, 0, 0, \dots)$.

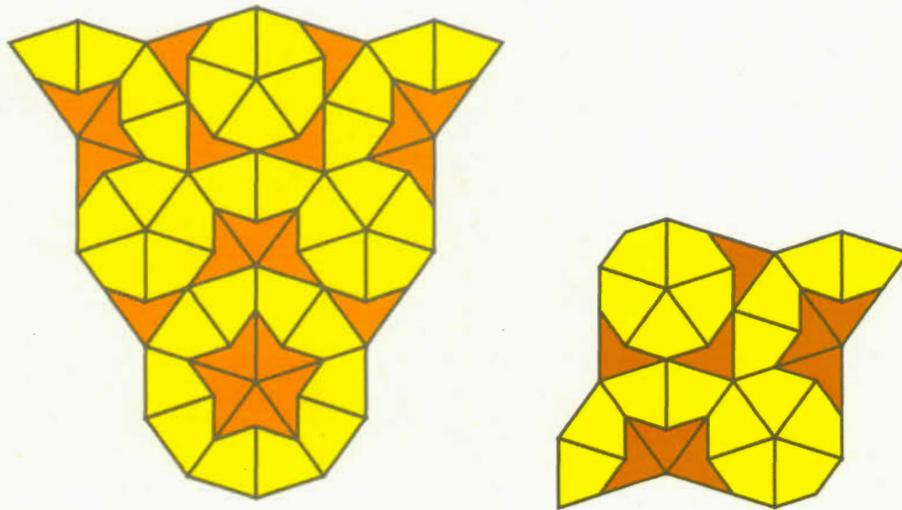


Figure 3.17: Centres des empires du *roi* et de la *reine*.

3.4 Barres d'Ammann et suites musicales

Dans certains cas, la suite du pavage autour d'un sommet est *forcée* jusqu'à un certain point, dans le sens où il y a une seule façon de poursuivre sans créer de *trou* (*hole*). Cette question a notamment été étudiée par Conway, qui décrit ainsi des *empires* : un *empire* est un ensemble de tuiles forcées par un certain *patch* de départ. Les plus notables sont ceux constitués autour des voisinages de sommets décrits plus haut. Ces empires contiennent non seulement un *patch* (connexe) autour du sommet considéré mais aussi une infinité d'autres *patches*, plus ou moins étendus, dispersés dans l'ensemble du pavage. La figure 3.17 montre les *patches* centraux des empires du *roi* et de la *reine*.

En fait, des trous sont obtenus dès qu'on assemble des tuiles de sorte qu'une barre d'Ammann est interrompue au lieu de se poursuivre en une droite infinie. La question des trous n'est pas développée ici car éloignée des propriétés dont on a besoin. Ce qui nous intéresse en revanche, c'est que fixer les barres d'Ammann

dans seulement deux directions (sur cinq) suffit à déterminer presque entièrement les autres barres : au plus une barre dans chacune de ces trois directions n'est pas déterminée, et celle-ci suit un *worm* qui peut être remplacé par son symétrique.

Par ailleurs, quand on se concentre sur un ensemble de barres parallèles, la distance entre deux barres voisines ne peut prendre que deux valeurs différentes : des intervalles long (L) et court (S), le premier étant φ fois plus long que le second. On ne peut pas avoir deux S de suite, ni trois L . Toute suite de S et L obtenue à partir des barres d'Ammann dans un pavage "cerfs-volants et fléchettes" est appelée *suite musicale* (*musical sequence*)¹⁰.

Quand on compose un pavage, on obtient de nouvelles barres d'Ammann. En notant L' et S' les intervalles correspondants, on peut écrire

$$L' = (\frac{1}{2}L, S, \frac{1}{2}L) \quad \text{et} \quad S' = (\frac{1}{2}L, \frac{1}{2}L) \quad (3.4.1)$$

pour symboliser le lien entre les intervalles L et S d'une part, et les intervalles L' and S' d'autre part. La suite d'intervalles L' et S' est obtenue en *composant* la suite d'intervalles L et S , comme on le fait avec les pavages mais ici en dimension 1. La *décomposition* des suites étant définie de façon similaire, on observe l'analogie du résultat concernant la (dé)composition d'un pavage de Penrose :

PROPOSITION 3.4.2 – *Si l'on compose ou décompose une suite musicale, on obtient une suite musicale.*

De manière générale, on observe les mêmes propriétés que pour les pavages de Penrose, si ce n'est que la dimension est réduite. En particulier,

PROPOSITION 3.4.3 – *Toute suite musicale est non périodique, c'est-à-dire qu'on*

10. Les noms choisis par John Conway sont vraiment plaisants, vous ne trouvez pas ?

ne peut pas l'écrire comme un nombre infini de répétitions d'un bloc fini de termes.

PROPOSITION 3.4.4 (ISOMORPHISME LOCAL) – *Tout bloc fini de termes consécutifs dans n'importe quelle suite musicale est répété une infinité de fois dans toute suite musicale.*

Ces résultats se démontrent de façon analogue à ce qui a été fait pour Penrose, et le lien entre suites musicales et barres d'Ammann mène au résultat suivant :

PROPOSITION 3.4.5 – *Soient deux ensembles de barres d'Ammann parallèles (correspondant donc à deux suites musicales) formant un angle de 36° ou 72° entre elles, alors il existe un pavage "cerfs-volants et fléchettes" correspondant.*

Pour déterminer si un bloc fini de termes (L et S) appartient à une suite musicale, on utilise le fait que la composition ou la décomposition d'une suite musicale doit donner une suite musicale. La composition consiste à réduire la longueur du bloc, selon les règles suivantes : on remplace S par L , LL par S et L (seul) par la chaîne vide. Considérant que le pavage roue est construit par inflations successives à partir d'un as, et que l'as correspond au bloc LS , en utilisant les substitutions données à l'équation 3.4.1 pour des inflations successives de la suite, on obtient :

$$\begin{aligned}
 &L.S \\
 &LS.LL \\
 &LSLL.SLSL \\
 &LSLLSLS.LLSLLSL \\
 &LSLLSLSLLSLL.SLSLLSLSLLSL
 \end{aligned}
 \tag{3.4.6}$$

.....

Si l'on omet les intervalles (L ou S) adjacents au point central, on voit que chaque

bloc est symétrique par rapport à ce point. En outre, on observe une alternance, de ligne en ligne, entre $L.S$ et $S.L$ au centre et pour tout $n \geq 1$, le $(n+2)^{\text{ème}}$ bloc contient le $n^{\text{ème}}$ bloc en son centre. Cette suite particulière a été nommée *middle-C sequence* par Conway. Cette suite peut être générée de la façon suivante : pour tout entier n dans un intervalle de \mathbb{Z} , on calcule $\lfloor \varphi n \rfloor$; on calcule ensuite les différences $\lfloor \varphi(n+1) \rfloor - \lfloor \varphi n \rfloor$ et enfin on remplace les 1 par S et les 2 par L . Si l'intervalle est centré en 0, alors on obtient la *middle-C sequence*, sinon on obtient une autre suite musicale. Il existe une méthode analogue pour l'inflation, avec φ^2 à la place de φ et des règles de substitution différentes. Une légère modification de cette méthode de génération suffit à obtenir n'importe quelle suite musicale :

PROPOSITION 3.4.7 – *Toute suite musicale peut être définie en différenciant la suite $\lfloor \varphi n + c \rfloor$ pour $n \in \mathbb{Z}$ puis en substituant les 1 et les 2 par S et L respectivement, c pouvant désigner n'importe quel nombre réel. Sans perte de généralité, il est toujours possible de choisir $0 \leq c < 1$.*

Une autre propriété que l'on retrouve est celle du rapport du nombre de L (les “tuiles” larges) sur le nombre de S (les “tuiles” fines) :

PROPOSITION 3.4.8 – *Supposons que dans un bloc de k termes consécutifs d'une suite musicale on compte x_k termes L et $k - x_k$ termes S . Alors*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{x_k}{k - x_k} = \varphi$$

ce qui est équivalent à

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{x_k}{k} = \frac{1}{\varphi}$$

Il se trouve que, en reprenant les mêmes notations, il y a peu de possibilités pour la valeur de x_k :

PROPOSITION 3.4.9 – Pour tout entier positif k , le nombre x_k d'intervalles L défini dans la proposition 3.4.8 ne peut prendre que deux valeurs : x et $x+1$ telles que

$$\frac{x}{k} < \frac{1}{\varphi} < \frac{x+1}{k}$$

Par conséquent, la longueur totale d'un bloc de k intervalles consécutifs (c'est-à-dire la somme des longueurs de ces intervalles) ne peut prendre que deux valeurs, que l'on peut noter $s(k)$ pour la plus petite et $\ell(k)$ pour la plus grande. Pour tout k il y a exactement $k+1$ blocs différents obtenus à partir de la *middle-C sequence* tels qu'au moins un intervalle (L ou S) soit adjacent au point central. Par exemple pour $k=4$ on a

LSLL.

SLL.S

LL.SL

L.SLS

.SLSL

à réflexion près. De manière générale, on note que le premier et le dernier de ces blocs correspondent aux longueurs $s(k)$ et $\ell(k)$, ou l'inverse.

Il s'ensuit que dans les pavages de Penrose, chaque fois qu'un *patch* de tuiles détermine au moins deux barres dans une direction donnée alors les autres barres sont nécessairement déterminées, et donc certaines tuiles sont forcées. C'est ainsi que l'on détermine les empires des sept voisinages de sommets. Alors que le deux (*deuce*) force uniquement des cerfs-volants alignés suivant une barre, les autres voisinages forcent des tuiles dans toutes les directions et l'empire du roi est assez dense, du moins quand on est assez proche du *patch* initial. Dans tous les cas, l'empire s'étend à l'infini. Chaque fois qu'une barre n'est pas déterminée, elle correspond à un *worm* qui peut être dans deux sens possibles.



CHAPITRE IV

SOUS-ARBRES INDUITS PLEINEMENT FEUILLUS

Maintenant que nous avons rappelé les notions de base de la théorie des graphes dont nous avons besoin, puis présenté les pavages, nous pouvons combiner ces deux domaines et nous pencher sur les problèmes plus spécifiques. L'objet de ce chapitre est donc de présenter le problème des sous-arbres induits pleinement feuillus (*fully leafed induced subtrees*, ou *FLIS*) et de faire un état de l'art de la question. La présente recherche, initiée en mars 2017, s'est d'abord basée sur des versions préliminaires des articles suivants, qui n'ont été publiés qu'en 2018 :

1. *Fully Leafed Tree-Like Polyominoes and Polycubes* (Blondin Massé *et al.*, 2018b), le premier à avoir été soumis, donne les "fonctions feuilles" pour les polyominos et polycubes et démontre l'optimalité,
2. *Fully leafed induced subtrees* (Blondin Massé *et al.*, 2018a) présente le problème général et regroupe les résultats ayant déjà été démontrés au moment de la soumission du texte pour publication,
3. *Saturated Fully Leafed Tree-Like Polyforms and Polycubes* (Blondin Massé *et al.*, 2018), complète le premier en donnant les "fonctions feuilles" aussi pour les polyformes des grilles hexagonale et triangulaire, puis se penche sur un sous-problème que nous n'abordons pas ici.

4.1 Présentation du problème

Pour cette section, nous nous référons à l'article général *Fully leafed induced subtrees* (Blondin Massé *et al.*, 2018a). Dans le premier chapitre, nous avons défini les sous-arbres induits d'un graphe : des sous-graphes induits qui sont des arbres, c'est-à-dire connexes et acycliques. Pour chacun des sous-arbres induits d'un même graphe G , on peut compter son nombre de feuilles (les sommets de degré 1). On peut alors considérer le problème *leafed induced subtree* (*LIS*) :

PROBLÈME 4.1.1 – LIS : *Étant donné un graphe simple G et deux entiers positifs i et ℓ , existe-t-il un sous-arbre induit de G contenant i sommets et ℓ feuilles ?*

À ce problème de décision, on peut associer un problème d'optimisation : parmi les sous-arbres induits d'ordre i (ayant i sommets), on s'intéresse alors à ceux qui ont le plus grand nombre de feuilles, et on note ce nombre $L_G(i)$. On obtient alors une fonction L_G définie sur \mathbb{N} (ou une partie de \mathbb{N}), correspondant au maximum du nombre de feuilles sur l'ensemble des sous-arbres induits d'ordre i ; L_G est appelée *fonction feuille* de G . Les sous-arbres induits qui réalisent ce maximum sont dits *pleinement feuillus*. Le problème *fully leafed induced subtree* (*FLIS*) se résume donc ainsi :

PROBLÈME 4.1.2 – FLIS : *Étant donné un graphe G d'ordre n ($n \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$), quel est le nombre maximal de feuilles, $L_G(i)$, que peut compter un sous-arbre induit de G contenant i sommets, pour $i \in \{1, 2, \dots, n\}$?*

Soient $G = (V, E)$ un graphe simple (fini ou infini), $u \in V$ et $U \subseteq V$. Comme au chapitre 1, $\Gamma_G(u)$ désigne l'ensemble des voisins de u dans G , et on définit par extension $\Gamma_G(U) = \{u' \in \Gamma_G(u) \mid u \in U\}$. Rappelons que le sous-graphe induit par U est $G[U] = (U, E \cap \mathcal{P}_2(U))$, où $\mathcal{P}_2(U)$ est l'ensemble de parties de

U de cardinalité 2. On considère également l'ensemble des sommets de U dont tous les voisins sont dans U : $Int(U) = \{u' \in U \mid \Gamma_G(u') \subseteq U\}$, et on note $\mathcal{T}_G(i)$ l'ensemble des sous-arbres induits d'ordre i de G . Enfin, pour un arbre T , on note $|T|_{\emptyset}$ son nombre de feuilles. Alors la *fonction feuille* de G est la fonction définie sur $\{1, 2, \dots, |G|\}$ par

$$L_G(i) = \max\{|T|_{\emptyset} : T \in \mathcal{T}_G(i)\}.$$

Un sous-arbre induit T de G d'ordre i est donc pleinement feuillu si $|T|_{\emptyset} = L_G(i)$. Suivant la convention habituelle, on pose $\max \emptyset = -\infty$.

La figure 4.1 montre un exemple de graphe G dans lequel un sous-arbre induit pleinement feuillu est représenté en vert. On observe que le sous-arbre induit par $U = \{a, b, d, e, f, g\}$ est le seul sous-arbre induit pleinement feuillu d'ordre 6 : parmi les sous-graphes induits d'ordre 6, seuls trois sont des arbres (les sous-graphes induits par $U' = \{a, b, d, e, f, h\}$, $U'' = \{a, b, d, e, g, h\}$ et U), et U a quatre feuilles, soit une de plus que chacun des autres. La fonction feuille est donnée par le tableau suivant :

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$L_G(i)$	0	0	2	2	3	4	4	$-\infty$	$-\infty$

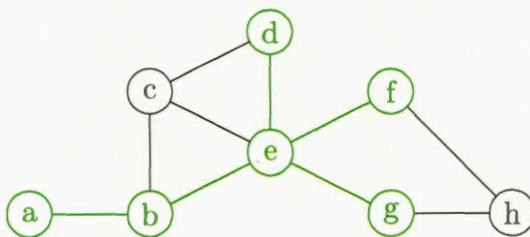


Figure 4.1: Un sous-arbre induit pleinement feuillu d'ordre 6 est coloré en vert, dans un graphe G d'ordre 8. On a $L_G(6) = 4$.

Quelques remarques peuvent être faites sur les premières valeurs de la fonction :

- Pour tout graphe simple G , on a $L_G(0) = L_G(1) = 0$. En effet, l'arbre vide n'a pas de feuille et un sommet seul n'est pas une feuille (son degré est 0).
- Pour tout graphe G contenant au moins une arête, $L_G(2) = 2$.
- Pour tout graphe G connexe contenant au moins trois sommets, si G est isomorphe à K_n (graphe complet d'ordre n) alors $L_G(3) = -\infty$, sinon $L_G(3) = 2$. En effet, K_n ne contient aucun sous-arbre induit d'ordre 3 et pour un graphe non isomorphe à K_n on peut trouver un sommet ayant deux voisins non adjacents.

PROPOSITION 4.1.3 – *Pour tout graphe G d'ordre au moins 3, la suite $\{L_G(i)\}_{i=0}^{|G|}$ est croissante¹ si et seulement si G est un arbre.*

Démonstration : Si G est un arbre alors d'après la proposition 1.3.7, dès qu'un sous-arbre T_1 est inclus dans un sous-arbre T_2 de G , on a $|T_1|_{\emptyset} \leq |T_2|_{\emptyset}$. Si G n'est pas un arbre alors il n'a pas de sous-arbre d'ordre $|G|$ donc $L_G(|G|) = -\infty$; or $L_G(0) = 0$ donc la suite L_G n'est pas croissante. \square

Le présent mémoire se concentrant sur le problème *FLIS*, nous ne mentionnons ici qu'un résultat important concernant le problème *LIS* (la démonstration est omise), puisqu'il a une implication directe sur notre sujet :

THÉORÈME 4.1.4 – *Le problème LIS est NP-complet.*

Cette complexité du problème général invite à étudier des cas particuliers pour lesquels on peut déterminer la fonction feuille par un raisonnement.

1. Selon la terminologie française, à la différence du sens anglo-saxon, en l'absence de précision il s'agit de croissance au sens large, qui correspond à *non-decreasing* en anglais.

4.2 Fonctions feuilles dans quelques familles de graphes finis

Nous avons présenté au chapitre 1 quelques familles de graphes connues. Les fonctions feuilles de certaines d'entre elles sont assez simples.

Pour K_n , le graphe complet d'ordre n , on a

$$L_{K_n}(i) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \in \{0, 1\} \\ 2 & \text{si } i = 2 \\ -\infty & \text{si } 3 \leq i \leq n \end{cases} \quad (4.2.1)$$

Démonstration : pour $n \geq 2$, tout sous-graphe induit de K_n contient un cycle. \square

Pour C_n , le graphe cyclique d'ordre n , on a

$$L_{C_n}(i) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \in \{0, 1\} \\ 2 & \text{si } 2 \leq i < n \\ -\infty & \text{si } i = n \end{cases} \quad (4.2.2)$$

Démonstration : tout sous-arbre induit de C_n est un chemin. \square

Pour W_n , la roue d'ordre n (contenant $n + 1$ sommets), on a

$$L_{W_n}(i) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \in \{0, 1\} \\ 2 & \text{si } i = 2 \\ i - 1 & \text{si } 3 \leq i \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1 \\ 2 & \text{si } \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 2 \leq i \leq n - 1 \\ -\infty & \text{si } n \leq i \leq n + 1 \end{cases} \quad (4.2.3)$$

Démonstration : tant que $i \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$ il suffit de prendre le sommet central puis un sommet sur deux dans le cycle qui l'entoure, mais pour $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 2 \leq i \leq n - 1$ on ne peut plus inclure le sommet central donc les sous-arbres induits pleinement feuillus sont des chemins (de longueur $i - 1$). \square

Pour le graphe biparti complet $K_{m,n}$ contenant $m + n$ sommets, on a

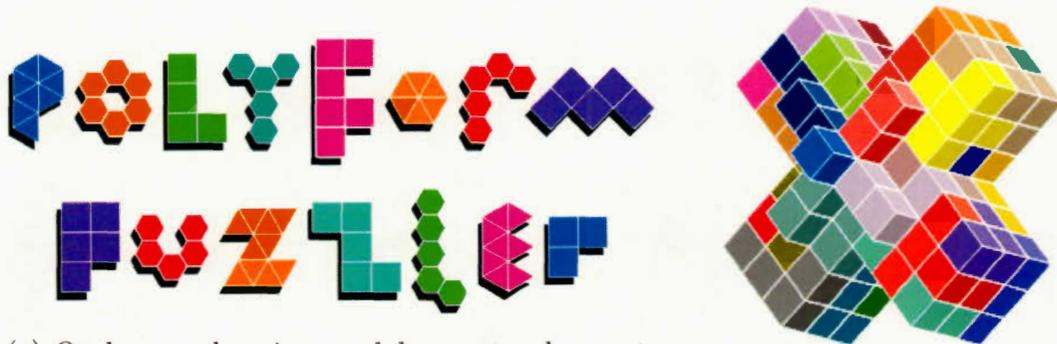
$$L_{K_{m,n}}(i) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \in \{0, 1\} \\ 2 & \text{si } i = 2 \\ i - 1 & \text{si } 3 \leq i \leq \max(m, n) + 1 \\ -\infty & \text{si } \max(m, n) + 2 \leq i \leq m + n \end{cases} \quad (4.2.4)$$

Démonstration : pour $3 \leq i \leq \max(m, n) + 1$, on prend un sommet dans la plus petite classe et on le lie à $i - 1$ sommets de l'autre classe ; pour $i > \max(m, n) + 1$, il n'y a pas de sous-arbre induit. \square

Cependant, le cas des hypercubes Q_d (contenant 2^d sommets) est plus complexe et pour l'instant on ne connaît la fonction feuille que pour $d \leq 6$. Les résultats ont été obtenus à l'aide d'un algorithme et la complexité temporelle permet difficilement d'aller plus loin de cette manière.

4.3 Arbres pleinement feuillus dans des grilles régulières

Les *grilles régulières* du plan sont les graphes correspondant aux pavages réguliers du plan (pavages monoédraux bord-à-bord dont la prototuille est un carré, un hexagone régulier ou un triangle équilatéral). Parmi celles-ci, nous avons déjà évoqué au chapitre 2 la grille carrée, dont une définition plus formelle est donnée à la sous-section 4.3.1. La *grille cubique* est l'équivalent de la grille carrée dans l'espace en trois dimensions : ses "tuiles" sont des cubes face-à-face et deux cubes



(a) Quelques polyominos, polyhexes et polyamants, à l'exception du premier "o" de "polyform" qui n'est pas un disque topologique donc pas un polyhexe. (b) Un polycube, composé de polycubes.

Figure 4.2: Quelques polyoïdes. – Images de David Goodger.

sont adjacents si et seulement s'ils ont une face en commun.

Les formes connexes (connectées par des arêtes) composées de tuiles formant des disques topologiques dans de telles grilles sont appelées *polyoïdes* (ou *polyformes* dans \mathbb{R}^2); ces formes sont donc constituées de tuiles placées bord-à-bord sans trou. Nous parlons de *polyominos* dans la grille carrée *sq*, de *polyamants* dans la grille triangulaire *tr* (composée de triangles équilatéraux), de *polyhexes* dans la grille hexagonale *hex* (composée d'hexagones réguliers) et enfin de *polycubes* dans la grille cubique *cube*. Notons que la taille des tuiles n'a pas d'importance ici – sous réserve que toutes les tuiles d'une même grille aient la même taille – puisque ce sont les liens d'adjacence qui définissent le graphe dont on extrait des sous-arbres induits. La figure 4.2 montre quelques exemples de polyoïdes, et nous avons déjà rencontré à la figure 2.10 (*a, b, c, d*) quelques exemples de tuiles composées de carrés mais qui ne sont pas des polyominos. Précisons qu'un polyoïde est invariant par translation, tout comme l'est une prototuille dans un pavage.

Un premier problème consiste en la recherche, dans chacune de ces grilles et pour chaque entier naturel n , du nombre de polyoïdes constitués de n cellules (une cellule étant respectivement un carré unité, triangle unité, etc.) – on dit alors

que n est la taille du polyoïde. Quelques sous-problèmes consistent à ajouter des contraintes sur la forme des polyoïdes considérés, comme par exemple compter les polyominos convexes ou les polyominos-arbres. Les articles étudiés ici se concentrent sur le problème suivant : déterminer le nombre maximal de feuilles que peut avoir un polyomino-arbre (puis ses analogues dans les autres grilles) de taille n pour tout entier positif n , au sens de la théorie des graphes. En d'autres termes, on cherche la fonction feuille $L_f(n)$ pour chaque grille f donnée.

4.3.1 Définitions et notations

Commençons par écrire formellement une notion introduite à la section 2.2 : la *grille carrée* (*square lattice*) est le graphe simple infini $\mathcal{G}_2 = (\mathbb{Z}^2, A_4)$, où A_4 est la *relation d'adjacence de degré 4* définie par $A_4 = \{(p, p') \in \mathbb{Z}^2 \mid \text{dist}(p, p') = 1\}$ et dist désigne la distance euclidienne² de \mathbb{R}^2 . Pour tout $p \in \mathbb{Z}^2$, la *cellule carrée* centrée en p est l'ensemble $c(p) = \{p' \in \mathbb{R}^2 \mid \text{dist}_\infty(p, p') \leq 1/2\}$ où dist_∞ désigne la distance uniforme³ de \mathbb{R}^2 . Avec ces définitions, on retrouve bien le fait que deux sommets de \mathcal{G}_2 sont adjacents si et seulement si les cellules carrées (tuiles du pavage) centrées en ces points sont adjacentes. La grille cubique *cube* est définie de façon analogue à la grille carrée, utilisant les mêmes distances en dimension 3.

La grille hexagonale *hex* est constituée d'hexagones réguliers, tous de même rayon, fixé ici arbitrairement à 1. Si $p \in \mathbb{C}$ est l'affixe du centre d'une cellule dans cette grille, alors les centres des 6 cellules adjacentes ont pour affixes $p + \sqrt{3}e^{ik\pi/3}$ pour $k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Ce voisinage (les tuiles adjacentes étant ici toutes des tuiles

2. Rappelons que la distance euclidienne dist est définie pour tous $p = (p_1, p_2), p' = (p'_1, p'_2)$ de \mathbb{R}^2 par $\text{dist}(p, p') = \sqrt{|p_1 - p'_1|^2 + |p_2 - p'_2|^2}$.

3. La distance uniforme dist_∞ est définie pour tous $p = (p_1, p_2), p' = (p'_1, p'_2) \in \mathbb{R}^2$ par $\text{dist}_\infty(p, p') = \max(|p_1 - p'_1|, |p_2 - p'_2|)$.

voisines) définit la *relation d'adjacence de degré 6* dans *hex*.

La grille triangulaire *tr* étant le dual de la grille hexagonale, elle présente des propriétés similaires. Nous choisissons à nouveau un rayon de 1 (pour le cercle inscrit), de sorte que le côté de chaque triangle est égal à $\sqrt{3}$. Si $p \in \mathbb{C}$ est l'affixe du centre d'une cellule dans cette grille, alors les centres des 3 cellules adjacentes ont pour affixes $p + e^{i2k\pi/3}$ pour $k \in \{0, 1, 2\}$. Ceci définit la *relation d'adjacence de degré 3* dans *tr*.

Un *polyomino-arbre* est un polyomino dont le graphe associé est un arbre. Les autres *polyoïdes-arbres* sont définis de façon similaire. Quelques observations utiles peuvent être faites sur les degrés des sommets dans les polyoïdes-arbres, liées à leur caractère acyclique et au fait que les graphes dont ils sont extraits sont réguliers. Ainsi, soient u et v sont des cellules adjacentes de T ,

- si T est un polyomino-arbre, polyhexe-arbre ou polyamant-arbre, alors $\deg_T(u) + \deg_T(v) \leq 6$;
- si T est un polycube-arbre de \mathbb{Z}^d ($d \geq 2$), alors $\deg_T(u) + \deg_T(v) \leq 2d + 2$.

4.3.2 Fonction feuille pour les polyominos-arbres

THÉORÈME 4.3.1 – Pour tout entier $n \geq 2$, le nombre maximal de feuilles $L_{squ}(n)$ d'un polyomino-arbre d'ordre n est égal à $\ell_{squ}(n)$, où la fonction ℓ_{squ} est définie par :

$$\ell_{squ}(n) = \begin{cases} 2 & \text{si } n = 2 \\ n - 1 & \text{si } n \in \{3, 4, 5\} \\ \ell_{squ}(n - 4) + 2 & \text{si } n \geq 6 \end{cases} \quad (4.3.2)$$

Montrons d'abord que pour tout $n \geq 2$, $L_{squ}(n) \geq \ell_{squ}(n)$. On construit récur-

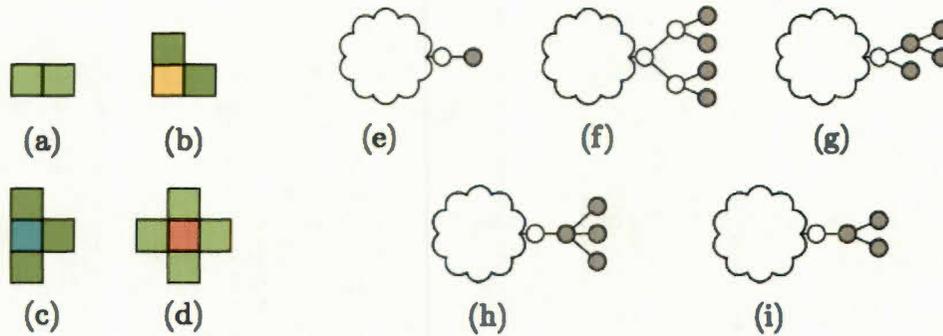


Figure 4.3: (a) à (d) Polyominos-arbres pleinement feuillus de tailles 2 à 5.

(e) à (i) Les cinq cas du lemme 4.3.3.

– Image extraite de Blondin Massé et al. (2018).

vement une famille $\{T_n\}_{n \geq 2}$ de polyominos-arbres de la façon suivante :

1. T_1, T_2, T_3 et T_4 sont les polyominos-arbres de la figure 4.3 en (a), (b), (c) et (d) respectivement ;
2. Pour $n \geq 6$, T_n est le polyomino-arbre obtenu en “concaténant” T_{n-4} et T_3 , la cellule bleue de T_3 devenant adjacente à la feuille la plus à droite de T_{n-4} .

Alors pour $n \in \{1, 2, 3, 4\}$ on a $n_1(T_n) = \ell_{squ}(n)$ et la cellule la plus à droite de T_n est une feuille. Ensuite, par induction forte sur n , si pour tout $2 \leq k < n$ on a $n_1(T_k) = \ell_{squ}(k)$ et la cellule la plus à droite de T_k est une feuille (de sorte qu’aucun cycle ne soit créé par l’opération de concaténation), alors lors de la concaténation de T_{n-4} et T_3 on ajoute 3 feuilles (celles de T_3) mais la feuille à droite de T_{n-4} devient un sommet interne, de sorte que T_n a bien 4 cellules de plus que T_{n-4} et 2 feuilles supplémentaires. En outre, la cellule la plus à droite de T_n est une feuille. Par conséquent, pour tout $n \geq 2$, le nombre de feuilles de T_n est égal à $\ell_{squ}(n)$; il s’ensuit que $L_{squ}(n) \geq \ell_{squ}(n)$. \square

Pour montrer que $L_{squ}(n) \leq \ell_{squ}(n)$, on utilise le lemme suivant :

LEMME 4.3.3 – Posons $\Delta\ell(1) = 0$, $\Delta\ell(3) = 1$ et $\Delta\ell(4) = 2$. Soit T un polyomino-arbre d'ordre minimal tel que $n_1(T) > \ell_{squ}(n(T))$ et soit A un polyomino-arbre d'ordre $n(T) - i$, pour un $i \in \{1, 3, 4\}$, alors $n_1(T) > n_1(A) + \Delta\ell(i)$.

Démonstration : On montre d'abord par récurrence forte que pour tout $k \geq 2$, $\ell_{squ}(k+i) \geq \ell_{squ}(k) + \Delta\ell(i)$. En effet, pour $k = 2$ et pour tout $i \in \{1, 3, 4\}$, on a $\ell_{squ}(k+i) \geq \ell_{squ}(k) + \Delta\ell(i)$, puis si cette inégalité est vraie jusqu'au rang k alors on vérifie que pour $i = 1$ et $k = 3$ (soit pour $k+1+i < 6$) on a $\ell_{squ}(k+i) \geq \ell_{squ}(k) + \Delta\ell(i)$, et pour $k+1+i \geq 6$ on a

$$\begin{aligned} \ell_{squ}(k+1+i) &= \ell_{squ}(k-3+i) + 2 && \text{par définition de } L, \\ &\geq \ell_{squ}(k-3) + \Delta\ell(i) + 2 && \text{par hypothèse de récurrence,} \\ &\geq \ell_{squ}(k+1) + \Delta\ell(i) && \text{par définition de } L. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} n_1(T) &> \ell_{squ}(n(T)) && \text{par hypothèse,} \\ &> \ell_{squ}(n(A) + i) && \text{par définition de } A, \\ &> \ell_{squ}(n(A)) + \Delta\ell(i) && \text{par ce qui précède,} \\ &> L_{squ}(n(A)) + \Delta\ell(i) && \text{par minimalité de } n(T), \\ &> n_1(A) + \Delta\ell(i) && \text{par définition de } L_{squ}. \quad \square \end{aligned}$$

Supposons, par contradiction, qu'il existe un polyomino-arbre T d'ordre minimal tel que $n_1(T) > \ell_{squ}(n(T))$. Supposons que T contienne un sommet u de degré 2 et de profondeur 1. Soit v la feuille adjacente à u et soit $A = T - v$ (voir figure 4.3e), alors $n(A) = n(T) - 1$ et $n_1(A) = n_1(T)$, ce qui contredit le lemme 4.3.3. Donc dans T , tous les sommets de profondeur 1 ont pour degré 3 ou 4.

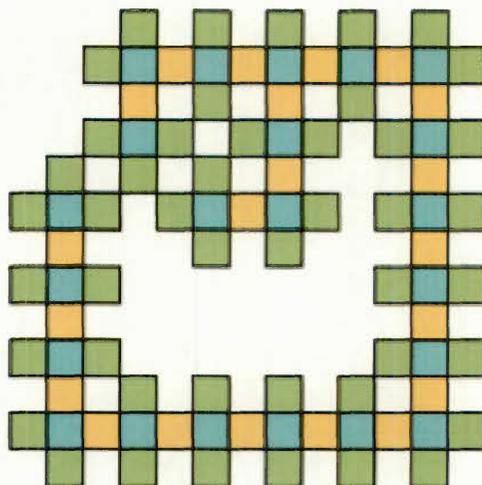


Figure 4.4: Polyomino-arbre pleinement feuillu.
 – Image extraite de Blondin Massé et al. (2018).

Supposons maintenant que T contienne un sommet w de profondeur 2. Si w était de degré 4, alors il aurait un voisin de degré 2 et de profondeur 1 (car T est acyclique), mais on vient de montrer que c'est impossible. Si w est de degré 3, on est dans le cas (f) ou le cas (g) (fig. 4.3). Dans les deux cas, soit A le polyomino-arbre obtenu en retirant les quatre cellules grises, alors $n(A) = n(T) - 4$ et $n_1(A) = n_1(T) - 2$, ce qui contredit le lemme 4.3.3. Enfin, si w est de degré 2, on est dans le cas (h) ou le cas (i) (fig. 4.3). Dans les deux cas, en retirant les cellules grises, on obtient une contradiction avec le lemme 4.3.3. En conclusion, T ne contient pas de sommet de profondeur 2, donc il est d'ordre au plus 6. Or on vérifie facilement qu'aucun de ces polyominos-arbres ne vérifie $n_1(T) > \ell_{squ}(n(T))$. \square

La figure 4.4 donne un exemple de polyomino-arbre pleinement feuillu et la croissance asymptotique de L_{squ} est donnée dans le théorème suivant :

THÉORÈME 4.3.4 – La croissance asymptotique de L_{squ} est $L_{squ}(n) \sim \frac{n}{2}$.

4.3.3 Polyhexes-arbres et polyamants-arbres pleinement feuillus

Soit L la fonction définie par :

$$L(n) = \begin{cases} 2 & \text{si } n \in \{2, 3\} \\ L(n-2) + 1 & \text{si } n \geq 4 \end{cases} \quad (4.3.5)$$

Alors on peut noter que $L(n) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$. Or on peut montrer que L est la fonction feuille pour les grilles hexagonale et triangulaire, d'où le théorème suivant :

THÉORÈME 4.3.6 – *Pour tout entier $n \geq 2$, le nombre maximal de feuilles $L_{\text{hex}}(n)$ d'un polyhexe-arbre d'ordre n est égal à $L(n)$, de même que le nombre maximal de feuilles $L_{\text{tr}}(n)$ d'un polyamant-arbre d'ordre n . On a donc*

$$L_{\text{hex}}(n) = L_{\text{tr}}(n) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$$

L'égalité des fonctions feuilles pour ces deux grilles est liée au fait qu'il existe une bijection entre les polyamants-arbres et les polyhexes-arbres, comme le montre la figure 4.5. Il est étonnant de constater à quel point ces fonctions sont simples. En outre, quand on cherche à quoi peuvent ressembler les arbres pleinement feuillus dans ces grilles, il est intéressant de constater que pour tout $n \geq 3$ on peut trouver un arbre pleinement feuillu qui est une chenille (voir figures 4.6 et 4.7 b et c), et

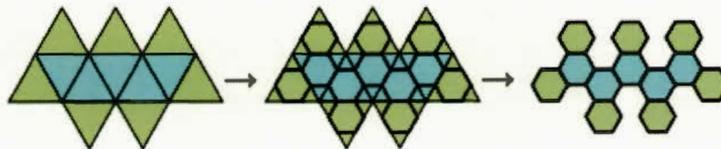


Figure 4.5: Bijection entre les polyamants-arbres et les polyhexes-arbres.
– Images extraites de Blondin Massé et al. (2018).

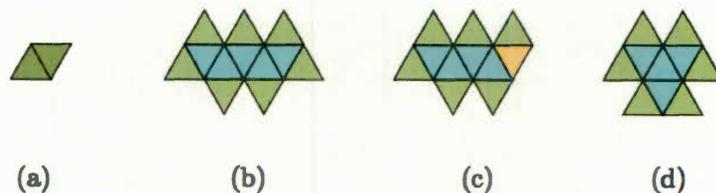


Figure 4.6: Polyamants-arbres pleinement feuillus.
 – Images extraites de Blondin Massé et al. (2018).

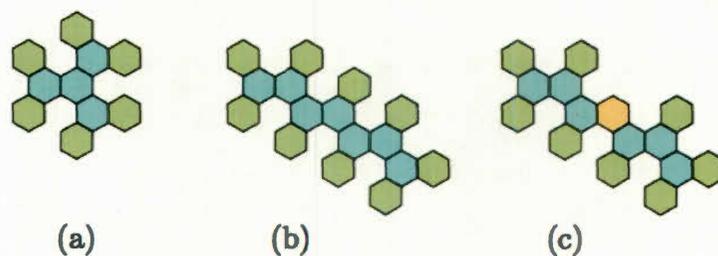


Figure 4.7: Polyhexes-arbres pleinement feuillus.
 – Images extraites de Blondin Massé et al. (2018).

il semblerait que la seule autre possibilité soit une 2-chenille, c'est-à-dire un arbre T dont le dérivé T' est une chenille (figures 4.6d et 4.7a).

Ceci a donné des pistes de réflexion pour ce que l'on observe dans les pavages de Penrose, où chaque tuile d'un sous-arbre induit est de degré au plus 3 : cette contrainte sur les degrés impose-t-elle de se restreindre à des chenilles ou à des 2-chenilles ?

4.3.4 Polycubes-arbres pleinement feuillus

THÉORÈME 4.3.7 – Pour tout entier $n \geq 2$, le nombre maximal de feuilles $L_{\text{cub}}(n)$ d'un polycube-arbre d'ordre n est égal à :

$$L_{cub}(n) = \begin{cases} f(n) + 1 & \text{si } n \in \{6, 7, 13, 19, 25\} \\ f(n) & \text{si } 2 \leq n \leq 40 \text{ et } n \notin \{6, 7, 13, 19, 25\} \\ f(n - 41) + 28 & \text{si } 41 \leq n \leq 81 \\ L_{cub}(n - 41) + 28 & \text{si } n \geq 82 \end{cases} \quad (4.3.8)$$

$$\text{où } f(n) = \begin{cases} \lfloor (2n + 2)/3 \rfloor & \text{si } 0 \leq n \leq 11 \\ \lfloor (2n + 3)/3 \rfloor & \text{si } 12 \leq n \leq 27 \\ \lfloor (2n + 4)/3 \rfloor & \text{si } 28 \leq n \leq 40 \end{cases} \quad (4.3.9)$$

Pour montrer que leur fonction L_{cub} était bien la fonction feuille de la grille cubique, Blondin Massé *et al.* (2018b) décrivent un système de “greffe” (*graft union*) : il s’agit de “greffer” un arbre sur un autre en respectant certaines conditions, puis

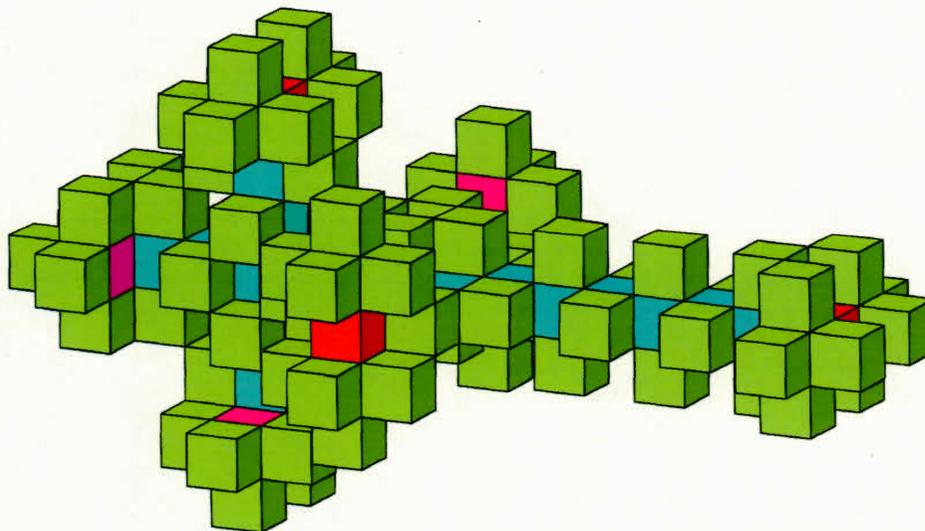


Figure 4.8: Un polycube-arbre pleinement feuillu. Chaque cube est coloré selon son degré dans le graphe, les feuilles sont en vert.
– Image extraite de Blondin Massé *et al.* (2018a).

de tester l'acyclicité du graphe résultant et enfin, le cas échéant, voir si ce nouvel arbre est prometteur en terme de nombre de feuilles. La démonstration est assez longue, c'est pourquoi elle est omise ici. La figure 4.8 donne un exemple de polycube-arbre pleinement feuillu.

4.4 Algorithme général pour la fonction feuille d'un graphe

Nous revenons enfin au problème général : calculer la fonction feuille pour un graphe G quelconque. Dans *Fully leafed induced subtrees*, Blondin Massé *et al.* décrivent un algorithme de type *branch and bound* (programme donné en annexe A) permettant d'obtenir la fonction feuille L_G de tout graphe fini G . Il s'agit de l'algorithme ayant permis de calculer les premières valeurs de la fonction feuille pour les hypercubes. Sa complexité semble cependant exponentielle, ne permettant pas de trouver la fonction dans un délai raisonnable quand le graphe est grand. Cet algorithme reste toutefois un bon outil dans de petits graphes ou pour commencer l'étude de la fonction feuille sur une famille de graphes.

CHAPITRE V

ARBRES PLEINEMENT FEUILLUS DANS DES PAVAGES DE PENROSE

Nous avons maintenant tous les prérequis pour étudier notre sujet. On cherche à déterminer la fonction feuille pour les graphes correspondant à des pavages de Penrose. Contrairement aux travaux précédents qui se plaçaient dans des graphes finis ou des pavage monoédraux réguliers, nous sommes ici dans des pavages diédraux apériodiques et cela rend le problème bien plus complexe.

Une première phase de recherche, qui fait l'objet de la section 5.1, a été réalisée dans le cadre du cours d'algèbre computationnelle, à la suite d'un séminaire sur la combinatoire des mots et pavages. La deuxième phase a été l'étude approfondie des propriétés des pavages *kites and darts*, que nous avons vues aux sections 3.3 et 3.4. Enfin, il reste à faire le lien entre ces propriétés et notre sujet, qui a nécessité quelques lectures supplémentaires et la subdivision en sous-problèmes.

5.1 Explorations préliminaires

On commence par un travail exploratoire afin de voir à quoi peut ressembler la fonction feuille pour les petites valeurs de n , pour des pavages de type *kites and darts* ainsi que "rhombes". La première difficulté consiste à dessiner correctement des *patches* : les angles sont en effet des multiples de $\frac{\pi}{5}$ (72°), il y a deux prototyles, les fléchettes ne sont pas convexes, il faut respecter les règles d'assemblage... Même

pour les rhombes ce n'est pas simple. C'est pourquoi l'implémentation présentée à la section 3.2 a rapidement été utile.

Il reste cependant fastidieux de chercher “à la main”, même si cette étape est instructive car elle permet de se familiariser avec les pavages et d'observer certaines propriétés. En implémentant le graphe sous-jacent aux pavages de Penrose, on peut ensuite utiliser le programme mentionné à la section 4.4.

5.1.1 Graphes induits par les pavages de Penrose

Soit \mathcal{T} un pavage de Penrose. Le graphe $G_{\mathcal{T}}$ associé à \mathcal{T} a pour ensemble de sommets $V(G_{\mathcal{T}}) = \mathcal{T}$, et deux sommets sont adjacents dans $G_{\mathcal{T}}$ si et seulement si les tuiles correspondantes sont adjacentes dans \mathcal{T} ; $G_{\mathcal{T}}$ est alors un *graphe de Penrose*. On appelle *arbre de Penrose* un sous-arbre induit d'un graphe de Penrose. Les fonctions feuilles pour les pavages *kites and darts* et “rhombes” sont respectivement notées L_{kd} et L_{rh} .

Pour l'implémentation, on utilise la classe `Graph` dans le logiciel *SageMath*¹; il suffit alors de définir une fonction d'adjacence en plus de la liste des sommets. Notons que pour éviter toute confusion entre les sommets du graphe et les sommets des tuiles, ces derniers sont appelés “coins”; de même les arêtes des tuiles sont appelées “côtés”.

Une difficulté pratique se pose assez vite : en raison de l'irrationalité des coordonnées des points (coins des tuiles) et des erreurs d'approximation dans les calculs, *Sage* n'arrive pas à détecter la plupart des égalités. Il faut donc utiliser des arrondis dans les comparaisons pour ne pas avoir d'erreur. En effet, en utilisant

1. *SageMath*, couramment appelé *Sage*, met à disposition toutes les possibilités du langage Python ainsi que de nombreux modules offrant des outils avancés pour mathématiciens.

une structure d'ensemble (plutôt que liste) à chaque étape de décomposition du motif de départ, les doublons auraient dû être éliminés automatiquement. Mais en demandant au programme d'afficher le nombre de tuiles après n itérations il est apparu qu'il y en avait trop, ce qui ne se voyait pas puisque les tuiles supplémentaires se confondaient avec d'autres lors de l'affichage graphique.

Il faut donc modifier la fonction `iteration` (*kites and darts*) de façon à éliminer les doublons à l'aide d'une approximation des coordonnées. Comme l'étape d'homothétie de rapport φ est omise², l'arrondi dépend du nombre d'itérations afin d'être toujours suffisamment précis sans pour autant considérer un trop grand nombre de décimales à chaque fois. Par ailleurs, pour chaque paire de tuiles il suffit de comparer trois coins. La nouvelle fonction se trouve à l'annexe B.4.

Dans la mesure où on ne cherche pas à construire un pavage de Penrose mais qu'on veut seulement savoir pour chaque paire de tuiles si elles sont adjacentes ou non, on peut se contenter ici d'une fonction simple indiquant si les tuiles ont deux coins en commun ou non : cette fonction est donc valable pour tout pavage bord-à-bord. Une autre fonction d'adjacence (annexe B.5), tenant compte des règles d'assemblage des tuiles dans les pavages de Penrose, pourrait être utilisée dans d'autres situations mais elle entraînerait ici une perte d'efficacité inutile. En outre, la fonction simplifiée convient aux deux motifs. La fonction d'adjacence est donc la suivante :

```

1 def adjacent_tiles(u,v):
2     zu = set([(round(u[k].real(),10),round(u[k].imag(),10))\
3               for k in range(1,5)])
4     zv = set([(round(v[k].real(),10),round(v[k].imag(),10))\
5               for k in range(1,5)])
6     if len(zu.intersection(zv)) == 2:
7         return True
8     else:
9         return False

```

2. Comme mentionné précédemment, elle ne servirait à rien pour notre étude.

Graphe d'un pavage *kites and darts*

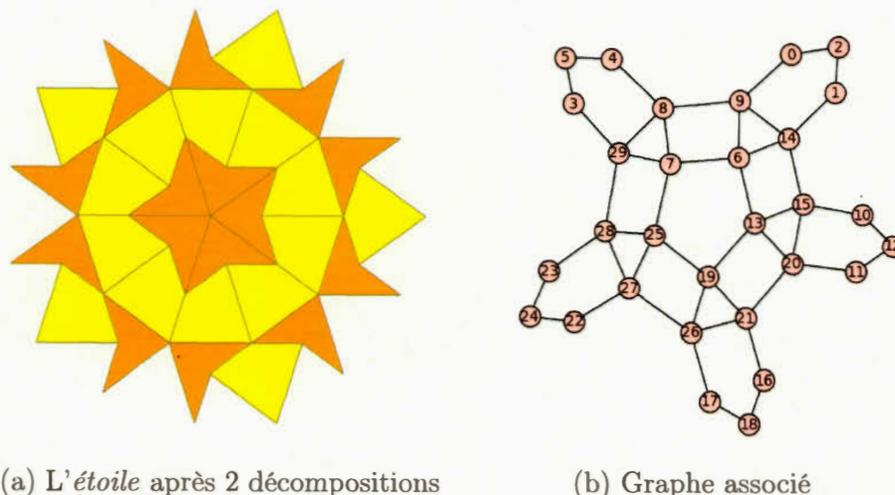
Comme nous l'avons vu à la section 3.2.2, dans notre programme les tuiles générées lors des itérations pour un pavage *kites and darts* sont exactement les tuiles du pavage. L'ensemble des sommets du graphe est donc l'ensemble des tuiles, chacune écrite sous la forme d'un 5-uplet $(code, A, B, C, D)$ où *code* correspond à la prototuile (0 pour fléchette, 1 pour cerf-volant) et *A, B, C, D* sont les affixes des coins de la tuile.

Afin de s'assurer que la fonction `adjacent_tiles` fonctionne, on construit le graphe correspondant à un *patch* de départ, ici le motif *étoile* décomposé deux fois (figure 5.1). La fonction `relabel` permet de renommer les sommets en leur donnant comme noms les entiers de 0 à $n - 1$ (n étant le nombre de sommets), ce qui clarifie l'affichage et surtout est nécessaire pour ensuite utiliser le programme donnant la fonction `feuille`. Le dictionnaire `corresp` garde la correspondance entre anciens et nouveaux labels. Il suffit donc de quelques lignes de code pour obtenir la figure 5.1b :

```
1 P = iteration(star(), 2)
2 G = Graph([P, adjacent_in_Penrose])
3 G_unlabelled = copy(G)
4 corresp = dict([(P[k], k) for k in range(len(P))])
5 G_unlabelled.relabel(perm=corresp)
6 plot(G_unlabelled, layout='spring')
```

Graphe d'un pavage "rhombes"

Pour ces pavages, les subdivisions ne causent pas de doublons mais on doit recomposer les losanges à partir des triangles pour avoir les sommets du graphe. La fonction `triangles_to_rhombs` associe donc à chaque triangle un losange ainsi que son centre, puis élimine les doublons en utilisant les coordonnées de ce dernier (toujours en arrondissant). Ainsi, les demi-losanges incomplets se situant à la fron-



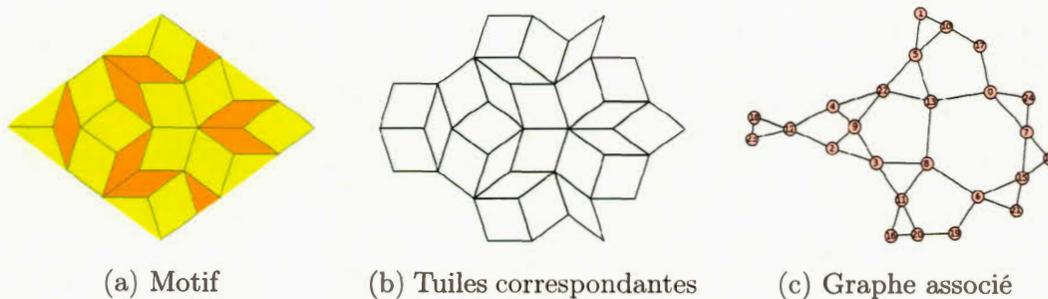
(a) L'étoile après 2 décompositions

(b) Graphe associé

Figure 5.1: L'étoile après 2 décompositions et le graphe associé. Chaque sommet du graphe est à peu près dans la même position que la tuile associée.

tière du *patch* sont complétés (ils n'ont simplement pas de doublon). La fonction `Penrose_plot` permet d'afficher le *patch* composé des losanges ainsi générés.

Afin de vérifier là aussi que tout fonctionne correctement, on considère un motif de base, ici un losange large décomposé 3 fois en triangles (figure 5.2 (a)), on recompose les losanges (b) et on vérifie que le graphe construit avec la fonction d'adjacence correspond (c). Le code pour cette section se trouve à l'annexe B.6.



(a) Motif

(b) Tuiles correspondantes

(c) Graphe associé

Figure 5.2: Losange large après 3 décompositions et son graphe.

5.1.2 Résultats des expérimentations

Les pavages ayant désormais une structure de graphe, on peut utiliser le programme IMT calculant la fonction feuillé dans des *patches* finis. Néanmoins, le temps d'exécution ne permet de répondre à la question que dans des graphes de taille modeste : au-delà de 35 sommets cela devient très long. Pour un graphe de n sommets, numérotés de 0 à $n - 1$, ce programme retourne le nombre maximal de feuilles que peut avoir un sous-arbre de taille i , pour i allant de 0 à n .

Il est évident que quand le graphe de départ n'est pas un arbre, les dernières valeurs trouvées (au moins la dernière, souvent plusieurs) sont égales à $-\infty$ puisqu'il n'y a pas d'arbre d'ordre i pour i proche de n . On doit aussi rester prudent concernant les dernières valeurs non nulles du tableau puisque les arbres correspondants peuvent simplement être "contraints" par les bords du *patch*, donc pas maximaux dans le graphe infini. Pour un graphe donné `G_unlabelled`, ces quelques lignes de code donnent la fonction L et le temps d'exécution :

```

1 from time import time
2 from IMT import *
3
4 begin = time()
5 L = ComputeL(G_unlabelled)
6 end = time()
7 print "Temps d'execution =", end-begin
8 print L

```

Résultats dans un *patch* "rhombes"

Le tableau 5.1 donne la fonction feuillé L du graphe correspondant au *patch* de la figure 5.2, composé de 25 tuiles. Le symbole `*` est utilisé à la place de $-\infty$ pour gagner de la place. On voit que l'on n'est pas très avancé dans la connaissance de la fonction pour les pavages "rhombes" en général, puisque les premières valeurs se trouvent facilement en observant un pavage et que les suivantes (à partir de $i = 12$)

Tableau 5.3: Fonction feuille pour le *patch* de la figure 5.1 (30 cerfs-volants et fléchettes).

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$L(i)$	0	0	2	2	3	3	4	4	5	5	6	6	7	7	8	8
i	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	
$L(i)$	9	9	9	10	9	10	8	8	6	*	*	*	*	*	*	

Résultats dans un *patch kites and darts*

On considère ici le motif étoile décomposé deux fois, déjà vu à la figure 5.1 et composé de 30 tuiles. Les résultats sont donnés dans le tableau 5.3. Si les 11 premières valeurs sont les mêmes que précédemment, à partir de $i = 12$ les valeurs sont bien différentes (temps d'exécution : 132 secondes). Jusqu'à $i = 17$, les valeurs de $L(i)$ suivent une certaine logique mais le fait que la fonction ne soit plus croissante à partir de $i = 20$ est le signe que cette fonction ne correspond alors plus à la fonction feuille d'un pavage du plan.

Le fait de ne pas pouvoir explorer en temps raisonnable des graphes plus grands nous contraint à réfléchir à des façons de contourner ce problème : la complexité algorithmique impose de s'appuyer sur les propriétés des pavages. Il ressort donc de ces préliminaires qu'il vaut mieux se concentrer sur un seul type de pavage ; d'autant que, comme nous l'avons vu au chapitre 3, il y a une infinité de pavages de chaque type.

5.2 Contraintes particulières sur les arbres de Penrose

Nous nous concentrons désormais sur les pavages *kites and darts*.

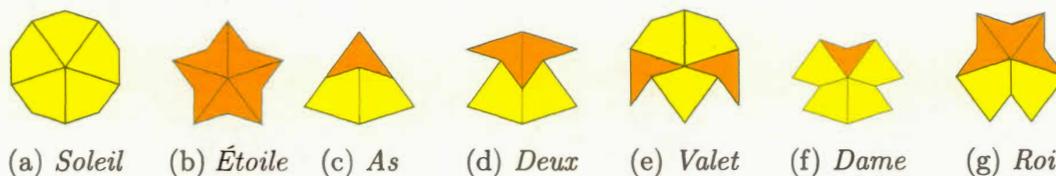


Figure 5.4: Les sept voisinages de sommets d'un pavage "cerfs-volants et fléchettes".

5.2.1 Degré maximal d'un sommet dans un arbre de Penrose

Si l'on compare les résultats ci-dessus à la fonction feuille pour les polyominos, l'une des premières valeurs de L_{kd} peut surprendre : bien que les tuiles soient des quadrilatères et qu'elles aient chacune 4 tuiles adjacentes, comme les polyominos, quand on prend un *patch* de 5 tuiles le nombre maximal de feuilles est 3 et non 4. Ceci est lié au fait que deux cerfs-volants adjacents s'inscrivent nécessairement dans le creux d'une fléchette, et réciproquement. La figure 5.4 nous rappelle les sept configurations de sommets possibles, nous allons nous en servir pour voir comment des tuiles peuvent s'assembler autour de chaque prototuille.

PROPOSITION 5.2.1 – *Pour chaque cerf-volant ou fléchette dans un arbre de Penrose T , au plus 3 de ses tuiles adjacentes peuvent être aussi dans T .*

Démonstration : D'abord, pour chaque fléchette du pavage on a nécessairement un *as* : c'est la seule configuration de sommet possible pour le creux de la fléchette. Par conséquent, si la fléchette appartient à T , elle ne peut être accompagnée que d'un seul des deux cerfs-volants de l'*as* (autrement on aurait un cycle).

Quand on considère un cerf-volant, il faut distinguer deux cas. Concentrons-nous sur l'arête CD de la tuile rouge, figure 5.5a ; il y a une seule façon d'y accoler une fléchette (configuration 1) et une seule façon d'y accoler un cerf-volant (configuration 2). Si on place une fléchette tel qu'indiqué à la figure 5.5b, alors le cerf-volant jaune est forcé et un sous-arbre induit contenant la tuile rouge ne peut conte-

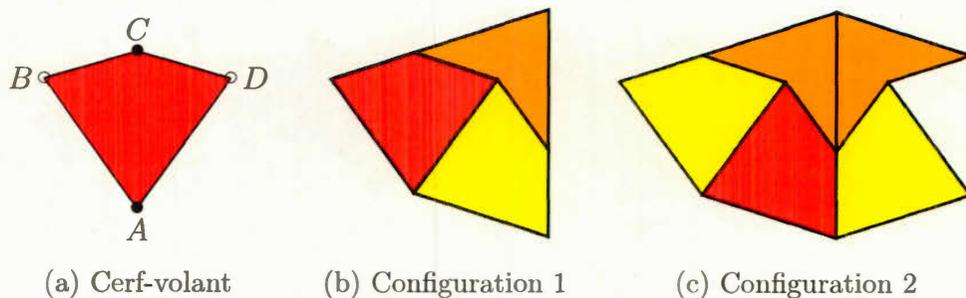


Figure 5.5: Contraintes d'adjacence sur les cerfs-volants : quand on considère un cerf-volant $ABCD$ (rouge) et que l'on se concentre sur l'arête CD , seules deux configurations sont possibles.

nir que l'une (au plus) de ces tuiles adjacentes. Dans le cas de la configuration 2 (figure 5.5c), le sommet C ne peut être que dans la configuration de sommet *deux*, donc les fléchettes sont forcées et par conséquent le cerf-volant incident à AB aussi. Il s'ensuit que si le cerf-volant rouge est dans T alors T ne peut pas contenir à la fois les tuiles incidentes à AB et BC . \square

COROLLAIRE 5.2.2 – *Le degré maximal d'un sommet dans un arbre de Penrose est 3.*

Ce résultat sur les degrés a des implications sur la fonction feuille L_{kd} , notamment avec la proposition 5.2.3.

PROPOSITION 5.2.3 – *Pour tout entier positif i , si $L_{kd}(i) > L_{kd}(i - 1)$ alors $L_{kd}(i + 1) = L_{kd}(i)$.*

Démonstration : Notons d'abord que la fonction feuille est nécessairement croissante. En effet, le graphe est infini et dans toute configuration, pour tout entier $i \geq 2$, on peut trouver une feuille "vers l'extérieur" d'un arbre pleinement feuillu T d'ordre i à laquelle on peut ajouter un sommet adjacent du graphe sans créer

de cycle³. Le nouvel arbre ainsi obtenu est d'ordre $i + 1$ et a autant de feuilles que T , donc $L_{kd}(i + 1) \geq L_{kd}(i)$.

Soit un entier positif i tel que $L_{kd}(i) > L_{kd}(i-1)$. Supposons que $L_{kd}(i) < L_{kd}(i+1)$ et soit T_{i+1} un arbre pleinement feuillu d'ordre $i + 1$. On note $n_1(T)$ le nombre de feuilles d'un arbre T . Comme $L_{kd}(i) < L_{kd}(i + 1)$, en ôtant une feuille f à T_{i+1} on obtient un arbre T_i dont le nombre de feuilles $n_1(T_i)$ est supérieur ou égal à $L_{kd}(i)$, d'où $n_1(T_i) = L_{kd}(i)$ par maximalité de la fonction feuille. Soit v le sommet de T_i adjacent à f dans T_{i+1} , alors v ne peut pas être une feuille dans T_i puisque $n_1(T_i) = L_{kd}(i) < L_{kd}(i + 1) = n_1(T_{i+1})$. Supposons v de degré 0, alors il est le seul sommet de T_i donc $n_1(T_i) = L(1) = L(0)$, ce qui contredit $L_{kd}(i) > L_{kd}(i - 1)$. v est donc de degré au moins 2 dans T_i . Sans perte de généralité, on peut choisir f de sorte que v soit adjacent à au plus un sommet interne de T_{i+1} . Si v était de degré 3 dans T_i alors il serait de degré 4 dans T_{i+1} et on vient de montrer que c'est impossible. Enfin, si v de degré 2 dans T_i , comme au plus un de ses voisins est un sommet interne, il existe une feuille f' adjacente à v dans T_i . Soit alors T_{i-1} l'arbre obtenu en retirant f' de T_i , alors v devient une feuille dans T_{i-1} donc $n_1(T_{i-1}) = n_1(T_i) = L_{kd}(i) > L_{kd}(i - 1) \geq n_1(T_{i-1})$, ce qui est absurde. \square

Autrement dit, toute valeur de L_{kd} est répétée au moins une fois. Ceci nous mène à un autre résultat sur le comportement de la fonction :

THÉORÈME 5.2.4 – *Pour tout entier naturel i , $L_{kd}(i) \leq \left\lfloor \frac{i}{2} \right\rfloor + 1$.*

Démonstration : On sait que, comme dans tout graphe contenant au moins 2 sommets, $L_{kd}(0) = 0 \leq \left\lfloor \frac{0}{2} \right\rfloor + 1$. Ensuite, par induction généralisée sur i , supposons $L_{kd}(n) \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1$ pour tout $n \leq i$. Si $L_{kd}(i) > L_{kd}(i - 1)$ alors on a $L_{kd}(i+1) = L_{kd}(i) \leq \left\lfloor \frac{i}{2} \right\rfloor + 1 \leq \left\lfloor \frac{i+1}{2} \right\rfloor + 1$. Sinon $L_{kd}(i) = L_{kd}(i-1) \leq \left\lfloor \frac{i-1}{2} \right\rfloor + 1$.

3. L'examen exhaustif des configurations est fastidieux et donc omis ici.

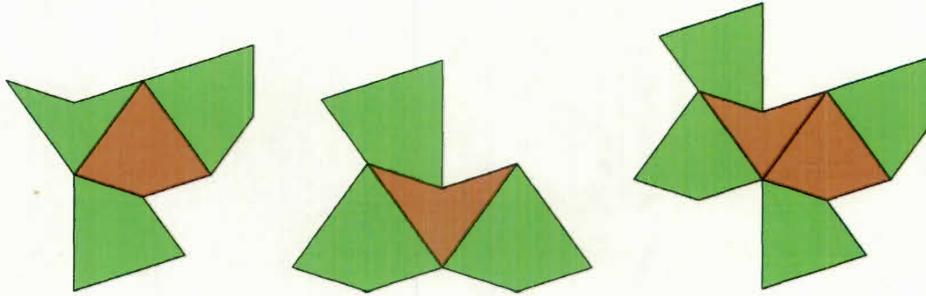


Figure 5.6: Quelques petits arbres de Penrose pleinement feuillus.

Soit T_{i+1} un arbre pleinement feuillu d'ordre $i + 1$, alors en retirant une feuille à T_{i+1} on obtient T_i d'ordre i tel que $n_1(T_i) \geq n_1(T_{i+1}) - 1$. Or $n_1(T_i) \leq L_{kd}(i)$ donc $n_1(T_{i+1}) \leq L_{kd}(i) + 1$, et comme $\lfloor \frac{i+1}{2} \rfloor + 1 = \lfloor \frac{i-1}{2} + 1 \rfloor + 1 = \lfloor \frac{i-1}{2} \rfloor + 2$, on a bien $L_{kd}(i+1) \leq \lfloor \frac{i-1}{2} \rfloor + 2 \leq \lfloor \frac{i+1}{2} \rfloor + 1$. \square

Il s'ensuit que les valeurs de L_{kd} obtenues dans le tableau 5.3 sont les bonnes au moins jusqu'à $i = 17$: les valeurs obtenues pour un *patch* ne peuvent dépasser les valeurs pour le graphe entier, et on vient de voir que L_{kd} ne peut pas croître plus rapidement. La figure 5.6 donne quelques exemples d'arbres pleinement feuillus, pour de petits nombres de sommets.

5.2.2 Sous-arbres dans les royaumes

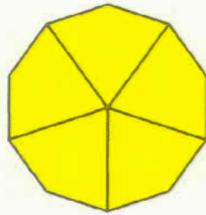
La propriété d'isomorphisme local (proposition 3.3.2) est la condition *sine qua non* pour que l'on puisse espérer trouver une fonction feuille pour les graphes de Penrose. On peut en effet chercher des arbres de Penrose pleinement feuillus dans des *patches* de taille raisonnable puis tenter d'assembler de tels arbres de façon à obtenir des arbres de Penrose arbitrairement grands. La principale difficulté consiste alors à s'assurer que nous obtenons bien des arbres de Penrose.

La première question est de savoir quels *patches* choisir. Il semble sensé de commencer par des motifs que l'on est sûr de retrouver partout : ceux définis par les voisinages de sommets. Nous avons parlé des empires à la section 3.4, le problème ici est que certains sont infinis. On peut toutefois le cas échéant se limiter à ce que nous appellerons un *royaume* : le plus grand sous-ensemble connexe d'un empire, contenant le voisinage de sommet, qui correspond à ce que nous avons précédemment appelé "centre" d'un empire. La figure 5.7 montre les 7 royaumes.

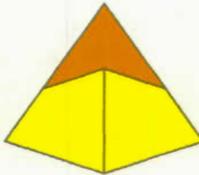
Les royaumes du *soleil* et de l'*as* se limitent aux voisinages de sommets correspondants. L'*as* n'étant constitué que de 3 tuiles, son étude est triviale. Quant au *soleil*, son graphe est le cycle C_5 . Le royaume du *deux* n'est pas très étendu non plus : il s'agit simplement de deux *as* côte-à-côte. On voit rapidement que ses sous-arbres induits pleinement feuillus dans ces royaumes sont des chemins.

Le royaume de l'*étoile* est composé de 15 tuiles : l'étoile entourée de 10 cerfs-volants, autrement dit 5 *as* dont l'union forme un décagone (figure 5.7d). Nous ne pouvons pas énumérer tous les sous-arbres pleinement feuillus de ce royaume mais pouvons les décrire pour la plupart des valeurs de i : il s'agit de prendre jusqu'à 4 fléchettes adjacentes (selon la valeur de i) et prendre un cerf-volant sur deux. L'unique sous-arbre pleinement feuillu pour $i = 10$ est montré à la figure 5.8a.

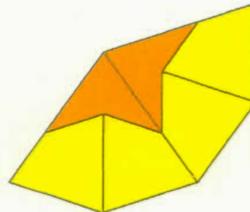
Le tableau 5.4 regroupe les fonctions feuilles données par l'algorithme pour les royaumes de l'*étoile*, du *valet* et de la *dame*. Le royaume du *valet*, composé de 16 tuiles (figure 5.7f), contient notamment un *soleil* et trois *as*. La figure 5.8b donne un exemple d'arbre pleinement feuillu dans le royaume du *valet*. Le royaume de la *dame* contient 27 tuiles, dont certaines forment des *soleils*. Le temps d'exécution du programme pour ce royaume est d'un peu plus de 18 secondes. Le royaume du *roi* contient également des *soleils*, ainsi que l'empire de l'*étoile* et même le royaume de la reine ! Avec ses 55 tuiles, il est trop gros pour le programme IMT.



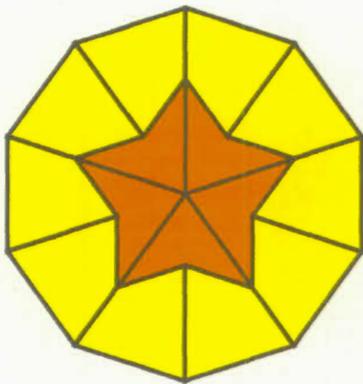
(a) Royaume du *soleil*



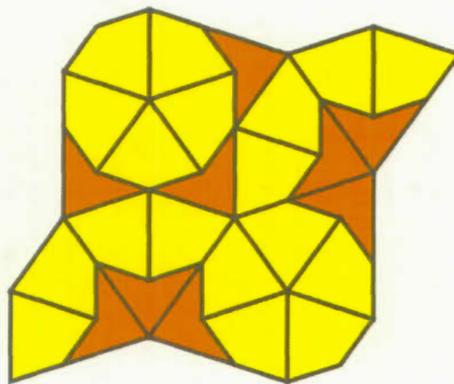
(b) Royaume de l'*as*



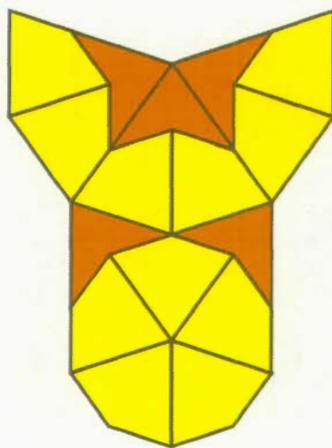
(c) Royaume du *deux*



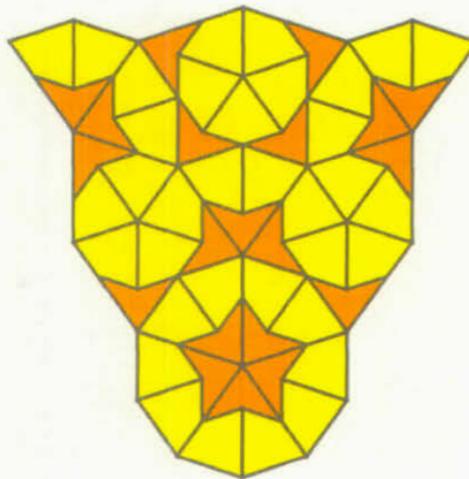
(d) Royaume de l'*étoile*



(e) Royaume de la *dame*



(f) Royaume du *valet*



(g) Royaume du *roi*

Figure 5.7: Royaumes des voisinages de sommets.

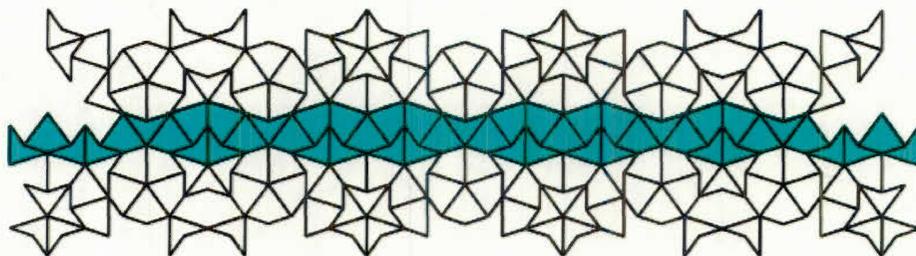


Figure 5.9: Un *Conway worm* (en bleu)

5.3 Chenilles de Penrose le long des *Conway worms*

Comme nous l'avons vu à la section 3.3, des *worms* arbitrairement longs sillonnent les pavages de Penrose, et par isomorphisme local on les trouve partout. Mais ce qui les rend particulièrement prometteurs, c'est le fait qu'ils suivent les barres d'Ammann et donc les suites musicales : à défaut de régularité, on peut alors s'appuyer sur des schémas répétitifs suivant une logique connue.

5.3.1 Tuiles forcées autour des *worms*

Observons le *worm* de la figure 5.9 : si l'on reste dans le *worm*, tous les arbres sont des chemins. On pourrait donc facilement construire des chenilles (telles que définies à la fin du chapitre 1) suivant ces *worms*. Au pire cas, nous pouvons ainsi obtenir une borne inférieure pour la fonction feuille, au meilleur cas ces chenilles sont des sous-arbres de Penrose pleinement feuillus. Cette idée est suggérée par le fait que dans les grilles triangulaire et hexagonale, les sous-arbres induits pleinement feuillus sont des chenilles ou quasi-chenilles. Or le degré maximal d'un sommet dans un arbre de Penrose est 3, comme pour les sous-arbres induits dans ces grilles. Appelons donc *chenille de Penrose* un arbre de Penrose qui est une chenille.

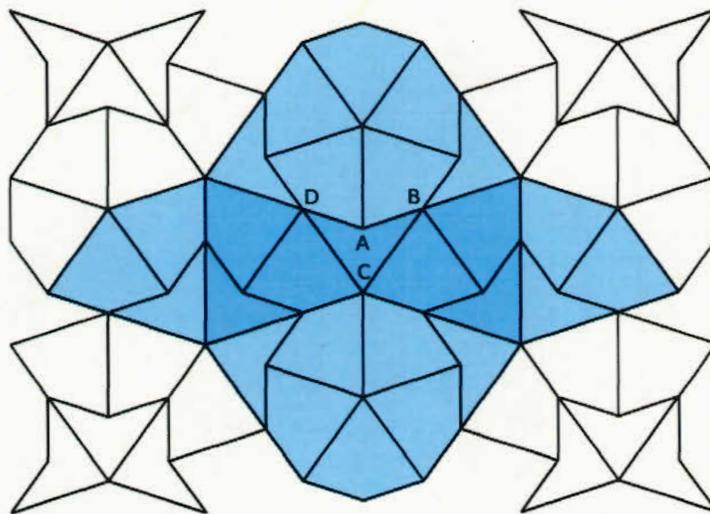


Figure 5.10: Nœud papillon long dans le royaume de la *dame*.

Les royaumes vont nous aider ici : ils permettent de montrer que les voisinages des nœuds papillons sont forcés, de sorte que non seulement un *worm* est une alternance de nœuds papillons mais en plus les tuiles adjacentes aux nœuds papillons suivent aussi une alternance. Par suite, il suffit de chercher des chenilles pleinement feuillues dans un petit nombre de *patches* puis de montrer formellement que nous pouvons construire des chenilles pleinement feuillues arbitrairement longues dans les *patches* composés d'un *worm* et de ses tuiles adjacentes.

LEMME 5.3.1 – *Tout nœud papillon long est au cœur d'un royaume de dame.*

Démonstration : Sur la figure 5.10, remarquons d'abord que la fléchette au milieu de chaque nœud papillon long force deux cerfs-volants dans son creux, donnant un *as* autour du sommet *A*. En outre, comme cette fléchette est entourée de deux *as*, les voisinages des sommets *B* et *D* sont nécessairement des *valets*, ce qui force le voisinage de *C* à être une *dame* (d'après le royaume du valet). On remarque alors que le nœud papillon long est entièrement dans le royaume de la *dame*. \square

LEMME 5.3.2 – *Tout nœud papillon court est inscrit dans un royaume de valet.*

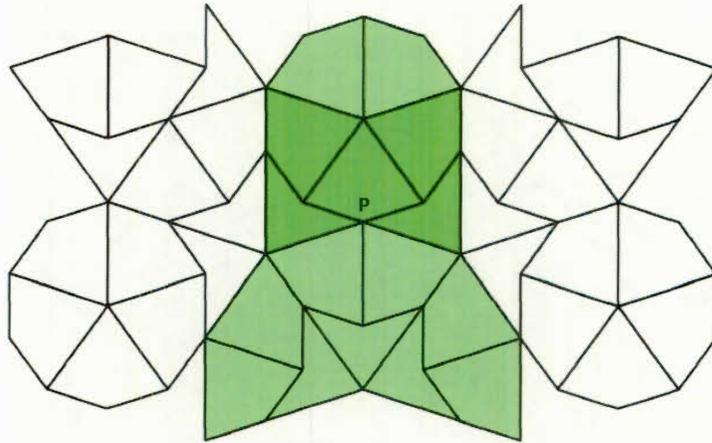


Figure 5.11: Nœud papillon court dans le royaume du *valet*.

Démonstration : Sur la figure 5.11, le voisinage du sommet P ne peut être que le *valet*, et on voit comment le nœud papillon court s'inscrit dans le royaume correspondant. \square

5.3.2 Chenilles pleinement feuillues dans quelques *patches* de base

Commençons par considérer le nœud papillon court et ses tuiles adjacentes. La figure 5.12a montre une chenille de Penrose C_S pleinement feuillue inscrite dans ce patch. Cette chenille compte 4 feuilles pour 7 sommets et on vérifie facilement que c'est le nombre maximal de feuilles pour cet ordre. Il s'agit du plus grand arbre pleinement feuillu dans ce *patch* tel qu'il soit possible de le prolonger en suivant le *worm* des deux côtés, et il est unique⁴. Notons que le cerf-volant central est de degré au plus 2 dans cette configuration, autrement on aurait un cycle.

Dans le *patch* composé du nœud papillon long et de ses tuiles adjacentes, comme le montre la figure 5.12b, le plus grand arbre pleinement feuillu tel qu'il soit

4. Quand on parle d'unicité, c'est toujours à isométrie près.

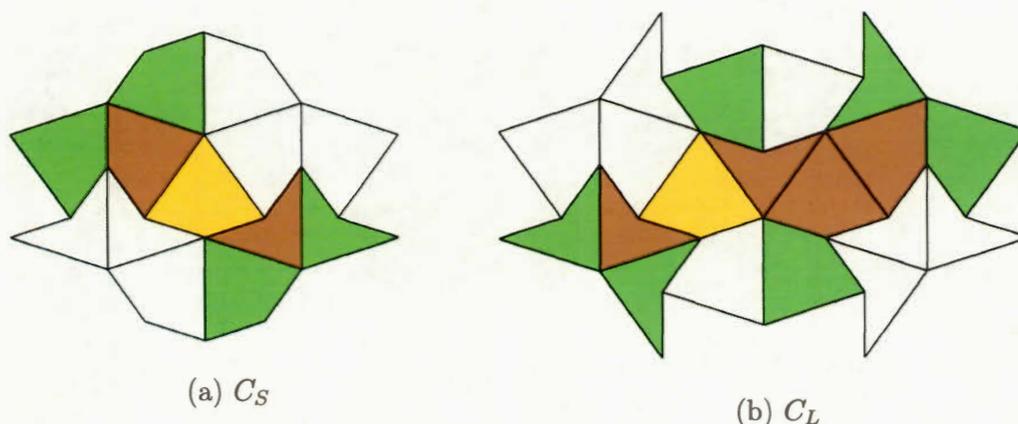


Figure 5.12: Chenilles pleinement feuillues dans les *patches* papillons : (a) (respectivement (b)) Chenille pleinement feuillue dans le *patch* composé du nœud papillon court (resp. long) et de ses tuiles adjacentes. Les tuiles sont colorées selon les degrés des sommets correspondants.

possible de le prolonger en suivant le *worm* des deux côtés compte 6 feuilles pour 11 sommets. Il est aussi unique à isométrie près et c'est une chenille.

Ces deux *patches* étant côte-à-côte, on voit bien ce qui se produit quand un nœud papillon court et un nœud papillon long se suivent dans un *worm* : avec la combinaison *SL* (court à gauche et long à droite) par exemple, les deux fléchettes de C_S sont confondues avec deux fléchettes de C_L , de sorte que l'on perd 2 feuilles mais aucun cycle n'est créé avec les feuilles adjacentes au *worm*. Le nouveau graphe obtenu (somme des deux chenilles) est alors une chenille d'ordre 16 comptant $4 + 6 - 2 = 8$ feuilles. On obtient la même chose dans le sens *LS*, si ce n'est que les tuiles confondues sont des cerfs-volants.

Comme on ne peut pas avoir deux nœuds papillons courts consécutifs (*SS*), la seule combinaison restante est *LL*. Dans ce cas, l'une des deux chenilles est symétrique de l'autre et la somme des deux est encore une chenille, qui compte $2 \cdot 6 - 2 = 10$ feuilles pour 20 sommets.

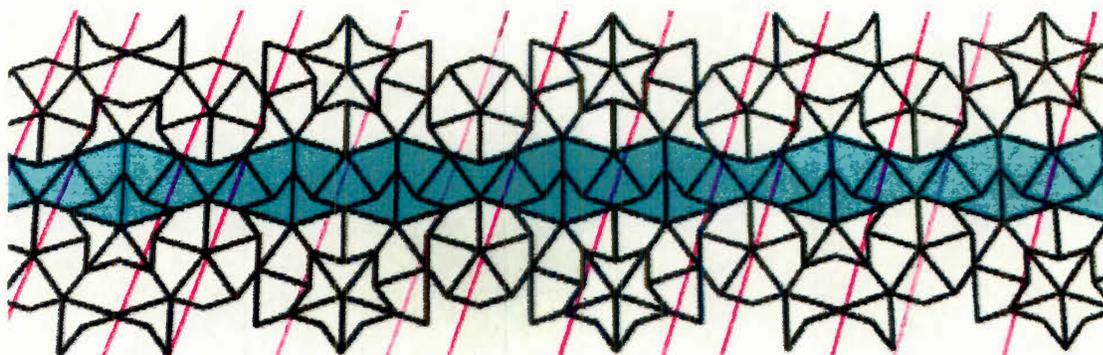


Figure 5.13: Un ensemble de barres d'Ammann parallèles le long d'un *worm* .

Soient C'_S et C'_L les chenilles obtenues à partir de C_S et C_L en retirant les feuilles destinées à être confondues dans un nœud papillon adjacent (celles sur les côtés), alors C'_S a 2 feuilles pour 5 sommets et C'_L a 4 feuilles pour 9 sommets. Soit q_S (resp. q_L) le ratio du nombre de feuilles sur le nombre de sommets dans C'_S (resp. C'_L), alors $q_S = 2/5$ est inférieur à $q_L = 4/9$. Par conséquent, on voudrait avoir le plus de nœuds papillons longs possible dans le *worm* sur lequel chaque chenille s'appuie.

La figure 5.13 montre comment un ensemble de barres d'Ammann parallèles détermine une suite de nœuds papillons dans un *worm* : chaque intervalle L est à cheval sur deux nœuds papillons (longs ou courts), et chaque intervalle S traverse le milieu d'un nœud papillon long. Ainsi, chaque nœud papillon court correspond à un intervalle L dans une suite musicale et chaque nœud papillon long correspond à intervalle L et un intervalle S dans la même suite. Par conséquent, L correspond à C'_S qui compte 2 feuilles pour 5 tuiles, et S correspond à $C'_L - L$, c'est-à-dire 2 feuilles pour 4 tuiles.

Par conséquent, on peut se concentrer sur les intervalles L et S (donc les suites musicales) au lieu des nœuds papillons . Comme chaque intervalle donne 2 feuilles, il suffit de déterminer le nombre d'intervalles qui composent la chenille et combien

d'entre eux sont longs. Or d'après la proposition 3.4.9, si la chenille s'étend sur k intervalles, alors le nombre x_k d'intervalles L de la suite correspondante ne peut prendre que deux valeurs : x et $x + 1$ telles que $\frac{x}{k} < \frac{1}{\varphi} < \frac{x+1}{k}$, ce qui équivaut à $x = \left\lfloor \frac{k}{\varphi} \right\rfloor$ ou $x = \left\lceil \frac{k}{\varphi} \right\rceil - 1$. Plus précisément, c'est la valeur correspondant à la meilleure approximation de $\frac{1}{\varphi}$ qui sera correcte.

Soient n l'ordre de notre chenille et k le nombre d'intervalles qui la traversent, alors on doit avoir

$$5 \frac{k}{\varphi} + 4 \left(k - \frac{k}{\varphi} \right) \simeq n$$

c'est-à-dire

$$\frac{k}{\varphi} + 4k \simeq n$$

donc

$$k \left(4 + \frac{1}{\varphi} \right) \simeq n$$

ce qui nous donne

$$k \simeq \frac{n}{4 + \frac{1}{\varphi}}.$$

Comme il est plus simple d'ajouter quelques tuiles aux extrémités que de les enlever, on choisit

$$k = \left\lfloor \frac{n}{4 + \frac{1}{\varphi}} \right\rfloor.$$

Le nombre de feuilles sur les intervalles est alors $2k$ et puisque $4 < 4 + \frac{1}{\varphi} < 5$, il y a au plus 5 tuiles restantes à ajouter à une extrémité ou l'autre de la chenille. Soit Δ le nombre de tuiles restantes. Si $0 \leq \Delta \leq 2$ alors il suffit d'ajouter Δ feuilles : jusqu'à une de chaque côté. Si $3 \leq \Delta \leq 4$, la meilleure stratégie consiste à ajouter une feuille d'un côté et 2 ou 3 tuiles de l'autre, dont une n'est pas une feuille. Enfin, si $\Delta = 5$ alors on ajoute 3 tuiles dont 2 feuilles d'un côté et 2 tuiles dont une feuille de l'autre. Nous avons alors prouvé le théorème 5.3.3 :

THÉORÈME 5.3.3 – Soit $\ell_{kd}(n)$ le nombre de feuilles d'une chenille d'ordre n construite selon la procédure ci-haut pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors ℓ_{kd} est une minoration de la fonction feuille pour les pavages de Penrose et on a

$$\ell_{kd}(n) = 2k + \begin{cases} \Delta & \text{if } 0 \leq \Delta \leq 2 \\ \Delta - 1 & \text{if } 3 \leq \Delta \leq 4 \\ 3 & \text{if } \Delta = 5 \end{cases}$$

où $k = \lfloor \frac{n}{4 + \frac{1}{\varphi}} \rfloor$ et $\Delta = n - 4k - \lceil \frac{k}{\varphi} \rceil + 1$.

Finalement, on déduit des théorèmes 5.2.4 et 5.3.3 que

COROLLAIRE 5.3.4 – Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{2n}{4 + \frac{1}{\varphi}} \leq L_{kd}(n) \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1$$

En notant que $\frac{2}{4 + \frac{1}{\varphi}} \simeq 0,433$, on peut considérer que l'écart entre la minoration et la majoration de la fonction feuille est raisonnable.

CONCLUSION

L'objectif initial était de trouver une fonction feuille pour les pavages de Penrose, à l'instar de ce qui avait déjà été fait pour les polyominos et polycubes. Pour cela, il a fallu se familiariser d'une part avec les pavages de Penrose, d'autre part avec les travaux déjà réalisés sur les arbres pleinement feuillus. Les premières implémentations ont été faites assez tôt, permettant à la fois d'obtenir un début de réponse et de se rendre compte des limites de cette démarche.

Une étude plus approfondie des pavages en général et de ceux de Penrose en particulier s'est imposée, apportant au passage une plus grande compréhension des sous-problèmes FLIS déjà traités, dans des grilles régulières. Au moment de choisir le sujet, nous n'avions pas conscience de la marge entre pavage régulier et pavage apériodique. Aussi, peut-être aurait-il été plus judicieux de commencer par étudier la question dans des pavages périodiques, ce qui serait probablement très intéressant !

La beauté des pavages de Penrose et leurs propriétés surprenantes ont en revanche exacerbé la motivation à poursuivre dans cette voie malgré les difficultés. Bien que leur étude prenne du temps et que certaines informations ne soient pas simples à trouver, on est sans cesse fasciné par les découvertes que l'on fait.

Ce mémoire donne des éléments de réponse et des pistes pour trouver la fonction feuille des pavages *kites and darts* de Penrose, et la démarche gagnante permettrait sûrement de trouver un équivalent pour les pavages "rhombes". À défaut d'avoir trouvé la fonction feuille, nous l'avons bornée, ce qui est un début. L'étude des chenilles de Penrose peut être poursuivie, notamment en étudiant le passage d'un

worm à l'autre, ou encore en étudiant les interactions possibles entre les *worms* et les royaumes. Nous avons récemment trouvé une piste intéressante, à partir d'un motif optimal, et avons hâte de découvrir si cela nous donnera la fonction feuille des pavages *kites and darts* de Penrose !

ANNEXE A

PROGRAMME PYTHON POUR LA FONCTION FEUILLE

Ce programme Python, écrit par Émile Nadeau, permet de rechercher le nombre maximal de feuilles des sous-arbres d'un graphe en fonction de leur taille.

```
1 from collections import deque
2
3 def ComputeL(G):
4     """Compute the maximal number of leaves that can be obtained
5         in a tree which is an induced subgraph of size m of G for
6         each m between 0 and |G|.
7     INPUT:
8         G - a graph, in which the vertices are 0,1,2,...,n-1
9     OUTPUT:
10        A dictionnary L that associates to the number of vertices
11            , the
12        maximal number of leaves.
13    """
14    global L
15    n=G.num_verts()
16    L=dict([(i,0) for i in range(0,n+1)])
17    ComputeLRecursive(G,0,n,set())
18    return L
19
20 def ComputeLRecursive(G,i,n,V_add):
21     """Explore all the possible subgraphs of G and update the
22         dictionnary L to keep track of the maximum.
23     INPUT:
24         G - the graph of the connected component of the original
25             graph (without the rejected vertices) containing the
26             vertices of V_add
27         i - the vertex of G, the procedure has to branch on.
28         n - The number of vertices of the graph it explores
29         V_add - A set of vertices that are already included in
30             the solution
```

```

26  OUTPUT:
27      Branchs with including/excluding a vertex i of the
          solution. When at the end of the research tree,
          updates a global dictionnary L created by ComputeL(G)
28  """
29  global L
30  (l,connexity_lack)=subgraphStat(G,V_add)
31  acyclic=(l!=-1)
32  m=len(V_add)
33  promising=sum([L[m]<l*(connexity_lack==0)]+[L[m+j]<l+j-
          connexity_lack for j in range(1,G.num_verts()-m)])>0
34  if i==n and acyclic and connexity_lack==0:
35      #All vertices are either included or excluded
36      L[m]=max(L[m],l)
37  elif acyclic and promising and i<n:
38      #The branch is valid and promising
39      if i in G.vertices():
40          #The vertex is in the connected component G
41          V_add.add(i)
42          ComputeLRecursive(G,i+1,n,V_add)
43          V_add.remove(i)
44          neighbors_of_i=G.neighbors(i)
45          G.delete_vertex(i)
46          connected_component=G
47          connectable=True
48          if len(V_add)>0:
49              for v in V_add: break
50              C=G.connected_component_containing_vertex(v)
51              connectable=V_add.issubset(C)
52              if len(C)<G.num_verts():
53                  connected_component=G.subgraph(vertices=C,
                      algorithm="add")
54          if connectable:
55              #rejecting i does not separate V_add
56              ComputeLRecursive(connected_component,i+1,n,V_add
          )
57          G.add_vertex(i)
58          for j in neighbors_of_i:
59              G.add_edge(i,j)
60      else:
61          #The vertex is not in the connected component G
62          ComputeLRecursive(G,i+1,n,V_add)
63
64
65  def subgraphStat(G,V):
66      """Compute some statistics about the induced subgraph of G by
          V using an adaptation of the breadth-first search.
67
68      INPUT:
69          G - a graph
70          V - a subset of vertices

```

```

71  OUTPUT:
72      l - number of leaves of the induced subgraph if it is a
       forest, -1 if not.
73      connexity_lack - A lower bound on the increase in the
       number of internal vertices required to connect the
       induced subgraph if it is a forest with value 0 iff
       the subforest is a tree. -1 if the induced subgraph is
       not a forest"""
74
75  if len(V)==0:
76      return 0,0
77  visited=dict()
78  number_of_component=0
79  l=0
80  for v in V:
81      visited[v]=False
82  while v!=None:
83      #Explore a connected component
84      number_of_component+=1
85      Q=deque([v])
86      while len(Q)>0:
87          v=Q.popleft()
88          if visited[v]:
89              #The subgraph is not acyclic
90              return -1, -1
91          visited[v]=True
92          degree=0
93          for son in G.neighbor_iterator(v):
94              if son in V:
95                  degree+=1
96                  if not visited[son]:
97                      Q.append(son)
98              if degree==1:
99                  #The vertex is a leaf
100                 l+=1
101         #Search for a new connected component
102         v=None
103         for s in V:
104             if not visited[s]:
105                 v=s
106                 break
107
108     return l,int(number_of_component>1)

```


ANNEXE B

CODE SAGE POUR LES PAVAGES DE PENROSE

B.1 Génération d'un *patch* "rhombes"

Code basé sur un tutoriel de Thierry Monteil (2017). Dans un souci de précision, la classe *CDF* (*complex double float*) est utilisée pour définir les points, plutôt que la classe *complex*.

```
1 phi = (1+sqrt(5))/2
2
3 def base_triangle(color):
4     if color == 0:
5         C = CDF(0)
6         A = CDF(exp(2*pi/5*I))
7         B = CDF((C-A) * exp(pi/5*I) + A)
8     elif color == 1:
9         C = CDF(0)
10        A = CDF(exp(pi/5*I))
11        B = CDF((C-A) * exp(3*pi/5*I) + A)
12    else:
13        raise ValueError("the color must be either 0 or 1")
14    return (color, A, B, C)
15
16 TA = base_triangle(0)
17 TO = base_triangle(1)
18
19 def base_tiling():
20     code, A,B,C = TO
21     D = CDF(A * exp(-2*pi/5*I))
22     return [TO, (code, D,B,C)]
23
24 def plot_triangle(T, *colors):
25     ABC = list(T[1:])
26     code = T[0]
27     if len(colors) >= 2:
```

```

28     color = colors[code]
29     if len(colors) >= 3 : side_color = colors[2]
30     else: side_color = "black"
31 else:
32     if code == 0 : color = 'red'
33     else: color = 'blue'
34     side_color = "black"
35 P = Graphics()
36 P += polygon(T[1:], color=color, thickness=1, axes=False)
37 L = line([T[2], T[1], T[3]], color=side_color)
38 S = P + L
39 return S
40
41 def subdivide(T):
42     color, A, B, C = T
43     if color == 0:
44         P = CDF(A + (B-A)/phi)
45         return ((0, C,P,B), (1, P,C,A))
46     else:
47         Q = CDF(B + (A-B)/phi)
48         R = CDF(B + (C-B)/phi)
49         return ((0, R,Q,A), (1, Q,R,B), (1, R,C,A))
50
51 def iteration(T,n):
52     for i in range(n):
53         T1 = []
54         for t in T:
55             T1.extend(subdivide(t))
56         T = T1
57     return T
58
59 def plot_tiling(T, *colors):
60     g = Graphics()
61     if len(colors) >= 2:
62         a,b = colors[0], colors[1]
63         if len(colors) >= 3:
64             c = colors[2]
65             for t in T: g += plot_triangle(t, a,b,c)
66         else:
67             for t in T: g += plot_triangle(t, a,b)
68     else:
69         for t in T: g += plot_triangle(t)
70     return g
71
72 T = base_tiling()
73 P = iteration(T,6)
74 S = plot_tiling(P, 'orange', 'yellow', 'grey')
75 show(S)

```

B.2 Génération d'un *patch kites and darts*

Code permettant de générer un pavage *kites and darts* par substitution.

```

1  phi = (1+sqrt(5))/2
2  l = 1/phi
3
4  def star():
5      darts = [(0, CDF(0), CDF(exp(2*k*pi/5*I)),\
6                CDF(1*exp((2*k+1)*pi/5*I)),\
7                CDF(exp(2*(k+1)*pi/5*I))) for k in range(5)]
8      return darts
9
10 def base_tiling():
11     kites1 = [(1, CDF((1+l)*exp((2*k+1)*pi/5*I)),\
12              CDF(1*exp((2*k+1)*pi/5*I)), CDF(exp(2*k*pi/5*I)),\
13              CDF((1+l)*exp(2*k*pi/5*I))) for k in range(5)]
14     kites2 = [(1, CDF((1+l)*exp((2*k+1)*pi/5*I)),\
15              CDF((1+l)*exp(2*(k+1)*pi/5*I)), CDF(exp(2*(k+1)*pi
16              /5*I)),\
17              CDF(1*exp((2*k+1)*pi/5*I))) for k in range(5)]
18     T = star() + kites1 + kites2
19     return T
20
21 def plot_tile(t, *colors):
22     """Function to plot a tile t of the form (code, A,B,C,D)
23     where A,B,C,D are points (complex numbers).
24     You can optionally specify the colors of the tiles (darts
25     first, then kites) and the color of the sides of the tiles
26     """
27     code = t[0]
28     if len(colors) >= 2:
29         color = colors[code]
30         if len(colors) >= 3 : side_color = colors[2]
31         else: side_color = "black"
32     else:
33         if code == 0 : color = 'red'
34         else: color = 'blue'
35         side_color = 'black'
36     g = Graphics()
37     g += polygon(t[1:], color=color, thickness=1, axes=False)
38     g += polygon(t[1:], color=side_color, fill=False)
39     return g
40
41 def subdivide(t):
42     code, A, B, C, D = t
43     if code == 0:
44         M = CDF(A + (B-A)/phi)
45         N = CDF(A + (D-A)/phi)
46         E = CDF(A + exp(2*I*pi/5)*(C-A))

```

```

43     F = CDF(A + exp(-2*I*pi/5)*(C-A))
44     return ((0, D,E,N,C), (0, B,C,M,F), (1, A,M,C,N))
45 else:
46     P = CDF(B + (A-B)/phi)
47     Q = CDF(A + (C-A)/phi)
48     R = CDF(D + (A-D)/phi)
49     S = CDF(A + exp(2*I*pi/5)*(Q-A))
50     T = CDF(A + exp(-2*I*pi/5)*(Q-A))
51     return ((0, A,Q,R,S), (0, A,T,P,Q), (1, B,C,Q,P), (1, D,R
52             ,Q,C))
53 def iteration(T,n):
54     for i in range(n):
55         T1 = set()
56         for t in T:
57             S = subdivide(t)
58             for s in S:
59                 T1.add(s)
60         T = list(T1)
61     return T
62
63 def plot_tiling(T, *colors):
64     g = Graphics()
65     if len(colors) >= 2:
66         a,b = colors[0], colors[1]
67         if len(colors) >= 3:
68             c = colors[2]
69             for t in T: g += plot_tile(t, a,b,c)
70         else:
71             for t in T: g += plot_tile(t, a,b)
72     else:
73         for t in T: g += plot_tile(t)
74     return g
75
76 T0 = base_tiling()
77 T = iteration(T0,4)
78 S = plot_tiling(T, 'orange', 'yellow', 'grey')
79 show(S)

```

B.3 Configurations de sommets dans un pavage *kites and darts*

Les sept configurations de sommets de la figure 3.14.

```

1 def sun():
2     return [(1, CDF(0), CDF(exp(2*k*pi/5*I)*exp(-pi/2*I)),\
3             CDF(exp((2*k+1)*pi/5*I)*exp(-pi/2*I)),\
4             CDF(exp(2*(k+1)*pi/5*I)*exp(-pi/2*I)))\
5             for k in range(5)]

```

```

6
7 def star():
8     return [(0, CDF(0), CDF(exp(2*k*pi/5*I)*exp(pi/2*I)),\
9             CDF(1*exp((2*k+1)*pi/5*I)*exp(pi/2*I)),\
10            CDF(exp(2*(k+1)*pi/5*I)*exp(pi/2*I)))\
11            for k in range(5)]
12
13 def ace():
14     return [t for t in star_empire()\
15            if t[1].real() == 0 and t[3].imag() < -1-2]
16
17 def deuce():
18     kite = [(1, CDF(0), CDF(exp(-pi/5*I)*exp(-pi/2*I)),\
19            CDF(exp(-pi/2*I)), CDF(exp(pi/5*I)*exp(-pi/2*I)))]
20     return iteration(kite,1)
21
22 def jack():
23     J = [(1, CDF(0), CDF(exp(2*k*pi/5*I)*exp(pi/10*I)),\
24            CDF(exp((2*k+1)*pi/5*I)*exp(pi/10*I)),\
25            CDF(exp(2*(k+1)*pi/5*I)*exp(pi/10*I)))\
26            for k in range(2)]
27     J += [(1, CDF(exp(-pi/2*I)), CDF(1*exp(-pi/10*I)),\
28            CDF(0), CDF(1*exp(-9*pi/10*I)))]
29     J += [(0, CDF(exp(2*k*pi/5*I)*exp(pi/2*I)), CDF(0),\
30            CDF(1*exp(-2*k*pi/5*I)*exp(-pi/2*I)),\
31            CDF(exp(2*k*pi/5*I)*exp(pi/2*I)+exp(-pi/2*I)))\
32            for k in {-1,1}]
33     return J
34
35 def queen():
36     A = CDF(exp(pi/5*I)*exp(pi/2*I))
37     B = CDF(exp(-pi/5*I)*exp(pi/2*I))
38     C = CDF(exp(-pi/2*I))
39     Q = [(0, CDF(0), A, CDF(1*exp(pi/2*I)), B)]
40     Q += [(1, P, CDF(P-B), CDF(P+C), CDF(P-A)) for P in {A,B}]
41     Q += [(1, C, CDF(C+P*exp(-pi/5*I)), CDF(C+P),\
42            CDF(C+P*exp(pi/5*I))) for P in {A,B}]
43     return Q
44
45 def king():
46     A = CDF(exp(-9*pi/10*I))
47     B = CDF(exp(-pi/10*I))
48     C = CDF(1*exp(-pi/2*I))
49     K = [(0, CDF(0), CDF(exp(2*k*pi/5*I)*exp(-pi/10*I)),\
50            CDF(1*exp((2*k+1)*pi/5*I)*exp(-pi/10*I)),\
51            CDF(exp(2*(k+1)*pi/5*I)*exp(-pi/10*I)))\
52            for k in range(3)]
53     K += [(1, P, CDF(P+(C-P)*exp(-pi/5*I)), C,\
54            CDF(P+(C-P)*exp(pi/5*I))) for P in {A,B}]
55     return K

```

B.4 Fonction iteration corrigée

```

1 def iteration(T,n):
2     for k in range(n):
3         T1 = []
4         for t in T:
5             S = subdivide(t)
6             for s in S:
7                 T1.append(s)
8         T = list(T1)
9         # remove doubles
10        i = 0
11        while i < len(T)-1:
12            for j in range(i+1,len(T)):
13                if T[i][0] == T[j][0]\
14                    and all([round(T[i][k].real(),n+2)\
15                               == round(T[j][k].real(),n+2)\
16                               and round(T[i][k].imag(),n+2)\
17                               == round(T[j][k].imag(),n+2)\
18                               for k in range(1,4)]):
19                    T.pop(j)
20                    break
21            i+=1
22        return T

```

B.5 Fonction d'adjacence dans un graphe "kites and darts"

Note : Cette fonction est correcte mathématiquement mais pour qu'elle fonctionne correctement il faudrait là aussi utiliser des arrondis pour les comparaisons.

```

1 def adjacent_in_Penrose_kd(u,v):
2     if u[0] == 1 and v[0] == 0: u,v = v,u
3     if u[0] == 0:
4         if v[0] == 0:
5             if u[1] == v[1] and\
6                 len({u[2], u[4]}.intersection({v[2], v[4]})) == 1:
7                 return True
8         else:
9             if (u[3] in {v[2], v[4]} and v[3] in {u[2], u[4]})\
10                or (u[1] in {v[2], v[4]} and v[1] in {u[2], u[4]}):
11                return True
12     else:
13         if (u[1] == v[1] or u[3] == v[3])\
14            and len({u[2], u[4]}.intersection({v[2], v[4]})) == 1:
15            return True
16     return False

```

B.6 Construction du graphe pour un pavage "rhombes"

```

1  def triangles_to_rhombs(T):
2      T1 = set()
3      for t in T:
4          code,A,B,C = t
5          if code == 0: # thin rhomb
6              D = CDF(B+C-A)
7              T1.add((0,A,B,D,C,CDF((B+C)/2)))
8          else: # thick rhomb
9              D = CDF(B+C-A)
10             T1.add((1,A,B,D,C,CDF((B+C)/2)))
11     T = list(T1)
12     i = 0
13     while i < len(T)-1:
14         for j in range(i+1,len(T)):
15             if round(T[i][5].real(),n+2)\
16                 == round(T[j][5].real(),n+2)\
17                 and round(T[i][5].imag(),n+2)\
18                 == round(T[j][5].imag(),n+2):
19                 T.pop(j)
20                 break
21         i+=1
22     return T
23
24  def Penrose_plot(G):
25     g = Graphics()
26     for t in G.vertices():
27         g += polygon(t[1:5], color='black',\
28                     fill=False, thickness=1, axes=False)
29     return g
30
31  P = iteration(base_tiling(),3)
32  S = plot_tiling(P, 'orange', 'yellow', 'grey')
33  show(S)
34
35  P = triangles_to_rhombs(P)
36  G = Graph([P, adjacent_in_Penrose])
37  S1 = Penrose_plot(G)
38  show(S1)
39
40  corresp = dict([(P[k],k) for k in range(len(P))])
41  G_unlabelled = copy(G)
42  G_unlabelled.relabel(perm=corresp)
43  S2 = plot(G_unlabelled, layout='spring')
44  S2.show()

```



RÉFÉRENCES

- Bindi, L., Steinhardt, P. J., Yao, N. et Lu, P. J. (2009). Natural quasicrystals. *Science*, 324(5932), 1306–1309. <http://dx.doi.org/10.1126/science.1170827>. Récupéré de <http://science.sciencemag.org/content/324/5932/1306>
- Blondin Massé, A., de Carufel, J., Goupil, A., Lapointe, M., Nadeau, É. et Vandomme, É. (2018a). Fully leafed induced subtrees. Dans C. Iliopoulos, H. W. Leong, et W.-K. Sung (dir.). *Combinatorial Algorithms*, 90–101., Cham. Springer International Publishing. http://dx.doi.org/10.1007/978-3-319-94667-2_8
- Blondin Massé, A., de Carufel, J., Goupil, A. et Samson, M. (2018b). Fully leafed tree-like polyominoes and polycubes. Dans L. Brankovic, J. Ryan, et W. F. Smyth (dir.). *Combinatorial Algorithms*, 206–218., Cham. Springer International Publishing. http://dx.doi.org/10.1007/978-3-319-78825-8_17
- Blondin Massé, A., de Carufel, J. et Goupil, A. (2018). Saturated Fully Leafed Tree-Like Polyforms and Polycubes. *ArXiv e-prints*. Récupéré de <https://arxiv.org/abs/1803.09181v1>
- Bollobás, B. (1998). *Modern graph theory*. Graduate texts in mathematics ; 184. New York : Springer. ISBN 0-387-98491-7.
- de Bruijn, N. G. (1981). "Algebraic theory of Penrose's non-periodic tilings of the plane". *Mathematics Proceedings*, A84, 39–66. Reprinted in Steinhardt et Ostlund (1987).

- Gardner, M. (1997). *Penrose Tiles to Trapdoor Ciphers* (revised éd.). The Mathematical Association of America. ISBN 0-883856-521-6.
- Goodman-Strauss, C. (1999). A small aperiodic set of planar tiles. *European Journal of Combinatorics*, 20(5), 375 – 384. <http://dx.doi.org/https://doi.org/10.1006/eujc.1998.0281>. Récupéré de <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0195669898902815>
- Grünbaum, B. et Shephard, G. C. (1987). *Tilings and Patterns*. W. H. Freeman and Company, New York. ISBN 0-7167-1193-1.
- Grünbaum, B. et Shephard, G. C. (2016). *Tilings and Patterns*. Dover Publications, Inc. Second edition. ISBN 978-0-486-46981-2.
- Harary, F. et Schwenk, A. J. (1973). The number of caterpillars. *Discrete Mathematics*, 6(4), 359 – 365. [http://dx.doi.org/https://doi.org/10.1016/0012-365X\(73\)90067-8](http://dx.doi.org/https://doi.org/10.1016/0012-365X(73)90067-8). Récupéré de <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0012365X73900678>
- Hershberger, J., Polishchuk, V., Speckmann, B. et Talvitie, T. (2014). Geometric kth shortest paths : The applet. Dans *Proceedings of the Thirtieth Annual Symposium on Computational Geometry*, SOCG'14, 96 :96–96 :97., New York, NY, USA. ACM. <http://dx.doi.org/10.1145/2582112.2595650>. Récupéré de <http://doi.acm.org/10.1145/2582112.2595650>
- Hershberger, J. et Suri, S. (1999). An optimal algorithm for euclidean shortest paths in the plane. *SIAM J. Comput.*, 28(6), 2215–2256. <http://dx.doi.org/10.1137/S0097539795289604>. Récupéré de <https://doi.org/10.1137/S0097539795289604>
- Monteil, T. (2017). Worksheet sur les pavages de penrose. https://days86.metelu.net/sage/penrose_tiling/. Sage Days 86.

- Penrose, R. (1974). "The Rôle of Aesthetics in Pure and Applied Mathematical Research". *Bulletin of the Institute of Mathematics and its Applications*, 266–271. Reprinted in Steinhardt et Ostlund (1987).
- Penrose, R. (1978). "Pentaplexity". *Math. Intelligencer*, 2(1), 32–37.
- Penrose, R. (1979). "Set of tiles for covering a surface". *United States Patent*, (4,133,152). Jan. 9, 1979.
- Ramachandrarao, P., Sastry, G. V. S., Pandey, L. et Sinha, A. (1991). "A Novel Algorithm for a Quasiperiodic Plane Lattice with Fivefold Symmetry". *Acta Cryst.*, A47, 206–210.
- Robinson, R. M. (1971). Undecidability and nonperiodicity for tilings of the plane. *Inventiones mathematicae*, 12, 177–209. Récupéré de <http://eudml.org/doc/142073>
- Rosen, K. (2002). *Mathématiques discrètes*. Chenelière/MacGraw-Hill. ISBN 2-89461-642-2.
- Sinha, A. et Kande, D. (2006). "Self-assembly-assisted growth of two-dimensional Penrose tiling". *Philosophical Magazine Letters*, 86(2), 75–80.
- Sinha, A. et Modi, G. (2014). "Penrose Tilings and Parity Conditions". *The National Academy of Sciences, India*.
- Steinhardt, P. J. et Ostlund, S. (1987). *The Physics of Quasicrystals*. World Scientific. Collection of reprints. ISBN 9971-50-226-7.

INDEX

- adjacent (graphe), 6
- adjacent (pavage), 28
- apériodique, 44
- arbre, 11
 - de Penrose, 98
 - de recouvrement, 19
 - minimal, 20
 - dérivé, 21
- arc, 7
- arête (graphe), 5
- arête (pavage), 26
- arêtes
 - multiples, 6
 - orientées, 7
 - parallèles, 6
- as (*ace*), 66, 69
- barres d'Ammann, 62
- Batman, 67
- boucle, 6
- Cartwheel tiling*, 66
- centre d'un pavage, 37
- cerf-volant, 55
- chaîne, 9
- chemin, 9
 - simple, 11
- chemins
 - indépendants, 10
- chenille, 22
 - de Penrose, 112
- classe, 11
 - de transitivité, 37
- composante connexe, 10
- composition, 45
- Conway worm*, 71
- cycle, 10, 13
 - simple, 11
- dame, 69
- décomposition, 45
 - triangulaire, 56
- degré, 8
- deux (*deuce*), 69
- diamètre (d'un graphe), 10
- distance
 - entre deux sommets (graphe), 10
 - euclidienne, 88
 - uniforme, 88
- drapeau, 39
- empilement compact, 25

empire, 75

étoile, 58, 69

extrémité

d'une arête, 6

d'un graphe, 8

extrémité

d'un chemin, 10

feuille, 21

fléchette, 55

fonction feuille, 82

forêt, 11

graphe

acyclique, 11

biparti, 11

complet, 14

complet, 13

connexe, 10

de Penrose, 98

de Petersen, 15

discret, 12

orienté, 7

r -parti, 11

complet, 12

régulier, 9

simple, 5, 6

valué, 20

vide, 12

graphes

isomorphes, 8

grille

carrée, 37, 88

cubique, 86

hexagonale, 87

régulière, 86

triangulaire, 87

groupe

cyclique, 35

de tuiles induit, 37

diédral, 35

de symétrie, 35

hypercube, 15

incident (graphe), 6

incident (pavage), 28

inflation, 45

isométrie, 33

identité, 34

isomorphisme local, 49

isthme, 10

jointure, 12

kites and darts, 55

limite d'inclusion des roues, 67

longueur

d'un chemin, 10

- losanges de Penrose, 57
- multigraphe, 6
 - orienté, 7
- nœuds papillons, 71
- nombre d'or, 54
- ordre, 5
- parallélogrammes périodes, 37
- patch, 30
- patch* D_5 , 68
- pavage, 25
 - bord-à-bord, 28
 - diédral, 32
 - isoédral, 37
 - isogonal, 39
 - isotoxal, 39
 - marqué, 36
 - métriquement équilibré, 42
 - monoédral, 31
 - monogonal, 39
 - monotoxal, 39
 - normal, 41
 - parallélogramme, 31
 - périodique, 36
 - régulier, 39
 - roue, 66
 - à similitudes, 45
 - d'ordre k , 47
 - symétrique, 36
- pavages
 - congrus, 29
 - égaux, 29
- point d'articulation, 10
- polyamant, 87
- polycube, 87
- polyhexe, 87
- polyoïde-arbre, 89
- polyoïde, 87
- polyomino, 87
- polyomino-arbre, 89
- pont, 10
- profondeur, 21
- prototuile, 31
- rayon (d'un graphe), 10
- recomposition, 60
- recouvrement, 25
- réflexion glissée, 34
- relation d'adjacence
 - de degré 3, 89
 - de degré 4, 88
 - de degré 6, 89
- rhombes, 57
- roi, 69
- roue, 13

d'ordre n , 67

royaume, 109

snark, 15

soleil, 58, 69

sommet (graphe), 5

- final, 10
- initial, 10
- interne, 21
- isolé, 8
- pendant, 8

sommet (pavage), 26

sous-arbre, 20

- induit, 20
- pleinement feuillu, 82

sous-graphe, 7

- couvrant, 7
- induit, 7

stabilisateur, 37

substitution, 63

suite

- d'indices, 72
- musicale, 76

symétrie, 34

- d'un pavage, 36
- rotationnelle, 34

Tiling problem, 32

treillis, 37

triangles d'or, 63

trou, 75

tuile, 25

tuiles

- A, B, $\varphi A'$, 56

- équivalentes, 37

- forcées, 75

- k -rep, 47

union de graphes, 12

valence, 28

valet, 69

voisin (graphe), 6

voisin (pavage), 28

voisinage, 28

voisinage de sommet, 68