UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL

DES NOTIONS SUR LA GÉOMETRIE HYPERBOLIQUE COMPLEXE

MÉMOIRE

PRÉSENTÉ

COMME EXIGENCE PARTIELLE

DE LA MAÎTRISE EN MATHÉMATIQUES

PAR

TARIK JARI

FÉVRIER 2008

TABLE DES MATIÈRES

RÉSUMÉ v

INTRODUCTION 1

CHAPITRE I
PRÉLIMINAIRE 2

1.1 Lemme de Schwarz-Pick 2

1.2 Théorie de la classification des surfaces de Riemann 4

1.3 Théorème d'Ascoli 4

1.4 Théorème de Weierstrass 5

1.5 Théorème de Hurwitz 5

1.6 Domaine d'holomorphie 6

1.7 Variété taut 6

CHAPITRE II
HYPERBOLICITÉ AU SENS DE KOBAYASHI 7

2.1 Définition et Propriétés. 7

2.2 Espace hyperboliquement plongé. 13

2.3 Courbure et Hyperbolicité 16

2.4 Relation entre la métrique et le volume 18

CHAPITRE III
HYPERBOLICITÉ AU SENS DE BRODY 20

3.1 Théorie de base et définition. 20

3.2 Théorème de Brody 23

3.3 Applications 25

CHAPITRE IV
QUELQUES NOTIONS SUR LES PROPRIÉTÉS DE LANDEAU-SCHOTTKY 32

4.1 Hyperbolicité et propriétés de Landeau-Schottky 32

4.2 Fonction de Bloch et l'hyperbolicité 36

CONCLUSION 38

BIBLIOGRAPHIE 39

REMERCIEMENTS

Je voudrais tout d'abord exprimer mes remerciements et ma gratitude à mon directeur de recherche M. Steven Lu pour sa disponibilité et son soutien et ses encouragements le long de mon mémoire.

Je tiens à remercier M. Gerd Dethloff et M. Steven Lu et M. Steven Boyer pour l'intérêt qu'ils ont porté à mon mémoire en acceptant d'en être les rapporteurs.

RÉSUMÉ

Le texte est reparti comme suit :

Dans le premier chapitre, nous rappelons le lemme de Schwarz-Pick, le théorème d'uniformisation, le théorème d'Ascoli et de Weierstrass et de Hurwitz, le domaine d'homolorphie , variété taut.

Dans le deuxiéme chapitre, nous énoncerons la définition et des propriétés sur l'hyperbolicité au sens de Kobayashi sur une variété complexe, ainsi que les théorèmes de prolongements du type grand théorème de Picard dû à Kwak et Kiernan, et nous établissons que si la courbure sectionelle d'une variété hermitienne est bornée par une constante négative alors la variété est hyperbolique au sens de Kobayashi. Enfin, nous traiterons la déscription de la métrique et la relation avec le volume.

Dans le troisiéme chapitre, nous étudions le concept d'hyperbolicité au sens de Brody sur une variété complexe et ses applications.

Dans le quatrième chapitre je discute la propriété de Landeau-Shottky et la fonction de Bloch.

INTRODUCTION

Le but de ce travail est l'étude des notions sur la théorie d'hyperbolicité au sens de Kobayashi, au sens de Brody et ses applications.

Le premier chapitre est consacré sur la théorie de base utilisée dans les trois chapitres suivantes. Nous rappelons le lemme de Schwarz-Pick , le théorème d'uniformisation, le théorème d'Ascoli et le théorème de Weierstrass, le théorème de Hurwitz, le domaine d'homolorphie et variété taut.

Le deuxiéme chapitre est dédié à la définition d'hyperbolicité au sens de Kobayashi d'une variété complexe suivie des exemples et de ses propriètés. Après, nous énoncerons les théorèmes de prolongements de Kwak et de Kiernan. De plus, nous établissons que si la courbure sectionelle d'une variété hermitienne est bornée par une constante négative alors la variété est hyperbolique au sens de Kobayashi en utilisant le lemme d'Alhfors-Schwarz. Enfin, nous traiterons la déscription de métrique et la relation avec le volume, à savoir si la pseudo-forme de volume s'annule à un point x, alors la pseudo-métrique de Kobayashi dégénère à x.

Le troisième chapitre est consacré sur le théorème de R. Brody qui a établi un grand critère d'hyperbolicité à savoir qu'une variété M complexe compacte est hyperbolique si et seulement si elle ne contient aucune droite complexe. Dans le cas où M n'est pas compacte le théorème de R. Brody n'est pas vrai. Parmi les applications intéréssantes de théorème de R. Brody dont je traiterai dans ce travail : le théorème de Bloch, le problème de Kobayashi sur la théorie de deformation, le théorème de Marc Green, et le lemme de Borel.

Au quatrième chapitre, je discute la propriété de Landeau-Shottky, et la fonction de Bloch pour caractériser l'hyperbolicité des espaces complexes.

CHAPITRE I

PRÉLIMINAIRE

1.1 Lemme de Schwarz-Pick

Définition 1.1.1 *Soit Ω un ouvert du plan et $w(z) = w_1(z)\,|dz|^2$ une métrique hermitienne de classe C^k sur Ω. La longueur d'un chemin $\gamma : [\alpha, \beta] \longmapsto \Omega$ de classe C^1 par morceaux se calcule en posant*

$$ds^2 = \gamma^* w = w_1(\gamma(t))\,|\gamma'(t)|^2\,dt^2,$$

$$long\,(\gamma) = \int_\alpha^\beta ds = \int_\alpha^\beta \sqrt{w_1(\gamma(t))}\,|\gamma'(t)|\,dt.$$

Ètant donné deux points $a, b \in \Omega$, la distance géodésique $d_w(a,b)$ de a à b, relativement à w, est définie par :

$$d_w(a,b) = \inf_\gamma long(\gamma)$$

où l' inf *est pris sur tous les chemins $\gamma : [\alpha, \beta] \longmapsto \Omega$ de classe C^1 par morceaux tels que $\gamma(\alpha) = a, \gamma(\beta) = b$.*

Exemple 1.1.2 Pour le disque unité D et sa métrique de poincaré $|dz|^2/(1-|z|^2)^2$, qu'on prend dorenavant pour D, nous avons :

$$long(\gamma) = \int_\gamma \frac{|dz|}{1-|z|^2} = \int_\alpha^\beta \frac{|\gamma'(t)|}{1-|\gamma(t)|^2}dt.$$

Lemme 1.1.3 (Schwarz-Pick)(S. Lang, 1987) *Soit $f : D \longrightarrow D$ une application holomorphe quelconque. Alors la dérivée f' satisfait l'inégalité suivante :*

$$\frac{|f'(z)|}{1-|f(z)|^2} \leq \frac{1}{1-|z|^2}$$

en tout point $z \in D$ et l'égalité se produit si et seulement si f est un automorphisme de D.

Démonstration. On fixe $a \in D$. Soit

$$g(z) = \frac{z+a}{1+\overline{a}z} \text{ et } h(z) = \frac{z-f(a)}{1-\overline{f(a)}z}$$

où g et h sont des automorphismes de disque (transformations de Moebius) tels que $g(0) = a$ et $h(f(a)) = 0$. On pose $F = h \circ f \circ g : D \longrightarrow D$. C'est une application holomorphe telle que $F(0) = 0$, $F'(0) = h'(f(a))f'(a)g'(0)$. On a

$$F'(0) = \frac{1-|a|^2}{1-|f(a)|^2} f'(a)$$

avec $g'(0) = 1- |a|^2$ et $h'((f(a)) = \frac{1}{1-|f(a)|^2}$. D'aprés lemme de Schwarz on a $|F'(0)| \leq 1$ car ($F(0) = 0$ et $F : D \longrightarrow D$). Donc $\frac{|f'(a)|}{1-|f(a)|^2} \leq \frac{1}{1-|a|^2}$ et l'inégalité est vrai $\forall\ a \in D$. Si l'égalité se produit alors $|F'(0)| = 1$ et $F(z)/z$ atteint le maximum 1 de son module au point $z = 0$. D'aprés le principe de maximum $F(z)/z = \lambda$ avec $|\lambda| = 1$ ce qui implique que F et f sont des automorphismes de D. Si f est un automorphisme, F est un automorphisme $D \to D$ qui fixe le point 0 et alors $|F'(0)| = 1$ et on a l'égalité. □

Corollaire 1.1.4 (*i*) *Pour $f : D \longrightarrow D$ une application holomorphe, nous avons que :*

$$d_w(f(x), f(y)) \leq d_w(x, y),\ \forall x, y \in D.$$

(*ii*) *Si f est un automorphisme alors f est une isométrie.*

Démonstration. (i) D'aprés lemme de Schwarz-Pick, on a $f^*w \leq w$ et il suffit d'intégrer cette inégalité.

(ii) Même raisonnement. □

Remarque 1.1.5 Le lemme de Schwarz-Pick est un cas particulier du lemme Alhfors-Schwarz (On va le voir plus tard).

1.2 Théorie de la classification des surfaces de Riemann

Théorème 1.2.1 (Otto Forster, 1977) *Toute surface de Riemann X a un revêtement universel simplement connexe X^0 et $\frac{X^0}{G} = X$ avec G un groupe d'automorphisme de X^0 agissant discrétement et sans point fixe.*

Théorème 1.2.2 (d'Uniformisation) (Otto Forster, 1977) *Toute surface de Riemann simplement connexe est isomorphe soit à $P^1(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \cup \{\infty\} \simeq S^2$, soit à $\mathbb{C}$, soit au disque unité D qui est aussi isomorphe au demi-Plan de Poincaré $\mathcal{H}$ par $z \mapsto \frac{z-i}{z+i}$.*

On classifie topologiquement les surfaces de Riemann dans le cas compact par le genre g :

$X^0 = P^1 \Leftrightarrow g = 0$ (avec $X = P^1$)

$X^0 = \mathbb{C} \Leftrightarrow g = 1$ (avec $X = \mathbb{C}/\Lambda$ où Λ est un réseau.)

$X^0 = D \Leftrightarrow g \geq 2$.

Proposition 1.2.3 *Toute surface de Riemann compact de $g \geq 2$ est uniformisée par le disque.*

1.3 Théorème d'Ascoli

Théorème 1.3.1(d'Ascoli) (W. Kelly, 1955) *Soit X un sous espace compact d'un espace métrique et Y un espace métrique complet. Soit A une partie de l'espace des applications continues de X dans Y, noté $C(X,Y)$, muni de la distance de la convergence uniforme.*

Alors A est relativement compact si et seulement si :

1. *A est équicontinue.*
2. *$A(x) = \{f(x), f \in A\}$ est relativement compact.*

Une partie A est dite équicontinue si $\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0$ telle que $\forall x, y \in X$ et $\forall f \in A$ on a $d(x, y) \leq \delta \Longrightarrow d(f(x), f(y)) < \epsilon$

Corollaire 1.3.2 (d'Ascoli) *Soit X un espace séperable, Y un espace métrique complet (X n'est pas nécessairement compact). Soit $\{f_n\} : X \to Y$ une séquence des applications continues. On suppose que $\{f_n\}$ est équicontinue et $\{f_n(x)\}$ relativement compact pour chaque $x \in X$. Alors il existe une sous suite $\{f_{n_k}\}$ qui converge ponctuellement à une fonction continue et la convergence est uniforme dans chaque compact.*

1.4 Théorème de Weierstrass

Théorème 1.4.1 (Weierstrass)(Otto Forster, 1977) *On suppose que X est une surface de Riemann non compact et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite des points dans X qui n'a pas de point d'accumulation. Alors $\forall$ suite (c_n) dans $\mathbb{C}$, il existe une fonction holomorphe $f : X \to \mathbb{C}$ telle que $f(a_n) = c_n\ \forall n \in \mathbb{N}$.*

Corollaire 1.4.2 *Toute surface de Riemann non compacte est une variété de Stein. Plus précisement, elle vérifie le théorème de Weierstrass.*

1.5 Théorème de Hurwitz

Théorème 1.5.1 (Hurwitz)(W. Rudin, 1975) *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et (f_n) une suite de fonctions holomorphes sans zéro dans Ω qui converge uniformement sur tout compact de Ω vers une fonction holomorphe f, alors, ou bien $f = 0$, ou bien f est sans zéro dans Ω.*

1.6 Domaine d'holomorphie

Théorème 1.6.1(Hartogs) (M. Field, 1982) *Soit Ω un domaine de $\mathbb{C}^n$, $n > 1$, $K \subset \Omega$ un compact et $\Omega - K$ connexe. Alors toute fonction holomorphe sur $\Omega - K$ a un prolongement unique à une fonction holomorphe sur Ω.*

Définition 1.6.2 *Un domaine $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ est dit un domaine d'holomorphie si il n'y'a pas de domaines $U \subset \Omega$, $V \subsetneq \Omega$ et $U \subset V$ tels que $\forall$ f une fonction holomorphe sur Ω, $f|_U$ a un prologement holomorphe à V.*

Exemples 1.6.3

a) $\mathbb{C}^n$ est un domaine d'homolorphie pour $n \geq 1$.

b) Soit K un compact dans un domaine $\Omega \subset \mathbb{C}^n$, $n > 1$ avec $\Omega - K$ connexe, alors $\Omega - K$ n'est pas un domaine d'holomorphie par Hartogs : il suffit de prendre $U = \Omega - K$, $V = \Omega$.

1.7 Variété taut

On note $Hol(D, M)$ l'ensemble des applications holomorphes de D dans une variété complexe M muni de la topologie compact-ouverte. Soit $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'applications holomorphes de D dans M. On dit que la suite f_n est compactement divergente si, pour tout compact $K \subset D$ et tout compact $K' \subset M$, il existe n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$, $f_n(K) \cap K' = \varnothing$.

Définition 1.7.1 *Une variété complexe M est taut si pour toute suite $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ d'application holomorphes de D dans M, on peut extraire une sous suite convergente dans $Hol(D, M)$ ou une sous suite compactement divergente.*

CHAPITRE II

HYPERBOLICITÉ AU SENS DE KOBAYASHI

Kobayashi a construit une nouvelle semi-distance (où pseudo-distance) canonique d_M dans une variété complexe M qui vérifie deux propriétés importantes. La première est que chaque fonction holomorphe $f : M \to N$ entre deux variétés complexes déminue la semi-distance de Kobayashi et la deuxième est que si d_M est une distance alors M est hyperbolique.

Dans ce chapitre, on va traiter des notions et des propriétés de l'hyperbolicité au sens de Kobayashi. Pour plus de détails, voir (S. Lang, 1987).

2.1 Définition et Propriétés.

On définit la métrique du Poincaré dans D par $w(z) = dzd\overline{z}/(1-|z|^2)^2$. Remarquons que $w(0)$ est la métrique euclidienne.

Soit M une variété complexe, avec $x, y \in M$. On définit une chaine de disque de Kobayashi de x à y dans M par un triplet $\{(f_i)_{i\in I}, (p_i)_{i\in I}, (q_i)_{i\in I}\}$ de trois familles finies ($I = \{1, \cdots, m\}$) telles que pour chaque $i \in I$, $f_i : D \to M$ est une application holomorphe, p_i et q_i sont des points de D et on a $f_1(p_1) = x, f_m(q_m) = y$ et $f_i(q_i) = f_{i+1}(p_{i+1})$ pour tout $i \in I$. On definit la semi-distance de Kobayashi par

$$d_{kob,M}(x,y) = d_M(x,y) = Inf_{f_i,p_i,q_i}\left\{\sum_{i=0}^{m} d_w(p_i,q_i)\right\}.$$

C'est à dire on prend l'infimum sur tous les chaines qui joignent x à y.

Cette semi-distance d_M satisfait les propriétés suivantes :

a) $d_M(x,y) \geq 0 \; \forall x, y \in M$

b) $d_M(x,y) = d_M(y,x) \; \forall x, y \in M$

c) $d_M(x,z) \leq d_M(x,y) + d_M(y,z)$ (inégalité triangulaire) $\forall x, y, z \in M$.

On appelle $\sum_{i=0}^{m} d_w(p_i, q_i)$ longueur de chaîne de Kobayashi et $d_w(p_i,q_i)=\log \frac{|1-\overline{p_i}q_i|+|p_i-q_i|}{\sqrt{1-|p_i|^2}\sqrt{1-|q_i|^2}}$ représente la distance géodesique entre deux point p_i et q_i dans le disque D.

Définition 2.1.1 *Une variété complexe M est dite hyperbolique si la semi-distance d_M est une distance. C'est à dire $d_M(x,y) > 0$ si $x \neq y$.*

Directement à partir de la définition on a :

Proposition 2.1.2 *Soit $f : M \to N$ une application holomorphe entre deux variétés complexes alors la semi-distance de Kobayashi est déminuée*

$$d_N(f(x), f(y)) \leq d_M(x,y).$$

De plus d_M est la plus grande pseudo-distance vérifiant cette propriété de décroissance pour $Hol(D,M)$. En particulier si $f : M \to M$ est une application biholomorphe, alors f est une isométrie.

Remarque 2.1.3 Cette inégalité est une géneralisation du lemme de Schwarz-Pick.

On observe que si M est une sous variété de N alors $d_N(x,y) \leq \; d_M(x,y) \; \forall \; x, y$ dans M, i.e. $d_N \leq d_M$.

Application : Si M est une variété hyperbolique alors $M' = M - \{x_1, x_2, x_3, x_4, \cdots\}$ est hyperbolique au sens de Kobayashi car $d_M \leq d_{M'}$ et M est hyperbolique.

Corollaire 2.1.4 *Toute sous variété complexe d'une variété complexe hyperbolique est hyperbolique.*

Théorème 2.1.5 (Barth) *Soit M une variété complexe hyperbolique. Alors d_M définit* *la topologie de M.*

Ce résultat a été prouvé par Barth. Voir (S. Lang, 1987) théorème 2.3 page 19.

Exemples 2.1.6

a) Le plan $\mathbb{C}$ n'est pas hyperbolique au sens de Kobayashi.

Démonstration. Il suffit de démontrer que $d_{\mathbb{C}}(0,1) = 0$. Soit

$$\begin{aligned} f\colon D &\to \mathbb{C} \\ z &\mapsto rz. \end{aligned}$$

On voit que $d_{\mathbb{C}}(0,1)$ est la limite de $d_\omega(0, 1/r)$ quand $r \to \infty$. Donc $d_{\mathbb{C}}(0,1) = 0$. □

b) Le disque D est hyperbolique au sens de Kobayashi.

Démonstration. On a $d_{Kob,D}(x,y) = Inf_{f_i,p_i,q_i}\left\{\sum_{i=1}^{m} d_w(p_i,q_i)\right\}$. En utilisant le lemme de Schwarz-Pick, on déduit que $d_{Kob,D}(x,y) \geq Inf_{f_i,p_i,q_i}\left\{\sum_{i=1}^{m} d_w(f_i(p_i), f_i(q_i))\right\} \geq d_w(x,y)$. L'infimimum est atteint pour la chaîne $\{$l'identité$, x, y\}$ et donc

$$d_{Kob,D} = d_w.$$

On déduit alors que le disque D est hyperbolique au sens de Kobayashi. □

Proposition 2.1.7 *Soient M et N deux variétés complexes. Alors*

$$\begin{aligned} d_M(p,q) + d_N(p',q') &\geq d_{M\times N}((p,p'),(q,q')) \\ &\geq Max(d_M(p,q), d_N(p',q')) \end{aligned}$$

$\forall\, p, q \in M$ *et* $p', q' \in N$.

Démonstration. On a

$$\begin{aligned} d_M(p,q) + d_N(p',q') &\geq d_{M\times N}((p,p'),(q,p')) + d_{M\times N}((q,p'),(q,q')) \\ &\geq d_{M\times N}((p,p'),(q,q')). \end{aligned}$$

Pour la première inégalité il suffit de voir que les applications suivantes $f : M \to M \times N$ et $f' : N \to M \times N$ définissent par $f(x) = (x, p')$ et $f'(x) = (q, x')$ diminuent la semi-distance d'aprés la propsition 2.1.2. La deuxième inégalité est une conséquence immédiate de l'inégalité triangulaire. Pour l'inégalité $d_{M\times N}((p,p'),(q,q')) \geq Max(d_M(p,q), d_N(p',q'))$ il suffit de voir que les deux projections suivantes : $p : M\times N \to M$ et $p_1 : M \times N \to N$ diminuent la semi-distance. $\square$

Corollaire 2.1.8 *Si M et N sont deux variétés complexes hyperboliques alors $M \times N$ est hyperbolique et on a :*

$$d_{M\times N} = \max(d_M, d_N)$$

Démonstration. Claire d'aprés la proposition 2.1.7 . $\square$

On en déduit que toute variété complexe est localement hyperbolique. En effet, chaque carte contient un polydisque qui est hyperbolique.

Corollaire 2.1.9 *Soit $f : \mathbb{C} \to M$ une application holomorphe. Alors $\forall\ x, y \in f(\mathbb{C})$ on a :*

$$d_M(x,y) = 0.$$

Démonstration. Soit $p, q \in \mathbb{C}$ tel que $f(p) = x$, $f(q) = y$. D'après la proposition précedente on a

$$d_M(x,y) \leq d_{\mathbb{C}}(p,q).$$

Comme $d_{\mathbb{C}}(p,q) = 0$, on a $d_X(x,y) = 0\ \forall\ x,y \in f(\mathbb{C})$. $\square$

Corollaire 2.1.10 *Si M est hyperbolique alors toute application holomorphe $f : \mathbb{C} \to M$ est constante.*

Démonstration. D'après le corollaire précédent on a $d_M(f(p), f(q)) = 0$ et donc $f(p) = f(q)$ par l'hyperbolicité de M. □

La propriété de l'hyperbolicité est invariante par biholomorphismes et même par des revêtements.

Proposition 2.1.11 *Soient M et N deux variétés complexes et f une application holomorphe : $M \mapsto N$. On suppose que N est hyperbolique et que pour tout $y \in N$ il existe un voisinage ouvert U tel que $M_U = f^{-1}(U)$ est hyperbolique. Alors M est hyperbolique.*

On suppose la proposition précédente pour prouver le théorème suivant :

Théorème 2.1.12 *Soit M une variété complexe et $\pi : M^0 \to M$ un revêtement non ramifié de M. Alors M^0 est hyperbolique si est seulement si M est hyperbolique.*

Démonstration. Soit M hyperbolique. D'après la définition d'un revêtement $\forall y \in Y$ il existe un voisinage ouvert U de y dans M et un ensemble discret Z tel que $\pi^{-1}(U) \simeq U \times Z$. On déduit que $U \times Z$ est hyperbolique car M est hyperbolique. Donc $\pi^{-1}(U)$ est hyperbolique et d'après la proposition 2.1.11 M^0 est hyperbolique.

Inversement, si M^0 est hyperbolique. Soit $x, y \in M$ tel que $d_M(x, y) = 0$. Soit $x' \in M^0$ tel que $\pi(x') = x$. Comme π est un revêtement, on peut relever n'importe quelle chaîne l de Kobayashi qui joint x à y vers une chaîne de Kobayashi de x'à y'_l tel que $\pi(y'_l) = y$ avec la même longueur de chaîne de Kobayashi. Comme $d_M(x, y) = 0$, on peut trouver une suite de chaîne l_i de x à y dont la longueur de Kobayashi d_i tends vers 0. Cela nous donne une suite y'_i dans M^0 tel que $d(x', y'_i)$ tend vers 0 car $d(x', y'_i) \leq d_i$. Par le théorème de Barth $y'_i \to x'$. Comme $\pi(y'_i) = y \; \forall i$ et $\pi(x') = x$, ceci implique que $x = y$.

□

Exemples 2.1.13

a) $\mathbb{C}^*$ n'est pas hyperbolique au sens de Kobayashi : $\mathbb{C}^*$ est uniformisé par $\mathbb{C}$ ($\mathbb{C} \overset{\exp}{\to} \mathbb{C}^*$).

Comme $\mathbb{C}$ n'est pas hyperbolique au sens de Kobayashi alors d'après le théorème précédent, $\mathbb{C}^*$ n'est pas hyperbolique.

b) Toute surface de Riemann compacte de $g \geq 2$ est hyperbolique au sens Kobayashi.

Démonstration. Toute surface de Riemann compacte de $g \geq 2$ est uniformisée par le disque qui est hyperbolique au sens de Kobayashi. D'après le théorème précédent on déduit le resultat. □

c) $M = \mathbb{C} - \{a, b\}$ est hyperbolique au sens de Kobayashi.

Démonstration. M n'est pas compact. D'après le théorème d'uniformisation et le petit lemme de Picard i.e (toute application holomorphe $\mathbb{C} \to \mathbb{C} - \{a, b\}$ est constante) M est uniformisé par le disque D qui est hyperbolique au sens de Kobayashi. Donc M est hyperbolique au sens de Kobayashi. □

d) $M = D^*$ est hyperbolique au sens de Kobayashi car D^* est uniformisé par $\mathcal{H}$ (demi plan de Poincaré)

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H} & \to & D^* \\ z & \longmapsto & e^{2\pi i z} \end{array}$$

comme $\mathcal{H} \simeq D$ alors $\mathcal{H}$ est hyperbolique et par conséquent D^* est hyperbolique.

e) On dit que m hyperplans $H_1, \cdots, H_m$ sont des hyperplans dans $\mathbb{C}P^n$ en position générale si $m \geq n+1$ et $n+1$ hyperplans quelconques de ces hyperplans sont toujours linéairement indépendant. Soit l'exemple suivant : Dans $\mathbb{C}P^2$, soit L_1,L_2,L_3,L_4 quatre lignes en position général (important) telles que $a \in L_1 \cap L_2$ *et* $b \in L_3 \cap L_4$. Soit L_0 une ligne complexe qui passe par a et b. Alors $M = \mathbb{C}P^2 - \cup_{i=0}^{i=4} L_i$ est hyperbolique au sens de Kobayashi. Mais si $M = \mathbb{C}P^2 - \cup_{i=1}^{i=4} L_i$ alors M n'est pas hyperbolique au sens de Kobayashi.

Démonstration. Il existe un élément $g \in Aut(\mathbb{C}P^2) = PGL_3$ agissant transivement sur $\mathbb{C}P^2$ qui envoie L_0 vers l'infini. Alors $\mathbb{C}P^2 - L_0 = \mathbb{C}^2$ et L_1 devient parallèle à L_2 et L_3 devient parallèle à L_4. Donc $L_1 \cap L_2 = a \in L_0$, et $L_3 \cap L_4 = b \in L_0$. Donc on déduit que $M \simeq (\mathbb{C} - \{0, 1\}) \times (\mathbb{C} - \{0, 1\})$. Comme $\mathbb{C} - \{0, 1\}$ est hyperbolique, M est hyperbolique. Si $M = \mathbb{C}P^2 - \cup_{i=1}^{i=4} L_i$ alors $L_0 - \{a, b\} \subset M = \mathbb{C}P^2 - \cup_{i=1}^{i=4} L_i$. Évidement les droites dans $\mathbb{C}P^2$ sont biholomorphes á $\mathbb{C}P^1$. Donc $\mathbb{C}P^1 - \{a, b\} \subset M = \mathbb{C}P^2 - \cup_{i=1}^{i=4} L_i$. Mais $\mathbb{C}P^1 - \{a, b\} = \mathbb{C}^*$. Ainsi $\mathbb{C}^* \subset M$ et on déduit que M n'est pas hyperbolique car $\mathbb{C}^*$ n'est pas hyperbolique. □

Remarque 2.1.14 $PGL_3 = GL_3(\mathbb{C})/\mathbb{C}^*$.

2.2 Espace hyperboliquement plongé.

Soit X un espace complexe et Y un sous espace complexe.

Définition 2.2.1 *On dit que Y est hyperboliquement plongé dans X, si pour tout p et q distincts dans $\overline{Y}$, il existe U_p et U_q deux voisinages ouverts respectivement de p et q tels que $d_Y(U_p \cap Y, U_q \cap Y) > 0$.*

Remarque 2.2.2 La distance entre deux parties A et B est définie par :

$$d_X(A, B) = \inf \{d_X(a, b) : \ a \in A \text{ et } b \in B\}$$

Théorème 2.2.3 *Soit Y un sous espace relativement compact d'un espace complexe X. On a les équivalences suivantes :*

1. *Y hyperboliquement plongé dans X.*
2. *Soient p et q deux points dans $\overline{Y}$ et (p_n) et (q_n) deux suites dans Y telles que $p_n \to p$ et $q_n \to q$. Si $d_Y(p_n, q_n) \to 0$ alors $p = q$.*
3. *$Hol(D, Y)$ est relativement compact dans $Hol(D, X)$.*
4. *Il existe une métrique H sur X telle que $f^*(H) \leq \omega \ \forall f \in Hol(D, Y)$.*

Remarque 2.2.4 La propriété (4) implique que toute fonction holomorphe $f : D \to Y$ déminue la distance par rapport d_w et d_H (la distance sur X induite par H). Donc à partir de la definition de la semi-distance de Kobayashi d_Y, on voit clairement que $d_H(x, y) \leq d_Y(x, y)$ $\forall x, y \in Y$. Il faut remarquer que d_H est aussi une distance definie sur X et pas seulement sur Y.

Démonstration. (1⇒2) Soient (p_n), (q_n) deux suites dans Y convergentes respectivement vers deux points p et q dans $\overline{Y}$ tels que la limite de $d_Y(p_n, q_n)$ tend vers 0 lorsque $n \to \infty$. Si $p \neq q$, comme Y est hyperboliquement plongé dans X, alors il existe U_p et U_q deux voisinages ouverts respectivements de p et q tels que $d_Y(U_p \cap Y, U_q \cap Y) > 0$. Donc $\exists\ N$ tel que $\forall n \geq N$, $d_Y(p_n, q_n) \geq d_Y(U_p \cap Y, U_q \cap Y)$, ce qui force $d_Y(U_p \cap Y, U_q \cap Y) = 0$. C'est une contradiction.

(2⟹3) Par Ascoli, il suffit de prouver que la famille $Hol(D, Y)$ est équicontinue. Sinon il existe un $p \in \overline{Y}$, U un voisinage de p, (f_n) une suite d'applications holomorphes de D dans Y et (λ_n) une suite dans D convergant vers 0 tels que :

$$f_n(0) = p\ \forall n\ et\ f_n(\lambda_n) \notin U.$$

Mais $d_Y(f_n(\lambda_n), f_n(0)) \leq d_w(\lambda_n, 0) \to 0$. Donc on aboutit à une contradiction.

(3⟹4) Supposons que 4 est faux. Soit H une métrique sur X. Alors quelque soit n entier il existe $z_n \in D, v_n \in T_{z_n}(D)$ et $f_n : D \mapsto Y$ tel que $|f'_n(z_n)v_n| \geq n|v_n|$. On peut supposer que $z_n = 0\ \forall n$. Comme Y est un sous espace relativement compact d'un espace complexe X, alors il existe une sous-suite $(f_{n_k}(0))$ de Y tel que $f_{n_k}(0) \to y \in \overline{Y}$. Par hypothèse, on peut extraire de f_{n_k} une sous suite convergente vers une $f \in Hol(D, X)$. On suppose que la convergence est uniforme sur un voisinage compacte de 0. Alors $f'_{n_k}(0) \to f'(0)$. Donc on aboutit à une contradiction.

(4⟹1) H est une métrique sur X telle que $d_H \leq d_Y$. Donc Y est hyperboliquement plongé dans X. □

Remarque 2.2.5 Quitte à composer avec un automorphisme du disque, on peut supposer que $z_n = 0$.

Remarque 2.2.6 Y est hyperbolique si et seulement si Y est hyperboliquement plongé sur lui même. C'est trivial d'après le théorème précédent.

Remarque 2.2.7 D'après le théorème 2.2.3 et la remarque précédente, on déduit clairement qu'un espace complexe compact Y est hyperbolique si et seulement si $Hol(D, Y)$ est compact.

Cette notion (hyperboliquement plongée) est très importante pour géneraliser le grand théoréme de Picard : Toute application holomorphe $f : D^* \to \mathbb{C}P^1 - \{0, 1, \infty\}$ se prolonge en $\widetilde{f} : D \to \mathbb{C}P^1$. Un précédent est suivant.

Théorème 2.2.8 (Kwack) *Soit $f : D^* \to X$ une application holomorphe. Soit X hyperboliquement plongée dans Y. S'il existe une suite $\{z_n\}$ dans D^* tel que $z_k \to 0$ et $\{f(z_k)\}$ converge vers $y \in \overline{X}$ alors f se prolonge en $\widetilde{f} : D \to Y$.*

On va présenter quelques résultats connus en relation avec le théorème du prolongement suivant (voir (P.Kiernan 1973)) :

Théorème 2.2.9 *Soit M une variété complexe, A un sous ensemble analytique de M tel que A est à croissement normal i.e. localement $M - A = D^{*k} \times D^{n-k}$. Soit Y hyperboliquement plongé dans X et $f : M - A \to Y$ une application holomorphe. Alors f se prolonge en $\widetilde{f} : M \to X$.*

Corollaire 2.2.10 *Si Y est compact et hyperbolique alors f se prolonge en $\widetilde{f}$.*

Remarque 2.2.11 Dans ce corollaire, nous n'avons pas une condition sur les singularités de A. Mais dans le théorème précédent la condition sur A d'être à croissement normal est essentielle. Le corollaire se decoule grâce au théorème de la resolution des singularitées de Hironaka.

On donne une définition de l'application méromorphe dûe à Remmert.

Définition 2.2.12 *Soit $f = \{(x, f(x)) : x \in X\}$. On dit que f est une application mé-*

romorphe d'un espace complexe X dans un espace complexe Y, si :

(i) Pour $\forall\ x$ dans X, $f(x)$ est un sous ensemble compact non vide de Y.

(ii) Le graphe $\Gamma_f = \{(x,y) \in X \times Y :\ y \in f(x)\}$ de f est un sous espace complexe connexe de $X \times Y$ avec $\dim \Gamma_f = \dim X$.

(iii) il existe un sous ensemble X' dense dans X tel que $f(x)$ est un singleton $\forall x \in X'$.

Théorème 2.2.13 *Soient A un sous espace d'un espace complexe Z et $Y \subset X$ hyperboliquement plongé dans X. Alors toute application holomorphe $Z - A \to Y$ se prolonge en une application méromorphe $f : Z \to X$.*

2.3 Courbure et Hyperbolicité

On définit la métrique du Poincaré dans D par

$$w(z) = \frac{dzd\overline{z}}{(1-|z|^2)^2}$$

Proposition 2.3.1 *Soient M une variété complexe et d' une distance sur M telles que*

$$d'(f(p), f(q)) \leq d_w(p,q)\ \forall p, q \in D$$

pour toute application holomorphe $f : D \to M$. Alors M est hyperbolique.

Démonstration. Soit $x = x_0, \cdots, x_m = y \in M$, $p_1, \cdots, p_m, q_1, \cdots, q_m \in D$ et $f_1, \cdots, f_m$ des applications holomorphes de D dans M qui forment les données pour une chaîne dans la définition de $d_M(x,y)$. Alors $d'(x,y) \leq \sum_{i=1}^{m} d'(x_{i-1}, x_i) = \sum_{i=1}^{m} d'(f(p_i), f(q_i)) \leq \sum_{i=1}^{m} d_w(p_i, q_i)$. Donc $d'(x,y) \leq \inf_{f_i, p_i q_i} \sum_{i=1}^{m} d_w(p_i, q_i) = d_M(x,y)$ pour $x, y \in M$. Par conséquent M est hyperbolique. □

Règle de maximum

Soit $u : U \to \mathbb{R}$ une fonction C^∞ avec U un ouvert de M. On rappelle que si u a un maximum en $x_0 \in U$ alors $\Delta u|_{x_0} \leq 0$.

Définition 2.3.2 Courbure de Ricci sur une surface de Riemann M

$Ric(\Psi) = dd^c log(h(z))$ où $\Psi = h(z)dx \wedge dy$ est une forme de volume ($h(z) > 0$ et $z = x + iy$ est une coordonnèe locale sur M).

Remarque 2.3.3 La definition de la $(1,1)$ forme de courbure de Ricci est indépendant du choix des coordonnées.

Lemme 2.3.4 (Alhfors-Schwarz) (S. Kobayashi, 1967) *Soit (M, H) une variété hermitienne de dimension 1 où H est la 2-forme volume. Soit $f : D \rightarrow M$ une application holomorphe. Si $Ric(H) \geq H$ alors l'application $f : (D, w) \rightarrow (M, H)$ où w est la métrique de Poincaré dèminue la distance, i.e. $f^*H \leq w$.*

Démonstration. Soit $f_r : D_r \rightarrow M$ où $f_r = i_r \circ f$, $i_r : D_r \hookrightarrow D$, $r < 1$. Soit $u_r = \frac{f_r^* H}{w}$

$$f_r^* H = h\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}dzd\overline{z}$$

sur D. Alors h est une fonction bornée sur $\overline{D}$,

$$u_r(z) = h(z)(1 - |z|^2)^2/2,$$

et $u_r(z) \rightarrow 0$ quand $|z| \rightarrow 1$. Donc u_r a un point maximum z_0 dans D. On a $f_r^* H = u_r w \Rightarrow Ric(f_r^* H) = Ric(u_r) + w \Rightarrow w + dd^c \log u_r = f_r^* RicH$ car clairement on sait que $\mathrm{Ric}(w) = w$ dans D. Alors au point de maximum z_0 on a $dd^c \log u \leq 0$ d'après la règle de maximum. Donc $w \geq f_r^* Ric(H) \geq f_r^* H$ et $u_r = \frac{f_r^* H}{w} \leq 1$ en z_0 . Cela implique que $u_r \leq 1$ partout. Donc quand $r \rightarrow 1$ on déduit que $u \leq 1$. Donc $w \geq f^* H$. □

Remarque 2.3.5 Dans cette preuve j'ai utilisé la propriété de la fonctorialité de la forme de Ricci i.e $Ric(f_r^* H) = f_r^* Ric(H)$.

Théorème 2.3.6 (S. Kobayashi, 1967) *Soit (M, H) une variété hermitienne de dimension 1. Si $Ric(H) \geq H$ alors M est hyperbolique.*

Démonstration. Soit w la métrique de Poincaré du disque . Comme $Ric(H) \geq H$, d'aprés le lemme d'Ahlfors-Schwarz on a $f^*(H) \leq w$ pour toute application holomorphe $f : D \rightarrow$

M. On déduit que la distance est diminuée, i.e. $d_H(f(p), f(q) \leq d_w(p,q)$ pour toute $p, q \in D$. Donc d'aprés la proposition précedente on a que M est hyperbolique. $\square$

Remarque 2.3.7 Ce théorème est vrai pour une variété complexe de dimension quelconque si la courbure sectionelle est majorée par -1.

2.4 Relation entre la métrique et le volume

Description de la métrique.

Soit M une variété complexe hyperbolique de dimension n. La distance de Kobayashi est obtenue à partir de l'intégration d'une métrique finslerienne K_M, qu'on appelle la métrique de Kobayashi-Royden. K_M est définie pour toute $\xi \in T_M$ et $x \in M$ par : $K_M(\xi) = \inf\{\lambda > 0 : \exists f : D \to M, f(0) = x, \lambda f'(0) = \xi\}$.

Définition 2.4.1 *La pseudo-forme de volume Ψ_M de Kobayashi est une pseudo-forme de volume, i.e une pseudo-norme hermitienne sur $\wedge^n T_M$, définie par $\Psi_M(\varsigma) = \frac{1}{\lambda}$, $\lambda = \sup_\phi \left\{ |\mu|,\ \phi_*(\frac{\partial}{\partial t_1} \wedge \frac{\partial}{\partial t_2} \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial t_n}) = \mu\varsigma \right\}$, pour $\varsigma \in \wedge^n T_M, n = \dim M$. Ici on prend le supremum sur toute les applications holomorphes $\phi : D^n \to M$ tel que $\phi(0) = x$.*

Lemme 2.4.2 *On suppose que Ψ_M s'annule à x, ou d'une facon géneral qu'il existe une suite $\{x_n\}$ de M et $\lim_{n\to\infty} \Psi_M(x_n) = 0$. Alors la pseudo-métrique de Kobayashi est dégenerée à x.*

Démonstration. Par hypothése il existe une suite des applications holomorphes

$$\phi_k : D^n \to M$$

tels que $\phi_k(0) = x_k$ et $\lim_{k\to\infty} |J_{\phi_k}(0)| = \infty$ où $J_{\phi_k}(0)$ sont les jacobiens des applications holomorphes $D^n \to M$ en point 0. Si $\lim_{k\to\infty} |J_{\phi_k}(0)| = \infty$, alors l'un des modules des vecteurs colonnes u_k^i de matrce jacobienne tends vers l'infini par rapport de la métrique Hermetienne H sur M. Mais ce vecteur colonne est $f_{k*}(\frac{\partial}{\partial t})$ avec $f_k = \phi(0, \cdot, t_k, \cdot, 0)$. Alors la pseudo-métrique infinitésimale (pseudo-métrique de Kobayashi-Royden) est dégenérée à x. $\square$

Question : Est-ce que la réciproque de cette lemme est vrai ?

Conjecture On suppose que la pseudo-metrique est dégenerée partout sur M. Est-ce que $\Psi_M = 0$ partout sur TM ?

CHAPITRE III

HYPERBOLICITÉ AU SENS DE BRODY

Brody a établi dans sa thèse de doctorat un grand critère d'hyperbolicité. Soit M une variété complexe compacte. On dit que M est hyperbolique au sens de Brody si et seulement si elle ne contient aucune droite complexe (non trivial). Ce resultat a beaucoup des applications qu'on va les traiter dans ce chapitre. Pour plus des details voir, (S. Lang, 1987) et (R. Brody, 1978).

3.1 Théorie de base et définition.

On commence par l'énoncé d'un lemme trivial.

Lemme 3.1.1 *Soit $f : D \to (M, H)$ une application holomorphe, H une métrique hermitienne sur M, et $z_1, z_2 \in D$ alors*

$$d_H(f(z_1), f(z_2)) \leq \sup_{f \in Hol(D,M)} |f'(0)|_H \, d_w(z_1, z_2)$$

Démonstration. Soit $\gamma : [0, 1] \to D$ un géodésique entre z_1 et z_2 dans D. Donc $f \circ \gamma$ est une courbe qui joint $f(z_1)$ et $f(z_2)$ avec longueur

$$\int_0^1 |f'(\gamma(t))\gamma'(t)|_H \, dt \leq \sup_z |f'(z)|_{H,w} \int_0^1 |\gamma'(t)|_w \, dt.$$

Alors

$$long(f \circ \gamma) \leq \sup_z |f'(z)|_{H,w} \; long(\gamma).$$

Comme $\sup_z |f'(z)|_{H,w} \leq \sup_{f \in Hol(D,M)} |f'(0)|_H$, on déduit trivialement le résultat. □

Théorème 3.1.2 (R. Brody, 1978) *Soit (M, H) une variété hermitienne compacte. Alors M est hyperbolique si et seulement si $\{f'(0) : f \in Hol(D, M)\}$ est borné.*

Démonstration. Si $\{f'(0) : f \in Hol(D, M)\}$ est borné, $c = \sup_{f \in Hol(D,M)} |f'(0)|_H$ est fini. On applique le lemme précédent sur chaque chaine de Kobayashi. Alors $d_H(f(p_i), f(q_i)) \leq c\ d_w(p_i, q_i)$ et on déduit que $\forall\ x \neq y$ dans M on a

$$d_M(x, y) \geq \frac{1}{c} d_H(x, y) > 0.$$

Donc M est hyperbolique. Supposons que $\{f'(0) : f \in Hol(D, M)\}$ n'est pas borné. Alors il existe une séquence f_n dans $Hol(D, M)$ telle que $f_n'(0) \to \infty$. Comme M est compact, on peut supposer que $\lim f_n(0) = x$. On considére une carte $\varphi : U \to \mathbb{C}^n$ où U est un voisinage ouvert de x avec $\varphi(U) \supseteq \overline{B}(0, s)$ et $\varphi(x) = 0$. Soit $r < 1$. D'aprés la formule d'intègrale de Cauchy on a

$$(\varphi \circ f_n)'(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{(\varphi \circ f_n)(w)}{w^2} dw$$

et donc $|(\varphi \circ f_n)'(0)|_{euc} \leq s/r$ quelque soit n tel que $\varphi \circ f_n(D_r) \subset B(0, s)$. Ceci implique que $|\varphi'(x) f_n'(0)|_{euc} \leq s/r$ et donc il existe $A > 0$ tel que $|f_n'(0)|_H \leq As/r$ par la compacité de $\varphi^{-1}(\overline{B}(0, s))$. Quand $f_n'(0) \to \infty$, on a alors $r = r(n) \to 0$. Donc $\forall m \in \mathbb{N}\ \exists$ n tel que $\varphi \circ f_n(D_{1/m})$ n'est pas contenu dans $B(0, s)$ et donc $\varphi \circ f_n(D_{1/m}) \cap \partial B(0, s) \neq 0$. Par conséquent, il existe une suite $\{x_m\}$, où $\varphi(x_m) \in \partial B(0, s)$ et $x_m \in\ f_n(D_{1/m})$. On déduit que

$$d_M(f_n(0), x_m) \leq d_w(0, q_m) \to 0 \ quand\ m \to \infty$$

où $q_m \in D_{1/m}$. Comme d_M est continue et $\varphi^{-1}(\partial B(0, s))$ est compact alors $x_m \to y \in \varphi^{-1}(\partial B(0, s))$. On conclut que $d_M(x, y) = 0$. Donc M n'est pas hyperbolique. □

Pour introduire le concept d'hyperbolicité au sens de Brody, on va commencer avec ce corollaire.

Corollaire 3.1.3 *Si C est une courbe de genre $g \geq 2$ alors toute application $\mathbb{C} \to C$ est constante.*

Démonstration. On sait qu'une courbe de genre $g \geq 2$ est uniformisée par le disque D. Donc d'aprés Liouville, on déduit que l'application de $\mathbb{C} \to C$ est constante . □

En revanche, les courbes de genre 0 et 1 admettent des applications holomorphes non constantes $\mathbb{C} \to C$. Mais pour les courbes $g \geq 2$ on a que toute application $\mathbb{C} \to C$ est constante. On peut généraliser ce résultat à des variétés complexes qui ont des dimensions plus élevées, ce qui nous mène au concept de l'hyperbolicité au sens de Brody.

Définition 3.1.4 *Une variété complexe M est dite hyperbolique au sens de Brody si et seulement si toute application holomorphe $f : \mathbb{C} \to M$ est constante, on dit aussi que M ne posséde aucune droite complexe.*

Exemples 3.1.5

a) D est hyperbolique au sens de Brody car toute application de $\mathbb{C} \to D$ est constante, d'après Liouville.

b) $\mathbb{C}$ et $\mathbb{C}^*$ ne sont pas hyperbolique au sens de Brody.

c) $\mathbb{C}P^1$ − *trois points* $\simeq \mathbb{C} - \{0, 1\}$ est hyperbolique au sens de Brody car toute application de $\mathbb{C} \to \mathbb{C} - \{0, 1\}$ est constante, d'après le petit théorème de Picard.

d) $M = \mathbb{C}P^2 - \cup_{i=1}^{i=4} L_i$ où L_i sont des hyperplans en position générale, n'est pas hyperbolique au sens de Brody car $\mathbb{C}^* \subset \mathbb{C}P^2 - \cup_{i=1}^{i=4} L_i$ comme une droite dans $\mathbb{C}P^2$.

e) En général $M = \mathbb{C}P^n - \cup_{i=1}^{i=2n} H_i$ où H_i sont des hyperplans en position générale, n'est pas hyperbolique au sens de Brody.

Démonstration. Soit $p = H_1 \cap H_2 \cap \cdots \cap H_n$ et $q = H_{n+1} \cap \cdots \cap H_{2n}$ et $L = \overline{pq}$ la droite qui passe par p et q. Alors $L - \cup_{i=1}^{i=2n} H_i = L - \{p, q\} = \mathbb{C}P^1 - \{p, q\} \simeq \mathbb{C}^* \subset \mathbb{C}P^n - \cup_{i=1}^{i=2n} H_i$.

Comme $\mathbb{C}^*$ n'est pas hyperbolique au sens de Brody, M n'est pas hyperbolique au sens de Brody. □

3.2 Théorème de Brody

Théorème 3.2.1 (R. Brody) *Soit M une variété compacte complexe. M est hyperbolique au sens de Kobayashi si et seulement si elle est hyperbolique au sens de Brody.*

Démonstration. Supposons que M n'est pas hyperbolique au sens de Brody et donc il existe une application holomorphe f non constante de $\mathbb{C} \to M$ avec $f(z_1) = p_1, f(z_2) = p_2$ où $p_1 \neq p_2$ (il contient une droite complexe non triviale). Alors $d_M(f(z_1), f(z_2)) \leq d_{\mathbb{C}}(z_1, z_2)$. Comme $d_{\mathbb{C}} \equiv 0$, $d_M(p_1, p_2) = 0$. Donc l'hyperbolicité au sens de Brody implique l'hyperbolicité au sens de Kobayashi.

Pour démontrer la réciproque on a besoin du lemme de la reparamétrisation de Brody, qui reparamétrise une application holomorphe

$$f : D_r \to M$$

à une autre application holomorphe avec une dérivée uniformement bornée

$$g : D_r \to M.$$

Lemme 3.2.2 (Reparamétrisation de Brody) *Soit $f : D_r \mapsto (M, H)$ une application holomorphe avec $|df(0)| > c$. Alors il existe une application holomorphe $g : D_r \to M$ telle que*

$$\sup_{z \in D_r} |dg(z)|_{H,w} \left(\frac{r^2 - |z|^2}{r^2}\right) = |dg(0)|_H = c. \tag{3.1}$$

Démonstration. Soit $0 < t < 1$. Soit $f_t : D_r \to M$ tel que $f_t(z) = f(tz)$. C'est une composition de deux applications (affine-linéaire). Soit $u(t) = \sup_{z \in D_r} |f_t'(z)|_{H,w} \left(\frac{r^2 - |z|^2}{r^2}\right)$ où $|f_t'(z)|_{H,w} = |f'(tz)|_{H,w} = t \, \frac{1 - |z|/r^2}{1 - |tz|^2/r^2}$. Nous observons que $t < 1$ implique que $|f_t'(z)| \to 0$

quand $|z| \to r$, car $\frac{r^2-|z|^2}{r^2} \underset{|z|\to r}{\longrightarrow} 0$. Alors $u(t)$ est fini et par définition $u(t)$ est continue $\forall t \in [0,1[$ et $u(t) \to u(1)$ même si $u(1) = \infty$. L' hypothése $|f'(0)|_H > c$ implique que $u(1) > c$ et on a $u(0) = 0$. Donc il existe $t_0 \in [0,1[$ tel que $u(t_0) = c$ et donc le supremum $u(t_0)$ est atteint au point z_0 à l'intérieur du disque $D(0,r)$. Soit h un automorphisme du disque tel que $h(0) = z_0$ et $g = f_{t_0} \circ h$. Comme $AutD$ préserve la métrique de Poincaré, g satisfait (3.1). □

On retourne à la preuve du théorème. Supposons que M n'est pas hyperbolique. Alors il existe une séquence $f_n : D \to M$ telle que $|df_n(0)|_H \to \infty$. En considérant la dilatation de $D \simeq D_{r_n}$ telle que $r_n \to \infty$ quand $n \to \infty$, on voit qu' il existe r_n *et* $g_n : D_{r_n} \to M$ tel que $|dg_n(0)|_{euc} = 1 = r_n \sup_{z\in D_{r_n}} |dg_n(z)|$ d'après le lemme de la reparamétrisation de Brody. Soit K un compact de $\mathbb{C}$. Comme $\mathbb{C} = \cup_{n=1}^{n=\infty} D_{r_n}$, $\exists n_k$ tel que $K \subset D_{r_n} \forall n \geq n_k$ et on a $g_{n>n_k} : K \to M$. D'après la reparamétrisation de Brody on a $|dg_{n>n_k}(z)| \leq c$ et donc la famille $\{g_{n>n_k}\}$ des applications holomorphes est équicontinue sur K. D'après le corollaire d'Ascoli et comme K est arbitraire, il existe une sous suite $g_{\varphi(n)}$ qui converge uniformement sur chaque compact vers une application holomorphe $g : \mathbb{C} \to \overline{M} = M$ et $|dg(0)|_{euc} = 1$. Donc M n'est pas hyperbolique au sens de Brody. □

Théorème 3.2.3 *Soit X un sous ensemble relativement compact d'une variété M. Si $\overline{X}$ est Brody hyperbolique dans M, alors il existe un voisinage ouvert de $\overline{X}$ dans M qui est hyperbolique.*

Remarque 3.2.4 Ce théorème est une version plus forte du théorème de R. Brody (la preuve est exactement la même que nous avons fait pour le théorème de R. Brody).

Contre exemple.

Le Théorème de Brody n'est pas vrai si la variété M n'est pas compacte. Soit M une région non compacte de $\mathbb{C}^2$ donné par :

$$M = \{(z,w) \ : \ |z| < 1, |zw| < 1 \text{ et } |w| < 1 \text{ si } z = 0\}.$$

Alors M est un exemple contre. En effet, soit p_1 et p_2 les projections dans le plan z

et le plan w, respectivement. S'il existe une application holomorphe $f : \mathbb{C} \to M$ non constante. Alors d'après Liouville $p_1 \circ f$ resp $p_2 \circ f$ est constante, ce qui implique qu'il existe $z_0 \in D$ tel que $f(\mathbb{C}) \subset p_1^{-1}(z_0)$. Si $z_0 \neq 0$, on a $p_1^{-1}(z_0) = \{w : |w| < \frac{1}{|z_0|}$ $z_0 \neq 0\}$ ce qui est hyperbolique. Si $z_0 = 0$ on a $p_1^{-1}(z_0) = \{w : |w| < 1\}$ ce qui est hyperbolique. Donc il n'existe pas une application holomorphe non constante $f : \mathbb{C} \to M$ et par conséquent M est hyperbolique au sens de Brody. Mais M n'est pas hyperbolique au sens de Kobayashi car $\forall \omega_0 \in D$ la semi distance de Kobayashi entre $(0,0)$ et $(0, w_0)$ est égale à 0. En effet, si on considère une chaîne de Kobayashi définie par $f_0(z) = (z, 0)$, $f_1(z) = (1/n, nz)$, $f_2(z) = (1/n + 1/2z, w_0)$ $(p_0 = 1/n, p_1 = w_0/n, p_2 = -2/n)$, alors quand $n \to \infty$ on voit clairement d'après la formule explicite de la longueur de chaîne de Kobayashi que la semi distance de Kobayashi est dégénérée i.e. $d_M((0,0),(0,w_0)) = 0$.

Conjecture (Bien connue) Soit M une variété complexe compacte et $p \in M$. On suppose que la pseudo-métrique infinitésimale de Kobayshi-Royden est dégenérée sur T_pM. Alors il existe une fonction holomorphe non constante $f : \mathbb{C} \to M$ telle que $f(0) = p$.

Grâce au théorème de Brody, il est clair qu'il existe une fonction holomorphe non constante de $\mathbb{C} \to M$ si la pseudo-métrique est dégenérée à certain point $p \in M$. Mais il n'est pas clair que f peut-être chosie de manière que $f(0) = p$.

3.3 Applications

On va présenter dans cette section des applicaions de la théorème de Brody. Pour plus des details, voir (S. Lang, 1987).

Tore complexe

Théorème 3.3.1 *Soit X un sous espace complexe fermé d'un tore complexe T. Donc X est hyperbolique si et seulement si X ne contient pas un sous tore complexe de T non trivial.*

Remarque 3.3.2 A. Bloch a essayé de démontrer ce résultat en utilsant l'hyperbolicité au sens de Kobayashi mais il n'est pas arrivé à saisfaire toutes les conditions.

Démonstration On commence à introduire des notions sur le sous tore complexe :

Proposition 3.3.3 *Soit $T_m \xrightarrow{f} T_n$ une applications holomorphes entre deux tores complexes de dimensions m, n respectivement. Alors il existe une application $\mathbb{C}^m \xrightarrow{f_0} \mathbb{C}^n$ telle que le diagramme*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^m & \xrightarrow{f_0} & \mathbb{C}^n \\ \downarrow & & \downarrow \\ T_m = \mathbb{C}^m/\Gamma & \xrightarrow{f} & T_n = \mathbb{C}^n/\Omega \end{array}$$

est commutatif et f est affine (c'est à dire $f(z) = Az + b$ où $z = (z_1, \cdots, z_m)^t$, A est une matrice de type $n \times m$, et $b \in \mathbb{C}^n$.)

Démonstration. Soit $dz_1, \cdots, dz_m, dw_1, \cdots, dw_n$ deux bases de 1-forme holomorphe de T_m et T_n respectivement. Pour chaque dw_i on peut écritre $f^*(dw_i) = \sum_{j=1}^{j=m} a_{ij} dz_j$ où a_{ij} sont des fonctons holomorphes globales sur T_m. Alors ils sont constantes d'après le principe du maximum. Il suffit d'intégrer cette égalité. □

On déduit que toute application holomorphe de $T_m \rightarrow T_n$ est linéaire. Quand f est injective, on dit que T_m est un sous tore compact de T_n. T_m est non trivial si $m > 0$. Si on fixe un zero pour la structure de groupe sur T_n alors un sous tore est une translation d'un sous groupe qui est aussi une sous variété complexe.

On revient à la preuve 3.3.1. : Supposons que X est hyperbolique et X contient un sous tore complexe non trivial. Alors il existe une application holomorphe non constante $f : \mathbb{C} \rightarrow X$. Nous aboutissons à une contradiction car X est hyperbolique.

Si X n'est pas hyperbolique alors d'après le Théorème de Brody il existe une application holomorphe non constante $g : \mathbb{C} \rightarrow \overline{X} = X \subset T = \mathbb{C}^n/\Omega$ où Ω est un réseau tel que

$$|dg(0)|_H = 1, \text{ et } |dg(z)|_H \leq 1 \forall z \in \mathbb{C}$$

où H est la métrique Euclidienne sur T. On relève g au $\mathbb{C} \xrightarrow{(g_1, \cdots, g_n)} \mathbb{C}^n$ et donc on a

$|g_1'|^2 + \cdots |g_n'|^2 \leq 1$. D'aprés Liouville $\forall i$ g_i' est constante et par conséquent g est linéaire. Sans perte de géneralité, on suppose que $g(\mathbb{C}) = G$ est une sous groupe contenu dans X. Alors, $g(\mathbb{C})$ est dans l'adhérence de Zariski $\overline{G}$ de G et $\overline{G} \subset X$ est un sous-groupe (et donc un sous tore complexe) par le lemme suivant :

Lemme 3.3.4 *Soit G une groupe avec une topologie (qui n'est pas nécessairement de Hausdorff). On suppose que la translation par $x \in G$ est une application bicontinue et $x \mapsto x^{-1}$ est une application bicontinue. Soit H une sous groupe de G. Alors son adhérence de Zariski $\overline{H}$ est une sous goupe.* (Voir (S. Lang, 1987)) page 84.

Une autre application importante du théorème de R. Brody est suivante.

Proposition 3.3.5 *Soit $f : M \to S$ une application holomorphe propre entre deux variétés complexes. On suppose que la fibre M_{t_0} est hyperbolique. Alors il existe un voisinage ouvert U de t_0 tel que tous les fibres $M_t, t \in U$ sont hyperboliques.*

Démonstration. On prend une séquence des fibres M_{t_n} non hyperboliques où $t_n \in S$ tend vers t_0, et on fixe une métrique hermitienne H sur M. D'après la version forte du théorème de R. Brody (voir la remarque 3.2.4) et la propreté de f, $\forall n$ il existe une application holomorphe non constante $g_n : \mathbb{C} \mapsto M_{t_n}$ tel que $|dg_n(z)|_H \leq 1$ et $|dg_n(0)|_H = 1$. Donc g_n est équicontinue. D'après le théorème d'Ascoli et la propreté de f, il existe une sous suite qui converge uniformement vers une application g holomorphe non constante $g : \mathbb{C} \to M_{t_0}$ telle que $|dg(0)|_H = 1$. Alors M_{t_0} n'est pas hyperbolique, ce qui est une contradiction. $\square$

Dans la preuve j'ai utilisé cette remarque (élementaire) :

Remarque 3.3.6 Si f est une application propre alors l'image inverse d'un compact est compacte et f est une application fermé.

Corollaire 3.3.7 *Soit $f : M \to S$ une application holomorphes propre entre deux variétés complexes. Si S est hyperbolique et chaque fibre M_t est hyperbolique $\forall t \in S$, alors M est hyperbolique.*

Démonstration. Ceci découle de la proposition précédente et la propostion 2.1.11. □

Le Théorème de R. Brody n'est pas vrai si la variété n'est pas compacte. Mais dans le cas d'un complement d'une hypersurface hyperbolique, il est vrai.

Pour démontrer ce théorème j'ai besoin le théorème de Hurwitz géneralisé.

Théorème 3.3.8 *Soit M une variété complexe et $N \subset M$ une hypersurface. Prendre une séquence $\{g_m\} \subset Hol(D, M-N)$ qui converge vers $g \in Hol(D, M)$. Alors $g(D) \subset M-N$ ou bien $g(D) \subset N$.*

Démonstration. On suppose que $g(0) \in N$. Soit V un voisinage de $g(0)$ dans M tel que $V \cap N$ est défini par une fonction holomorphe $f = 0$. Alors on applique le théorème de Hurwitz classique sur une suite des fonctions holomorphes sur $\{f \circ g_m\}$ qui ne s'annule pas. Donc sa limite $f \circ g$ est identiquement nulle d'après le théorème d'identité. Donc $g(D) \subset N$. Si on suppose que $g(0) \notin N$ on déduit avec le même raisonnement que $g(D) \subset M - N$. □

Théorème 3.3.9 Soient M une variété complexe compacte et N une hypersurface telles que $N \subset M$. Si N est hyperbolique au sens de Brody et $U = M - N$ est hyperbolique au sens de Brody alors U est hyperbolique au sens de Kobayashi.

Démonstration. Supposons que U n'est pas hyperbolique. Alors d'après le théorème de Brody, il existe une séquence $\{g_n\} \in Hol(D_{r_n}, U)$ qui converge vers une $g \in Hol(\mathbb{C}, M)$, tel que $|dg(0)|_H = 1 = \sup_z |dg(z)|_H$. Donc d'après le théorème précedent on a $g(\mathbb{C}) \subset U$ ou bien $g(\mathbb{C}) \subset N$, ce qui est une contradiction. □

Nous discutons maintenant le premier exemple non trivial de l'hyperbolicité d'une variété complexe non compacte. Voir (F. Berteloot et J. Duval , 2001).

Définition 3.3.10 *On dit que f est une courbe de Brody dans M si $f : \mathbb{C} \to M$ est une application holomorphe non constante telle que $|f'(z)|_H \leq 1$ $\forall z \in \mathbb{C}$, où H est une* *métrique hermitienne sur M.*

Remarque 3.3.11 Si M est compact, la notion de l'existence la courbe de Brody est indépendente du choix de la métrique.

Théorème 3.3.12 (Marc Green) *L'espace projectif $\mathbb{C}P^n$ privé de $2n+1$ hyperplans en position générale est hyperbolique.*

Démonstration. Plongeant $\mathbb{C}P^n$ dans $\mathbb{C}P^{2n}$ en envoyant les hyperplans évités d'équation $\{H_i = 0\}$ dans les hyperplans de coordonnées de $\mathbb{C}P^{2n}$ par $\phi = [H_1 : \cdots : H_{2n+1}]$. On note l'image par P. Si X est une partie de $\mathbb{C}P^{2n}$, on note X^* le complémentaire dans X des hyperplans coordonnées. Il faut montrer que P^* est hyperbolique. Par position générale, P évite un voisinage des points de $\mathbb{C}P^{2n}$ ayant $n+1$ coordonnées nulles. D'une facon plus précise, P est contenu dans

$$M_\epsilon = \{z : |z_i| \geq \epsilon \, \|z\| \text{ pour au moins } n+1 \text{ coordonnées}\}$$

où $\|z\| = \max\{|z_1|, \cdots, |z_{2n+1}|\}$ et ϵ assez petit. Il suffit donc de voir l'hyperbolicité de M_ϵ^*. Mais la puissance $n-$iéme

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}P^{2n} & \to & \mathbb{C}P^{2n} \\ z & \mapsto & z^n \end{array}$$

induit un revêtement non ramifié de $M^*_{\epsilon^{1/n}}$ sur $M_{\epsilon^{1/n}}$ et $M_{\epsilon^{1/n}}$ converge vers M_1. D'aprés la version forte de théorème de Brody et comme l'hyperbolicité est stable par revêtement, il suffit de démontrer que M_1 est hyperbolique. Ce qu'on verra toute de suite. □

Lemme 3.3.13 $M_1 = \left\{z \in \mathbb{C}P^{2n} : |z_i| = \|z\| \text{ } \textit{pour } n+1 \textit{ coordonnes}\right\}$ *est un polyhèdre hyperbolique.*

Démonstration. Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}P^{2n}$ une courbe entière (l'image holomorphe non constante de $\mathbb{C}$) contenue dans M_1. Alors elle doit passer de l'une de ses faces X_I où I est une partie de $\{1, \cdot, 2n+1\}$ de cardinal $n+1$. On peut suposer que $f^{-1}(X_{\{1,\cdots,2n+1\}})$

contient un ouvert de $\mathbb{C}$. Alors, si $f = [f_1 : \cdots : f_{2k+1}]$, d'aprés le prologement analytique on a $|f_1| = \cdots |f_{k+1}|$ sur tout $\mathbb{C}$. Comme l'image est contenue dans M_1 et que toute partie de $\{1, \cdots, 2k+1\}$ de cardinal $k+1$ rencontre $\{1, \cdots, k+1\}$, il s'ensuit que $\|f\| = |f_1|$ sur tout $\mathbb{C}$. Donc $|f_i| \,/\, |f_1|$ est borné par 1 $\forall\, i$. Donc d'après le théorème de Liouville f est constante. □

Soient $H_0, \cdots, H_n$ $n+1$ hyperplans qui sont linéairement indépendant. On peut choisir un système de coordonnées tel que $\forall i \leq n$ H_i est défini par
$H_i = \{x, x_i = 0\}$. Alors on définit H_{n+1} par $\lambda_0 x_0 + \cdots + \lambda_n x_n = 0$, quitte à faire une dilatation sur les coordonnées, les H_i sont définis respectivement par les équations : $x_0 = 0, x_1 = 0, \cdots, x_n = 0, x_0 + x_1 \cdots + x_n = 0$. C'est ce qu'on appelle la forme standarde.

Définition 3.3.14 *Soit $2 \leq q \leq n$ et $J = \{j_0, \cdots, j_q\} \subset \{0, \cdots, n\}$. La diagonale D_J est l'ensemble défini par l'équation $x_{j_1} + \cdots + x_{j_q} = 0$.*

Lemme 3.3.15 (de Borel) *Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}P^n$ dont l'image évite $n+2$ hyperplans H_i des équations $\{x_i = 0\}$ $\forall i = 0, \cdots, n$ et $H_{n+1} = \{x_0 + x_1 + \cdots + x_n = 0\}$. Alors $f(\mathbb{C})$ est contenu dans un hyperplan diagonal.*

Démonstration. On va reproduire la preuve donnée dans (F. Berteloot et J. Duval , 2001). On va démontrer ce lemme dans le cas où f est une courbe de Brody i.e. $\left|f'\right|_{FS-\mathbb{C}P^n} \leq 1$ ou $|\cdot|_{FS-\mathbb{C}P^n}$ est la métrique de Fubini-Study sur $\mathbb{C}P^n$. On a $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}P^n - \cup_{i=0}^{n+1} H_i = (\mathbb{C}^*)^n - H_{n+1} \subset (\mathbb{C}^*)^n$. Soit $h : \mathbb{C}^n \overset{\exp}{\mapsto} (\mathbb{C}^*)^n$ le revêtement universel. Comme $\mathbb{C}$ est simplement connexe alors il existe un relèvement de $\mathbb{C}$ vers $\mathbb{C}^n$ ($\mathbb{C} \xrightarrow{\phi} \mathbb{C}^n$) tel que $f = h \circ \phi$. Alors, on peut écrire $f = \left[e^{\phi_0} \cdots e^{\phi_n}\right]$. Puisque f est une courbe de Brody et d'après la définition du métrique de Fubini-Study sur $\mathbb{C}P^n$ on déduit que $\Delta(\log(1 + |f_1|^2 + \cdots |f_n|^2) - |z|^2) \leq 0$. Donc $F(z) = \log(1 + |f_1|^2 + \cdots + |f_n|^2) - |z|^2$ est sous harmonique et donc $(Av_r F)(0) \leq F(0) = C$ (la moyenne sur $\partial D(0, r)$ de $F(z)$). Donc $Av_r \log(1 + |f_1|^2 + \cdots |f_n|^2) \leq Av_r |z|^2 + C = r^2 + C$. Il en est de même pour celles de $\log(1 + |f_i|^2)$ $\forall i = 1, \cdots, n$, donc de $\log(|f_i| + |f_i|^{-1})$ puisque $\log|f_i|$ est harmonique.

Or le dévelopement en série entière de ϕ_i donne (en utilisant là formule d'intégrale de Cauchy appliquée à la fonction $\phi(z)z^{n-1}$) :

$$\pi r^n \phi_i^{(n)}(0) = n! \int_0^{2\pi} \mathrm{Re}(\phi_i(re^{i\theta}))e^{-in\theta}d\theta,$$

d'où $\pi r^n \left|\phi_i^{(n)}(0)\right| \leq n! \int_0^{2\pi} \left|\log|f_i(re^{i\theta})|\right| d\theta \leq n! \int_0^{2\pi} \log(|f_i| + |f_i|^{-1})d\theta = O(r^2)$, on déduit que $n \leq 2$ et les composantes de ϕ sont bien quadratiques.

On va terminer par établir que les composantes de ϕ sont en fait affines.

Pour cela nous revenons aux coordonées homogènes où, d'après ce qui nous avons fait, on peut exprimer f ainsi :

$$f = \left[e^{\phi_0}, \cdots, e^{\phi_n}\right] \ avec \ \deg(\phi_i) \leq 2 \ \forall i = 0, \cdots, n.$$

Il s'agit de montrer que $\phi_i - \phi_j$ est affine pour tout pair d'indices. Convenons que i équivaut à j comme paire $\{i, j\}$. La remarque crucial est la suivante : soit $Y_{ij} = \{z : |z_i| = |z_j| \geq |z_l| \ \forall l\}$ (c'est une face d'un polyhèdre). Si $f^{-1}(Y_{ij})$ n'est pas compact, alors i équivaut à j. En effet, on peut alors trouver a_n tendant vers l'infini avec $f(a_n)$ tendant vers b dans Y_{ij}. On peut supposer que la suite $(f(z+a_n))$ est localement uniforment convergente par le théoréme d'Ascoli puisque la dérivée est uniformément bornée (car f est une courbe de Brody). Il en de même pour la suite des dérivées en 0 de la $i-ème$ composante de $(f(z+a_n))$ dans la carte $(z_j = 1)$. Donc

$$(f_i/f_j)'(a_n) = (\phi_i'(a_n) - \phi_j'(a_n)((f_i/f_j)(a_n))$$

converge quand $n \to \infty$. Or $(f_i/f_j)(a_n)$ tend vers $b_i/b_j \neq 0$. Donc $\phi_i'(a_n) - \phi_j'(a_n)$ converge alors que $\phi_i' - \phi_j'$ est affine et que a_n tend vers l'infini. Ceci force $\phi_i' - \phi_j'$ à être constant et i équivaut à j.

Cette remarque permet de conclure : en effet, elle entraîne que le maximum des modules des composantes de f est réalisé par des composantes d'indices équivalents (par exemple à 1) hors d'un compact de $\mathbb{C}$. On aura ainsi, pour tout i :

$$\mathrm{Re}(\phi_i)(z) \leq \mathrm{Re}(\phi_1)(z) + O(|z|)$$

Donc $\phi_i - \phi_1$ est affine pour tout i. $\square$

CHAPITRE IV

QUELQUES NOTIONS SUR LES PROPRIÉTÉS DE LANDEAU-SCHOTTKY

Dans l'article (K.T. Hahn, 1983), l'auteur a demontré qu'un domaine dans $\mathbb{C}$ vérifiant la propriété de Landeau ou la propriété de Schottky est hyperboliques.
Dans ce chapitre, on va introduire les propriétées Landeau-Schottky dans un espace complexe pour donner une caractérisation de l'hyperbolicité. Pour plus de détails, voir (K.T. Hahn, 1983), (K.T. Hahn, K.T Kim , 1984) et (Do Duc Thai, 1994).

4.1 Hyperbolicité et propriétés de Landeau-Schottky

Maintenant on fixe X un espace complexe, H une métrique sur X et d_H la distance sur X induite par H. Pour $\xi \in TX$, on note $|\xi| = \sqrt{H(\xi, \xi)}$.

Soit X un espace complexe et H une métrique sur X. D'après (H. Royden , 1971) X est hyperbolique si et seulement si pour tout $p \in X$ il existe un voisinge W de p et $c > 0$ tels que $K_X(\xi) \geq c\,|\xi|$ sur W, où K_X est la pseudo-métrique de Kobayashi-Royden. (Voir 2.4)

De plus Royden a prouvé que la semi-distance de Kobayashi d_X est la forme intégrée de K_X. On definit la semi-distance de Royden par

$$d'_X(x, y) = \inf L_X(\gamma)$$

tel que l'infimum est pris sur tous les chemins de classe C^1 par morceaux reliant x à y, où $L_X(\gamma) = \int_x^y K_X(\gamma'(t))dt$. On a $d'(x, y)$ satisfait l'inégalité triangulaire et $d'(x, y) \geq 0$.

Théorème 4.1.1 (H. Royden , 1971) *Pour X un espace complexe on a $d'_X = d_X$.*

Définition 4.1.2 Propriété de Landeau : *Pour tout $p \in X$, il existe un voisinage relativement compact W de p et $R > 0$ tels que :*

$$\sup \left\{ \left| f^{'}(0) \right|_H : f \in Hol(D, X) \ et \ f(0) \in W \right\} \leq R.$$

Remarque 4.1.3 Dans le cas X est compact, cette propriété est équivalente à l'hyperbolicité de X.

Si X est hyperbolique, alors d_X est une distance qui définit la topologie de X d'après le théorème de Barth. Alors $Hol(D, X)$ est équicontinue d'après la proposition 2.1.2. La reciproque se decoule du théorème suivant :

Théorème 4.1.4 (P. Kiernan, 1970) *X est hyperbolique si et seulement si $Hol(D, X)$ est équicontinue par rapport d'une distance d qui définit la topologie de X.*

Remarque 4.1.5 L'équicontinué de $Hol(D, X)$ par rapport d'une distance d qui définit la topologie de X implique que pour tout $p \in X$ et W un voisinage de p, il existe V un voisinage de p et $r \in]0, 1[$ tels que si $f \in Hol(D, X)$ et $f(0) \in V$ alors $f(D_r) \subset W$. (Voir (W. Kelly, 1955) Théorème 7.22 page 237.)

Théorème 4.1.6 *Soit X un espace complexe. Les deux notions sont équivalentes :*

1. *X est hyperbolique.*
2. *X verifie la propriété de Landeau.*

Démonstration. Si X est hyperbolique alors $Hol(D, X)$ est équicontinue et donc, d'après la remarque précédente pour tout $p \in X$ et W un voisinage de p, il existe un voisinage V de p et $r \in]0, 1[$ tels que si $f \in Hol(D, X)$ et $f(0) \in V$ alors $f(D_r) \subset W$. Par conséquent

$$\sup\left\{\left|f'(0)\right|_H : f \in Hol(D,X) \text{ et } f(0) \in V\right\} \leq \sup\left\{\left|f'(0)\right|_H : f \in Hol(D_r,W)\right\}$$

ce qui est fini, d'après la formule d'intégrale de Cauchy (cf. la preuve du théorème 3.1.2).

Reciproquement, supposons que X verifie la propriété de Landeau. Soit $(p,\xi) \in TW$ où W est un voisinage de p et $v \in \mathbb{C}$, tel que $f \in Hol(D,X)$ satisfait $f(0) = p$ et $f'(0)v = \xi$. D'après la définition de propriété de Landeau on a $R\,|v| \geq \left|f'(0)v\right| = |\xi|$ alors

$$|v| \geq \frac{1}{R}\,|\xi|\,.$$

Par conséquent $K_X(\xi) \geq \frac{1}{R}\,|\xi|$, il suffit de poser $c = \frac{1}{R}$. Donc X est hyperbolique. $\square$

Remarque 4.1.7 Ce théorème caractérise l'hyperbolicité des espaces complexes non compacts.

Définition 4.1.8 Propriété de Schottky : *Pour tout $p \in X, W$ un voisinage relativement compact de p et $r \in]0,1[$, il existe $S = S(W,r) \in \mathbb{R}$ tel que si $f \in Hol(D,X)$ et $f(0) \in W$ alors*

$$d_H(p, f(z)) \leq S \;\forall z \in D_r$$

Théorème 4.1.9 *Soit X un espace complexe compact hermitien qui est hyperbolique. Alors X vérifie la propriété de Schottky.*

Remarque 4.1.10 La réciproque de ce théorème n'est pas vrai.

Contre exemple : Il est clair que par la continuité de la distance, chaque espace complexe compact vérifie la propriété de Schottky pour n'importe quelle métrique H sur TX (prend $S = \mathrm{diam}_H X$). Dans le cas où X est un espace complexe projective, X n'est pas hyperbolique mais il satisfait la propriété de Schottky car X est compact.

Remarque 4.1.11 La compacité est une propriété esentielle du théorème précédent.

Contre exemple : Soit X un domaine borné dans $\mathbb{C}^n$ qui n'est pas un domaine d'holomorphie et H une métrique hermitienne complete sur TX. Alors X est hyperbolique car elle est un sous ensemble d'un polydisque qui est hyperbolique. Mais il ne satisfait pas la propriété de Schottky par rapport a H. Supposons que X satisfait la propriété de Schottky. Si on prouve que X est taut, alors X est un domaine d'homolorphie d'après (la remarque ci-dessous), et on aboutit à une contradiction.

Pour cela, soit $\{f_n\}$ une suite dans $Hol(D, X)$ qui n'est pas compactement divergente. Par definition il existe un compact K dans D et un compact K' dans X tels que , $\forall n_0 \in \mathbb{N}$, $\exists\, n \geq n_0$, $f_n(K) \cap K' \neq \varnothing$. Alors il existe une sous suite $\{f_{n_k}\}$ et des points $z_k \in K$ tel que $f_{n_k}(z_k) \in K'$ $\forall k$. On peut supposer que la suite $\{z_k\}$ converge vers $z_0 \in K$ et $\{f_{n_k}(z_k)\}$ converge vers $p \in K$ car K, K' sont compacts. Soit β_k, $k = 0, 1..., m$, l'automorphisme holomorphe du disque D

$$\beta_k = \frac{z + z_k}{1 + \overline{z_k} z}.$$

Alors β_k converge vers β_0 quand $k \to \infty$. Posons $g_k = f_{n_k} \circ \beta_k$ $\forall k \geq 1$ et W un voisinage relativement compact de p. Comme $g_k(0) = f_{n_k}(z_k)$ converge vers p quand $k \to \infty$, on peut supposer que $g_k(0) \in W$ $\forall k \geq 1$. Pour chaque z fixé dans D, puisque X satisfait la propriété de Schottky alors $g_k(z)$ est contenue dans une boule compacte. $\left\{x \in X : \ d_H(p, x) \leq S(W, ((|z| + |z|^2)/2))\right\}$. Quitte à composer avec un automorphisme du disque. D'après le théorème 4.1.6, $\{ g_k\}$ est équicontinue par rapport de H car X est hyperbolique. Par le théorème d'Ascoli on peux supposer que $\{ g_k\}$ converge vers $g \in Hol(D, X)$. Ils s'ensuit que $\{f_{n_k}\}$ converge vers $g \circ \beta_0 \in Hol(D, X)$. Alors X est taut.

Remarque 4.1.12 Si un domaine $X \subsetneq \mathbb{C}^n$ est taut, alors X est un domaine d'homolorphie. Voir((H. Wu , 1967)) théorème 2 page 211-212.

Remarque 4.1.13 La condition de la compacité dans le théorème 4.1.9 est essentielle dans la preuve donnée par (K.T. Hahn, K.T Kim , 1984). En effet, la caractérisation infinitésimale de l'hyperbolicité de Royden-Kobayashi (i.e $K_X \geq cH$) est locale mais cette condition n'implique pas que cette inégalité reste vrai au niveau de la distance car la constante c dépend du voisinage choisi. C'est pour cela que l'hypothése que X est compact est très importante parceque c devient indépendante du voisinage choisi.

4.2 Fonction de Bloch et l'hyperbolicité

Soit X un espace complexe, H une métrique sur X et d_H la distance sur X induite par H.

Définition 4.2.1 *On dit que $f \in Hol(D, X)$ est une fonction de Bloch si*

$$\sup \{Q_f(z) : z \in D\} < \infty$$

où

$$Q_f(z) = (1 - |z|^2) \left|f'(z)\right|_H .$$

Remarque La fonction de Bloch est invariante par rapport du groupe des automorphismes holomorphes du disque $Aut(D)$, i.e. $\forall\ \phi \in AutD$ on a $Q_{f\circ\phi}(z) = Q_f(\phi(z))$ $\forall z \in D$.

Théorème 4.2.2 (Do Duc Thai, 1994) *Un espace complexe compact X est hyperbolique si et seulement si toute $f \in Hol(D, X)$ est une fonction de Bloch.*

Démonstration. $\Rightarrow$: Supposons que X est hyperbolique. Alors d'après le théorème 3.1.2, il existe A tel que $|g'(0)| \leq A\ \forall g \in Hol(D, X)$. Soit $f \in Hol(D, X)$ et h un automorphisme holomorphe du disque D tels que $h(w) = \frac{z+w}{1+\bar{z}w}$ pour un certain z fixée dans D. On pose $g = f \circ h \in Hol(D, X)$. Alors

$$\left|g'(0)\right|_H = \left|f'(h(0))\right|_H |h'(0)| = \left|f'(z)\right|_H (1 - |z|^2) < A.$$

Donc f est une fonction de Bloch.

$\Leftarrow$ Soit $f : \mathbb{C} \to X$ une application holomorphe. On suppose que $p, q \in \mathbb{C}$ et on considère deux suites $\{x_n\}, \{y_n\}$ du disque D où $x_n \neq y_n\ \forall n \geq 1$ telles que $\lim x_n = \lim y_n = 1$ et

$\lim d_w(x_n, y_n) = 0$ (voir la remarque ci-dessous). D'après le théoreme de Weierstrass, il existe une fonction holomorphe $h : D \to \mathbb{C}$ telle que $h(x_n) = p$, $h(y_n) = q$ $\forall n \geq 1$. Donc $g = f \circ h \in Hol(D, X)$ est une fonction de Bloch et donc il existe une constante c_g telle que $|g'(z)|_H \leq \frac{c_g}{1-|z|^2}$ $\forall z \in D$. On intègre cette inégalité sur un géodesique reliant x_n à y_n dans D et donc $d_H(g(x_n), g(y_n)) \leq c_g\ d_w(x_n, y_n)$ $\forall n \geq 1$. Lorsque $n \to \infty$ on déduit trivialement que $d_H(f(p), f(q)) = 0$ et donc $f(p) = f(q)$ (i.e. f est constante). Donc d'après le théorème de Brody X est hyperbolique. $\square$

Remarque 4.2.3 On prend une suite $x_n \in D_{euc}(1, \frac{1}{n})$ et on choisit $y_n \in D_{euc}(1, 1/n) \cap D^w(x_n, 1/n)$ où D^w est le disque par rapport à la métrique de Poincaré sur D.

Remarque 4.2.4 D'après le Théorème précédent. L'hyperbolicité d'un espace complexe compact est caractérisée par $Hol(D, X)$ d'être fonctions de Bloch.

CONCLUSION

Les notions d'hyperbolicité complexe, qu'on a présenté dans ce mémoire avec des applications, utilisent des techniques recemment developpées. Ils restent encore des exemples à traîter comme la pertubation des hypersurfaces de Fermat en utilisant une technique basée sur la théorie de la distribution des valeurs. D'autre côté on se demande s'il n'y a pas d'autres caracterisations fortes de l'hyperbolicité des espaces complexes.

BIBLIOGRAPHIE

R. Brody, « Compact manifolds and hyperbolocitiy », Trans. Amer. Math. Soc. no. 235 (1978), pp 213-219.

T. Barth, « Taut and Tight complexe manifolds », Proc. Amer. Math. Soc. no . 3(1970), pp 429-431.

T. Barth, « The Kobayashi distance induces the standard toplogy », Proc. Amer. Math. Soc. no . 35, NO. 2(1972), pp 439-441.

F. Berteloot et J.Duval , « Sur l'Hypothése de certains complément », l'Enseignement Mathématique t. 47(2001) pp 253-267.

Do Duc Thai, « On The hyperbolicity and Shottky property of complex spaces », Proc. Amer. Math. Soc. no. 122(1994), pp 1025-1027.

Otto Forster, Lectures on Riemann Surfaces, Springer-Verlag, New York 1977.

M. Field, Several complex variables and Complex Manifolds I. London Mathematical Society Lecture note Series (1982).

M. Green, « Holomorphic mapping to complex Tori », Amer . J. Math., 100 (1978), pp. 615-620.

K.T Hahn, « Equivalence of the classical theorems of Shottky, Landeau, Picard and hyperbolicité », Proc. Amer. Math. Soc. no. 89 (1983), pp 628-632.

K.T. Hahn, K.T. Kim, « Hyperbolicity of complex manifolds and other equivalent properties », Proc. Amer. Math. Soc. no. 91 (1984), pp 49-53.

P. Kiernan, « Extentions of Holomorphic Maps », Trans. Amer. Math. Soc. no. 172 (1972), pp 347-355.

P. Kiernan, « Hyperbolique imbedded spaces and big Picard theorem », Math. Ann., 204 (1973) pp. 203-209.

P. Kiernan, « On the relations between taut, tight, and hyperbolic manifolds », Bull. Amer. Math. Soc. no .76 (1970) pp. 49-51.

S. Kobayashi, Hyperbolic Manifolds and Holomorphic Mapping, Marcel Dekker, New York 1970.

S. Kobayashi, « Distance, holomorphic mapping and the Schwarz lemma », J. Math. Soc. Japan, 19 (1967), pp. 481-485.

S. Kobayashi, « Invariant distances on complex manifolds and holomorphic mappings », J. Math. Soc. Japan, 19(1967), pp. 460-480.

W. Kelly, General Topology. Van Nostrand (1955).

S. Lang, Introduction to Complex Hyperbolic Space, Springer-Verlag, New York 1987.

H. Royden, « Remarks on the Kobayashi metric », Proc. Maryland Conference on several Complex variables, Springer lecture Notes, Springer-Verlag, Berlin 1971.

W. Rudin, Analyse Réelle et Complexe. Masson 1975.

H. Wu, « Normal families of holomorphic maps », Acta Math 119 (1967), pp. 193-233.