UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL

LES INTERPRÉTATIONS ET REPRÉSENTATIONS DE LA NOTION DE *FONCTION* CHEZ LES FUTURS ENSEIGNANTS DE MATHÉMATIQUES AU SECONDAIRE

MÉMOIRE
PRÉSENTÉ
COMME EXIGENCE PARTIELLE
DE LA MAÎTRISE EN MATHÉMATIQUES

PAR
ALEXANDER BRICENO MONTOYA

FÉVRIER 2019

REMERCIEMENTS

Je viens de finir mon travail de recherche, mais cette dernière page que j'écris est quant à moi la plus spéciale puisqu'elle contient les noms des personnes qui m'ont beaucoup apporté. Je veux ici dans quelques mots adresser mes sincères remerciements à madame Fabienne Venant, ma directrice de recherche, qui m'a soutenu professionnellement tout au long de mon mémoire et qui m'a traité patiemment dans mes erreurs et dans mes certitudes. Je ne pourrais pas oublier non plus monsieur Benoit Brosseau, la personne qui m'a donné la première chance de travailler dans le domaine de l'enseignement des mathématiques au Québec et à qui je dois mon choix de sujet de recherche. En dernier, je dois remercier Juliane Bertrand, ma blonde, qui m'a encouragé dans les moments les plus difficiles et qui m'a accompagné du début à la fin de ce projet. Toutefois, je donne grâce à Dieu pour avoir mis dans mon chemin ces merveilleuses personnes.

TABLE DES MATIÈRES

LISTE DES FIGURES

LISTE DES TABLEAUX

RÉSUMÉ

Ce mémoire porte sur les interprétations et les représentations de la notion de *fonction* chez les étudiants au baccalauréat en enseignement secondaire des mathématiques à l'Université du Québec à Montréal (UQAM). Le but est de connaître les représentations de la fonction qu'ils privilégient pour accomplir plusieurs tâches : définir une fonction, en identifier une représentation, associer deux représentations, et transformer une représentation, soit par traitement, soit par conversion, deux activités cognitives mentionnées par Duval (1995). En plus du point précédent, un intérêt particulier est accordé à la verbalisation de certaines interprétations de la fonction dans les réponses des participants. Enfin, les questions de recherche touchent les différences entre les futurs maîtres en début et en fin de formation. Un questionnaire a été administré à 100 participants : 46 étudiants de 1ère année, 25 étudiants de mi-parcours et 29 finissants. Il ressort que ces participants font appel à une variété de représentations de la fonction selon la tâche à accomplir, principalement les représentations verbales et graphiques. Par ailleurs, de nombreux participants de notre étude, particulièrement les finissants, définissent la fonction par une interprétation, le plus souvent une relation de dépendance, laquelle serait à privilégier selon Nicholas (1966). Ils se distinguent ainsi des participants de plusieurs études antérieures. Toutefois, ils articulent rarement plusieurs représentations de la fonction pour résoudre un même problème, ce qui définit pourtant un haut niveau de compréhension de la fonction selon Hitt *et al.* (2001). Cela ouvre la voie à une réflexion sur la façon de continuer à améliorer la formation des futurs enseignants de mathématiques.

Mots-clés : fonction, interprétation, représentation, enseignement

ABSTRACT

This master thesis discusses mathematical teaching students' interpretations and representations of the concept of *function*. Our goal is to observe which representations they use the most while performing tasks such as functions' definition, identification, association and transformation, which includes treatment and conversion, two cognitive activities described by Duval (1995). Furthermore, we seek for verbalization of some interpretations of function in participants' answers. The problematic also deals with differences between first-year and fourth-year teaching students. To do that, 100 participants answered to 11 questions about function: 46 university first-year students, 25 second-year students and 29 fourth-year students. Results show that they can use different representations of function according to which task they are expected to perform, mostly verbal and graphical representations. To describe a function, many of them used the dependence relation, which is the best way to think of a function according to Nicholas (1966), but which appears rarely in other studies about teachers' interpretations of a function. However, few students articulated more than one representations of function to perform a task, which would have been a clue of a high level of comprehension of the concept of *function* according to Hitt *et al.* (2001). Thus, it is important to continue to ameliorate the way mathematical teaching students develop their interpretations and representations of function during their undergraduate degree.

Keywords: function, interpretation, representation, teaching

INTRODUCTION

Au Québec, le programme éducatif inclut l'apprentissage des mathématiques puisque cette discipline fait partie du cursus obligatoire pendant les six années d'école primaire et les cinq années du secondaire. Ceci semble porter fruit, car les résultats des tests PISA 2015 ont classé les Canadiens de 15 ans au septième rang mondial en mathématiques et, parmi eux, les Québécois au premier rang. À travers les pays participants, seuls les élèves de Singapour et Hong Kong réussissent mieux que les Québécois (Conseil des ministres de l'Éducation Canada, 2016).

Mais apprendre la démarche mathématique n'est pas aussi simple que ces résultats semblent l'indiquer. Toutes sortes de facteurs complexifient le travail des élèves. Les enseignants doivent donc être bien outillés pour les soutenir dans leurs apprentissages. L'enseignement confère à ceux qui le pratiquent le désir de transmettre ce qu'ils considèrent comme les fondements et les savoirs de la société, dans le but de permettre aux élèves de former leurs propres savoirs, savoir-faire et savoir-être (Audigier, 1991; Noël, 1997). Ainsi, il importe qu'un enseignant soit compétent, car le maître influence l'apprentissage de l'élève. En tant que concepteur d'activités signifiantes, le maître doit être capable d'éveiller la curiosité de l'élève, sa capacité de réflexion et son esprit de découverte scientifique. Les activités ainsi conçues porteront la marque de la sémiotisation que l'enseignant fait de ce qu'il enseigne, tel que nous le verrons au chapitre III, donc l'expertise de l'enseignant est indispensable. En partageant sa conception d'un savoir, ce dernier peut aider l'élève à prendre sa propre place dans la société. Donc, les compétences pédagogiques de l'enseignant ont un impact sur le développement des jeunes dans la classe, d'où l'importance de la recherche axée sur la formation des enseignants.

En effet, pour avoir des enseignants de si haut niveau, il est bien important d'offrir une formation de qualité aux futurs enseignants en mathématiques. Dans le baccalauréat en enseignement secondaire (BES) de l'Université du Québec à Montréal (UQAM), la formation des enseignants comporte un ensemble de cours d'une durée de quatre ans donnant droit à l'obtention d'un baccalauréat et du brevet d'enseignement. De plus, cette formation met l'accent sur les découvertes scientifiques et sur l'utilisation des technologies. Lors de l'obtention du diplôme, les futurs enseignants doivent pouvoir disposer de tous les outils didactiques pouvant aider les jeunes à s'épanouir dans l'apprentissage des mathématiques.

Un des concepts essentiels – mais difficiles – pour l'ensemble de l'apprentissage des mathématiques est le concept de *fonction*. A priori, le terme *fonction* peut sembler simple. Quiconque ouvre un dictionnaire en trouve plusieurs définitions, incluant celle propre aux mathématiques. Par exemple, l'article « Fonction » du dictionnaire en ligne USITO (2014), définit la fonction comme une « [r]elation constante entre deux ou plusieurs variables, telle qu'à toute modification de valeur de l'une correspond régulièrement un changement de valeur des autres ». Mais, à quoi le concept de *fonction* renvoie-t-il profondément? L'évolution du concept de *fonction* sera détaillée dans le chapitre I. Le concept de *fonction* occupe une place importante à travers l'histoire, car les *fonctions* selon Leonhard Euler (XVIII[e] siècle) sont la base du développement plus moderne des mathématiques. Comme nous le verrons dans l'historique, afin de comprendre la notion de *fonction*, de la définir et de la rendre plus accessible et moins abstraite, de nombreuses discussions philosophiques et scientifiques ont été abordées depuis plus de trois siècles.

Aujourd'hui, la notion de *fonction* est intégrée de manière autonome dans tous les domaines scientifiques. Toutefois, la littérature mettant l'accent sur les conceptions que les futurs maîtres peuvent avoir de la notion de *fonction* est relativement rare, comme nous le verrons dans le chapitre II. Dans ce domaine, la plupart des recherches se sont penchées sur les compréhensions des élèves de niveau secondaire.

Dans les recherches portant sur la fonction, ces compréhensions sont parfois abordées sous l'angle des interprétations, qui sont des façons analytiques d'appréhender la fonction, et parfois sous l'angle des représentations, c'est-à-dire des façons de présenter concrètement certaines de ses propriétés, comme nous le verrons dans le chapitre I. Comme les fonctions peuvent s'interpréter de diverses manières et se représenter dans divers registres, le concept de *fonction* peut ne pas être envisagé dans la totalité de ses dimensions et ce, même en éducation supérieure. Ainsi, d'après les recherches dont il sera question dans les premiers chapitres, le concept actuel de *fonction*, qui est un reflet de son évolution, témoigne de certaines incompréhensions chez les élèves et, dans une moindre mesure, chez les enseignants au secondaire. D'après les travaux de Kieran (2007) et Even (1990), pour enseigner la fonction, il faut avoir de vastes connaissances mathématiques incluant de multiples interprétations du concept de *fonction*, savoir les lier, être capable de les représenter de façon alternative, et utiliser plusieurs exemples pour faire varier les représentations de la fonction admises dans l'apprentissage.

Le chapitre I s'intéresse à des interprétations de la fonction et aux représentations permettant de les exprimer qui ont été identifiées dans les productions d'étudiants en formation des maîtres, particulièrement dans l'étude de Vinner et Dreyfus (1989). Il s'agit de conceptions que les participants se font de la fonction et non forcément de représentations bien distinctes sur le plan mathématique. Selon ces travaux, pour les étudiants en formation des maîtres, la relation entre variables dont il est question dans une définition générale de la fonction pourrait être interprétée comme une correspondance, une relation de dépendance, une règle, ou une covariation. Le chapitre III du présent mémoire se penche aussi sur les activités de représentation, traitement et conversion d'une fonction dans un ou plusieurs registre(s) de représentations (Duval, 1991). La fonction mathématique est un concept constamment en construction; c'est pourquoi les définitions de fonction ainsi que les éléments utilisés pour la rendre plus abordable sont divers, mais aussi porteurs de difficultés. Ainsi, les travaux de recherche en didactique des mathématiques ont relevé de nombreux points à étudier pour essayer de comprendre tout ce qui est mis en pratique lors de l'enseignement et l'apprentissage de cette notion, comme les représentations fonctionnelles (Janvier, 1987) et l'articulation de registres de représentation (Duval, 1991). D'autres contraintes se manifestent dans tout apprentissage mathématique, comme les obstacles épistémologiques, didactiques, ontogénétiques et culturels (Brousseau, 1976). À la lumière de ces travaux, il semble que les connaissances liées à la notion de *fonction* qu'ont les étudiants diplômés au secondaire, voire les enseignants de cette discipline, ne couvrent pas la totalité des enjeux liés à la fonction.

Au secondaire, le programme du MELS (2015) propose de mettre l'accent sur les concepts de fonction linéaire, affine, exponentielle et quadratique entre autres. Cependant, pour ces familles de fonctions, les élèves sont censés comprendre et manipuler plusieurs représentations telles que les situations en mots, les tableaux de valeurs, la formule et les représentations graphiques, et ce, pour faciliter leur compréhension sous un angle plus général. Mais, à quel point la pratique enseignante, le programme du MELS au secondaire et l'éducation reçue par les futurs maîtres réussissent-ils à soutenir les élèves et les étudiants dans leur développement de ces représentations de la notion de *fonction* et à les amener à construire des interprétations de celle-ci?

Les études sur la compréhension de la fonction (par exemple, Nicholas, 1966, Vinner et Dreyfus, 1989, Monk, 1992, Hitt, 1998, Kieran, 2007, Passaro, 2016) posent une grande variété de questions comme : Combien de modèles existe-il pour interpréter la fonction? Comment ces interprétations se traduisent-elles en représentations? Parmi les diverses interprétations ou représentations, laquelle est la mieux ou la moins utilisée par les étudiants? Quelles sont les différences dans la façon de traiter la fonction entre les élèves du secondaire et les futurs maîtres? Les résolutions de problèmes qui mettent en jeu le concept de *fonction* permettent d'apercevoir que certains élèves et étudiants, qui ont déjà une connaissance de base, ne choisissent pas la représentation la plus adaptée à un problème donné, ne comprennent pas la totalité des exercices en mots, ou encore font un mauvais usage des tableaux de valeurs (Carlson, 1998).

Toutes ces questions sont importantes, car comprendre comment les futurs enseignants utilisent diverses caractéristiques de la notion de *fonction* pourrait aider à identifier sur quels aspects il faut travailler lors de l'enseignement des mathématiques en milieu scolaire et universitaire au Québec. Comme nous le verrons dans les chapitres I et II, la plupart des recherches portant sur la *fonction* ne parlent que de tout ce que les élèves et étudiants ne font pas dans leurs développements mathématiques touchant la notion de *fonction*. Dans un esprit complémentaire, le présent mémoire vise à observer spécifiquement les interprétations et représentations que priorisent les étudiants futurs professeurs de mathématiques et à comparer le niveau de performance à différents stades du programme universitaire.

Les considérations soulevées ci-dessus sont à la base de la préparation de ce mémoire, qui tentera d'identifier des similitudes et des écarts entre les représentations et interprétations de la fonction privilégiées par des étudiants uqamiens de 1ère, 2e et 4e années du BES en mathématiques pour identifier une fonction, la définir et articuler plusieurs de ses représentations ou interprétations. Le fondement de cette problématique sera expliqué dans le chapitre II.

Le présent mémoire se divise en six chapitres. Le premier portera sur la définition du concept de *fonction*, tel que le décrit la littérature mathématique. Le deuxième fera état de la problématique. Suivront le cadre théorique (chapitre III), la méthodologie (chapitre IV), les résultats (chapitre V) et la discussion (chapitre VI).

CHAPITRE I

LA NOTION DE FONCTION

L'apprentissage des fonctions est une étape du développement de la pensée rationnelle de l'élève au secondaire, comme en témoigne leur présence dans la majorité des cursus scolaires pour les adolescents. À l'école, les élèves doivent faire face aux multiples propriétés liées à cet apprentissage. Pour ce faire, il est indispensable qu'ils apprennent à représenter et à manipuler les différentes interprétations de la fonction. Cependant, les fonctions sont complexes. Le concept de *fonction* a été travaillé pendant l'histoire par des scientifiques qui ont laissé des traces de leur développement intellectuel sur ce sujet. De la civilisation grecque jusqu'au XXI^{e} siècle, les travaux des mathématiciens étalés sur plusieurs périodes montrent la complexité de la notion qui prendra au XVII^{e} siècle le nom de *fonction*. Cette section aborde la notion de *fonction*, ainsi que, de manière chronologique, certaines idées présentes dans l'histoire permettant de mettre en relief sa complexité.

1.1 Définition générale de la fonction et sa place dans l'algèbre

Avant de commencer, voyons une définition générale de la fonction, telle qu'on la retrouve dans un manuel scolaire québécois (figure 1.1). Cette définition repose sur l'idée d'une relation, qui peut s'écrire sous forme de règle de correspondance, entre des éléments constituant un ensemble de départ, aussi appelé domaine, et des éléments constituant d'un ensemble d'arrivée, aussi appelé codomaine. Ces ensembles sont explicités dans la notation fonctionnelle, mais le texte signale qu'il n'est pas nécessaire de le faire lorsque ces ensembles correspondent à l'ensemble des nombres réels. Si cette stratégie est souvent utilisée dans les outils didactiques, elle ne correspond pas à une définition scientifique de la fonction mathématique.

S'il n'y a pas de contexte, on considère généralement que les ensembles de départ et d'arrivée sont $\mathbb{R}$.

La fonction

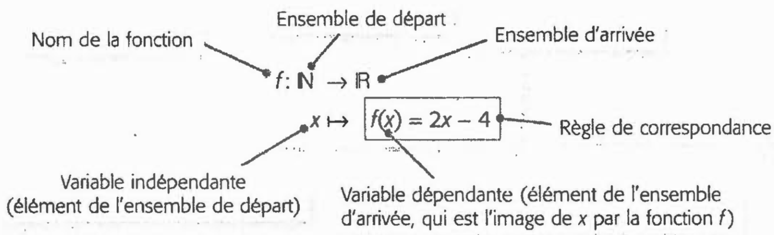
Une fonction est une relation pour laquelle tout élément de l'ensemble de départ est associé à au plus un élément de l'ensemble d'arrivée.

Le type des variables d'une situation détermine les ensembles de départ et d'arrivée de la fonction. Ces ensembles sont généralement des sous-ensembles des nombres réels tels que $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}_+$, etc.

La notation fonctionnelle

La notation fonctionnelle sert à définir une fonction en précisant ses ensembles de départ et d'arrivée ainsi que sa règle de correspondance.

Voici les éléments qui constituent la notation fonctionnelle.



Cette notation se lit ainsi : «Fonction f de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{R}$ qui, à un élément x appartenant à $\mathbb{N}$, fait correspondre un élément appartenant à $\mathbb{R}$ qu'on note $f(x)$.»

Figure 1.1 : Présentation de la fonction dans le manuel *Intersection* profil Technico-sciences (Boucher *et al.*, 2010, p. 14)

Du côté des travaux de recherche sur la fonction, Passaro (2007) donne une définition plus rigoureuse de *fonction*, qui s'appuie sur De Cotret (1985), Fikrat (1994) et Cabana (1996). Tout en soulignant la place des ensembles dans l'étude de la fonction, Passaro insiste plutôt sur quatre autres points qui se combinent pour définir ce qu'est une fonction :

- il existe une relation de dépendance entre deux grandeurs;
- on peut regarder cette relation de manière globale, c'est-à-dire s'intéresser à la « réaction » d'une des grandeurs (variable dépendante) lorsqu'on fait « bouger » l'autre (variable indépendante);

- on peut aussi regarder cette relation de manière ponctuelle, c'est-à-dire s'intéresser à la valeur que prend une des grandeurs (variable dépendante) lorsque l'autre grandeur (variable indépendante) prend une valeur précise;
- la relation entre les deux grandeurs respecte la contrainte suivante : « à une valeur de la variable indépendante correspond au plus une valeur de la variable dépendante ». (Passaro, 2007, p. 5-6)

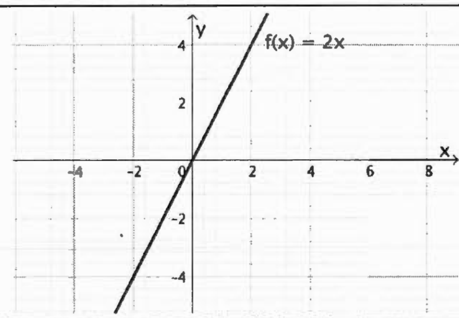
Dans le cadre de notre mémoire, nous entendons donc par fonction toute dynamique qui respecte ces quatre points, peu importe qu'elle soit écrite sous la forme conventionnelle *f(x)* ou non. Nous rejoignons ici l'esprit de Kaput (1987b), qui affirme que la notation *f(x)* = permet de faire ressortir l'aspect transformationnel d'une fonction, tandis que la notation y = permet de faire ressortir l'aspect relationnel de la même fonction. Par exemple, considérant une fonction dont la notation fonctionnelle serait $f = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = 2x\}$ qui double la valeur d'un nombre réel donné dans le domaine, on peut la représenter par l'expression algébrique $y = 2x$ pour tout x réel, parce que la valeur de y dépend de celle de x, qu'on peut observer que y réagit à chaque variation de x, qu'on peut observer la valeur de y pour une valeur donnée de x, et qu'il existe une seule valeur de y possible pour une valeur donnée de x. Ainsi, si x a une valeur de 2, la valeur de y ne peut être que de 4 et un changement augmentant de 1 la valeur de x provoquera une réaction augmentant de 2 la valeur de y.

Selon le MELS (2015, p. 56), « [l]'algèbre offre [...] un outil de généralisation qui permet, à partir de l'observation de régularités, de représenter des liens de dépendance entre des quantités ». Les fonctions participent d'une telle généralisation. L'expression algébrique peut être une manière symbolique de représenter une fonction, mais il existe de multiples représentations de la fonction. Ainsi, pour retenir la nomenclature de Duval (1993), qui sera présentée plus en détails dans le chapitre III, une fonction réelle *f* de A vers B qui, à tout élément x de A, fait correspondre un élément y dans B, peut être représentée symboliquement sous plusieurs formes algébriques, par exemple $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \rightarrow 2x$, mais elle peut aussi être représentée numériquement dans un tableau de valeurs, graphiquement à l'aide d'une courbe ou verbalement grâce au langage naturel. Le tableau 1.1 présente diverses représentations de la fonction réelle $f : x \rightarrow 2x$.

Tableau 1.1 : Diverses représentations d'une fonction
selon la nomenclature de Duval (1993)

<table>
<tr><td>Notations fonctionnelles
(représentation algébrique)</td><td>$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
$x \rightarrow 2x$

$f = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = 2x\}$

Pour tout x réel, $f(x) = 2x$</td></tr>
<tr><td>Tableau de valeurs
(représentation numérique)</td><td><table><tr><td>x</td><td>-2</td><td>1</td><td>1,5</td><td>3</td></tr><tr><td>y</td><td>-4</td><td>2</td><td>3</td><td>6</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>Graphique</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Langage naturel</td><td>Fonction *f* de ℝ vers ℝ qui, à un élément x appartenant au domaine ℝ fait correspondre un élément y appartenant au codomaine ℝ et dont la valeur est égale à deux fois x.</td></tr>
</table>

Rappelons qu'on entend par *variable* une valeur « qui est susceptible de se modifier, de changer » et qui s'oppose à la *constante*, dont la valeur est fixe (Baruk, 1995, p. 1271). Dans l'exemple précédant, x est une variable, tandis que le multiplicateur 2 est une constante.

En plus des représentations proposées formellement dans le modèle de Duval (1993), les travaux axés sur la compréhension du concept de *fonction* s'intéressent à des interprétations que s'en font les étudiants et maîtres qui participent aux études. Il s'agit le plus souvent de conceptions partielles que les participants se font de la fonction et non de catégories mathématiques formelles, mais celles-ci ont été catégorisées dans différents travaux, tels que ceux de Nicholas (1966), Vinner et Dreyfus (1989) et Selden et Selden (1992). Notons que, même si les interprétations et les représentations ne sont pas toujours traitées distinctement dans les travaux consultés [1], dans leur sens strict, une interprétation est une façon analytique d'appréhender la fonction, tandis qu'une représentation est une façon de la présenter concrètement.

1.2 Typologie des interprétations de la fonction identifiées dans les recherches antérieures

Voici les principales interprétations de la fonction recensées dans les recherches antérieures. Cette typologie s'appuie à la base sur celle présentée par Vinner et

[1] Par exemple, Vinner et Dreyfus (1989) énumèrent dans une même liste de catégories la correspondance, la relation de dépendance et la représentation, sans nuancer que les deux premières sont des interprétations.

Dreyfus (1989) d'après les travaux antérieurs de Vinner (1983), mais est adaptée pour tenir compte d'autres travaux, comme ceux de Nicholas (1966, cité par Hitt, 1998) [2].

1.2.1 La fonction interprétée comme correspondance

Cette façon de concevoir la fonction porte sur deux sous-ensembles d'éléments, le domaine ou ensemble de départ et le codomaine ou ensemble d'arrivée, pour lesquels les éléments d'un ensemble ont une relation avec les éléments de l'autre ensemble tel que à un élément de l'ensemble de départ correspond exactement un élément de l'ensemble d'arrivée : « A function is any correspondence between two sets that assigns to every element in the first set exactly one element in the second set (the Dirichlet-Bourbaki definition) » (Vinner et Dreyfus, 1989, p. 359-360). Par exemple, soit la fonction f définie en extension par $f = \{(1,4), (2,8), (3,12)\}$. Alors f peut être interprétée comme une correspondance $A \rightarrow B$ entre un domaine $A = \{1, 2, 3\}$ et un codomaine $B = \{4, 8, 12\}$. Il se forme donc des paires ordonnées ou couples : (1,4), (2,8) et (3,12). Selon Comin (2005), cette interprétation de la fonction est entre autres mise en valeur dans le programme français de Troisième, où la notion de fonction linéaire et affine se construit dans un processus progressif, d'abord pour faire correspondre un nombre à un autre nombre, puis pour déterminer une expression algébrique, et ensuite pour construire un tableau de valeurs.

Selon Passaro (2015, p. 21), « [l]e regard par la correspondance est donc associé au lien entre chaque valeur de la grandeur indépendante et la valeur de la grandeur dépendante qui lui correspond. ». La correspondance entre les éléments du domaine et du codomaine permet de créer les couples ou paires ordonnées.

---

[2] En plus des interprétations mentionnées dans les prochaines pages, Selden et Selden (1992, cités par Kieran, 2007), proposent aussi un processus mécanique comme façon de percevoir la fonction. Ils décrivent eux-mêmes celui-ci comme inefficace, car c'est la machine qui fait le travail, donc il nous semble inutile de la maintenir comme une interprétation à part entière dans notre étude.

1.2.2 La fonction interprétée comme relation de dépendance

Selon Comin (2005, p. 34), « [l]e concept de fonction a sa source dans l'étude de relations de dépendance entre deux grandeurs telle que toute variation de l'une entraîne ou accompagne une variation de l'autre ». Ainsi, pour ceux qui conçoivent la fonction comme relation de dépendance entre deux variables, il y a une connexion entre deux magnitudes et une variable dépend de l'autre (Vinner et Dreyfus, 1989). Par exemple, l'aire d'un cercle dépend de la valeur du rayon du cercle, c'est-à-dire que la valeur de l'aire augmente quand la valeur du rayon augmente. La notion de *variable* prend ici tout son sens puisque, pour reprendre les termes de Baruk (1995, p. 1271) les valeurs prises par la variable dépendante « se modifie[nt], change[nt] » en fonction de celles de la variable indépendante. Comin (2005) explique que, même si la relation de dépendance permet théoriquement d'associer un nombre infini de valeurs du domaine à un nombre infini de valeurs du codomaine, elle peut aussi être vue comme le penchant de la correspondance : si la correspondance relie les valeurs discrètes de deux sous-ensembles, la relation de dépendance explique le lien entre ces valeurs discrètes. Par exemple, dans le cas de la fonction f définie en extension par $f = \{(1,4), (2,8), (3,12)\}$, la correspondance $A \rightarrow B$ permet d'associer un élément du domaine $A = \{1, 2, 3\}$ à un élément du codomaine $B = \{4, 8, 12\}$, tandis que la relation de dépendance est de multiplier le nombre du domaine par quatre.

La relation de dépendance est une des quatre catégories identifiées par Nicholas (1966)[3] pour catégoriser une fonction et, selon lui, la meilleure façon de concevoir celle-ci, et ce, parce que c'est celle qui est davantage utilisée pour le calcul en

---

[3] Nicholas (1966) observe dans les manuels scolaires quatre façons de conceptualiser la fonction : en termes de relation entre variables, d'ensemble de paires ordonnées, de règle de correspondance ou d'entrant/extrant.

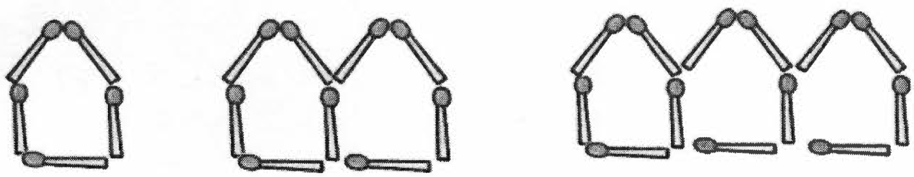
sciences et en ingénierie. De plus, elle est fortement ancrée dans la littérature, ce qui la rend impossible à négliger.

Ainsi, l'interprétation d'une fonction comme dépendance amène à concevoir la fonction comme une relation entre deux variables dans laquelle une des variables (dépendante) dépend de l'autre (indépendante). La relation de dépendance s'inscrit dans une vision globale de la fonction qui permet d'en percevoir la variation, alors que la correspondance en donne une vision ponctuelle ancrée sur l'association de deux éléments.

1.2.3 La fonction interprétée comme règle

Dans la première interprétation de la fonction, il y avait une correspondance entre les éléments du domaine et ceux du codomaine, l'insistance étant mis sur ces ensembles. Dans la deuxième interprétation, c'est la relation de dépendance entre les variables composant les ensembles qui importe le plus. Dans la troisième interprétation, on considère la fonction en tant que règle, et l'accent est mis sur la régularité dans la relation entre deux variables, donc la règle peut s'appliquer à n'importe quel nombre et non seulement à des valeurs discrètes, tout dépendant si le domaine comporte des valeurs continues ou non (Vinner et Dreyfus, 1989). Par exemple, la figure 1.2 illustre un exercice de construction de maisons en rangée avec des allumettes. La première maison comporte cinq allumettes, l'ajout d'une deuxième maison n'en demande que quatre puisqu'une allumette sera concomitante. Quand on comprend qu'il y a toujours besoin de quatre allumettes pour construire les maisons suivantes, on peut prévoir le nombre d'allumettes nécessaires pour construire n'importe quel nombre de maisons, à partir de la règle $f(x) = 5 + 4(x-1)$ ou de la règle $f(x) = 4x+1$, où x représente le nombre de maisons dans l'ensemble des $\mathbb{N}$ et $f(x)$, le nombre d'allumettes nécessaires dans l'ensemble des $\mathbb{N}$. Cette conception de la fonction comme une règle de correspondance est aussi une des quatre catégories reconnues par Nicholas (1966).

[4]



$f(x) = 5 + 4(x-1)$	$f(x) = 5 + 4(x-1)$	$f(x) = 5 + 4(x-1)$
Pour 1 maison	Pour 2 maisons	Pour 3 maisons
$f(1) = 5 + 4(1-1)$	$f(2) = 5 + 4(2-1)$	$f(3) = 5 + 4(3-1)$

Figure 1.2 : Exercice de construction de maisons pour illustrer la règle

Selon Vinner et Dreyfus (1989) et Gaudin (2002), l'interprétation de la fonction comme règle ne met pas l'accent sur les valeurs d'un ensemble de départ et d'arrivée, mais plutôt sur une régularité, comme «quatre divisé par », par exemple. D'ailleurs, ces auteurs constatent qu'il est usuel chez les participants interprétant la fonction comme règle de ne pas préciser le domaine et le codomaine.

1.2.4 La fonction interprétée comme covariation

Thompson et Carlson (2017) signalent qu'il n'existe pas *une* interprétation de la fonction qui soit *la* bonne façon de concevoir la fonction, car la façon de comprendre ce qu'est une fonction peut varier d'une personne à l'autre. Au-delà des interprétations précédentes de la fonction, l'action mentale liée à une fonction dépend d'un raisonnement covariationnel. Dans leur vision, la covariation est une façon de traiter l'information. La covariation repose sur un traitement mental qui va plus loin que les interprétations précédentes, axées sur une image mentale.

[4] Schéma récupéré de https://www.mathovore.fr/exercices-sur-le-calcul-litteral-quatrieme-serie-4

Le raisonnement covariationnel est lié à l'habileté de voir comment la grandeur d'une variable est directement affectée par tout changement de la valeur d'une autre variable. Selon Thompson et Carlson (2017), ce type de raisonnement repose sur la capacité d'observer le changement simultané de deux valeurs, celles du domaine et celles du codomaine. Donc, maîtriser la covariation demande d'avoir une vision dynamique de la fonction pour bien en voir les changements potentiels.

Pour Confrey et Smith (1994, 1995), l'approche par covariation se définit en contraste avec celle par correspondance, et c'est pourquoi nous la traitons parmi les interprétations. Alors que l'approche par correspondance, qui est directionnelle, repose sur l'association des éléments du domaine à ceux du codomaine, l'approche par covariation repose sur la création de deux ensembles qui sont constitués de façon autonome, le domaine et le codomaine. Les relations entre les éléments du domaine et celles entre les éléments du codomaine évoluent de façon autonome, mais simultanément. Selon Confrey et Smith, les liens entre le domaine et le codomaine sont d'ordres relationnel et spatial plutôt que basés sur des règles.

La figure 1.3 illustre la façon dont Passaro (2016) schématise l'approche par correspondance et celle par covariation. Si Passaro reprend la distinction établie par Confrey et Smith, elle recommande toutefois d'utiliser les deux approches de façon complémentaire dans l'enseignement. Cette figure montre bien que l'approche par covariation demande un raisonnement pour traiter des variations qui va au-delà d'une interprétation pour modéliser un concept.

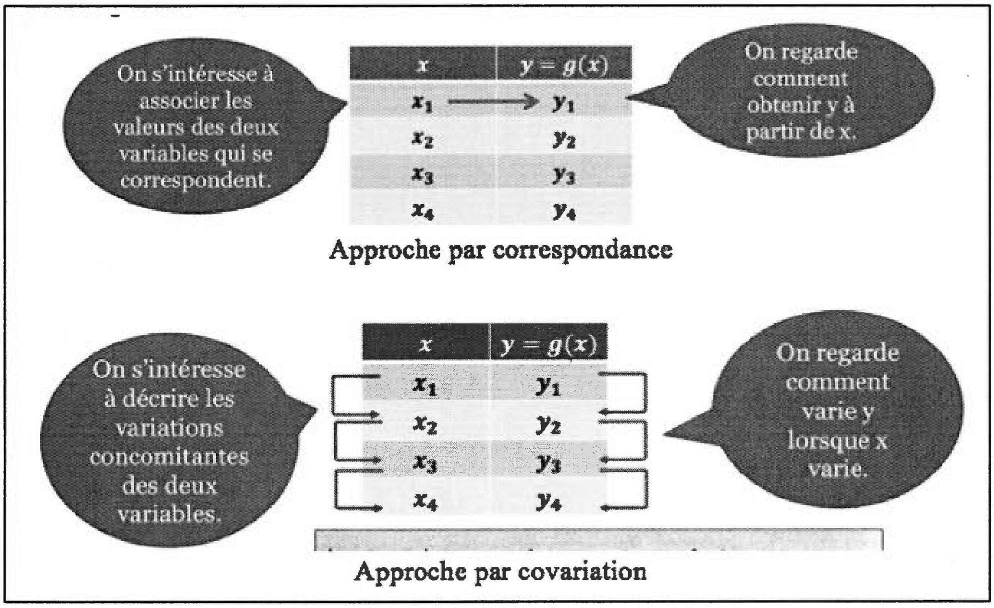


Figure 1.3 : Schématisation des approches par correspondance et par covariation selon Passaro (2016)

Citant un document inédit de Coulombe et Berenson, Saldanha et Thompson (1998) mentionnent quatre propriétés de la covariation, qui montrent bien les étapes de ce type de raisonnement : l'identification de deux ensembles de données, la coordination de patrons pour former des associations entre ces ensembles, l'établissement de connexions entre les valeurs spécifiques des deux ensembles et la généralisation des connexions pour prédire des valeurs encore inconnues de l'un des deux ensembles. Ainsi, si dans l'approche par covariation telle que définie par Confrey et Smith (1994, 1995) ou Passaro (2016), les valeurs de deux ensembles évoluent de façon simultanée mais indépendante, le raisonnement covariationnel mène à la coordination de la façon dont les deux ensembles évoluent. Pour Carlson *et al.* (2002), le raisonnement covariationnel permet à l'apprenant de s'engager dans cinq actions mentales, qui sont cinq types de coordination, incluant entre autres la coordination de la direction des changements dans les deux ensembles ainsi que la coordination du taux de changement de la variable d'un ensemble en lien au taux de changement de la variable de l'autre ensemble.

Saldanha et Thompson (1998) ajoutent que la covariation est développementale. Au premier stade de développement, l'apprenant pourra coordonner une valeur discrète d'un ensemble avec une valeur d'un autre ensemble, ce qui ressemble davantage à l'approche par correspondance. Au dernier stade de développement, la covariation implique une compréhension des quantités comme continuum, donc l'apprenant sera capable de coordonner tous les écarts intermédiaires des deux ensembles, qu'on appelle les accroissements, à l'aide de la généralisation.

Ainsi que Thompson et Carlson (2017) le signalent, le raisonnement covariationnel est difficile à observer dans les productions des étudiants et enseignants, car les outils de mesure ne permettent de recueillir aucune donnée sur les raisonnements sous-jacents; même lorsqu'une question demande d'expliquer le raisonnement du participant, ce qui peut être observé par le chercheur est davantage les représentations produites que les interprétations mentales. Rien ne permet d'observer directement si les futurs maîtres participants à notre étude ont eu recours à la covariation pour répondre à certaines questions, parce que notre démarche est quantitative et non qualitative, la notion de *covariation* n'est pas étudiée plus en profondeur dans ce mémoire. C'est pourquoi nous mettrons dorénavant l'accent sur les représentations de la fonction, qui seront au centre de notre étude.

Dans le présent mémoire, les quatre catégories précédentes – la correspondance, la relation de dépendance, la règle et la covariation – sont considérées comme des interprétations de la fonction, car il s'agit de façons d'analyser la fonction qui font appel à une *image* sous-jacente qui n'est pas directement observable.

D'ailleurs, pour Vinner et Dreyfus (1989), il y a une différence entre la « définition », c'est-à-dire la forme conventionnelle et souvent scolaire avec laquelle une interprétation est verbalisée, et l'« image », qui fait appel à l'interprétation réellement utilisée dans un raisonnement. Ainsi, l'interprétation serait toujours verbalisée par l'intermédiaire d'une « définition » et toute tentative d'en donner des exemples oblige à recourir à l'intermédiaire d'une ou plusieurs représentations qui n'illustrent jamais la pleine profondeur de l'« image » sous-jacente. Dans un même esprit, l'interprétation qu'une personne se fait d'une fonction n'est pas directement accessible, car elle est exprimée par le biais d'une ou plusieurs représentations, comme celles que nous verrons ci-dessous.

1.3 Typologie des représentations de la fonction identifiées dans les recherches antérieures

Voici les principales représentations de la fonction recensées dans les recherches antérieures : dessin, tableau de valeurs, formule, graphique cartésien, langage verbal. Il s'agit aussi des représentations des objets mathématiques, incluant la fonction, proposées par Duval (1993). Il importe de signaler que la typologie propose ici des représentations que *peut* prendre la fonction. Cela ne signifie pas que tout dessin, tout tableau de valeurs, toute formule, tout graphique ou tout mot représente une fonction mathématique.

1.3.1 La fonction représentée comme dessin

Duval (1993) mentionne qu'un dessin peut être une représentation géométrique d'un objet mathématique tel qu'une fonction. Il s'agit d'une façon simplifiée de représenter la dynamique des variables sans donner explicitement tous les éléments de la fonction, grâce à l'aspect visuel. Par exemple, la figure 1.4, tirée de Duval (2006b, p. 77), illustre une représentation sous forme de dessin d'une fonction de domaine $\mathbb{N}$ dont une représentation algébrique serait $f(n) = 3n^2 - 3n + 1$:

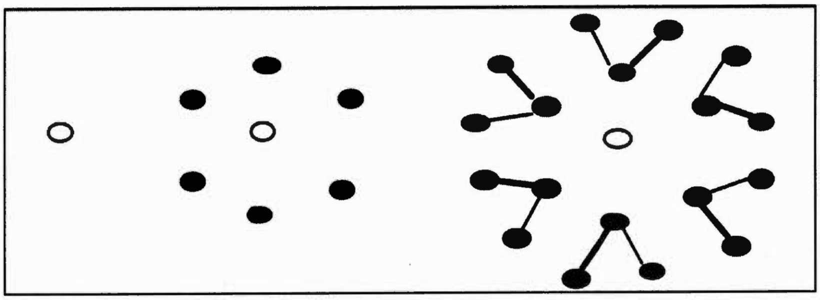


Figure 1.4 : Exemple de fonction représentée par un dessin

Par contre, dans les études empiriques qui présentent un classement des façons dont des participants étudiants ou enseignants représentent une fonction, cette catégorie est généralement absente. Par exemple, elle ne figure pas dans l'étude de Vinner et Dreyfus (1989). D'ailleurs, Bloch (2005, p. 41) soulève que le dessin géométrique

> est actuellement peu utilisé (grandeurs géométriques variables pour la représentation de fonctions) et donc il n'est pas vu comme «évident» par les professeurs et les élèves. Par exemple le parallélogramme articulé [...] est-il un bon représentant de la fonction "sinus" ?

Ainsi, la représentation d'une fonction comme dessin est peu utilisée dans les études antérieures.

1.3.2 La fonction représentée comme tableau de valeurs

Une fonction peut être représentée numériquement dans un tableau de valeurs. Selon Duval (2003, p. 7), « [e]n distribuant des données selon un croisement de lignes et de colonnes, le tableau les *sépare visuellement.* » Il permet à chaque case de fournir une valeur discrète, ce qui élimine à première vue une complexité qui apparaît dans la compréhension d'un problème. Dans un même ordre d'idée, Coppé *et al.* (2007) disent qu'un tableau de valeurs est la représentation d'un échantillon de couples formés d'une valeur du domaine et d'une valeur du codomaine. Pour eux, cette représentation est partielle, car elle présente uniquement des valeurs discrètes d'une fonction, que celle-ci soit continue ou non. Par conséquent, observer un tableau de valeurs ne permet pas de déterminer de façon certaine la fonction représentée; un même tableau de valeurs peut servir à générer plusieurs formules ou graphiques, selon les valeurs intermédiaires qu'une personne imagine. Duval (2003) ajoute que les tableaux sont plus complexes qu'ils n'en ont l'air, car leur unité véritable est une liste de données et non des valeurs isolées.

Tout comme le dessin, le tableau de valeurs n'est généralement pas mentionné dans les études qui recensent les conceptions de la fonction des étudiants et des maîtres, comme celle de Vinner et Dreyfus (1989).

1.3.3 La fonction représentée comme formule

En tant que formule, une fonction peut être représentée par une expression algébrique. Par exemple, soit $V: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, la formule $V(m) = 4/m$ représente la fonction qui, à la masse m associe la valeur du volume V d'un gaz quelconque. Cette formule présente la propriété de la fonction qu'est la relation entre les variables que sont le volume et la masse.

Contrairement aux deux représentations précédentes, la formule ou expression algébrique est recensée dans les études antérieures sur les façons de concevoir la fonction. Vinner et Dreyfus (1989) incluent dans cette catégorie des réponses de participants qui perçoivent la fonction comme une équation, par exemple ceux qui disent qu'une fonction est « an equation expressing a certain relation between two objects » ou « an equation connecting two factors » (p. 360).

1.3.4 La fonction représentée sous forme graphique

La catégorisation de la fonction proposée par Vinner et Dreyfus (1989) inclut aussi la représentation graphique. Une représentation graphique consiste à traduire visuellement des données quantitatives (Baruk, 1995, p. 564). Selon Mac Lane (1996), une fonction sous forme graphique est une courbe dans le plan cartésien. Cette courbe se définit mathématiquement comme suit :« La courbe représentative *C* de la fonction f dans un repère du plan est l'ensemble des points *M* ayant comme abscisse *x* et comme ordonnée f(x). M(x;y) $\in$ C signifie que : y = f(x). » (Educlever, 2018). Dans ce plan, il est possible de tracer une droite d'équation x = a qui rencontre la courbe en un seul point, dont les coordonnées seront (a,b). Le nombre *b* est la valeur du codomaine de la fonction associée à l'élément *a* du domaine. La figure 1.5 propose une telle représentation graphique.

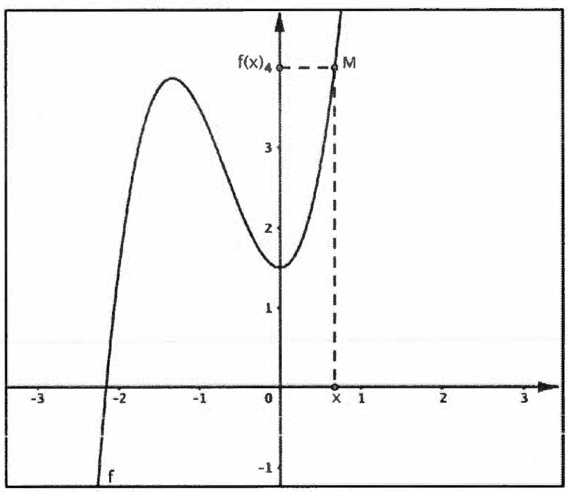


Figure 1.5 : Exemple de fonction polynomiale de 3^{e} degré exprimé sous forme de graphe

La figure 1.5 présente une fonction polynomiale de 3^{e} degré sous forme de graphe, c'est-à-dire une courbe qui représente la relation entre deux variables. La représentation algébrique de cette même fonction est, pour tout x réel, $f(x) = 2x^3 + 4x^2 + 1,5$.

1.3.5 La fonction représentée sous forme verbale

Une autre façon de représenter la fonction est sous forme de problème exprimé en mots, ce que Duval (1993) appelle la représentation verbale. Dans ce cas, l'expression sémantique renferme des données parfois numériques ou parfois symboliques, mais toujours associées à un objet mathématique concret qui, dans le cas qui nous intéresse, est la fonction. La figure 1.6 présente un exemple de fonction sous forme de problèmes en mots.

Pour mesurer le volume d'un gaz, on a utilisé un ballon rempli d'oxygène, puis à l'aide des masses déposées par-dessus, on a exercé une pression sur le gaz. On a observé la relation entre la masse et le volume du gaz.

Figure 1.6 : Exemple de fonction exprimée implicitement
sous forme de problème en mots : volume d'un gaz en fonction de la masse

L'exemple de la figure 1.6 est une représentation, car il s'agit de « mettre en propositions pour construire la pensée des objets de connaissance » (Duval, 2005, p. 33). Duval précise aussi qu'un énoncé en langage naturel considéré comme représentation peut servir à décrire une relation, à définir un objet ou à comparer des grandeurs.

Toute la diversité des interprétations et représentations de la fonction dont il a été question jusqu'ici repose sur la façon dont le concept s'est développé au cours de l'histoire. Comme nous le verrons ci-dessous la fonction mathématique est une notion complexe et les connaissances à son sujet ont beaucoup évolué au fil du temps.

1.4 Évolution de la notion de *fonction* pendant l'histoire

Plus de trois siècles ont été témoins des transformations liées au concept de *fonction*. Selon Grugnetti *et al.* (1999), le concept de *fonction* est vu sous plusieurs angles en diachronie. Les références historiques sont essentielles pour bien comprendre l'évolution de la notion de *fonction* (Biehler, 2005, Cabana, 1996, De Cotret, 1987-1988, cités par Passaro, 2015).

Selon Hitt (1994, 2002), des traces reliées à la construction du concept de *fonction* existe déjà à Babylone, en 2000 avant Jésus-Christ. Les philosophes babyloniens de cette époque font ressortir l'idée de *relation* entre des nombres; par exemple, une tablette présente une correspondance entre un nombre, son carré et sa racine carrée. Ainsi, 4 est associé à 16 et à 2. Toutefois, pour Passaro (2015), les débats liés aux phénomènes de croissance chez les Grecs sont les premiers balbutiements du développement du concept de *fonction*, bien que les termes de *fonction* et *variable* ne soient pas encore utilisés.

1.4.1 Relation entre quantités dans l'Antiquité grecque

Dans l'Antiquité (de -500 à 400), les philosophes grecs ont commencé leurs recherches sous l'angle de l'astronomie. Dans ce contexte, les travaux de Ptolémée portaient sur la géométrie du cercle autour de laquelle s'est d'abord développé le principe de tables de corde, qui deviendront plus tard des tables trigonométriques, dans lesquelles on trouve trois colonnes : la première propose la mesure d'un arc de cercle de 30' à 180°, la deuxième, la mesure de la longueur d'une corde qui sous-tend cet arc, et la troisième, le système sexagésimal, qui est le calcul de l'accroissement[5] de la corde entre une ligne et la suivante et divisé par 30. Ces tables de cordes permettaient de faire des prédictions sur la mesure d'une nouvelle corde qui serait ajoutée dans un autre arc du cercle. La mise en relation de diverses valeurs joue un rôle semblable à celui que joueront plus tard les fonctions. Cependant, comme les tables de cordes reposent sur des valeurs discrètes, elles ne parviennent pas à aider à développer une généralisation propice au raisonnement fonctionnel (Youschkevitch, 1981, cité par Passaro, 2015), c'est-à-dire la capacité de faire le même raisonnement avec n'importe quelle valeur – numérique ou symbolique – et non juste avec des valeurs discrètes. Cette généralisation permet une économie sémantique puisqu'il n'est pas nécessaire d'expliquer chaque variation en mots.

Dans cette période, les Grecs utilisent l'algèbre géométrique[6]. Ils décrivent verbalement les propriétés des lieux géométriques, mais c'est avec Aristote que les quantités prennent la forme de variables (Kidron et Tall, 2015), mais sans porter ce nom. En résumé, c'est grâce aux travaux des Grecs qu'aujourd'hui la notion de *fonction* peut être identifiée comme une relation entre des quantités et par l'étude des courbes et ce, malgré que les concepts de *variable* et *fonction* soient absents du vocabulaire de l'époque (Youschkevitch, 1981).

Ainsi, dans l'Antiquité, le développement du concept qui deviendra la fonction s'appuie sur la relation entre deux grandeurs.

---

[5] Le mot *accroissement* est utilisé ici dans le même sens que dans le modèle covariationnel présenté à la section 1.2.4 : l'écart entre deux valeurs intermédiaires d'un ensemble.

[6] « On désigne sous le nom d'algèbre géométrique grecque, toute une série de problèmes qui figurent dans le livre deux et le livre six des Éléments d'Euclide, qui sont exprimés et résolus géométriquement, et que nous pouvons associer maintenant à des identités remarquables, ou à des résolutions d'équations du second degré, portant sur des nombres, mais qui dans le livre grec n'ont rien de numérique. » (Cousquer, 1995, p. 8)

1.4.2 Introduction de la notion de variable au Moyen-Âge

Au Moyen-Âge, pendant le XIII^{e} siècle, une étude du mouvement qui servira de genèse à la notion de *fonction* se développe à Paris et à Oxford. Les mathématiciens de cette époque n'étudient pas seulement le mouvement de façon uniforme, ils s'intéressent à des phénomènes locaux et quantitatifs. Ils se penchent particulièrement sur les changements de qualité ou de forme comme la distance, la couleur et la vitesse en fonction d'une extension du temps (Charbonneau, 1987a; Youschkevitch, 1981).

Selon Passaro (2015), bien qu'à cette époque le développement de la notion de *fonction* soit riche aux niveaux de l'abstraction et de la généralisation, les représentations utilisées sont insuffisantes, car elles ne permettent pas de schématiser des changements fins, forçant les mathématiciens à se limiter aux changements globaux. Cet obstacle qui est ancré dans le manque de langage spécialisé prendra fin au début du XVII^{e} siècle avec le symbolisme qui a révolutionné les mathématiques.

Ainsi, à cette époque, la notion de *fonction* est principalement liée au deuxième axe de définition de la fonction : la variation de la variable dépendante en fonction de la variable indépendante.

1.4.3 Introduction du symbolisme de la fonction au XVII^{e} siècle

Le symbole apparaît au début de cette époque. Des scientifiques comme Viète (1540-1603) arrivent à représenter à l'aide d'un seul et même symbole un ensemble de quantités qui peuvent varier (Passaro, 2015). Cette nouvelle façon de représenter les mathématiques simplifie les opérations. À cette époque, l'étude du mouvement est plus analytique et dynamique pour Fermat (1605-1665) et Descartes (1596-1650), qui ont une vision plus fonctionnelle que celle des Grecs, comme l'illustre l'extrait de *Géométrie* (1637) : « Mesme prenant successivement infinies diverses grandeurs pour la ligne y, on en trouvera aussi infinies pour la ligne x, et ainsi on aura une infinité de divers poins tels que celuy qui est marqué C, par le moyen desquels on décrira la ligne courbe demandée. » (Descartes, cité par Charbonneau, 1987a, p. 9). C'est dans cet esprit qu'est introduite l'idée de dépendance de quantités qui varient selon le principe qu'une expression avec x et y permet d'exprimer une dépendance entre des quantités variables de telle sorte que le calcul des valeurs de y corresponde aux valeurs données de x (Passaro, 2015, d'après Youschkevitch, 1981).

C'est en 1673 que le mot *fonction* s'entend pour la première fois dans les recherches scientifiques de Leibniz (1646-1716). Selon Comin (2005), pour Leibniz, la fonction est énoncée comme une relation des grandeurs qui varient selon une loi et qui se transpose dans un graphe. Puis, c'est Newton (1643-1727) qui utilise les fonctions comme source pour le développement du calcul différentiel. À la même époque naît l'idée d'équation[7] dans laquelle deux variables x et y sont des variables quantitatives qui dépendent l'une de l'autre (Youschkevitch, 1981, cité par Passaro, 2015). Par la nature des problèmes proposés par Newton, mais aussi par l'utilisation du calcul que fait Descartes, l'idée de *fonction* prend forme (Charbonneau, 1987a). Newton ne parle ni de variable dépendante ni de variable indépendante. Il propose plutôt une symétrie entre les quantités des variables. Cette symétrie repose sur l'idée qu'il existe une seule véritable variable indépendante, le temps, et que tout changement d'autres variables est dépendant du temps qui passe. Il faut attendre l'arrivée de la notion de dérivée pour qu'une vision de la variable indépendante provoque des changements conceptuels chez les mathématiciens et nous amène à la façon actuelle de distinguer

[7] Il serait inexact d'identifier une équation à une fonction de nos jours, mais, à l'époque de Newton, le terme « équation fonctionnelle » était fréquemment utilisé, puis, au XVIII[e] siècle, Euler utilise le terme « aequationem » dans ses écrits latins sur la fonction (Dhombres, 1988).

variables dépendantes et indépendantes (Haguel et Lemoine, 1993, cités par Passaro, 2015).

Toutefois, sous l'angle de la dérivée, le terme *fonction* n'est pas toujours utilisé dans le même sens. Par exemple, Newton l'a fait dans des contextes physiques pour décrire la dérivée en tant que « fluxion », un taux de changement associé à la vitesse, tandis que Leibniz l'a fait pour décrire la dérivée comme un ratio de quantités trop petites (Dufour, 2011).

Ainsi, au XVII^{e} siècle, on voit se développer la représentation formelle abstraite de la fonction à l'aide du symbolisme mathématique.

1.4.4 Introduction à l'analyse au XVIII^{e} siècle

Selon Hitt (1994), la fonction est définie pour la première fois en 1718 par Bernoulli comme une quantité composée, peu importe de quelle manière, d'une grandeur variable et de constantes. Au XVIII^{e} siècle, le concept de *fonction* s'enracine sur le calcul différentiel et intégral. En 1748, le traité d'Euler *Introduction in Analysis Infinitorum* marque le début du calcul différentiel et intégral tel que nous le connaissons aujourd'hui (Charbonneau, 1987b). La fonction devient explicitement un concept clé du calcul différentiel et intégral. En 1755, Euler propose la définition suivante de la fonction :

> Si certaines quantités dépendent d'autres quantités de telle manière que si les autres changent, ces quantités changent aussi, alors on a l'habitude de nommer ces quantités fonctions de ces dernières; cette dénomination a la plus grande étendue et contient en elle-même toutes les manières par lesquelles une quantité peut être déterminée par d'autres. Si, par conséquent, x désigne une quantité variable, alors toutes les autres quantités qui dépendent de x de n'importe quelle

> manière, ou qui sont déterminées par x, sont appelées fonctions de x. (cité par Youschkevitch, 1981, p.49).

Au-delà de cette définition de la fonction donnée par Euler, le changement des quantités est considéré comme une nouveauté (Stölting, 2008). Grâce à cet avancement, aujourd'hui, les aspects tels que la dépendance et la variation de la fonction sont observés sous un nouvel angle (Fikrat, 1994; De Cotret, 1988). Par exemple, sous l'angle de l'analyse historique, Chorlay (2007) a révélé plusieurs points de vue : global, local, infinitésimal et ponctuel. Notamment, en partant de la notion de *fonction* donnée par Euler, selon laquelle dans une fonction existent deux types de grandeurs, constantes et variables, ce chercheur précise :

> Dans ce cadre, les fonctions s'invitent lorsque l'on considère plusieurs grandeurs, disons deux. Deux grandeurs variables sont soit indépendantes (et l'histoire s'arrête là), soit liées : la situation fondamentale est $f(x,y) = 0$, où x et y sont des grandeurs variables et f une fonction de ces deux variables; dans cette situation, on peut considérer que x est la variable libre et y la variable liée, autrement dit considérer y comme fonction de x. (Chorlay, 2007, p. 219)

Puis plus loin :

> Étudier la dépendance de deux grandeurs variables sous l'angle fonctionnel, c'est étudier en quoi leurs *variations* sont dépendantes, c'est mener l'étude des co-variations. On retrouve ainsi deux voies d'entrée fondamentale dans le monde des fonctions : (1) passer de la relation $f(x,y) = 0$ entre les grandeurs, à la relation $f'xdx + f'ydy = 0$ liant de nouvelles grandeurs variables, les accroissements de dx et dy; (2) étudier, dans le plan complexe, le chemin parcouru par y connaissant le chemin parcouru par x (problème de la monodromie). (p. 220)

Encore aujourd'hui, les travaux de Euler jouent un rôle significatif dans la façon de concevoir la fonction, car il a ajouté à cette définition l'idée qu'une fonction peut être représentée par une expression ou une formule. C'est lui qui utilise pour la première fois la notation *f(x)*. Par contre, Euler considère que toute courbe tracée peut représenter une fonction et que cette fonction peut porter sur toutes les valeurs complexes, donc son modèle ne propose pas de nommer un domaine et un codomaine (Dhombres, 1988).

La majorité des mathématiciens de l'époque, incluant Lagrange (1797) et Fourier (1822) ont travaillé principalement ou uniquement sur des fonctions continues et réelles. Par exemple, Condorcet (1782, cité par Grugnetti *et al.*, 1999) écrit :

> Je suppose que j'aie un certain nombre de quantités x,y,z, ... F, et que pour chaque valeur déterminée de x,y,z, ... etc., F ait une ou plusieurs valeurs déterminées qui y répondent : je dis que F est une fonction de x,y,z,... Enfin je sais que lorsque x,y,z seront déterminées, F le sera aussi, quand même je ne connaitrais ni la manière d'exprimer F en x,y,z, ni la forme de l'équation entre F et x,y,z; je saurai que F est fonction de x,y,z.

De son côté, Arbogast (1791) se distingue en disant qu'il peut y avoir continuité ou discontinuité dans la fonction.

En résumé, à cette époque, l'idée des variations de plusieurs variables est au cœur de l'étude de la fonction. Ainsi, il est possible de calculer l'accroissement de la variable dépendante à partir de celui de la variable indépendante.

1.4.5 Quelques points intéressants du XIX^{e} au XXI^{e} siècles

Pendant le XIX^{e} siècle, les avancées sur les fonctions se sont concentrées sur l'analyse, mais aussi sur la symbolisation. D'après Hitt (1994), le concept moderne de fonction apparait avec Dirichlet (1840), qui parle de l'idée de correspondance : à une valeur de x correspond une valeur de y. L'apport de Dirichlet est remarquable, car c'est lui qui popularise l'idée qu'une fonction implique un ensemble de définition, qui deviendra connu sous le nom de domaine (Ponte, 1992). L'idée de correspondance entre des ensembles délimités par des intervalles est aussi soutenue par Hankel (1870, cité par Grugnetti *et al.*, 1999) :

> y est fonction de x si à chaque valeur de x d'un certain intervalle correspond une valeur bien définie de y sans que cela exige pour autant que y soit définie sur tout l'intervalle par la même loi en fonction de x, ni même que y soit définie par une expression mathématique explicite de x.

De son côté, Peano (1911) propose l'idée de paires ordonnées. Rüthing (1984) dit que, pour Peano, une fonction se définit comme « un rapport de telle sorte que, si deux paires $y;x$ et $z;x$ dont le second élément est identique et satisfaisant le rapport μ il s'ensuit nécessairement que $y = x$ sans importer ce que représentent x, y, z ».

La recherche de définition de *fonction* se poursuit selon De Cotret (1988), qui affirme que la définition de *fonction* est de plus en plus abstraite. En 1939, Bourbaki, qui amène l'idée de fonction comme un sous-ensemble du produit cartésien, écrit que :

> Soient E et *F*, deux ensembles distincts ou non, une relation entre une variable x de E et une variable y de *F* est dite relation fonctionnelle en y ou relation fonctionnelle de E vers *F*, si pour tout x appartenant à E, il existe un seul y appartenant à *F*, qui soit dans la relation considérée avec x. On donne le nom de fonction à l'opération qui associe ainsi à tout élément x de E, l'élément y dans *F* qui se trouve dans la relation donnée avec x; on dit que y est la valeur de la fonction pour l'élément x, et que la fonction est déterminée par la relation fonctionnelle considérée. (Cité par Kleiner, 1989, p. 299).

En dépit de sa pertinence dans le contexte scolaire, cette définition a été questionnée à plusieurs époques. À cet effet, les travaux de De Cotret (1988) et Sierpinska (1992), puis, au XXI^e siècle, ceux de Comin (2005) et Coppé *et al.* (2007), ont toujours mis l'accent sur les définitions de correspondance (Passaro, 2007).

Comme le démontre cet historique, la notion de *fonction* s'est développée continuellement d'une époque à l'autre. Avant même l'apparition du mot *fonction*, l'idée de relation entre des grandeurs domine à l'Antiquité, puis celle de dépendance entre des variables, au Moyen-Âge. Au moment où le terme *fonction* apparaît, à l'époque de Leibniz et Newton, c'est à nouveau la relation entre des grandeurs qui y est principalement associée, puis au siècle suivant Bernoulli et Euler réintroduisent l'idée de l'importance des variables dépendantes et indépendantes. Alors que la définition de la fonction incluait déjà la relation entre des variables, au XIXe siècle, Dirichlet fait ressortir la notion de correspondance entre deux ensembles. Les mathématiciens du XX^e siècle et du début du XXI^e siècle continuent à enrichir les connaissances sur la fonction, mais sans nouvelle rupture majeure. Chaque époque apporte des pistes contribuant aux diverses interprétations de la fonction qui subsistent aujourd'hui.

Maintenant que nous avons vu comment s'est développé le concept de *fonction*, quelques façons dont il est interprété aujourd'hui, ainsi que les façons de le représenter, voyons les principaux obstacles qui surviennent dans son apprentissage, compte tenu de sa complexité.

1.5 Les obstacles et leur impact sur la notion de *fonction*

Selon Astolfi et Peterfalvi (1993), les représentations des élèves sont au cœur de l'apprentissage, car elles sont le reflet d'un « système d'interprétation cohérent » et le rôle de l'enseignant est de provoquer une transformation de ce système pour mieux asseoir un concept. D'un autre côté, Astolfi et Peterfalvi (1993) ajoutent que les représentations sont liées aux obstacles épistémologiques parce que toute représentation qui se manifeste dans une réponse d'étudiant est partiellement fausse et que, par conséquent, la représentation va à l'encontre de l'activité didactique. Ainsi, dans une des visions du phénomène, la représentation est un obstacle qui empêche l'apprentissage « objectif ».

Plusieurs élèves rencontrent de nombreuses difficultés qui rendent la compréhension de la fonction plus complexe (De Cotret, 1988; Sfard, 1992; Sierpinska, 1992; Stölting, 2008, cités par Passaro, 2015). Voyons maintenant comment certains obstacles affectent la façon dont la notion de *fonction* peut être conçue.

1.5.1 La notion d'obstacle

La notion d'obstacle est fortement observable dans une approche cognitive de l'apprentissage comme celles dont nous parlerons au chapitre III. Dans cette méthode, les connaissances antérieures de l'élève sont ancrées à des éléments cognitifs parfois incorrects (Brousseau, 1986). La construction de connaissances scientifiques et plus spécifiquement mathématiques est composée de plusieurs essais et erreurs avant d'arriver à l'appréhension d'un concept. Selon Bachelard (1938), l'échec et l'erreur ne sont pas seulement attribués à l'ignorance ou à l'incertitude. Il souligne que les idées d'une époque peuvent devenir fausses ou simplement inadaptées devant une nouvelle connaissance, « c'est en termes d'obstacles qu'il faut poser le problème de la connaissance scientifique ». Toutefois, les obstacles externes ne sont pas considérés comme des faiblesses ou un manque d'esprit humain. Les obstacles les plus observés touchent les connaissances généralisées, l'utilisation des analogies et la connaissance excessivement pragmatique.

Brousseau (1998, p. 20) s'appuie sur Duroux (1982) pour citer cinq conditions nécessaires à l'existence d'un obstacle :

> a) Un obstacle sera une connaissance, une conception, pas une difficulté ou un manque de connaissance.
> b) Cette connaissance produit des réponses adaptées dans un certain contexte, fréquemment rencontré.
> c) Mais elle engendre des réponses fausses hors de ce contexte. Une réponse correcte et universelle exige un point de vue notablement différent.
> d) De plus, cette connaissance résiste aux contradictions auxquelles elle est confrontée et à l'établissement d'une connaissance meilleure. Il ne suffit pas de posséder une meilleure connaissance pour que la précédente disparaisse (ce qui distingue le franchissement d'obstacles de l'accommodation de Piaget). Il est donc indispensable de l'identifier et d'incorporer son rejet dans le nouveau savoir.
> e) Après la prise de conscience de son inexactitude, elle continue à se manifester de façon intempestive et opiniâtre.

Il ressort de ces conditions qu'un obstacle survient quand une notion est déjà partiellement connue, que la connaissance partielle suffit à résoudre certains problèmes, mais qu'elle provoque l'inexactitude dans d'autres situations. Ainsi, un obstacle n'empêchera pas des participants de répondre à tout un questionnaire sur la fonction, mais il se manifestera dans certaines réponses.

Concernant les types d'obstacles, Grenier (2007) écrit que :

> **Brousseau** distingue en particulier quatre types d'obstacles qui se différencient par leur origine (le 4ème a été évoqué plus tardivement que les autres).
> - ***L'obstacle épistémologique,*** lié au développement historique des connaissances et dont le rejet a dû être intégré explicitement dans le savoir transmis.
> - ***L'obstacle ontogénétique***
>   Ce sont des schèmes ou des modèles spontanés qui apparaissent « naturellement » au cours du développement. L'obstacle est dû aux

limitations de ces modèles.

- ***L'obstacle didactique,*** connaissances résultant d'une transposition didactique, semble ne dépendre que d'un choix ou d'un projet du système éducatif.
- ***L'obstacle culturel,*** connaissances véhiculées par le contexte culturel, déjà traitées scientifiquement, mais toujours présentes. (p. 2)

En ce qui concerne l'apprentissage de la notion de *fonction*, les obstacles les plus souvent mentionnés dans la littérature sont ceux d'ordres épistémologique et didactique. Ce sont donc ceux-ci que nous allons présenter ci-dessous.

1.5.2 Les obstacles épistémologiques liés à la fonction

Certains obstacles reflètent ceux qui ont influencé historiquement l'évolution des connaissances. Selon la typologie énumérée à la section 1.5.1, ce sont les obstacles épistémologiques. Perrin-Glorian (1993) affirme que seuls les obstacles épistémologiques sont vraiment constitutifs de la connaissance. Les obstacles d'ordre épistémologique existent dès l'Antiquité dans l'enseignement et l'apprentissage des sciences. Ces obstacles peuvent se trouver dans la littérature d'une connaissance visée, dans l'histoire de nombreux concepts, et il est difficile d'y échapper, de les ignorer, car ils ont porté du sens aux éléments d'étude (Brousseau, 1976). Les obstacles épistémologiques ont un caractère universel, ils se répètent à travers l'histoire, peu importe le système éducatif en place (Artigue, 1990; cité dans Dufour, 2011). Il faut en tenir compte dans l'enseignement, car ils peuvent empêcher la progression dans l'apprentissage des concepts, comme celui de *fonction*. Cependant, selon Sierpinska (1987), les obstacles épistémologiques sont indispensables à l'apprentissage, car ils sont les reflets du présavoir accumulé au cours de l'évolution de l'Humanité.

Un exemple d'obstacle épistémologique lié à l'apprentissage de la fonction est la notion de *limite*. Pour Sierpinska (1987), il y a, de façon générale, deux conceptions des mathématiques. Pour les « formalistes », ceux qui voient les mathématiques comme une fin en soi, « un jeu formel sur des symbol[e]s dépourvus de sens », il y aura égalité entre 0,999... et 1 à cause de la notion d'*infini*. S'il est impossible de trouver un nombre se situant entre les deux, alors ils seraient égaux. À l'inverse, pour les « intuitifs empiristes », ceux qui voient les mathématiques comme un reflet du monde réel dans lequel l'infini n'existe pas, il manque un petit quelque chose qui distingue 0,999... de 1, car 0,999... serait la somme des nombres finis 0,9 + 0,09 +0,009... Sierpinska ajoute qu'il s'agit de deux visions du monde, chacune liée à une conviction profondément ancrée et chacune portant sa part de vérité. Il y a un obstacle épistémologique à franchir pour accepter et comprendre l'autre vision. Or, si ce modèle est appliqué à l'apprentissage des fonctions, on peut dire que, tant qu'une personne n'accepte pas la vision « formaliste », elle ne pourra pas percevoir qu'une fonction puisse s'appliquer dans un domaine constitué de séries infinies.

Murillo Lopez (2008) donne un autre exemple d'obstacle épistémologique : le concept de fonction réciproque. Elle explique que cette notion s'est développée lentement au cours de l'histoire, selon la même évolution dont il a été question dans la section 1.4 du présent mémoire. Comme le formalisme associé à cette notion est apparu tardivement, la fonction réciproque est un obstacle épistémologique. Souvent, la fonction réciproque est traitée comme s'il y avait une restriction du domaine. Par exemple, pour une fonction réelle de 2^{e} degré représentable algébriquement sous la forme f : x → x^2, l'obstacle épistémologique amène l'apprenant, lorsqu'il en fait une représentation graphique, à ne traiter que la partie droite de la courbe, dans le quadrant I du plan cartésien en ignorant la partie de gauche.

D'ailleurs, Parmentier (1989) et Chauvat (1999) affirment que la notion de *courbe* est un obstacle épistémologique à la notion de *fonction*. Selon eux, la courbe est un obstacle dans le sens où il s'agit d'une connaissance réellement utile pour résoudre des problèmes géométriques. Dans certains cas, une courbe permet aussi de résoudre un problème impliquant une fonction, lorsqu'on y cherche un point d'intersection entre deux droites d'équation, tel que nous l'avons vu à la figure 1.5. Chaque point d'intersection est un *lieu géométrique*. Toutefois, la courbe en tant qu'ensemble de lieux géométriques emmène à simplifier la fonction comme s'il s'agissait seulement d'un ensemble de points et pas du tout d'une relation de dépendance entre un domaine et un codomaine. Ainsi, le fait que la fonction se soit développée historiquement en lien avec la géométrie se répercute de nos jours par une vision partielle de la fonction lorsqu'elle est assimilée à une courbe. Quand quelqu'un se représente seulement la fonction sous forme graphique, il risque de perdre de vue la dynamique relationnelle des variables.

Un autre obstacle épistémologique lié au concept de *fonction* est la notion du temps comme variable. Dans une étude empirique, Janvier (1998) montre un problème dans lequel la variable temps t doit dépendre de la vitesse v. Chez des participants universitaires, 16 % ont inversé les variables au moment de produire un graphique, faisant du temps la variable indépendante, parce qu'ils ne pouvaient pas concevoir le temps comme variable dépendante. En fait, le facteur temps est une variable cachée qui existe dans toute fonction, selon Sierpinska (1992), mais le fait que cette variable ne soit généralement pas nommée complexifie les raisonnements liés à la fonction. Selon Newton, il existe un niveau de dépendance entre grandeurs, mais toutes ces grandeurs sont dépendantes du temps; en hypothèse, c'est le temps qui provoque le développement des autres variables, ce qui en fait la seule véritable variable indépendante. À cet égard, les fonctions qui s'appuient implicitement sur la notion du temps amènent à de fausses interprétations du développement des variables fonctionnelles (Biehler, 2005, cité par Passaro 2015). Par exemple, s'il faut calculer la distance franchie par un biathloniste en fonction de sa vitesse, le calcul est complexifié par la nécessité de tenir compte des périodes de temps où le biathloniste est arrêté aux stations de tir.

En fait, l'identification des variables est un élément qui peut provoquer des obstacles épistémologiques. Selon Sierpinska (1992), plusieurs élèves ne voient pas l'importance de distinguer quelle variable est dépendante et laquelle est indépendante. Cela s'expliquerait par le fait qu'historiquement, la notion de variables dépendantes et indépendantes ne se soit développée qu'à partir du Moyen Âge, soit bien après la notion de relation entre grandeurs déjà présente à l'Antiquité.

Les recherches ci-dessus montrent des contraintes actuelles qui sont comparables à celles rencontrées pendant l'évolution de la notion de *fonction*. Comprendre comment des interprétations et représentations partielles de la fonction peuvent constituer des obstacles épistémologiques peut permettre de planifier la façon d'enseigner la fonction, mais celle-ci sera aussi influencée par des obstacles d'ordre didactique.

1.5.3 Les obstacles didactiques liés à la fonction

La didactique des mathématiques s'est intéressée aux obstacles qui peuvent se produire dans l'apprentissage et l'enseignement de cette science et qui apparaissent dans le traitement de l'information donnée aux élèves, dans le curriculum ainsi que dans les rétroactions enseignant-élève. Comme nous l'avons vu en 1.5.1, en plus des obstacles épistémologiques, il y a des obstacles didactiques qui découlent des choix pédagogiques pour essayer de surmonter les obstacles épistémologiques.

L'enseignement des mathématiques exige que l'élève acquière une succession de concepts divers, comme la fonction. Mais, l'installation d'un nouveau concept peut être confrontée à de nombreux obstacles en comparaison à l'ancienne (Brousseau, 1976). Donc, un savoir déjà établi peut simplement résister à un nouveau modèle ou bien essayer de négocier, c'est-à-dire que ce savoir se transforme très lentement au contact d'occurrences répétées du nouveau modèle. Ainsi, l'élève peut développer ses propres représentations et interprétations qui ne coïncident pas avec celles présentées dans les manuels ou par l'enseignant.

Un exemple d'obstacle didactique lié à la fonction se produit lorsque la fonction est d'abord enseignée uniquement sous une forme linéaire à l'aide de variables continues. C'est le cas par exemple dans le programme de la fin des années 1990 en France, où la fonction était d'abord introduite aux élèves dans un chapitre portant sur les applications linéaires, en Troisième (Chauvat, 1999), et au Québec, où la fonction est d'abord signalée dans le programme en 3^{e} secondaire, sous la forme des fonctions polynomiales de degré 0 ou 1 (MELS, 2015). Même si l'enseignant n'a jamais fait cette simplification, cela amène l'élève à penser que toute fonction se modélise par une formule de type $f(x) = mx + b$. Lorsque l'élève est soumis à un tableau de valeurs qui présente une fonction polynôme de 2^{e} degré, il peut ne pas l'apercevoir comme une fonction (Coppé *et al.*, 2009).

Par ailleurs, Murillo Lopez (2008) voit un obstacle didactique lié au traitement de la fonction réciproque dans le programme du secondaire en France. Elle explique que ce type de fonction est traité dans le programme comme un outil implicite dans la résolution de problèmes, en particulier ceux touchant aux équations exponentielles ou logarithmiques, et n'est donc pas enseigné explicitement. L'absence d'enseignement de la fonction réciproque s'ajouterait à l'obstacle épistémologique mentionné dans la section 1.5.2 (restriction du domaine) pour nuire à la construction du concept de la réciproque en tant que fonction.

En étudiant l'historique des programmes de mathématiques du secondaire en France, Coppé *et al.* (2009) font ressortir un aspect pouvant expliquer les choix didactiques liés aux obstacles ci-dessus : au début des années 1980, le programme touchait un grand nombre de types de fonctions (affines, linéaires, quadratiques, polynomiales de plusieurs degrés, etc.), mais essentiellement à travers leur représentation algébrique. Au fur et à mesure que le nombre de représentations d'une même fonction augmente, la diversité des types de fonctions à l'étude diminue. Puisqu'il faut plus de temps pour présenter chacune des représentations de la fonction polynomiale de 1^er^ degré, les enseignants n'en ont plus pour présenter explicitement d'autres fonctions. Ainsi, si les choix didactiques favorisent une meilleure compréhension des multiples représentations de la fonction linéaire, ils créent un obstacle dans la mesure où les élèves sont moins confrontés à d'autres types de fonctions.

1.6 Niveaux de compréhension de la fonction

La variété des concepts associés aux fonctions est très grande selon Janvier (1997, cité par Hitt, 1998). La compréhension de ce qu'est une fonction nécessite la capacité de manipuler différentes représentations de la fonction en les associant à diverses interprétations. En effet, en s'appuyant sur de nombreux travaux (Vinner, 1983; Markovits *et al.*, *1*986; Kaput, 1987a, 1991; Duval, 1998; Vinner et Dreyfus, 1989; Ruthven, 1990; Dubinsky et Harel, 1992; Sfard, 1992; Monk, 1992), Hitt (1998) affirme que, lors d'un processus d'apprentissage du concept de *fonction*, plusieurs niveaux de compréhension de ce concept peuvent exister chez les élèves, dépendant des représentations de la fonction auxquelles ils ont accès et des interprétations de ce concepts sur lesquelles ils s'appuient.

Les six niveaux définis par Hitt *et al.* (2001) sont les suivants :

- Au premier niveau, quelqu'un a une idée imprécise du concept de *fonction* et mélange de façon incohérente diverses interprétations (voir section 1.2) ou représentations (section 1.3) du concept.

- Au deuxième niveau, cette personne peut reconnaître les éléments d'un système de représentations de la fonction[8]. Par exemple, dans une formule, elle peut identifier les variables indépendante et dépendante.

- Au troisième niveau, elle peut effectuer une tâche de transformation de la fonction, mais à l'intérieur d'un seul système de représentations. La figure 1.7 illustre un exemple de transformation à l'intérieur d'un système algébrique pour une fonction polynomiale de 1[er] degré où $x \in \mathbb{R}$.

$f(x) = 5 + 4(x-1)$	$\rightarrow$	$f(x) = 4x+1$

Figure 1.7 : Exemple de transformation à l'intérieur d'un système algébrique

- Au quatrième niveau, elle peut traduire une fonction d'un système de représentations à un autre sans en perdre le sens, par exemple en passant d'une représentation algébrique à une représentation graphique.

- Au cinquième niveau, la personne articule enfin de manière cohérente deux systèmes de représentations, par exemple en faisant des aller-retour entre un tableau de valeurs et un graphique.

---

[8] Selon Duval (1993), il existe des systèmes de représentation et, « [p]our qu'un système puisse être un registre de représentation, il doit permettre trois activités cognitives » (p. 41) : la constitution d'une représentation d'un objet, le traitement pour transformer cette représentation et la conversion d'un système de représentations à un autre. Cette théorie sera expliquée plus en détails dans le chapitre III. Dans ce mémoire, seuls les systèmes de représentation qui satisfont les conditions pour être un registre sont traités, et c'est pourquoi ces termes sont utilisés de façon équivalente ici.

- Au sixième niveau s'observe une articulation cohérente de multiples systèmes de représentations pour résoudre des problèmes liés à la fonction.

Ces différents niveaux de compréhension du concept de *fonction* s'inscrivent dans une progression dans la façon de relier plusieurs représentations de la fonction.

Il existe donc plusieurs façons dont les humains conçoivent la fonction, car la définition de fonction renvoie à diverses catégories. Plusieurs recherches se sont intéressées à la typologie de la façon dont la fonction est interprétée, tant par les élèves que par les enseignants. Nous avons vu dans ce chapitre la correspondance entre deux ensembles, la relation de dépendance, la règle, ainsi que la covariation. De plus, les travaux antérieurs proposent plusieurs façons de représenter la fonction, et nous avons présenté ci-haut des représentations géométriques, numériques, algébriques, graphiques et verbales.

Comme la fonction peut être comprise de plusieurs façons, il importe de se demander si celles-ci sont compartimentées chez les élèves et les enseignants ou si, au contraire, ces interprétations et représentations sont utilisées de manière complémentaire pour rendre la compréhension de la fonction plus accessible aux élèves.

Le prochain chapitre se penchera sur des études axées sur la façon dont les diverses interprétations et représentations de la fonction sont utilisées par les élèves et par les enseignants. La place de la fonction dans le curriculum scolaire sera aussi abordée.

CHAPITRE II

PROBLÉMATIQUE DE LA RECHERCHE

Au Québec, l'apprentissage de la notion de *fonction* est une priorité dans le programme de formation secondaire. L'apprentissage de la notion de *fonction* progresse pendant les cinq années du secondaire.

2.1 Place de la fonction dans le curriculum scolaire

D'entrée de jeu, disons que, malgré la diversité des interprétations possibles du concept de *fonction* et des manières de le représenter, la fonction est le plus souvent associée au registre algébrique dans les activités d'enseignement. Selon Hitt (2000, p. 268),

> Dans l'enseignement des mathématiques la grande majorité des professeurs continuent à privilégier le système de représentation algébrique sans considérer que les recherches sur l'enseignement signalent l'équilibre qu'on doit octroyer à l'usage de différentes représentations dans la construction de concepts et la résolution de problèmes.

Ainsi, c'est dans le volet algébrique des curriculums scolaires qu'on retrouve le plus souvent la mention des fonctions.

Kieran (2007) rapporte une étude de Sutherland (2002) qui décrit le curriculum algébrique dans plusieurs pays. D'après ses propos, la fonction joue un rôle explicite dans le curriculum australien, tandis que le curriculum hongrois résume l'algèbre à un travail avec des systèmes d'équations. Le pays qui commence le plus hâtivement l'apprentissage algébrique est le Japon, où les relations entre des quantités représentées par des symboles mathématiques sont abordées dès l'école primaire.

D'ailleurs, pour Comin (2005), l'étude des fonctions commence à se construire dès le primaire, avec l'introduction de la relation de proportionnalité. Selon Comin, le concept de *fonction* se développe à partir de l'étude des grandeurs et ce, du primaire jusqu'aux niveaux supérieurs d'éducation. En effet, les concepts de *variable* et de *fonction* se construisent à long terme. La résolution de problèmes peut s'entamer selon plusieurs angles en apprentissages des mathématiques, les fonctions y sont particulièrement favorables parce qu'elles peuvent servir de « système générateur » aux opérations mathématiques comme l'addition, la soustraction, la multiplication ou la division (Comin, 2005). Plusieurs phénomènes de la réalité d'apparence complexe sont compris grâce à la notion de *fonction* (Maull et Berry, 2001, cité par Caron et Savard, 2012). Ainsi, les fonctions aident à comprendre et schématiser mathématiquement des phénomènes physiques de la vie courante, comme la vitesse, le remplissage d'un contenant ou la trajectoire d'un véhicule.

Au Québec, le programme du MELS (s. d.) pour le premier cycle du secondaire touche à certaines notions algébriques à développer pour bien comprendre la fonction. Il est précisé qu'au primaire, « l'élève a été initié, à son insu, à des préalables à l'algèbre » (p. 253). Puis, le programme présente comme étant fondamentaux les suites arithmétiques, les équations et le système de représentations. Plus précisément, au premier cycle, l'élève est initié à l'expression algébrique et au travail sur les variables. Toutefois, le mot *fonction* n'est pas spécifiquement indiqué dans le programme du MELS pour le premier cycle. Malgré tout, l'élève devrait terminer le premier cycle du secondaire en étant sensibilisé à plusieurs types de représentations, ce qui devrait ensuite l'aider à mieux comprendre le concept de *fonction*, car une meilleure manipulation de plusieurs représentations devrait lui permettre de se situer à un niveau plus élevé de l'échelle de Hitt *et al.* (2001).

Pour le deuxième cycle du secondaire, le programme du MELS (2015) signale, pour la première année du cycle (3e secondaire), l'apprentissage de relations, de fonctions et de réciproques. Dans ce volet, l'élève travaille sur les variables dépendantes et indépendantes, ainsi que sur les fonctions polynomiales de degré 0 ou 1. Les systèmes d'équations à deux variables de formes $y = ax + b$ ou $f(x) = kx$ sont explicités dans le programme.

Pour les deux dernières années du secondaire, l'élève doit choisir l'une des trois séquences : Culture, société et technique, Technico-sciences ou Sciences naturelles (MELS, 2015). Dans chacun des cas, la notion de *fonction* continue à être enseignée. Dans le profil Culture, société et technique, l'élève travaille les fonctions réelles (« polynomiale de degré inférieur à 3, exponentielle, périodique, en escalier, définie par parties »). La séquence Technico-sciences propose un contenu similaire, mais l'étudiant y explore en plus les fonctions « polynomiale de degré 2 (forme générale), rationnelle, sinusoïdale ». Pour la séquence Sciences naturelles, l'étudiant travaille sur les mêmes contenus que les autres profils, plus la fonction logarithmique et la tangente.

Comme c'est surtout au deuxième cycle du secondaire que sont développées les multiples facettes de la fonction, il est particulièrement pertinent de s'intéresser aux études portant sur la compréhension de la fonction chez les élèves du deuxième cycle du secondaire ou des niveaux scolaires équivalents dans les autres pays.

2.2 Synthèse des études portant sur la compréhension de la fonction chez les élèves du secondaire

Plusieurs études s'intéressent à mieux connaitre quelles sont les interprétations et représentations de la fonction les mieux comprises par les élèves.

Les systèmes scolaires étant différents, la nomenclature pour désigner les niveaux d'apprentissage du concept de *fonction* est très variée (école secondaire québécoise, *middle* et *high school* anglo-saxon, de la Quatrième à la Terminale en France, etc.), mais, comme le développement cognitif est similaire pour tous, ce concept est généralement développé principalement auprès des adolescents.

Passaro (2015), s'appuyant sur les travaux de Piaget *et al.* (1968), parle de l'importance de passer par la covariation pour développer la compréhension de la notion de *fonction* chez les enfants de 7 à 13 ans, même si ce type de raisonnement ne sera pleinement possible qu'à un stade développemental supérieur. Pour Piaget *et al.*, la création d'une relation causale entre les variables, c'est-à-dire d'un lien selon lequel un changement d'une variable serait la cause du changement de l'autre, facilite le développement de la notion de covariation, même s'il faut éviter qu'à long terme les élèves confondent la causalité et la covariation. Plus concrètement, Passaro (2015) cite quelques études qui témoignent du développement covariationnel pour traiter les fonctions. Par exemple, Saldanha et Thompson (1998) disent que la covariation est développementale. Dans un premier stade, la tendance est de faire varier une seule grandeur à la fois : les élèves pensent à une grandeur, puis à l'autre, reviennent à la première, puis à la deuxième et ainsi de suite, tandis que plus tard dans l'apprentissage, ils peuvent véritablement voir la covariation des deux grandeurs à la fois. Ainsi, Saldanha et Thompson (1998) ont constaté qu'un élève de 2^{e} secondaire soumis à une série de tâches concernant des représentations graphiques du déplacement d'une voiture C entre deux villes A et B réussit, dans la dernière tâche, à observer la covariation entre la distance AC et la distance BC. Puisque le programme de la deuxième année du premier cycle du MELS (s. d.) prescrit l'utilisation du graphique pour représenter une situation, Passaro (2007) estime qu'il s'agit du bon moment pour introduire l'étude de la covariation dans la fonction. À la suite d'une expérimentation sur des élèves de 2^{e} secondaire, elle constate que ceux-ci tendent effectivement à faire varier une seule grandeur à la fois. Au niveau de leur façon d'interpréter la fonction, la façon d'agir des élèves se rapproche plus de la correspondance entre deux ensembles : ils observent ce qui se passe pour les valeurs successives sans chercher ce qui se passerait pour des valeurs intermédiaires. Passaro signale aussi que les élèves ont de la difficulté à employer le langage verbal pour expliquer les accroissements[9] dans une fonction. La capacité des élèves en lien avec les représentations graphiques et verbales de la fonction semble donc limitée en 2e secondaire.

Hitt *et al.* (2008, 2009) se sont inspirés des résultats de Passaro (2007) pour monter une séquence d'enseignement auprès d'élèves de troisième secondaire. Notons que les élèves pouvaient utiliser des représentations de la fonction étudiées en classe ou non pour répondre. Les chercheurs y ont proposé cinq activités. Dans la première, les élèves ont dû décrire avec le langage verbal et un diagramme la relation entre deux grandeurs. Le problème consistait à identifier les meilleurs sites pour prendre une photo d'une statue. Comme l'expliquent Hitt *et al.* (2008), les réponses obtenues montraient que les élèves pouvaient proposer une représentation en mots et un diagramme. Par contre, ces représentations étaient souvent iconiques; dans les diagrammes, la statue était montrée comme une ligne ou un bonhomme-allumette plutôt que comme un point représentant un lieu. La deuxième activité a amené les élèves à produire d'abord un diagramme à partir du langage verbal, puis une autre représentation; c'est la représentation graphique qui était attendue par les chercheurs. Le problème consistait à voir la variation dans la distance entre un randonneur et la station de premiers soins. Contrairement aux attentes, les élèves n'ont pas eu recours en majorité à la représentation graphique. Ils ont plutôt fait un autre diagramme pour représenter la situation. La troisième activité demandait aussi l'emploi de plus d'une

---

9 Rappelons que les accroissements ont été définis au chapitre I comme les écarts intermédiaires entre des valeurs dans chacun des deux ensembles de la fonction.

représentation, mais encourageait le recours aux représentations tabulaire et algébrique, tandis que la quatrième activité demandait un processus d'institutionnalisation des représentations utilisées dans les trois premières activités. Les résultats obtenus pour ces deux activités ne sont pas détaillés dans les deux articles consultés (Hitt *et al.*, 2008, 2009). La dernière activité avait un objectif identique à la quatrième, mais dans un contexte où la représentation algébrique était plus difficile à produire. Le problème portait sur l'ombre produite par un lampadaire à une hauteur de 6 mètres sur une personne de 1,5 mètre en déplacement. Les élèves devaient identifier deux variables dépendant l'une de l'autre. Hitt *et al.* (2009) révèlent que, même si la consigne demandait de commencer l'activité par une représentation verbale, certains élèves ont d'abord produit une représentation algébrique. Des erreurs algébriques ont empêché ces élèves de résoudre le problème de cette façon. Par contre, un indice lié à une représentation numérique leur a permis de réajuster leur représentation algébrique pour arriver à la bonne solution, démontrant ainsi leur capacité de lier des représentations numérique et algébrique. Dans leur article, les chercheurs mentionnent aussi une élève qui a eu recours à la combinaison d'une représentation numérique et graphique pour résoudre correctement le problème. Ils ne précisent pas le pourcentage des élèves ayant utilisé l'une ou l'autre des représentations, mais Passaro (2015) signale que l'étude de Hitt *et al.* (2008, 2009) a démontré que ce type de séquence contribue à amener l'élève à construire plus spontanément diverses représentations des fonctions et à mieux comprendre celles qui sont enseignées dans le cursus.

Dans une étude menée en France auprès d'une classe de Seconde, Comin (2005) observe la capacité d'associer diverses représentations d'une même fonction. Les participants réussissent assez bien à choisir, parmi une liste de représentations algébriques, celle qui correspond à une représentation verbale. Pour toutes les questions construite sur ce modèle, le taux de réussite atteint ou dépasse 94 %. Dans une autre série de questions, les participants devaient associer la représentation graphique (courbe) d'une fonction à sa représentation géométrique (dessin). Le taux de réussite est généralement d'environ 80 %, mais dans le cas de la fonction linéaire, il atteint 97 %. Par contre, les participants ont plus de difficulté à lier la fonction représentée graphiquement et algébriquement. Selon la situation proposée, seuls de 50 % à 68 % réussissent à choisir, parmi plusieurs représentations graphiques, celle qui correspond à une formule algébrique donnée. Le meilleur résultat survient pour une fonction linéaire représentée par une formule de type $f(x) = mx + b$ où m est une pente positive (68 %), mais le pourcentage baisse pour une fonction de 2^e degré (62 %) et encore plus pour une fonction linéaire proposant une pente négative (50 %), par exemple la représentation $f(x) = -2x$. Ainsi, les élèves ont de la difficulté à associer certaines représentations, telles que la courbe et la formule algébrique, bien qu'elles illustrent une même fonction. Ce constat pourrait bien s'expliquer dans les études de Markovits *et al.* (1986, 1988), qui soutiennent que les problèmes liés à la notion de fonction viennent du fait que, dans la foulée du modèle de Dirichlet-Bourbaki, la fonction repose sur trois composantes, le domaine, le codomaine et la règle de correspondance. Mais l'école se concentre trop sur la règle, ce qui amène les élèves à produire principalement des représentations graphiques linéaires. Donc, ils développent à tort l'idée que la fonction est toujours linéaire et peinent à reconnaître d'autres dimensions de la fonction, telles que les limites.

Par ailleurs, selon Artigue, (1993, cité par Bloch, 2005), des pratiques didactiques présentent des problèmes relatifs aux savoirs algébriques qui sont insuffisants, à l'analyse des graphiques qui est plutôt laissée à l'intuition et aux connaissances privées non opérationnelles. Des difficultés apparaissent dans la manipulation des fonctions définies par une formule algébrique où la démarche prise reste ancrée dans un processus numérique (Vandebrouck, 2011). Comin (2005) rappelle que la fonction s'apprend premièrement par formule arithmétique, puis par une transition vers la formule algébrique. Les élèves, au secondaire, peuvent se placer dans l'un ou l'autre des deux points de compréhension. En tant que formule arithmétique, la fonction représente le calcul d'une grandeur mesurée, tandis que, dans l'algèbre, la fonction opère sur des valeurs symboliques. Les données de Comin (2005) suggèrent toutefois que les élèves restent davantage sur le raisonnement numérique. En effet, dans son étude, Comin regarde aussi si la nature des variables (grandeur, variable numérique, etc.) et leur mode de désignation (nombre, lettre, mot, etc.) influencent la capacité de l'élève à les reconnaître. D'après ses résultats, il semble que les élèves éprouvent plus de difficultés à reconnaitre une variable lorsqu'elle représente une quantité indéterminée qu'une quantité connue.

Kieran (2007) présente une recension d'études portant sur l'apprentissage et l'enseignement de l'algèbre. Elle y mentionne que les fonctions rationnelles sont beaucoup plus problématiques que les fonctions linéaires pour les élèves de *middle grade*, l'équivalent des trois premières années du secondaire. Une des études citées, qui porte sur des élèves de 9^e^ année (3^e^ secondaire), signale que le développement cognitif de l'élève passe d'abord par une expérience corporelle, puis par le langage gestuel et verbal, puis par des représentations des données, pour finir avec le recours à l'algèbre pour écrire des relations entre des quantités (Arzarello et Robutti, 2001). Cette étude suggère qu'une démarche appropriée peut favoriser l'évolution du traitement de la fonction. De son côté, l'étude de Penglase et Arnold (1996), montre qu'un enseignement de l'algèbre à l'aide des technologies a eu un impact positif pour aider les élèves à représenter graphiquement certaines fonctions algébriques, mais que les élèves continuent à mal percevoir les liens entre les représentations algébrique et graphique des fonctions. Quant à Tall (1989), il a observé que, si l'enseignant définit une fonction en tant que correspondance entre un domaine et un codomaine, les élèves vont voir certains nombres associés, mais ils ne vont pas généraliser à toutes les possibilités de valeurs intermédiaires dans le domaine et le codomaine. De plus, si un concept est introduit par une définition, l'élève se fait une vision partielle de la notion en général. Donc, pour Tall, la solution est de chercher la racine cognitive (*cognitive root*) qui consiste en l'équilibre entre l'empirique et le savoir mathématique.

L'ensemble des études convergent donc pour signaler que les élèves ne passent pas aisément d'un type d'interprétation de la fonction à l'autre ni d'un type de représentation à un autre. Aucune des études ne démontre un recours marqué à la fonction en tant que relation de dépendance, ce qui était pourtant considéré comme la meilleure façon de la percevoir selon Nicholas (1966, cité par Hitt, 1998).

Pour que les élèves du secondaire puissent passer facilement d'une représentation de la fonction à l'autre et passer ainsi au niveau supérieur de maîtrise du concept selon l'échelle de Hitt *et al.* (2001), il importe que leurs enseignants les aident à le faire, donc qu'ils reconnaissant les caractéristiques de la fonction, ses différentes interprétations, les représentations qui en découlent, les manipulations entre elles, ainsi que les obstacles à contrôler dans l'enseignement afin de bien transmettre leurs connaissances. Voilà pourquoi il est pertinent de tenter de connaître les interprétations et représentations de la fonction privilégiées par les enseignants du secondaire et les étudiants en formation des maîtres.

2.3 Synthèse des études portant sur la compréhension de la fonction chez les enseignants

Proulx (2009) souligne que les connaissances mathématiques font en sorte que, à un moment précis, un enseignant qui n'offre pas régulièrement un cours portant sur la fonction ne sera pas capable de répondre à des questions précises sur celle-ci, mais l'enseignant qui a une compréhension mathématique plus profonde pourra la réactiver pour bien présenter le concept s'il doit l'enseigner. Mais la majorité des enseignants ont-ils cette compréhension mathématique profonde? Plusieurs études s'intéressent à la compréhension de la fonction par les maîtres et les futurs enseignants. Encore une fois, malgré la différence entre les systèmes scolaires et les programmes de formation des maîtres, des similarités se dégagent dans la façon dont les fonctions sont interprétées par les enseignants de mathématiques au niveau secondaire ou l'équivalent.

2.3.1 Synthèse des études portant sur la compréhension de la fonction par les enseignants d'expérience

D'après Norman (1992), il existe peu de recherches centrées sur la compréhension de la fonction qu'ont les enseignants, ce qui est regrettable, car il importe de savoir comment les maîtres interprètent la fonction et comment ils l'enseignent aux élèves. En fait, Norman (1992) considère qu'il faut valider trois types de savoirs liés à la fonction chez les enseignants : leur savoir pratique, qu'ils utilisent en classe, leur savoir méthodologique, lié à leur façon d'enseigner le concept, et leur savoir plus théorique sur la notion de *fonction*. D'autres chercheurs ajoutent des dimensions telles que le savoir curriculaire lié à la connaissance du programme et du matériel disponible (Shulman, 1986), ainsi que le savoir cognitif, lié à la façon dont l'élève réfléchit au concept, et le savoir métacognitif, lié à la façon dont l'enseignant prend en compte sa propre façon d'interpréter le concept pour planifier son enseignement (Peterson, 1988). En s'inspirant de ces travaux, Fennema et Franke (1992) proposent d'étudier quatre aspects du savoir des enseignants : leur savoir théorique lié à la fonction, leur savoir lié à ses interprétations et représentations, leur savoir du processus d'apprentissage de la fonction et leur savoir pédagogique lié à son enseignement.

Dans le présent mémoire, ce sont principalement le savoir théorique et le savoir lié aux interprétations et représentations qui sont étudiés. Les dimensions du savoir liées à l'enseignement et au processus d'apprentissage ne sont pas l'objet de cette recherche et ne seront donc pas traitée en détails dans la revue de la littérature.

Concernant le savoir pédagogique, une étude de Basturk (2003) porte sur un questionnaire administré à des enseignants de divers niveaux d'expérience en Turquie, afin de mieux comprendre l'image qu'ils se font de la notion de *fonction* en lien avec leur façon de l'enseigner. D'abord, 2/3 d'entre eux disent que cette notion est très importante, parce que les fonctions permettent un lien avec les autres domaines mathématiques, parce qu'elles servent à lier les mathématiques avec les autres disciplines et parce qu'elles favorisent un travail plus cognitif. Par contre, 1/3 des répondants disent, de façon tautologique, que la notion de *fonction* est importante parce qu'elle est... importante. Ce constat montre qu'une partie des enseignants ne semblent même pas comprendre pourquoi ils doivent enseigner la notion de *fonction*. Ensuite, Basturk a vérifié les interprétations de la fonction utilisées dans l'enseignement. Une forte majorité des répondants parle en terme d'ensemble, une vision qui s'inscrit dans la correspondance entre un domaine et un codomaine. Seulement deux enseignants ont parlé en termes de règle et de calcul. Parmi les exercices utilisés en classe par les enseignants, 74 % font appel à une représentation algébrique et les problèmes en mots sont complètement absents des exercices.

Coppé *et al.* (2007) s'intéressent à la façon dont 22 enseignants de mathématiques d'expérience utilisent le tableau de valeurs et le tableau de variations dans l'enseignement de la fonction. La plupart pensent que le tableau de valeurs aide à tracer le graphique d'une fonction, mais ils pensent aussi qu'il est inutile de définir le tableau de valeurs, car les élèves l'utilisent déjà avant de commencer l'apprentissage de la fonction. Ainsi, au moment d'introduire la notion de *fonction*, les enseignants traitent le tableau de valeurs comme un objet peu problématique qui n'est qu'un instrument auxiliaire pour passer au registre graphique. Ils ont de la difficulté à envisager de l'associer à des tâches liées à d'autres représentations de la fonction. Pour ce qui est du tableau de variations, nombre d'enseignants considèrent qu'il est indispensable pour l'étude des fonctions. Mais ils ne donnent aucune définition aux élèves et ils n'en font pas l'objet d'un enseignement explicite. Le tableau de variations est expliqué à partir d'exemples basés sur des courbes, mais sans identifier ses propriétés particulières. Tout comme le tableau de valeurs, le tableau des variations est traité par les enseignants comme un intermédiaire vers le registre graphique. Ainsi, selon les enseignants, l'exercice consistant à tracer une courbe à partir d'un tableau devient facile pour les élèves et suscite peu d'erreurs. Toutefois, les maîtres ne semblent pas conscients que le tableau de valeurs et le tableau de variations sont des représentations de la fonction à part entière dans le registre numérique ni que l'utilisation de différents registres et plus précisément la conversion entre différents registres permettent une meilleure compréhension de la notion de *fonction*.

D'avantages d'études s'intéressent au savoir théorique ou au savoir sur les interprétations et représentations privilégiées par les enseignants dans leur propre façon de comprendre la fonction. Dans une étude empirique auprès de dix enseignants de mathématiques au secondaire, Norman (1992) signale que ceux-ci tendent à définir formellement la fonction en termes de paires ordonnées. Les enseignants doivent ensuite illustrer cette définition de plusieurs manières, puis discuter de leur façon d'introduire la notion avec les élèves. Il ressort que les maîtres ont utilisé une seule interprétation pour décider de ce qui est une fonction. Si on met ces données de Norman en lien avec l'échelle de Hitt *et al.* (2001), il semble donc que ces dix enseignants sont à un niveau de compréhension plutôt bas de l'échelle. Cette tendance à se contenter d'une seule interprétation de la fonction a limité la capacité des enseignants d'identifier certaines fonctions. Norman ajoute que c'est la représentation graphique que priorisent les enseignants lors de la résolution de problèmes.

Dans une étude de Hitt (1998), trente enseignants de mathématiques au niveau secondaire au Mexique ont dû répondre à des questionnaires pendant sept semaines concernant l'identification de fonctions et la définition de ce concept. En général, les enseignants identifient bien ce qui est une représentation d'une fonction de ce qui n'en est pas. Par contre, au début de l'étude, aucun des enseignants ne définit la fonction comme relation entre variables, leurs réponses alternant entre une définition de fonction en termes de règle de correspondance et un ensemble de paires ordonnées. À la fin de l'étude, trois enseignants définissent la fonction comme relation entre variables, mais la plupart préfèrent encore utiliser la définition de la règle de correspondance, et, en deuxième lieu, celle de l'ensemble de paires ordonnées. En se basant sur Hitt (1998) et Even (1993), Proulx (2009) souligne des difficultés des enseignants à voir la fonction autrement que comme un tracé continu et fluide, ainsi qu'une tendance à transformer des fonctions discrètes pour les traiter comme des fonctions continues. Ces données soulèvent un problème intéressant : si les enseignants de mathématiques eux-mêmes ne sont pas aptes à manipuler facilement les diverses interprétations de la fonction, comment peuvent-ils aider leurs élèves qui ont des difficultés similaires?

Un autre article basé sur la même étude (Hitt, 1994) signale que les enseignants pouvaient bien répondre aux questions portant sur les fonctions continues, mais que le taux de réussite diminuait au moment de traiter des fonctions discontinues. Hitt conclut sur l'importance de mieux enseigner la construction de fonctions dans les programmes de formation des maîtres, et plus particulièrement en ne travaillant pas uniquement sur des relations continues toujours transférables en termes de règle de correspondance.

Une étude de Vinner et Dreyfus (1989) se penche sur les définitions de la fonction et les images que s'en font des étudiants de niveau universitaire et 36 enseignants de mathématiques du *junior high school* en Israël. Nous retiendrons ici leurs résultats concernant les enseignants. Lorsqu'ils doivent définir le concept de *fonction*, la forte majorité de ceux-ci expriment leur définition en termes de correspondance. Seulement trois des enseignants privilégient la relation de dépendance. Il est intéressant de noter qu'une bien plus petite proportion des enseignants de mathématiques (3/36) ont recours à cette façon d'interpréter la fonction que la proportion des étudiants suivant un programme à forte teneur en mathématiques (12/58). Les résultats de cette étude sont très similaires à ceux de Hitt, ce qui montre que la difficulté des enseignants à définir de façon riche et nuancée le concept de *fonction* n'est pas unique à un pays et pourrait bien être une tendance universelle.

Ainsi, toutes les études révèlent des faiblesses des enseignants de mathématique au niveau du savoir théorique et pédagogique sur la notion de *fonction*. Pour les maîtres, la notion de *fonction* est considérée importante dans l'apprentissage des mathématiques, mais certains ne sont pas capables d'expliquer pourquoi. La définition de cette notion porte souvent sur une seule interprétation. Du côté pédagogique, les exercices saisis sont généralement livresques et la représentation dominante est sous forme d'expressions algébriques qui débutent par $f(x)$. De plus, selon plusieurs études, ils favorisent le tableau de valeurs pour représenter la fonction. Les interprétations comme la relation de dépendance et la règle de correspondance, ainsi que les représentations géométriques sont quasiment absentes de leur répertoire, tandis qu'il ne semble y avoir aucune occurrence des problèmes en mots.

2.3.2 Synthèse des études portant sur la compréhension de la fonction par les étudiants en formation des maîtres

Comme ce sont les futurs enseignants, il importe aussi de vérifier la compréhension du concept de *fonction* des étudiants en enseignement des mathématiques. Kieran (2007) rapporte une étude de Even (1990) qui s'appuie sur des anecdotes rapportées par de futurs enseignants de mathématiques au secondaire afin d'illustrer les connaissances nécessaires des enseignants en lien avec l'algèbre et plus spécifiquement les fonctions. Elle explique que le savoir requis pour enseigner ce concept devrait inclure différentes représentations du concept, des façons alternatives de l'introduire, une connaissance forte du concept, un bon répertoire d'exemples pour l'aborder et de bonnes connaissances mathématiques générales. Une connaissance des façons dont l'élève perçoit le concept est aussi très importante. Kieran continue en mentionnant que, dans une étude appliquée, Even (1993) constate le bas niveau de compréhension du concept de *fonction* chez les futurs enseignants de mathématiques au secondaire. Dans une étude postérieure (Even, 1998), 152 futurs enseignants de mathématiques ont répondu à des questions reliées au passage d'une représentation de la fonction à une autre. Elle leur demande de donner une définition de fonction, d'indiquer le lien entre fonction et équation et de trouver le nom de solutions réelles à une équation quadratique. D'après les réponses obtenues, elle conclut que les répondants ont une vision limitée, et que pour eux la fonction est la même chose que l'équation. Ces futurs enseignants ne voient pas les autres caractéristiques de la fonction, par exemple la continuité, et ils ne peuvent pas relier la solution d'un problème utilisant une représentation algébrique à une valeur dans une représentation graphique d'une fonction. Cela rappelle l'importance de former les futurs maîtres à plus d'une représentation de la fonction.

La même conclusion se dégage des travaux de Cooney (1999), qui a étudié le cas d'enseignants en formation en mathématiques au secondaire. Il a demandé à ces futurs maîtres de définir une fonction. Presque toutes les définitions présentent la fonction d'abord comme une expression algébrique, en disant par exemple que « la fonction est une formule qui peut contenir des éléments » ou que c'est « une équation avec des variables qui peut être tracée sur un graphique x et y » (p. 165; notre traduction). Cooney nomme cette façon de voir la fonction la « equation-oriented notion of function ». De plus, les futurs enseignants ont du mal à reconnaître les graphiques des fonctions exponentielles ou logarithmiques. Concernant les raisons d'enseigner la fonction, ces enseignants potentiels affirment que les fonctions sont importantes parce que les élèves vont les rencontrer dans leur futur parcours mathématique, donc il est important qu'ils en connaissent les bases. Cela se rapproche de l'explication tautologique donnée par 1/3 des enseignants dans l'étude de Basturk (2003) mentionnée dans la section 2.3.1. De même, les futurs maîtres ont de la difficulté à produire d'autres problèmes que ceux qui sont dans les manuels. Cooney (1999) conclut que si les futurs maîtres peuvent bien résoudre un problème présentant une fonction représentée algébriquement – qu'ils traitent comme une équation – ils ont de la difficulté à la représenter avec différents types de graphiques, ce qui montre, une fois de plus, un faible niveau d'articulation des diverses représentations de la fonction.

En contexte québécois, Bednarz (2001) rapporte que le programme de formation initiale des maîtres en mathématiques de l'Université du Québec à Montréal a choisi, pour son cours de didactique de l'algèbre, une approche qui amène les futurs maîtres à résoudre des problèmes de deux manières algébriques, en plus d'en effectuer une résolution avec l'arithmétique. Bednarz *et al.* (1995) expliquent que la fonction est vue à travers l'analyse conceptuelle, l'anticipation des difficultés et de raisonnement de l'élève, la planification d'une intervention et le retour.

Une étude de cas de Nadeau (2013) s'intéresse à la connaissance que les futurs enseignants de mathématiques étudiants à la même université ont de la notion de *fonction*. Les répondants discutent de l'apport d'un cours portant entre autres sur les fonctions de plusieurs variables et sur des aspects de la fonction plus complexes que ceux inclus dans le programme du secondaire. Pour certains participants, le sentiment de compréhension de ce qu'est une fonction reste partiel. Nadeau cite entre autres le cas de Chloé, qui considère qu'elle ne comprend pas suffisamment en profondeur ce qu'elle étudie pour pouvoir l'expliquer à un autre. Chloé dit toutefois qu'apprendre des notions plus avancées lui permet d'être mieux outillée pour expliquer simplement les notions du secondaire. À l'inverse, dans le cas d'Alexa, la future enseignante dit qu'elle ne voit pas de lien entre les fonctions complexes qu'elle étudie et celles qu'elle devra enseigner au secondaire. Alexa croit même que tout le symbolisme et le formalisme étudié fera en sorte qu'elle sera incapable d'enseigner la fonction de façon compréhensible. L'étude de Nadeau présente aussi le témoignage d'autres futurs maîtres dont les propos se rapprochent soit de ceux de Chloé, soit de ceux d'Alexa. Dans les propos de ces participants, on voit qu'ils associent des notions complexes de la fonction au programme universitaire et des dimensions plus simples au programme du secondaire. Tous les témoignages montrent à un divers degré que les futurs enseignants ont la perception de ne pas pouvoir faire pleinement l'articulation entre celles-ci.

Cette synthèse révèle que les connaissances des futurs maîtres de mathématiques en lien avec la notion de *fonction* sont fragmentaires. Ils éprouvent des difficultés tant avec la définition qu'avec les interprétations qu'ils s'en font. Dans un contexte plus général, la place qu'occupent les représentations de la fonction, le passage d'un registre[10] à un autre, et le travail opérationnel font en sorte que les futurs maîtres de mathématiques enseignent à leurs étudiants la notion de *fonction* avec beaucoup de

---

[10] La notion de registre a été introduite dans la note 7 et sera détaillée au chapitre III.

lacunes. Toutefois, ces renseignements reposent sur un très petit nombre d'études, qui sont qualitatives pour l'essentiel. À l'inverse, ce mémoire s'appuie sur des données quantitatives et il porte sur la façon dont cet objet mathématique est interprété et représenté par les futurs enseignants pour mieux comprendre leur propre conception de la fonction.

2.4 Synthèse des lectures et questions de recherche

Comme le démontre les études citées dans le premier chapitre, le concept de *fonction* est très complexe. Il a fallu près de deux siècles aux mathématiciens pour élaborer des définitions de fonction satisfaisantes pour faire ressortir l'étendue couverte par le terme : fonctions continues et discontinues, exprimables par plusieurs représentations (géométrique, numérique, algébrique, graphique et verbale). Ainsi, il n'est guère surprenant que la typologie des façons dont l'humain considère la fonction soit riche. Les chercheurs divergent en ce qui a trait au nombre de façon de regrouper les interprétations de la fonction, car il s'agit toujours de visions partielles et non de catégories scientifiques, mais on retrouve entre autres les interprétations suivantes : la correspondance entre ensembles, la relation de dépendance, la règle et la covariation. Si celles-ci devraient toutes être complémentaires, Nicholas (1966; repris par Hitt, 1998) rapporte que la relation de dépendance serait la façon préférable de concevoir la fonction. Or, les études empiriques décrites dans le second chapitre s'intéressant à la façon dont les élèves de niveau secondaire et leurs enseignants de mathématiques définissent et se représentent mentalement la fonction soulignent que c'est rarement la relation entre variables qui est la façon privilégiée de la traiter. Dans cette optique, certains programmes de formation des maîtres, dont celui de l'Université du Québec à Montréal, repensent la manière d'enseigner la didactique de l'algèbre et de la fonction aux futurs maîtres.

À la lumière de ces travaux, il paraît pertinent de faire un état des lieux de l'étendue et de la nature des interprétations et représentations de la fonction des étudiants du baccalauréat en enseignement secondaire des mathématiques et de la façon dont celles-ci diffèrent à divers moments de la formation. C'est dans cette optique que trois questions de recherche ont été formulées.

La première question à laquelle ce mémoire tentera de répondre est : Quelles représentations du concept de *fonction* sont les mieux manipulées par les futurs maîtres? Ici, il sera question entre autres de vérifier si les tendances observées dans les recherches citées plus haut sur les futurs maîtres se confirment.

La deuxième question est : Peut-on voir émerger des interprétations de la fonction dans les réponses livrées par les futurs maîtres? Comme les interprétations sont des conceptions partielles qui ne sont pas directement observables, c'est à travers ce que les participants verbaliseront que nous verrons s'ils font référence à une des interprétations de la fonction.

La troisième question est : À quel point les interprétations et représentations de la fonction des futurs maîtres en mathématiques en 4^{e} année du baccalauréat en enseignement secondaire diffèrent-elles de celle de ceux de $1^{ère}$ année? Cette question puise sa source dans les travaux de Kieran (2007) et Even (1998), qui signalent l'importance de former les futurs maîtres à plus d'une représentation de la fonction, et de Bednarz (2001), qui rapporte qu'à l'Université du Québec à Montréal les futurs maîtres sont amenés tout au long de leur programme de formation à suivre des cours sur la résolution de problèmes liés aux fonctions mettant l'accent sur les représentations algébrique et arithmétique.

Le prochain chapitre présentera le cadre théorique dans lequel ces questions seront analysées. Il y sera question du processus de développement cognitif et de la place accordées aux représentations dans le modèle de Duval, en s'appuyant sur plusieurs de ses publications entre 1988 et 2017.

CHAPITRE III

CADRE THÉORIQUE

Tout apprentissage se déroule dans un processus de développement de nouvelles connaissances. Avant d'être maîtrisées, celles-ci créent de la résistance. C'est donc du processus d'apprentissage dont il sera question dans ce chapitre.

3.1 Apprentissage et processus de développement cognitif

Dans le cadre de ce mémoire, nous abordons l'apprentissage sous un angle cognitif. En ce sens, nous rejoignons la pensée de Chevallard (1992) pour qui chaque « savoir est une certaine organisation de la connaissance » et, dans le cas de la didactique, cette organisation est liée au fait qu'une personne a l'intention d'enseigner pour promouvoir l'acquisition d'une connaissance dans un contexte institutionnel donné. Pour Chevallard (1992), l'apprentissage des mathématiques est une branche de l'anthropologie cognitive (ou anthropologie de la connaissance), c'est-à-dire de l'étude de l'Homme et de son rapport aux différents savoirs. Ainsi, une didactique des mathématiques n'existe pas indépendamment d'une didactique des savoirs.

Selon Schneuwly (2008), la didactique telle que définie par Chevallard (1992) met en évidence un double effet de sémiotisation[11], qui est un dédoublement de la façon d'appréhender l'objet de connaissance. Effectivement, le maître qui enseigne une notion, un concept ou une théorie effectue un travail de sémiotisation, qui consiste à se faire une image mentale de l'objet à enseigner à partir de son savoir-faire, de son expertise; cependant, l'objet d'enseignement est matérialisé sous plusieurs formes, telles que les textes, les exercices ou les feuilles de travail, qui sont chacune un reflet

[11] La sémiotisation consiste à se construire une représentation plus ou moins altérée d'un objet ou d'un concept selon ses perceptions humaines. Elle est « la façon dont les actions humaines changent les propriétés sémiotiques et la signification de la matière. » (Maran, 2017)

de la sémiotisation de son concepteur. Chacune des sémiotisations auxquelles il est confronté peut mener l'apprenant à se faire une nouvelle image mentale de l'objet d'étude, donc à de multiples sémiotisations successives. Les objets à apprendre prennent donc chez l'apprenant de nouvelles significations qui peuvent différer à la fois de celles de l'enseignant et de celles inscrites dans le matériel pédagogique, ce qui explique qu'avant d'atteindre la pleine maîtrise du nouveau concept, l'apprenant peut passer par des stades successifs de progression et de régression au fur et à mesure qu'il refait ce travail de sémiotisation.

D'autres courants théoriques s'intéressent aussi à cette idée de progression et régression dans le développement cognitif. Par exemple, Carle (2009) et Mahy et Carle (2012) soulignent qu'il existe universellement des processus non linéaires impliquant ce type de stades successifs de progression et de régression. En s'inscrivant dans l'approche sociocognitive de Kuhn (1983) et de Scharmer (2007), ils montrent comment un modèle de courbe d'apprentissage en U est présent dans plusieurs sphères du savoir. La courbe en U schématise qu'un individu, qui possédait une certaine stabilité dans sa construction d'un concept, vit une période d'instabilité avec ce même concept au moment où une situation quotidienne ou pédagogique impliquant des interactions avec des membres de sa communauté, par exemple un enseignant, le met en position de devoir construire une nouvelle représentation de ce concept. Ainsi, dans l'action d'un nouvel apprentissage, les anciennes connaissances résistent avant que le nouvel apprentissage émerge comme savoir.

La figure 3.1, tirée de Mahy et Carle (2012), illustre comment le conflit cognitif lié à la formation de nouvelles représentations en contexte scolaire fonctionne selon le modèle de la courbe en U. Cet exemple s'inspire des travaux de Minder (2001), qui dit que, dans un premier stade, l'apprenant[12] a déjà un système de représentations d'un concept adapté à ses besoins habituels. L'état d'équilibre ainsi créé se brise lorsqu'une nouvelle situation problème empêche d'avoir recours au système de représentations déjà maîtrisé. L'apprenant se retrouve en conflit entre les représentations qu'il possède déjà du concept et celle dont il aurait besoin pour résoudre la situation problématique. Dans le troisième stade, l'apprenant fait face à un déséquilibre cognitif complet, car il doit essayer de tenir compte à la fois de ses anciennes représentations et de la nouvelle. Il recommence à progresser lorsqu'il commence à assimiler la nouvelle représentation aux anciennes. Puis, au cinquième stade, l'apprenant a pleinement intégré la nouvelle représentation dans son système de représentations, ce qui le rend plus compétent en lien avec le concept visé.

Par exemple, voyons comment ce modèle pourrait s'appliquer au développement du concept de fonction. Tel que nous l'avons vu au chapitre II, dans plusieurs programmes scolaires, c'est d'abord la fonction réelle continue de 1er degré qui est abordée à travers plusieurs représentations, comme $f(x) = mx + b$. Lorsque l'élève veut résoudre des problèmes en lien avec ce type de fonction, il peut utiliser de façon appropriée une représentation graphique, par exemple pour identifier sur la courbe un point de coordonnées (x,y), où x est une valeur du domaine et y, une valeur du codomaine. Comme le signale Minder (2001) pour le premier stade de la courbe en U, cet élève maîtrise un système de représentations pour un concept qui lui est devenu habituel : la fonction linéaire. Quand vient le temps d'introduire cet élève à une nouvelle allure de la représentation d'une fonction, comme la représentation graphique d'une fonction polynomiale de 2^{e} degré, l'élève passe au deuxième stade de la courbe en U. Il réalise que la fonction polynomiale de 2^{e} degré possède une représentation graphique différente de celles qu'il a rencontrées jusqu'à maintenant.

12 Notons que Minder (2001) parle de la relation entre apprenant et maître ou entre élève et maître, mais il ne se restreint pas à parler de l'enfant, contrairement à l'impression que donne la figure 3.1.

Et il peut alors rencontrer des difficultés pour exploiter cette représentation graphique lors de résolution de problème. Il passe à la troisième phase, au creux de la courbe en U, quand il vit un déséquilibre complet entre ses connaissances antérieures sur la fonction, qui lui permettaient de résoudre avec succès des problèmes, et la prise de conscience qu'il doit intégrer à son système de représentations un graphique dans lequel la courbe n'est pas linéaire. Au quatrième stade, l'élève commence en effet à intégrer la représentation à son système puis, au dernier stade, son système de représentations s'est restabilisé et l'élève peut donc résoudre une plus grande diversité de problèmes liés à la fonction.

Figure 3.1 : Courbe d'apprentissage en U
pour le développement de nouvelles représentations (Mahy et Carle, 2012, p. 82)

Selon ce modèle d'apprentissage, les apprenants passent par de multiples courbes en U dans le processus de développement d'un concept. Ainsi, de nombreuses phases de progression et de régression sont nécessaires pour atteindre une plus grande maîtrise du concept de *fonction*.

3.2 Apprentissage et représentations chez Duval

Nous avons déjà évoqué au chapitre I les travaux de Duval portant sur les représentations (1993, 1998, 2003, 2005, 2006b). Voyons maintenant la pertinence de ses travaux pour expliquer la place qu'occupent les représentations dans l'apprentissage d'objets mathématiques comme les fonctions.

Malgré de nombreuses différences entre leurs modèles, tout comme Chevallard (1992), Schneuwly (2008) et les théoriciens de la courbe en U mentionnés plus haut, Duval met l'accent sur la dimension cognitive de l'apprentissage. Ainsi, Duval (2006b) déclare qu'il priorise le point de vue cognitif sur le point de vue mathématique :

> La prise en compte du point de vue cognitif met en évidence un autre objectif : comprendre non pas d'abord pour devenir capable de valider mais pour apprendre à comprendre, c'est-à-dire pour être ensuite capable de se poser de nouvelles questions, de trouver des moyens de les explorer et par suite de contrôler la pertinence de ses explorations et de ses interprétations. Ce qui est l'autonomie par excellence. (Duval, 2006b, p. 88-89)

Notons que, dans ce passage, Duval indique que l'importance de voir la pertinence de ses « interprétations ». Toutefois, il ne dit pas qu'une interprétation peut devenir une vision complète d'un concept. D'ailleurs, dans l'ensemble de ses travaux, Duval parle davantage des « représentations » que les apprenants se font d'un concept.

Si Duval (1993) donne une grande importance à la représentation, c'est parce qu'il voit un paradoxe cognitif de la pensée mathématique : les objets mathématiques ne sont ni physiques ni perceptibles directement dans le monde réel, ils sont accessibles seulement à travers des représentations. « D'une part, l'appréhension des objets mathématiques ne peut être qu'une appréhension conceptuelle et, d'autre part, c'est seulement par le moyen de représentations sémiotiques qu'une activité sur des objets mathématiques est possible. » (Duval, 1993, p. 38) Duval (2006b) continue à préciser ce paradoxe cognitif. Un même objet mathématique fait l'objet de différentes représentations (telles que celles dont il a été question au chapitre I); alors il peut être difficile de reconnaître que deux représentations différentes pointent vers le même objet qu'on ne peut pas voir directement.

> La situation épistémologique particulière des mathématiques par rapport aux autres domaines de connaissance conduit à conférer aux représentations sémiotiques un rôle primordial. Tout d'abord elles sont le seul moyen d'accès aux objets mathématiques ; ce qui soulève le problème cognitif du passage de la représentation d'un objet à une autre représentation de ce même objet. Ensuite, et surtout, les démarches mathématiques impliquent de manière intrinsèque la transformation de représentations sémiotiques. (Duval, 2006b, p. 67)

Remarquons que, dans les citations précédentes, Duval parle de représentations « sémiotiques ». Ce terme s'inscrit dans une distinction que Duval (1993) établit entre la sémiosis et la noésis. La noésis est l'appréhension d'un objet en tant que concept. Comme l'indiquait la citation de Duval (1993, p. 38) mentionnée plus haut, l'appréhension d'un objet mathématique passe forcément par une appréhension conceptuelle, donc l'apprentissage mathématique implique toujours de la noésis. De son côté, la sémiosis est l'appréhension de certaines propriétés de cet objet en tant que représentations, qui deviennent donc des représentations sémiotiques. Comme l'être humain n'a pas accès à ses sens pour voir ou toucher directement un objet mathématique, il a besoin de telles représentations pour en « voir » certaines caractéristiques, par exemple une représentation numérique sous forme de tableau de valeurs peut permettre de visualiser des valeurs du domaine et du codomaine d'une fonction, tandis qu'une représentation graphique de la même fonction pourrait permettre de voir si elle est continue ou non. Dans le même esprit, Guzmán (1998) explique que la représentation algébrique d'une fonction réelle de 2^e^ degré – par exemple, $f(x) = x^2$ – et la représentation graphique de cette fonction avec une courbe parabolique renvoient au même objet mathématique, mais sans rendre compte des mêmes propriétés de cet objet.

Selon Duval (1993), l'apprentissage mathématique exige de faire un lien entre la noésis et la sémiosis et ce, pour deux raisons principales. D'un côté, l'objet mathématique n'est pas accessible sans représentations, puisqu'il n'est pas perceptible directement. Donc, la noésis ne suffit pas; il faut de la sémiosis. De l'autre côté, comme la représentation n'est qu'une facette d'un concept ou objet, elle n'est pas complète en soit. Alors, il faut de la noésis pour que l'activité cognitive de sémiosis ait une raison d'être.

Par ailleurs, dans ses écrits, Duval énonce l'idée que les représentations ne prennent sens qu'à l'intérieur d'un système donné. En fait, le système est ce qui permet d'associer un objet à une représentation pour identifier les propriétés pertinentes dans cette représentation. Dans cet esprit, Duval (2006b, p. 69) écrit que « les représentations ne dépendent pas d'abord des individus mais des systèmes producteurs de représentations », c'est-à-dire qu'un individu ne peut pas interpréter une représentation sans passer par un système donné. Par exemple, face à la représentation illustrée à la figure 3.2, un individu pourrait passer par un système physique pour dire que les objets représentés sont deux dés. Dans un cours de mathématiques, le même individu passerait plus probablement par un système sémiotique pour dire qu'il s'agit d'une représentation d'un objet mathématique non perceptible dans le réel : l'addition des nombres 5 et 3.

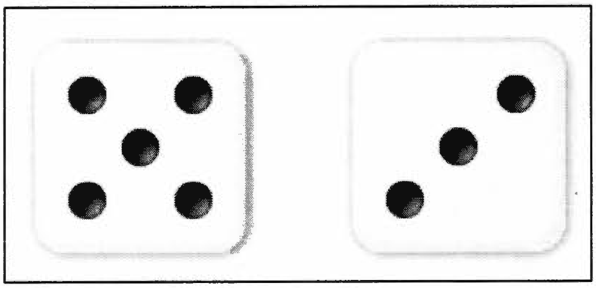


Figure 3.2 : Exemple démontrant l'importance du système pour associer une représentation à un objet

Ainsi, lorsqu'il est question d'appréhender un objet mathématique, qui n'a pas de réalité physique, un système de représentation est un type de système sémiotique. En ce sens, Duval (2006b, p. 81) explique que « [l]es systèmes décimaux, binaires, *etc.* de représentation des nombres sont les systèmes sémiotiques les plus simples, les plus purs et les plus puissants que l'on puisse trouver.» Dans cet esprit, sans nier l'existence d'autres types de systèmes, c'est sur les systèmes de représentations sémiotiques que nous centrerons maintenant davantage notre attention.

Duval (2006b, p. 74) ajoute que, dans le domaine des mathématiques, « une représentation n'est intéressante que dans la mesure où elle peut se transformer en une autre représentation ». Il entend ici par « transformation » deux types d'activités : le traitement et la conversion[13], qui seront expliqués plus en détails dans la section 3.3. Comme nous le verrons ci-dessous, ces activités jouent un rôle essentiel dans la définition d'un registre de représentation et, pour Duval (1995), savoir diversifier ses registres de représentation sémiotique est la base du développement des

[13] Duval n'a pas toujours utilisé ce terme de « transformation » pour regrouper le traitement et la conversion sous une appellation commune. Par exemple, Duval (1995, 1996) faisait mention de deux points-clés de l'apprentissage, le traitement et la conversion, et il utilisait plutôt le terme transformation comme un synonyme de traitement.

connaissances. Voilà pourquoi la prochaine section de ce mémoire va porter sur les registres.

3.3 Registres de représentation

Pour Duval (1993, p. 41) certains systèmes de représentation sont aussi des registres de représentation : « Pour qu'un système puisse être un registre de représentation, il doit permettre les trois activités cognitives fondamentales liées à la sémiosis. » (Duval, 1993, p. 41). Ces activités, qui définissent ce qu'est un registre de représentation, sont expliquées à la section 3.3.1. Duval (1998) parle de cinq registres de représentation : les figures géométriques, l'écriture numérique, la notation algébrique, la représentation graphique et le langage.

3.3.1 Les trois activités cognitives liées aux registres de représentation

Comme l'évoque la citation précédente, selon Duval (1993, 1995), un registre de représentation peut être défini comme un système sémiotique qui comporte trois aspects fondamentaux, qui consistent à permettre trois activités de nature cognitive. La première est d'être capable d'accéder à certaines propriétés d'un objet à travers une *représentation*, tel qu'expliqué dans la section 3.2. La deuxième, c'est de transformer cette représentation par une règle qui permet d'y ajouter des connaissances ou des données. Duval l'appelle le *traitement*. Enfin, la troisième activité cognitive, c'est de convertir la représentation du premier système vers un deuxième système pour en arriver à diverses significations de l'élément représenté. C'est la *conversion*. Par exemple, la figure 3.3 montre comment Duval (2006b) donne l'exemple du nombre réel 25. Une personne peut réaliser la première activité cognitive en le représentant à l'aide de 25 points tracés sur une feuille qui forment une figure géométrique. La deuxième activité, le traitement, permet de transformer la représentation des 25 points en les regroupant trois par trois à l'aide de traits, formant ainsi de nouvelles figures géométriques. Pour la troisième activité cognitive, la conversion, la personne peut passer de la figure géométrique initiale à l'équation 5 x 5 = 25 ou, en se basant sur la transformation regroupant les points trois par trois, à l'équation (3 x 8) + 1 = 25. Ainsi, la différence entre l'activité cognitive de traitement et celle de conversion, c'est que le traitement reste dans un même système, par exemple les figures géométriques, tandis que la conversion amène un changement de système, par exemple d'une figure géométrique à une expression numérique.

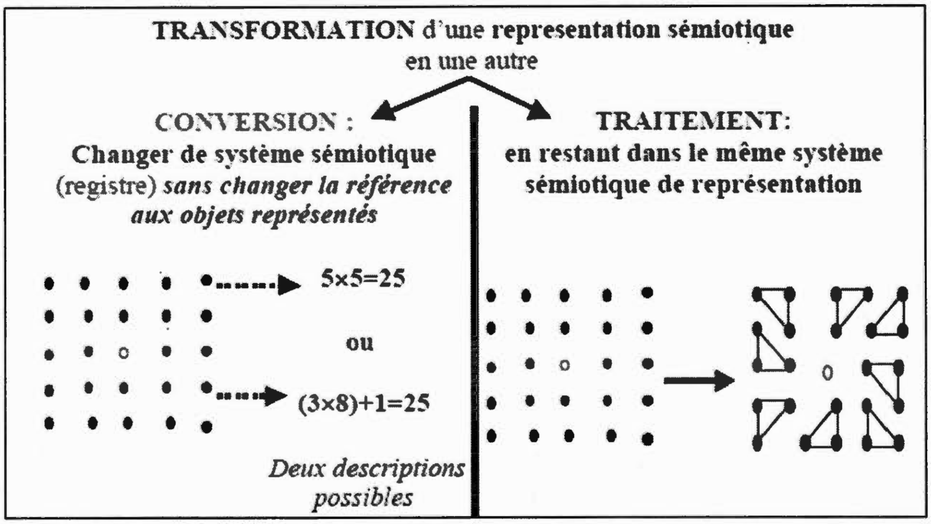


Figure 3.3 : Illustration des trois activités cognitives (Duval, 2006b, p. 78)

La compréhension conceptuelle de l'étudiant dépend à la fois de la conversion, telle qu'elle vient d'être expliquée, de la coordination, qui est l'habileté à faire cette conversion avec rapidité et aisance (Duval, 1993) et de l'articulation, qui est la capacité de faire la conversion dans les deux sens, par exemple d'une figure géométrique à une expression numérique et vice versa (Duval, 2006b).

Duval (1993, 1995 et 1998) explique que le fait d'apprendre les mathématiques sur un système de nombres et écritures algébriques qui coexistent avec le langage naturel nécessite des conversions entre différents registres de représentation pouvant laisser des difficultés au moment de comprendre l'objet mathématique. Même si les représentations comme le tableau de valeurs, le graphique ou l'expression algébrique appartiennent à différents registres, les registres de représentation sémiotique ne sont pas des éléments qui se développent en parallèle, mais plutôt en articulation. Selon Duval (1988), puisque chaque registre comporte ses propriétés, comme des variables, des symboles, etc., pour une pleine coordination et appréhension, ces propriétés doivent être transformées en unités plus significatives d'un registre de départ à un registre d'arrivée. Donc, l'articulation d'un registre à l'autre devrait se faire pour permettre d'avoir toujours une vision plus claire d'une notion, telle que la fonction.

Toutefois, Duval (1995) et Guzmán R. (1998) soulignent que le fonctionnement de la pensée ne mobilise en général qu'un registre de représentation à la fois. La conversion, la coordination et l'articulation ne se produisent que dans les contextes où elles sont rendues nécessaires par la situation à résoudre. La difficulté à effectuer des conversions peut mener à une incompréhension conceptuelle.

La prochaine section permettra d'élargir un lien entre les registres de représentation et la notion de *fonction*.

3.3.2 Manipulation des registres de représentation de la notion de *fonction*

Comme nous l'avons mentionné au début de la section 3.3, Duval (1998) parle de cinq registres de représentation : les figures géométriques, l'écriture numérique, la notation algébrique, la représentation graphique et le registre verbal. À l'intérieur de ces registres, pour Duval (1993), les représentations sémiotiques d'un objet mathématique tel que la fonction sont le dessin (registre géométrique), le tableau de valeurs (registre numérique), la formule génératrice (registre algébrique), le graphique cartésien (registre graphique), ainsi que le l'énoncé en mots (registre verbal)[14].

Dans les travaux de Duval (1993, 1995), il est expliqué qu'un concept mathématique comme les fonctions est construit par des représentations sémiotiques comme un graphe, une formule ou un problème en mots. Par exemple, la représentation algébrique $f(\mathrm{x}) = \mathrm{x}^2$ d'une fonction réelle de 2e degré permet d'exprimer la relation entre les valeurs associées à l'aire A d'un carré en fonction de la longueur de son côté x; cependant, il est possible d'illustrer certaines valeurs du domaine et du codomaine de cette fonction à l'aide d'un tableau de valeurs ou d'une courbe sur le plan cartésien. Donc, chacune des façons de représenter une fonction peut contribuer à la compréhension globale de l'objet étudié. Cela montre l'importance de la conversion, de l'articulation et de la coordination des systèmes de représentation et, par conséquent des registres de représentation, pour la construction du concept de *fonction*.

La figure 3.4 présente le modèle de coordination de représentations tirées de deux registres de Duval (1993), adapté au concept de *fonction*. Rappelons que la coordination est l'habileté à faire la conversion avec rapidité et aisance (Duval, 1993). Pour mieux comprendre ce modèle, et ce, dans un exemple simple, il suffit d'imaginer une fonction réelle de 1er degré, par exemple la relation entre la distance

---

14 Il existe d'autres modèles qui catégorisent différemment les représentations de la fonction. Par exemple, Verstappen (1982) les regroupe en trois : D'abord, les représentations géométriques incluent entre autres les schémas, les diagrammes et les graphiques. Ensuite, parmi les représentations arithmétiques sont inclus les tableaux de valeurs, les noms des objets et les paires ordonnées. Enfin, les représentations algébriques touchent les formules et les symboles. À l'inverse, Dufour (2011) énumère six registres de représentation de la fonction : le schéma, le registre numérique, le registre verbal, le registre graphique, le registre algébrique et le registre tabulaire.

parcourue par un véhicule roulant à une vitesse constante de 100 km/h et le temps écoulé. Une représentation dans le registre algébrique serait $f(t) = 100t/60$ où t représente le temps écoulé en minutes depuis le départ et $f(t)$, le nombre de kilomètres parcourus. Dans cette situation, la compréhension de cet objet (fonction) peut être traité à l'aide de deux ou plusieurs systèmes de représentation selon Duval. Les flèches 1 et 2 de la figure 3.4 représentent deux processus de traitement en lien avec le phénomène, l'un consistant à transformer une forme verbale à une autre (1), l'autre consistant à modifier la formule algébrique (2), par exemple pour obtenir $f(t) = 5t/3$. Les flèches 3 et 4, correspondent à la conversion de l'information de la fonction de l'un à l'autre des deux registres choisis. Lorsque ces conversions sont réalisées dans les deux sens, il y a articulation des registres. La flèche C montre que, lorsque les deux conversions sont réalisées avec une certaines aisance, il y a coordination des registres et l'objet mathématique qu'est la fonction est mieux maîtrisé. En d'autres mots, la capacité de coordination de ces représentations permet d'avancer dans le processus de développement permettant la compréhension de l'objet mathématique.

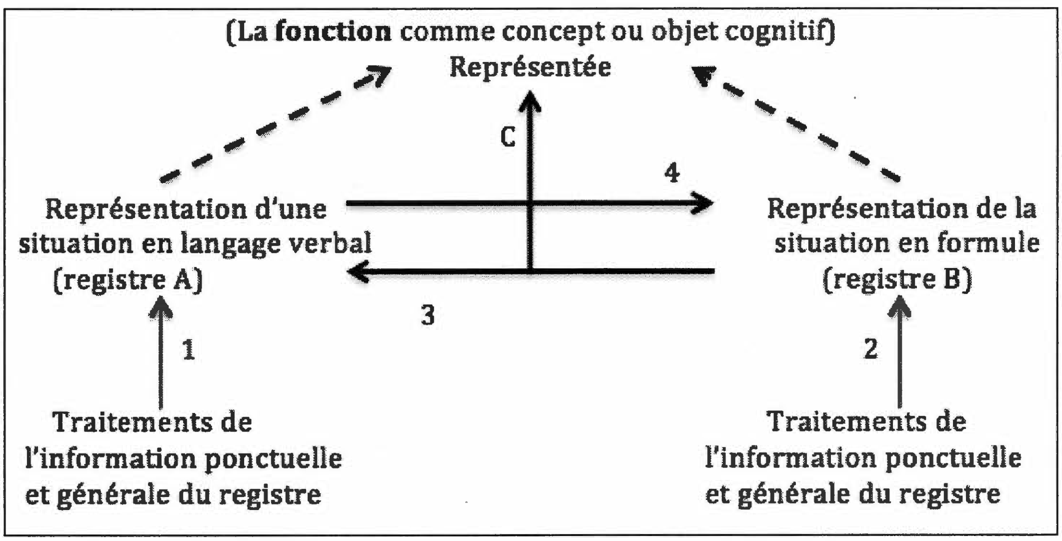


Figure 3.4 : Modèle de la coordination de représentations tirées de deux registres, selon Duval (1993), adapté à la notion de *fonction*

Dans notre outil de mesure, qui sera décrit au chapitre IV, nous avons choisi d'accorder une place particulièrement importante au registre graphique. En effet, c'est parce que le graphique peut à la fois faciliter et complexifier le traitement d'une fonction. Il peut être un facilitateur, grâce à ses propriétés visuelles : selon les travaux de Rogalski (1984, cités par Bloch, 2005), le graphique aide à voir des propriétés de la fonction, comme la différence entre un domaine discret ou continu et l'allure de la courbe. Bloch ajoute que le registre graphique permet plusieurs tâches liées aux fonctions ainsi qu'à d'autres objets. Par exemple, la représentation graphique peut faciliter des tâches comme trouver des propriétés sur la courbe d'une fonction, reconstruire une équation algébrique, interpréter des équations, trouver des fonctions réciproques et déduire plusieurs autres propriétés en forme de chaines (Bloch, 2000; citée par Bloch, 2005). Le registre graphique abrite un nombre incalculable de fonctionnalités qui ne sont pas prises en compte sur l'ensemble des connaissances mathématiques au secondaire.

Toutefois, les représentations graphiques peuvent aussi poser un piège lorsque celui qui les consulte fait une fausse interprétation iconique. C'est ce que Monk (1992) appelle *Iconic Translation*. Par exemple, si un diagramme schématise une situation physique où un ballon descend une pente, on y observe, visuellement, une courbe descendante. Un graphique illustrant la vitesse du ballon en fonction du temps devrait prendre au contraire la forme d'une courbe ascendante comme celle proposée à la figure 3.5, car les lois de la physique font en sorte qu'un objet accélère pendant qu'il descend. Or, quelqu'un qui observe le diagramme peut s'imaginer à tort que la vitesse du ballon diminue à cause de la forme descendante. Cette personne tracerait donc faussement une courbe descendante au moment de représenter graphiquement la fonction. La figure 3.5 illustre cet exemple de représentation graphique difficile à interpréter pour une fonction réelle $f : \mathbb{R}_{+} \rightarrow \mathbb{R}_{+}$.

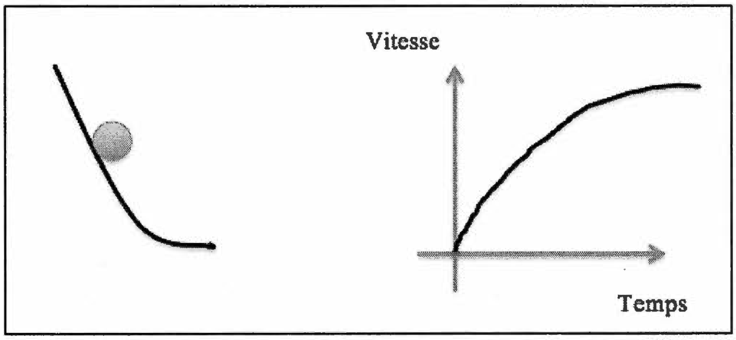


Figure 3.5 : Exemple de diagramme pouvant mener à une translation iconique
(Déplacement d'un ballon dans le temps)

Comme nous l'avons expliqué à l'aide de la figure 3.4, la coordination de plusieurs registres de représentation sémiotique est importante dans l'apprentissage de la notion de f*onction.* Selon Duval (1993), la conversion d'un registre à un autre ne s'effectue pas de façon immédiate. Un obstacle apparaît quand les deux registres ne sont pas congruents du côté sémantique. Par exemple, la représentation algébrique $f(x) = (x + 1)^2$ d'une fonction dans le domaine des nombres réels peut laisser des obstacles au moment de la représenter graphiquement puisqu'il manque de congruence entre la formule et la courbe due au signe (+) de la formule faisant croire à l'étudiant que le graphe de cette fonction polynomiale de 2^e degré doit se tracer entièrement dans le premier quadrant, mais elle doit plutôt se tracer avec un sommet situé sur l'axe des abscisses au point (-1,0) comme le montre la figure 3.6. Ici, la conversion de la représentation algébrique à la représentation graphique est moins intuitive.

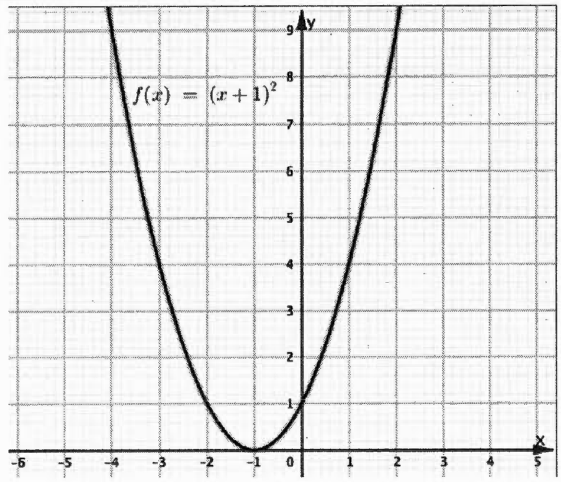
$f(x) = (x + 1)^2$	
Représentation algébrique	Représentation graphique

Figure 3.6 : Exemple de représentations non congruentes

Comme chaque représentation d'une même fonction en montre des propriétés différentes, plus une fonction est complexe, plus un individu est susceptible de ressentir une absence de congruence entre certaines de ses représentations.

3.4 Apport de ces théories à la présente recherche

À l'égard des théories abordées dans le cadre théorique, et que nous comptons utiliser pour la préparation de la méthodologie, nous résumons ici, comment les modèles cognitifs proposés, tous deux basés sur la construction d'un concept par le biais de ses représentations, apportent des éléments essentiels pour mieux comprendre les connaissances et la façon dont les futurs maîtres de mathématiques maitrisent la notion de fonction en vue de leur enseignement.

3.4.1 Processus d'apprentissage non linéaire

Si Duval ne se prononce pas explicitement sur l'existence ou non d'une linéarité dans le processus d'apprentissage, Duval (2006b) soulève plusieurs fois l'idée de représentations « transitoires » qui s'inscrivent dans des aller-retour dans les processus cognitifs à mobiliser dans une démarche mathématique. De son côté, le modèle de la courbe en U de Minder (2001) propose que des périodes de régression soient indispensables avant de maîtriser une nouvelle représentation.

Comme il y a une seule mesure temporelle dans mon étude, il est impossible de savoir avec certitude où en est chaque participant dans son propre processus d'apprentissage non linéaire quant à la fonction. Pour compenser ce fait, il est pertinent d'administrer l'outil de mesure à plusieurs cohortes de futurs maîtres en mathématiques pour voir si une tendance se dégage dans les réponses d'étudiants à différents stades d'avancement dans leur baccalauréat en enseignement.

3.4.2 Représentations, transformations et conversions entre registres

Il importe de créer un outil de mesure dans lequel les registres de représentation utilisés sont divers. En effet, les prises de mesure doivent aller au-delà d'un simple choix de réponse, elles doivent solliciter des représentations de même registre, des traitements et des conversions dans un autre registre. Dans ce sens, il est important que l'outil de mesure permette de voir ces trois activités cognitives pour pouvoir analyser les comportements rationnels des participants.

3.4.3 Les registres de représentation et les interprétations utilisées dans le questionnaire

Des représentations appartenant aux cinq registres mentionnés dans la section 3.3.2 seront utilisées dans l'outil de mesure : le dessin (registre géométrique), le tableau de valeurs (registre numérique), la formule génératrice (registre algébrique), le graphique cartésien (registre graphique), ainsi que l'énoncé en mots (registre verbal). Pour l'analyse des réponses données par les participants seront observées les démarches utilisées dans chacune des situations, la façon dont les participants utilisent ou non des représentations de chacun des cinq registres et, pour certaines questions, les interprétations de la fonction identifiées par les participants, comme la correspondance, la relation de dépendance ou la règle, seront aussi soulignées.

Le prochain chapitre de ce mémoire va se pencher sur la méthodologie, construite à partir des considérations ci-dessus.

CHAPITRE IV

MÉTHODOLOGIE

De façon générale, les choix méthodologiques ont été faits pour chercher des pistes de réponses aux trois questions de recherche énoncées dans le chapitre II :

- Quelles représentations du concept de *fonction* sont les mieux manipulées par les futurs maîtres?
- Peut-on voir émerger des interprétations de la fonction dans les réponses livrées par les futurs maîtres?
- À quel point les interprétations et représentations de la fonction des futurs maîtres en mathématiques en 4^{e} année du baccalauréat en enseignement secondaire diffèrent-elles de celle de ceux de 1ère année?

Toutefois, le lecteur attentif constatera que certains aspects de la méthodologie décrite ci-dessous diffèrent légèrement de ce qui a été expliqué dans les trois chapitres précédents. Cela s'explique parce qu'au moment de développer la méthodologie en vue de l'obtention d'un certificat éthique, nous nous étions appuyé principalement sur la typologie des interprétations de la fonction qui figure dans les travaux de Vinner et Dreyfus (1989), qui rapportent une liste de ce qu'ils ont observé dans les réponses de participants et non une distinction catégorique basée sur des critères scientifiques. Les lectures effectuées par la suite, par exemple les très riches analyses de Duval (1988, 1991, 1993, 1995, 1996, 1998, 2005, 2006a, 2006b) sur les représentations, ont été intégrées aux chapitres I à III, mais elles n'ont pas toutes pu se refléter dans l'outil de recherche, car celui-ci avait alors déjà été soumis aux participants. De même, en s'inspirant de modèles de questions observées dans des études antérieures, par exemple Vinner et Dreyfus (1989, p. 359) et Janvier (1998, p. 85), plusieurs représentations graphiques dans notre questionnaire initial proposaient des axes non gradués. Pour mieux respecter les propriétés de la représentation graphique et montrer l'état optimal de l'outil de recherche, nous avons ajouté une grille graduée dans les représentations graphiques. Nous considérons que les petits changements apportés au questionnaire n'invalident pas les données récoltées pour des raisons que nous verrons au chapitre V[15].

4.1 Choix des participants

Pour cette recherche, les participants sont 100 étudiants au baccalauréat en enseignement des mathématiques de l'UQAM, un groupe de 46 étudiants en 1ère année (inscrits à leur 2e session), un groupe de 25 étudiants de 2e année, donc en mi-parcours (inscrits à leur 4e session) et un groupe de 29 étudiants finissants de 4e année (inscrits à leur 8e et dernière session). Tous les étudiants inscrits à un de ces trois niveaux du programme qui ont accepté de participer à l'étude ont pu le faire. Ces participants sont normalement âgés de 18 ans et plus. Les critères comme l'âge, le sexe ou l'origine ethnique n'ont pas été contrôlés, car ils n'avaient pas d'importance pour répondre aux questions. Ces participants ont été recrutés dans le respect du certificat éthique 1379 attribué par le CERPE 3.

Le questionnaire a été administré en janvier 2017, à la première semaine de la session, dans un cours obligatoire pour trois cohortes : un de 1ère année, un de 2e année et un de 4e année. Les étudiants disposaient d'une heure pour y répondre, à la fin d'une séance de classe régulière. La quasi-totalité des étudiants présents ont accepté de participer à l'étude.

---

15 Par ailleurs, certaines questions renvoient à des notions liées à la physique, telle que la vitesse, l'accélération ou le volume, qui ajoutent un défi supplémentaire à la stricte étude de la fonction.

4.2 Outil de collecte de données et codage : le questionnaire

Un questionnaire comportant onze questions[16] en lien avec la notion de *fonction* (annexe I) a été soumis aux étudiants. Celui-ci a été conçu à partir des études abordées dans les deux chapitres précédents pour vérifier les interprétations et représentations du concept de *fonction* privilégiées chez les futurs maîtres, mais aucune question n'est reprise intégralement. Plusieurs des questions portent au moins en partie sur la représentation graphique, soit 6 sur 11, parce que les lectures effectuées au moment de le concevoir pointaient sur l'intérêt particulier de cette représentation, comme nous l'avons expliqué à la section 3.3.2.

Les questions seront détaillées ci-dessous. De plus, certaines réponses attendues seront données. Nous indiquons aussi comment les réponses des participants ont été codées à l'aide du logiciel Excel.

4.2.1 Première question

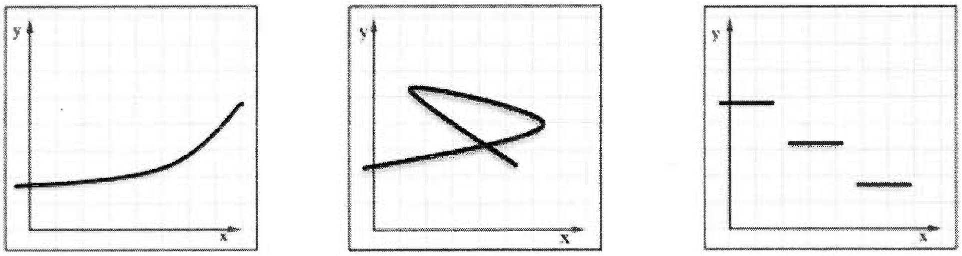
La figure 4.1 présente la première question.

Cette question a été conçue en s'inspirant d'un modèle trouvé dans Vinner et Dreyfus (1989) et Hitt (1998), mais tous les graphes ont été modifiés. Elle a pour objectif de vérifier si les futurs maîtres savent reconnaître différents types de fonction dans leur représentation graphique : continue, discontinue, en escalier et exponentielle. Le seul graphe qui doit être encerclé est le graphe (b), puisque, c'est le seul qui a, pour une

[16] Le questionnaire soumis aux participants comportait en fait quatorze questions, mais certaines ont été retirées, parce qu'elles ne permettaient finalement pas de recueillir des données pertinentes pour répondre aux questions de recherche.

donnée dans l'axe des x, deux données dans l'axe des y, c'est-à-dire pour une donnée du domaine, deux données du codomaine.

Q1. Encerclez les graphes qui ne représentent pas une fonction et expliquez pourquoi il ne s'agit pas de fonctions.



(a) (b) (c)

Justification :

S'il vous manque de l'espace, utilisez le verso de cette page.

Figure 4.1 : Question 1

De plus, les participants doivent justifier leurs choix. Nous nous attendons à des explications verbales faisant référence au domaine et au codomaine, mais aussi à des explications sous forme graphique comme le fait de tracer une ligne droite parallèle à l'axe des y sur la courbe qui ne représente pas une fonction pour montrer qu'il y a deux ou trois valeurs du codomaine pour une valeur du domaine.

Les réponses obtenues à cette question ont été codées dans un premier temps selon que le participant a encerclé ou non une représentation graphique. Pour chacune des trois représentations (a), (b) et (c), nous avons utilisé le code 0 pour une représentation non encerclée et le code 1 pour une représentation encerclée. Par exemple, si le participant a encerclé la représentation (b) uniquement, ses réponses sont codées 0 1 0. Cette réponse est d'ailleurs considérée comme la combinaison démontrant une meilleure capacité à identifier la représentation graphique d'une fonction. À l'inverse, le fait de sélectionner (a) et (c) et de ne pas sélectionner (b), ce qui donne la suite de codes 1 0 1, est considéré comme une réponse démontrant une capacité moins affinée à identifier la représentation graphique d'une fonction.

Dans un deuxième temps, pour ce qui est de la justification, nous avons utilisé le code 0 pour désigner que le participant n'a rien inscrit, le code 1 lorsque ce qu'il a inscrit ne donnait en fait aucune justification (par exemple, « ce n'est pas une fonction ») et le code 2 lorsqu'il a donné une justification s'appuyant sur au moins une représentation de la fonction. Dans ce cas, nous avons subdivisé les réponses selon le type de représentation (graphique, verbale, algébrique, numérique ou géométrique). Nous avons aussi réservé un code distinct pour une justification qui reposerait sur l'articulation de deux représentations ou plus.

4.2.2 Deuxième question

La figure 4.2 présente la deuxième question.

Q2. Écrivez une définition de fonction.

Figure 4.2 : Question 2

Cette question se trouve dans la plupart des lectures portant sur la notion de *fonction* et elle est pertinente à cause de la grande variété des interprétations et représentations possibles de la fonction, qui ont été présentées dans le chapitre I. La réponse la plus fréquemment attendue devrait correspondre à la définition de la fonction qu'on retrouve dans les manuels scolaires québécois, comme « [u]ne fonction est une relation pour laquelle tout élément de l'ensemble de départ est associé à au plus un élément de l'ensemble d'arrivée » (Boucher *et al.*, 2010, p. 14). Mais il se peut aussi que nous obtenions des réponses qui verbalisent une des interprétations ou représentations proposées au chapitre I, par exemple :

- *une fonction est un ensemble de couples représentés par des variables x et y,*
- *la fonction mathématique est un tableau de valeurs dans lequel des variations sont observées,*
- *la fonction mathématique est une formule dans laquelle les variables x et y représentent des valeurs inconnues,*
- *une fonction est une équation.*

Comme dans les exemples qui précèdent, il est probable que certaines réponses d'étudiants ne présenteront qu'une vision incomplète de la fonction basée sur une seule de ses propriétés, ou alors que certaines réponses soient complètement erronées d'un point de vue mathématique. Celles-ci présentent tout de même un intérêt pour voir si les participants y verbalisent une interprétation et s'ils s'appuient sur une représentation.

Par ailleurs, les réponses pourraient possiblement faire appel à un raisonnement covariationnel, mais ceci devrait être rare, car le questionnaire n'a pas été conçu pour vérifier les raisonnements des participants, tel que nous l'avons expliqué au moment de présenter les réserves de Thompson et Carlson (2017) à propos du peu de connaissances réelles sur la covariation. Enfin, certains participants peuvent ne pas savoir la définition concrète de la fonction, donc, ils pourraient donner des explications en mots qui ne correspondent à aucune des interprétations ou représentations recensées ou ne donner aucune réponse.

Pour coder les réponses, nous les avons d'abord triées en trois catégories : absence de réponse (0), réponse où le participant indique qu'il ne sait pas comment définir une fonction (1) et réponse s'appuyant sur au moins une interprétation ou représentation de la fonction (2). Dans le troisième cas, nous avons aussi mis un code pour identifier le type d'interprétation (paires ordonnées ou correspondance, relation de dépendance, règle) ou de représentation (formule algébrique, graphique, langage verbal) que nous avons observé. Un code distinct est utilisé lorsque le répondant s'appuie sur plusieurs représentations. Comme nous le verrons au chapitre V, certains répondants ont nommé distinctement une interprétation de la fonction, d'autres, une représentation, et c'est pourquoi nous avons maintenu les deux types de catégories dans le codage. Notons que notre objectif avec cette question est d'observer les représentations et interprétations sur lesquelles les participants s'appuient dans leur définition de la fonction. Nous ne codons pas les définitions selon leur niveau de justesse.

4.2.3 Troisième question

La figure 4.3 présente la troisième question, qui est inspirée de Comin (2005). Cette question demande aux étudiants de lier une courbe (représentation graphique) au dessin d'un récipient (représentation géométrique). Le problème porte sur la croissance en hauteur d'un liquide dans un contenant en fonction du volume d'eau qui y est versé, mais il ne signale pas si le remplissage se fait au goutte à goutte ou à une vitesse plus rapide. Cela devrait permettre de distinguer les deux conceptions des mathématiques au sens de Sierpinska (1987) qui ont été présentées à la section 1.5.2.

Nous nous attendons à ce que les « intuitifs empiristes », qui voient les mathématiques à travers les propriétés des objets concrets, considèrent que de petites augmentations de volume ne mènent pas immédiatement à une augmentation de la hauteur du liquide, car l'eau est une substance qui s'étend sur une surface plane avant de monter. Pour ce type de participants, aucune des représentations géométriques de récipient proposées ne devrait correspondre au graphe (a), car la courbe de la fonction est ascendante à partir du point d'origine (0,0) ce qui signifie que le récipient n'a qu'un point de contact à sa base et que la hauteur du liquide devrait augmenter de plus en plus vite, donc la forme du contenant devrait monter en rétrécissant. Pour un « intuitif empiriste », cela est physiquement impossible. Pour le graphe (b) non plus, aucun récipient proposé ne devrait être sélectionné, car la courbe montre une augmentation constante de la hauteur une fois que le liquide s'est étalé sur la surface avec une hauteur nulle, donc le récipient correspondant serait droit. Mais la réponse 3.5 est probable, parce qu'elle illustre justement un contenant où le remplissage se ferait ainsi, à l'exception de la section supérieure, où le rétrécissement mènerait à une augmentation plus rapide de la hauteur. Mais, un « intuitif empiriste » peut considérer qu'on ne remplit jamais un verre d'eau jusqu'au bord. La représentation graphique (c) ne devrait être associée à aucune représentation géométrique. Enfin, la réponse attendue à cette question est d'associer le graphe (d) avec le récipient 3.1.

De leur côté, les « formalistes », qui voient les mathématiques comme un jeu formel et symbolique, peuvent réagir de manière différente, particulièrement parce que les axes des graphiques ne sont pas gradués. Il ne devraient normalement associer les graphes (a) et (c) à aucun des dessins, car aucun contenant représenté géométriquement ne permettrait de faire varier la hauteur du liquide en fonction du volume de la façon représentée dans les graphes. Ils n'associeront les graphes (b) et (d) à aucun contenant non plus, car la fonction n'est pas définie en 0 mais seulement à partir d'un réel strictement positif, ce qui voudrait dire que le volume ne pourrait jamais être nul. La courbe des graphes (b) et (d) indique donc un volume non nul pour une hauteur nulle. Les « formalistes » vont considérer que, dès l'ajout d'une unité de volume d'eau sur l'axe des abscisses, il y a une augmentation d'une unité de hauteur sur l'axe des ordonnées, même si le phénomène physique n'est pas perceptible visuellement.

Q3. Les graphes ci-contre représentent le remplissage d'eau de récipients.

Lorsque c'est possible, associez un graphe à un des récipients, sachant que la fonction correspond à la hauteur du liquide en fonction de son volume.

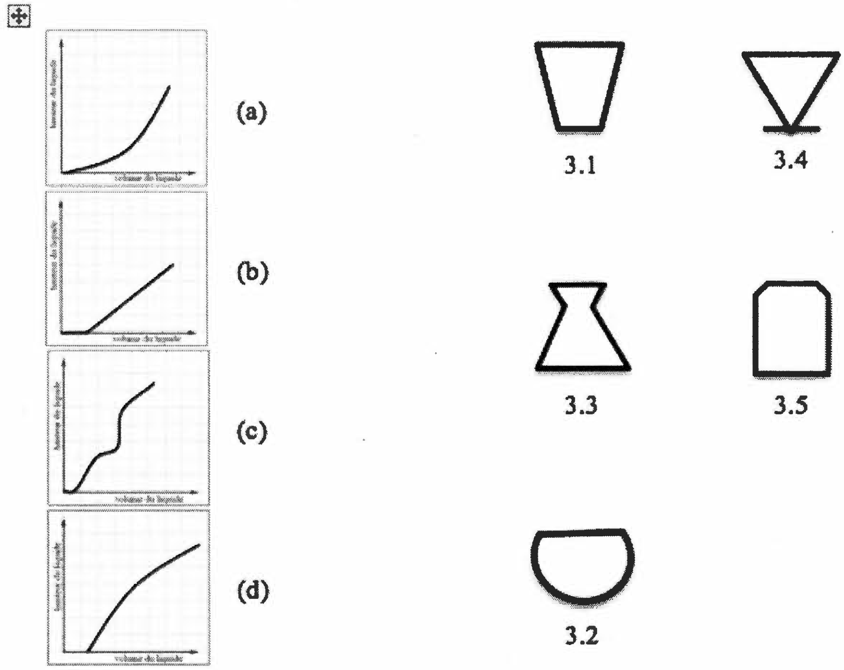


Figure 4.3 : Question 3

Pour Sierpinska (1987), un obstacle épistémologique à franchir pour chaque apprenant est d'accepter l'autre vision – « intuitive empiriste » ou « formaliste »[17]. Un participant qui évolue en ce sens pourrait associer le graphe (a) au récipient 3.3. Cette réponse satisfait la vision « formaliste » voulant que toute augmentation de volume du liquide mène à une augmentation, même petite, de la hauteur, donc que la courbe est ascendante à partir de (0,0). Par contre, pour associer ces deux représentations, il faut avoir une conception « intuitive empiriste » de l'idée qu'un récipient n'est pas conçu pour être rempli jusqu'au bord et, donc, que le remplissage de la dernière section du récipient n'a pas à être représenté dans le graphe.

---

[17] Rappelons que Sierpinska (1987) a développé cet obstacle à partir de la notion d'infini.

Dans cette question, associer l'image d'un récipient au graphe qui représente le remplissage de celui-ci peut amener les étudiants à se faire une fausse idée de la représentation graphique de la relation entre les variables. En effet, une relation iconographique, qui pousse à se représenter un tracé de la même forme que l'objet concret, est souvent faussement établie entre l'objet et sa fonction (Monk, 1992), tel qu'expliqué dans la section 3.3.2. Les participants qui font ce type d'interprétation iconique devraient associer le graphe (a) au récipient 3.2 et le graphe (c) au récipient 3.3.

Pour coder les réponses à cette question, nous avons traité chaque graphe séparément. Pour le graphe (a), nous avons mis le code 0 si le participant ne l'a associé à aucun récipient, le code 1 s'il l'a associé au récipient 3.1, le code 2 pour le récipient 3.2 et ainsi de suite jusqu'au code 5 pour le récipient 3.5. Le même procédé a été suivi pour chacun des graphes (b), (c) et (d).

4.2.4 Quatrième question

La figure 4.4 présente la question 4. Cette question porte spécifiquement sur la relation entre deux variables, représentées ici sous forme de langage courant. Dans cette question, les affirmations (a), (b), (c) et (d) découlent toutes de la situation énoncée. Il faut toutefois noter que l'affirmation (d) ajoute la troisième dimension, la profondeur, car elle parle du volume d'eau du lac. Dans cette question, toutes les affirmations doivent être choisies par les participants. Ici, comprendre la fonction nécessite de bien identifier les variables et de ne pas rester concentré sur la surface du lac, qui est circulaire. Avec le langage verbal, les grandeurs ne sont dévoilées ni sous la forme numérique ni sous la forme symbolique. Nous croyons a priori que quelques participants n'identifieront sensibles à la translation iconique n'identifieront pas comme vraies ces représentations verbales d'une fonction, car le problème fait appel à un cercle et qu'une fonction ne peut pas être représentée graphiquement par un cercle puisque la courbe d'un cercle proposerait, pour une valeur du domaine, deux valeurs du codomaine. De plus, il est possible que les étudiants choisissent seulement les affirmations (a) et (c), dans lesquelles la variable temps est explicite. Dans les affirmations (b) et (d), il n'y a pas de mention du temps, même si ces fonctions incluent implicitement une variable temps, ce qui peut être source d'erreurs, tel qu'expliqué dans la section 1.5.2. Le modèle de la question 4 n'est pas directement inspiré d'une lecture spécifique, mais plutôt de l'ensemble de la littérature.

Q4. En été, un lac de forme circulaire s'assèche graduellement. Toutes les quatre heures, la surface de l'eau (le cercle) diminue.
Choisissez parmi les affirmations suivantes celle ou celles que vous considérez vraies.

- **a) Le rayon du cercle du lac est fonction du temps.** ( )
- **b) L'aire du cercle du lac est fonction du rayon du cercle.** ( )
- **c) L'aire du cercle du lac est fonction du temps.** ( )
- **d) Le volume d'eau du lac est fonction du rayon du cercle du lac.** ( )

Figure 4.4 : Question 4

Nous avons codé les réponses obtenues pour chaque option avec le code 0 lorsque le participant n'a pas coché une affirmation et le code 1 lorsqu'il l'a sélectionnée.

4.2.5 Cinquième question

La figure 4.5 présente la cinquième question, dont l'énoncé est une traduction de Carlson (1998). Cette question demande d'identifier une fonction représentée algébriquement par une formule ne commençant pas par $f(x)$ ou, dans le contexte, $A(C)$. La réponse attendue est la (a), qui est le résultat du système d'équation $A = \pi r^2$ et $C = 2\pi r$. De plus, on demande aux participants de donner une justification de leur choix de réponse. Pour ce faire, il est possible que le participant s'appuie sur une ou plusieurs interprétations, ou qu'il tente de convertir les formules vers d'autres représentations de la fonction, mais il peut aussi faire un traitement dans le registre algébrique. Les deux dernières options, la conversion ou le traitement, correspondent aux activités cognitives de transformation selon Duval (2006b). Nous croyons a priori que les participants auront des difficultés à résoudre ce problème, car elle demande de se remémorer les formules associées à l'aire et à la circonférence, puis de résoudre un système d'équation à deux variables. La réponse (d) pourrait survenir lorsqu'un étudiant essaie de placer la formule de la circonférence dans celle de l'aire de façon inexacte.

Q5. Laquelle des expressions algébriques suivantes définit l'aire *A* d'un cercle en fonction de sa circonférence *C*?

a) $A = C^2 / 4\pi$

b) $A = \pi (\frac{1}{4} C^2)$

c) $A = C^2 / 2$

d) $A = (2 \pi r)^2$

Justification :

Figure 4.5 : Question 5

Au niveau du codage, nous avons d'abord identifié la réponse choisie par le participant (0 pour une absence de réponse, 1 pour l'expression algébrique a, 2 pour la b, 3 pour la c et 4 pour la d). Ensuite, nous nous sommes penché sur la justification fournie. Comme pour la question 1, nous avons utilisé le code 0 pour désigner que le participant n'a rien inscrit, le code 1 lorsque ce qui était écrit ne donnait en fait aucune justification et le code 2 lorsqu'il y avait une justification s'appuyant sur au moins une représentation de la fonction. Lorsque cela se produisait, nous avons ajouté un code pour indiquer le type de représentation présent ou le recours à l'articulation de deux représentations ou plus.

4.2.6 Sixième question

La figure 4.6 présente la sixième question, qui porte sur l'articulation de deux représentations de la fonction. Cette question demande aux futurs maîtres de lier le graphique d'une fonction à une représentation algébrique. Dans la représentation algébrique, en plus de la variable indépendante sous la forme du symbole z, le participant observe un symbole g, qu'il doit remplacer par une constante qui lui est donnée. La représentation algébrique a été présentée ainsi, car la capacité à traiter des symboles est une des propriétés de ce type de représentation.

Les réponses attendues sont l'association de l'expression (a) au graphe 6.4, car les deux représentent une fonction dont l'ordonnée à l'origine est positive et dont la pente est positive, et de l'expression (c) au graphe 6.3, parce que la courbe passe par l'origine des axes et la pente est positive aussi. Aucun graphe ne correspond à l'expression (b). Nous accepterons aussi ceux qui associent la formule (a) au graphe 6.1, car la pente est positive, la courbe croise l'axe des ordonnées dans les positifs et le participant peut tracer une pente plus ou moins inclinée visuellement selon l'échelle qu'il se crée. Cette question est inspirée des travaux d'Euler (1748), le premier à utiliser la notation $f(x)$. Il s'agit ici d'observer si le participant peut associer la fonction représentée par une formule et par un graphe.

Q6. Les expressions ci-contre représentent des fonctions réelles dans lesquelles g est une constante et $z \in \mathbb{R}$.
Lorsque c'est possible, reliez l'expression avec une représentation graphique.

a) $f(z) = g + 3z$; $g = 3$

b) $f(z) = gz - 4z^2$; $g = 3$

c) $f(z) = gz$; $g = 4$

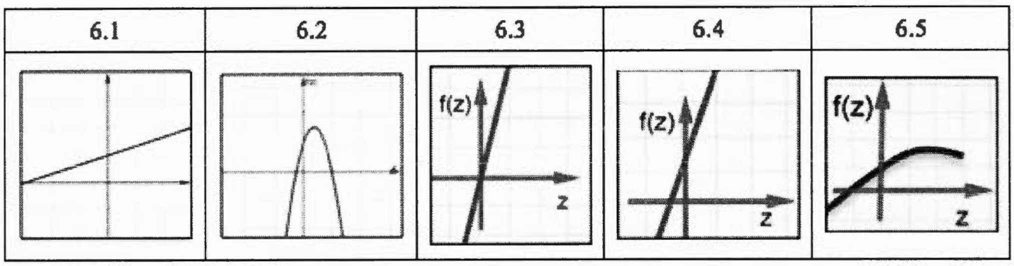


Figure 4.6 : Question 6

A priori nous croyons que les participants donneront des réponses correctes pour les représentations de fonctions linéaires (a) et (c). Il est probable que les participants choisiront le graphe 6.2 pour la représentation algébrique (b), car l'expression (b) et le graphe 6.2 correspondent à des fonctions du second degré. Toutefois, dans le cas de la fonction représentée par l'expression algébrique (b), une des paires ordonnées doit être (0,0). Or, dans la fonction représentée graphiquement en 6.2, la courbe ne passe pas par le point (0,0). Cela montre que la représentation algébrique (b) et la représentation graphique 6.2 ne correspondent pas à la même fonction. Dans l'ensemble, la question 6 fait appel à des processus cognitifs complexes, car le participant doit faire des substitutions et des comparaisons.

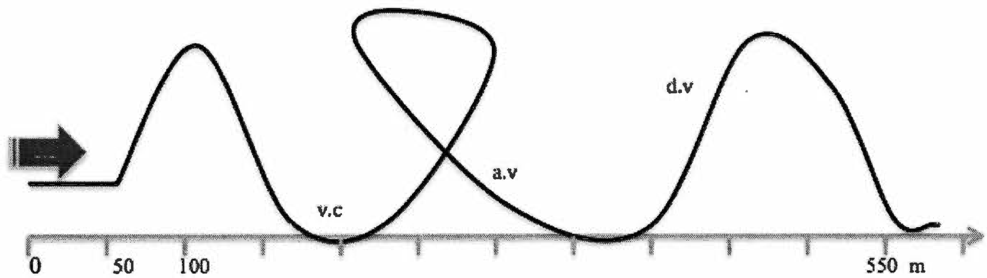
Nous avons utilisé la même méthode de codage que pour la question 3, c'est à dire que, pour chaque expression algébrique (a), (b) et (c), nous avons mis un code 1, 2, 3, 4 ou 5, selon la représentation graphique associée. Lorsque la formule n'a été associée à aucune représentation graphique, le code 0 a été retenu.

4.2.7 Septième question

La figure 4.7 présente la septième question, inspirée des travaux de Monk (1992).

Q7. Le diagramme ci-contre représente le trajet d'une montagne russe sur laquelle des changements de vitesse sont observées ainsi :
v = vitesse; c = constante; d = diminution; a = augmentation

Représentez graphiquement la vitesse en fonction de la distance parcourue pour le wagon.



Graphe :

Figure 4.7 : Question 7

Il s'agit ici de tester dans quelle mesure les participants sont capables de convertir sous forme de graphe ce mouvement décrit avec un dessin. Elle porte sur le déplacement d'un wagon sur une montagne russe. Ici, les variables mises en contexte sont la vitesse en fonction de la distance parcourue par le wagon. Une des complexités de la question vient du fait que la distance parcourue par le wagon continue à augmenter même quand le wagon fait un tour sur lui-même et que le temps continue à avancer même quand la vitesse du wagon diminue. Ainsi, la réponse attendue est celle qui est présentée dans la figure 4.8. Ce graphe représente l'allure attendue, mais les maximums et minimums locaux ainsi que la largeur des paliers peuvent varier, car le diagramme ne donne pas les valeurs exactes des augmentations ou diminutions de vitesse dans chaque segment du tracé.

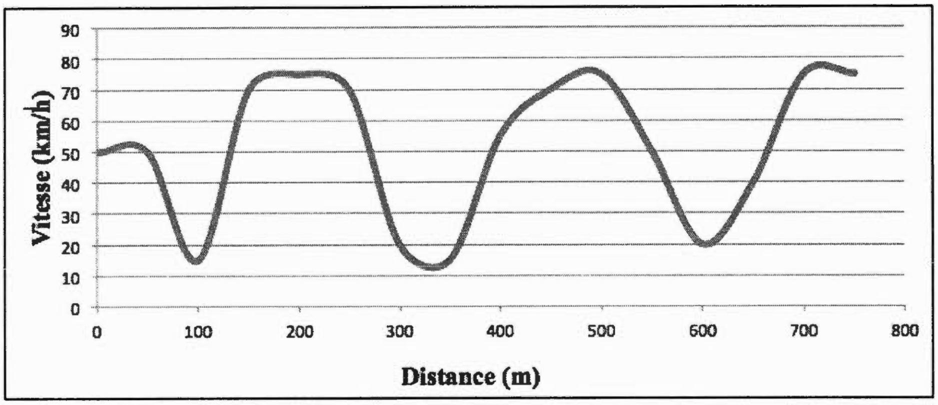


Figure 4.8 : Réponse attendue à la question 7

Ici, il y a une dynamique de variables qui complexifie la tâche. D'après Monk (1992), dans ce type de contexte, les participants sont susceptibles de faire une translation iconique, c'est-à-dire de reproduire le même tracé dans le graphe, comme l'illustre la figure 4.9.

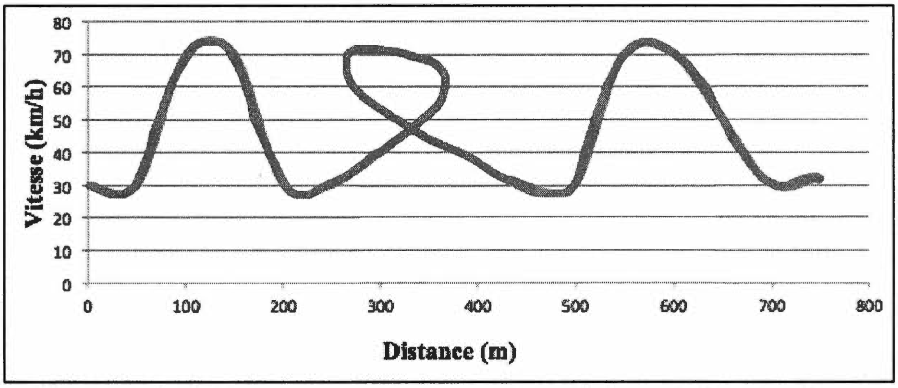


Figure 4.9 : Réponse erronée reposant sur la translation iconique

Ici, l'erreur viendrait entre autres d'une incompréhension du fait que la vitesse augmente quand le wagon descend et vice versa. Une autre réponse prévisible selon les travaux de Monk est celle de l'effet-miroir (figure 4.10), dans laquelle le participant réalise qu'il doit inverser les descentes et les montées, mais ne pense pas à représenter l'augmentation de la distance parcourue pendant que le wagon fait une boucle.

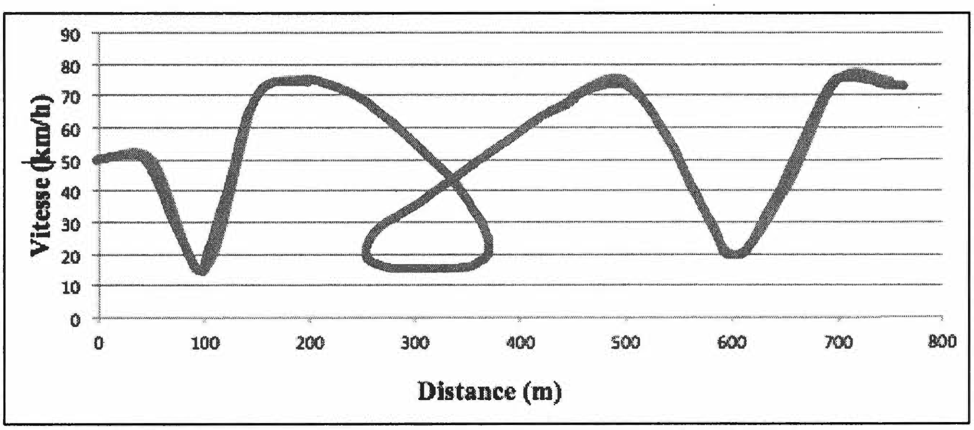


Figure 4.10 : Réponse erronée reposant sur l'effet-miroir

Pour coder les réponses à cette question, nous avons utilisé le code 0 en cas d'absence de réponse. Le code 1 a été attribué lorsque la représentation graphique produite ne démontrait aucune des propriétés attendues, et le code 2, lorsqu'il y avait une translation iconique telle qu'illustrée à la figure 4.9. Le code 3 désigne plutôt une représentation graphique reposant sur l'effet-miroir, comme celle de la figure 4.10. Le code 4 a été attribué à des représentations graphiques assez semblables à la courbe attendue, par exemple lorsque la courbe a l'allure attendue mais qu'il manque le dernier segment, et le code 5, à la réponse correspondant entièrement à la représentation attendue.

4.2.8 Huitième question

La figure 4.11 présente la huitième question, inspirée partiellement de modèles trouvés dans Hitt (2002).

Q8. S'il existe une fonction qui modélise le phénomène écrivez-en une représentation. Sinon, justifiez pourquoi il ne s'agit pas d'une fonction.

Mesure de la consommation d'essence

Km (h)	40	70	100
L (km)	5	7.5	15

Justification ou fonction :
Vous pouvez utiliser le verso de cette page pour plus d'espace.

Figure 4.11 : Question 8

Cette question demande aux étudiants d'observer un tableau de valeurs (représentation numérique) et de justifier s'il représente une fonction. Ceci amène les participants à l'utilisation d'autres représentations pour valider leur réponse. Le tableau de valeurs représente un phénomène continu mais non une fonction linéaire, donc il est prévisible que les participants disent qu'il ne représente pas du tout une fonction. Les variations proposent des écarts divers qu'une seule formule algébrique ne peut pas modéliser. Toutefois, un participant devrait dire que c'est une fonction et pourrait tenter de représenter les valeurs dans un graphique, comme le montre la figure 4.12.

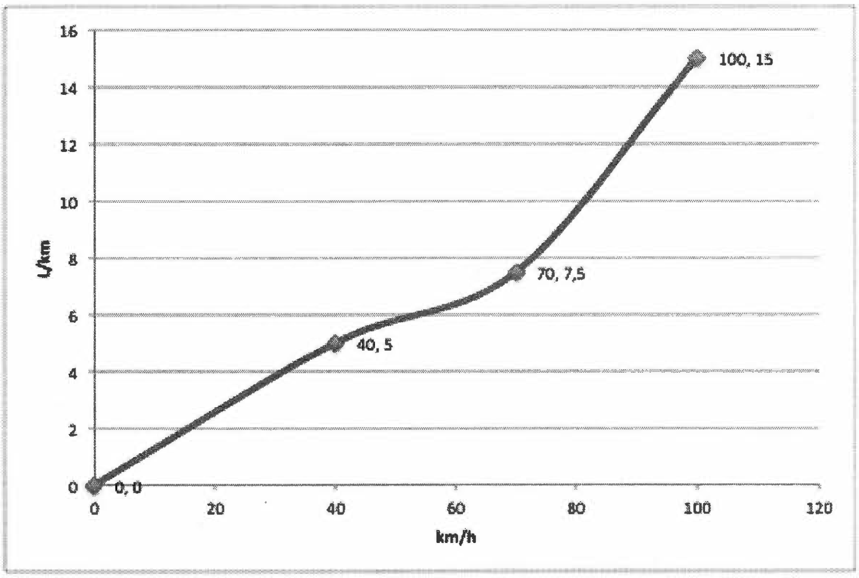


Figure 4.12 : Représentation graphique de la fonction non linéaire correspondant au tableau de valeurs

Il importe dans cette question d'observer quelles sont les représentations de la fonction que les participants privilégient pour traduire un tableau de valeurs dans un autre système de représentations, et ainsi atteindre le quatrième niveau de Hitt *et al.* (2001) ou effectuer une conversion, selon Duval (1995).

Nous avons codé si les participants ont identifié que le tableau de valeurs représente une fonction (2) ou non (1). En cas d'absence de réponse, nous avons attribué le code 0. Puis, nous avons observé le type de représentation choisi pour modéliser cette fonction. Parmi les représentations algébriques, nous avons distingué les réponses proposant uniquement une formule (1) de celles s'appuyant sur un calcul (2). De même, parmi les réponses en langage verbal (3) nous avons séparé celles qui faisaient référence à une interprétation de la fonction comme correspondance / paires ordonnées (4) ou relation de dépendance (5). Les réponses sous forme de représentation graphique ont été codées 6 et celles articulant deux représentations ou plus ont reçu le code 7.

4.2.9 Neuvième question

La figure 4.13 présente la neuvième question, qui porte sur la conversion d'une représentation géométrique à une représentation graphique.

Q9. Imaginez que l'on remplisse ce récipient d'eau. Représentez dans le graphe la courbe de la variation de la hauteur en fonction de la quantité d'eau (volume).

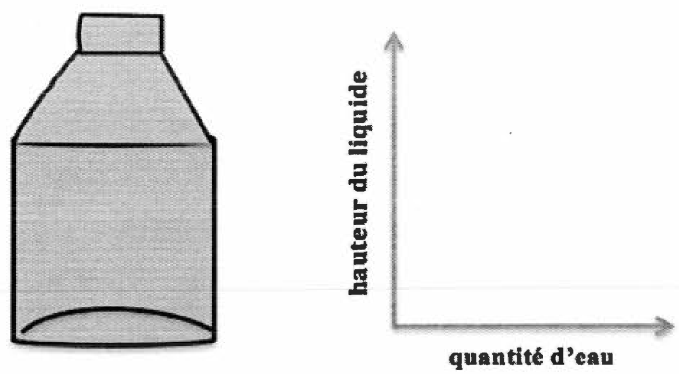


Figure 4.13 : Question 9

Il s'agit d'un modèle de question souvent utilisé dans les études sur la covariation (par exemple Carlson, 1998), mais comme la réponse est demandée ici sous forme de représentation et non de procédure, elle ne fournit aucun renseignement sur le raisonnement covariationnel probablement enclenché pour produire le tracé. Les étudiants ayant une conception « intuitive empiriste » devraient proposer une courbe dont l'ascension ne commence pas à l'origine des axes (0, 0), mais plutôt sur l'axe des x positifs, car il faut qu'une certaine quantité d'eau se disperse au fond du récipient avant de gagner en hauteur. Toutefois, puisque le problème ne spécifie pas la vitesse du remplissage de l'eau et que les axes ne sont pas gradués, les participants ayant une conception « formaliste» vont tracer une courbe qui représente que la hauteur du liquide augmente dès que le remplissage commence. La figure 4.14 présente l'allure attendue, mais le tracé des répondants pourrait varier un peu en ce qui a trait à la longueur et à la pente exacte de chaque segment, entre autres à cause de l'unité de mesure qu'ils visualisent pour chaque axe.

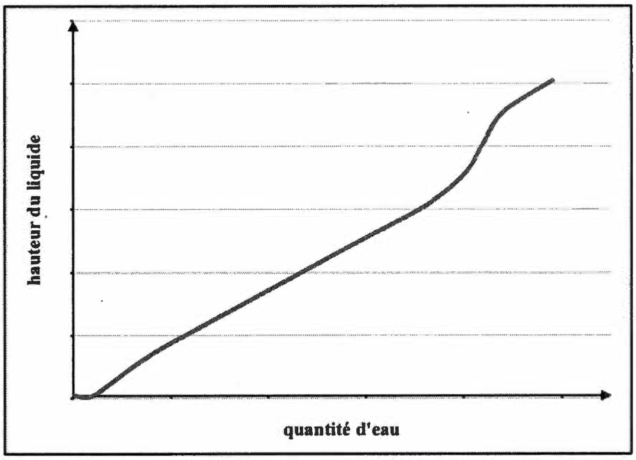


Figure 4.14 : Réponse recherchée pour la question 9

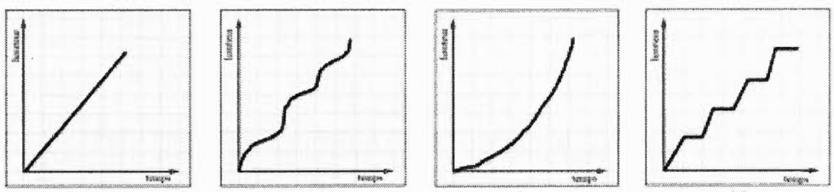
A priori, nous nous attendons à trouver des graphes dans lesquels la courbe représentant le remplissage ne correspond pas aux variations physiques de la hauteur d'eau dans le récipient, par exemple des courbes inversées ou totalement droites, une seule ligne pour la totalité du remplissage.

Pour cette question, nous avons mené une analyse plutôt qualitative. Nous avons quand même noté, pour chaque répondant, si sa réponse contenait certaines propriétés. Par exemple, nous avons regardé à quel endroit la courbe rencontrait l'axe des x (zéro de la fonction) pour savoir si elle passait au point d'origine ou non. Nous avons aussi vérifié si le participant avait tracé une courbe avec la bonne allure, ou s'il avait plutôt tracé le graphique d'une fonction linéaire. Pour chacun de ces éléments, nous avons attribué un code 2 ou 1 selon que la réponse obtenue correspondait davantage à nos attentes ou non. Ce codage visait à nous permettre de voir non pas quelle représentation ont privilégié les participants puisque cela leur était imposé, mais plutôt si les participants étaient capables de faire une conversion vers une représentation graphique respectant les propriétés de la fonction.

4.2.10 Dixième question

La figure 4.15 présente la dixième question, qui porte sur des représentations graphiques à traduire en mots, soit une conversion selon Duval (1995).

Les graphes montrent l'altitude d'une motoneige qui se déplace de façon ascendante dans un temps x. Les futurs maîtres doivent expliquer les comportements représentés par les différents graphes. Il s'agit ici de vérifier à quel point ils peuvent convertir une représentation graphique d'une fonction pour l'exprimer en mots. La question a été créée en s'inspirant d'un modèle proposé par Hitt (2002) avec un ascenseur. Pour répondre à la question, les participants doivent faire appel à une variable implicite, au choix : soit la forme de la pente que monte la motoneige, soit la vitesse de la motoneige. Ainsi, pour le graphe (a), le participant doit expliquer que l'augmentation de la hauteur est constante pour chaque unité de temps, donc qu'il s'établit une relation linéaire entre les valeurs de la variable indépendante et de la variable dépendante. Si le répondant suppose que la pente de la montagne est régulière, il pourrait dire que la motoneige se déplace à vitesse constante. S'il suppose que la pente est irrégulière, c'est que la motoneige réajuste sa vitesse pour continuer à gagner la même altitude à chaque unité de temps. Le graphe (b) amène la motoneige à la même hauteur finale que le graphe (a), mais il y a plusieurs périodes où la motoneige gagne peu de hauteur. Cela peut s'expliquer soit par des changements dans la dénivellation du terrain, soit par une diminution périodique de la vitesse de la motoneige si la pente de la montagne est régulière. Pour le graphe (c), les participants doivent expliquer que plus le temps passe, plus la motoneige prend de la hauteur rapidement. Si la pente de la montagne est régulière, c'est que l'accélération est constante. Sinon, cela signifie que la pente de la montagne est de moins de moins escarpée, permettant ainsi au véhicule de monter plus à vitesse constante. Le graphe (d) montre des périodes où la motoneige ne gagne plus du tout de hauteur. Le répondant peut l'expliquer soit par la présence de plateaux sur la montagne, soit par des arrêts complets dans le trajet.



Q10. Les graphes ci-dessous représentent la hauteur atteinte (altitude) par une motoneige durant un trajet en fonction du temps.

(a) (b) (c) (d)

Expliquez selon vous que signifie chacun de ces graphes

a. ______________________________

b. ______________________________

c. ______________________________

d. ______________________________

Figure 4.15 : Question 10

A priori, selon ce que dit Sierpinska (1992) sur la complexité de la variable temps, nous croyons que certains étudiants ne traiteront pas du tout des variables en présence : la hauteur et le temps. Il est probable que la translation iconique (Monk, 1992) décrite dans la section 3.3.2 pousse certains répondants à parler plutôt d'un changement de direction de la motoneige, par exemple à supposer que la motoneige zigzague dans le trajet illustré par le graphe (b) et franchit une courbe dans celui du graphe (c).

Pour cette question aussi, l'analyse est davantage qualitative. Un codage rudimentaire nous a tout de même permis de distinguer l'absence de réponse (0), la réponse ne montrant pas du tout la dynamique des variables (1) et la réponse attendue (2).

4.2.11 Onzième question

La onzième question (figure 4.16) demande aux participants de choisir parmi plusieurs affirmations données celles qui correspondent à des façons selon lesquelles ils conçoivent la fonction.

Ces affirmations ne sont pas inspirées d'un chercheur spécifique, mais plutôt de l'ensemble des représentations et interprétations repérées dans les réponses de participants à des études antérieures telles qu'elles sont expliquées dans le chapitre I. Toutes ces affirmations correspondent à des façons de concevoir des propriétés de la fonction correctes dans l'optique d'au moins une des représentations ou interprétations recensées dans la littérature. Il s'agit ici de comprendre laquelle est la plus privilégiée par les futurs maîtres en mathématiques au secondaire. Les réponses des participants peuvent donner des indices de la diversité des façons dont les futurs maîtres traitent la fonction et, ainsi, de leur niveau de compréhension de la notion de *fonction*. De plus, comme la double sémiotisation définie par Schneuwly (2008) s'explique en partie par les écarts entre les représentations des maîtres, celles du matériel didactique et celles propres à l'élève, les réponses amèneront un éclairage pour les représentations des maîtres. A priori, nous croyons que les participants choisiront les affirmations qui représentent des interprétations ou représentations de la fonction apprises dans leur parcours scolaire, soit les affirmations (a), (c), (d), (e) et (f).

Q11. Encerclez la ou les affirmations que vous considérez comme une façon de concevoir la fonction.

a) La fonction est une relation de dépendance entre deux variables.

b) La fonction est une règle de régularité entre x et y.

c) La fonction est une opération dans laquelle les valeurs de (x) permettent le calcul de la valeur de (y).

d) La fonction est une formule dans laquelle une expression mathématique connecte deux facteurs.

e) La fonction est une représentation graphique ou symbolique.

f) La fonction est un ensemble de paires ordonnées.

Figure 4.16 : Question 11

Pour coder les réponses, nous avons mis le code 0 lorsqu'une affirmation n'a pas été sélectionnée, et le code 1 lorsque l'affirmation a été retenue par le participant.

4.2.12 Synthèse des représentations de la fonction présentes dans le questionnaire

Le tableau 4.1 reprend de manière synthétique les représentations mises en œuvre dans les onze questions. Toutes les représentations n'occupent pas la même place dans le questionnaire. Ainsi, la représentation graphique est présente dans six questions, la représentation verbale, dans quatre questions, la représentation géométrique, dans trois questions, la représentation algébrique, dans deux questions, et la représentation numérique, dans une seule question. Par ailleurs, dans trois questions, les participants sont complètement libres de choisir la représentation de leur choix pour justifier leur réponse ou faire une conversion.

Tableau 4.1 : Synthèse des représentations de la fonction présentes dans le questionnaire

Question	Représentation(s) proposée(s)	Représentation à produire	Activité demandée
1	Graphique	Libre	Identification
2	s/o	Verbale	Définition
3	Graphique Géométrique	s/o	Association
4	Verbale	s/o	Identification
5	Algébrique	Libre	Identification
6	Graphique Algébrique	s/o	Association
7	Géométrique	Graphique	Conversion
8	Numérique	Libre	Conversion
9	Géométrique	Graphique	Conversion
10	Graphique	Verbale	Conversion
11	Verbale	s/o	Identification

Ce tableau présente aussi la principale activité demandée dans chaque question. La question 2 demande de définir et les questions 1, 4, 5 et 11, d'identifier des représentations d'une fonction. Les questions 7 à 10 font appel à une activité cognitive de transformation au sens de Duval (2006b) : la conversion. Il est aussi possible que des participants fassent une transformation sous forme de conversion ou de traitement pour justifier leur réponse aux questions 1 et 5. Quant aux questions 3 et 6, elles portent sur une activité d'association. S'il est probable que les participants fassent mentalement une conversion pour y répondre, Duval (2017) précise bien que l'association n'est pas en soi une activité cognitive. Pour lui, les activités cognitives de transformation doivent mener à la *production* d'une représentation avec toutes ses propriétés, tandis que l'activité d'association montre simplement la capacité à voir des liens entre des représentations déjà construites.

Le prochain chapitre proposera les résultats de ce questionnaire.

CHAPITRE V

RÉSULTATS

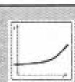
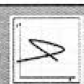
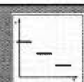
Dans le quatrième chapitre de ce mémoire, nous avons décrits une par une les questions posées aux étudiants du baccalauréat en enseignement secondaire (BES) à l'UQAM, plus spécifiquement les étudiants en enseignement des mathématiques. Il s'agit d'un total de 11 questions qui nous ont permis de recueillir des données écrites de leurs interprétations et représentations privilégiées de la notion de *fonction*.

Dans ce chapitre, nous révèlerons l'analyse des réponses obtenues lors du questionnaire administré aux 100 participants. Les paragraphes ci-dessous présentent les réponses des trois groupes d'étudiants, 46 étudiants de première année, 25 étudiants de mi-programme et 29 étudiants finissants. Comme il l'a été expliqué dans les chapitres précédents, l'accent est mis sur les représentations privilégiées – et parfois les interprétations émergentes – plutôt que sur les erreurs commises. Rappelons qu'au sens strict, une interprétation est une façon analytique d'appréhender la fonction, donc elle n'est pas directement accessible, mais certaines réponses sont formulées dans un vocabulaire qui renvoie explicitement à une des interprétations énumérées dans la section 1.2 (correspondance menant à la formation de paires ordonnées, relation de dépendance, règle, ou covariation). Cela ne permet toutefois pas de savoir si les participants exploitent vraiment ces interprétations en tant qu'« images » au sens de Vinner et Dreyfus (1989) ou s'ils s'en servent seulement en tant que « définition ». De son côté, une représentation est une façon de présenter certaines des propriétés de la fonction (dessin, tableau de valeurs, formule, graphique, langage verbal).

5.1 Résultats de la première question

Concernant les réponses obtenues à la première question pour identifier quels graphes représentent ou non une fonction, un premier constat montre que, sur l'ensemble des trois graphes, les trois cohortes ont majoritairement la réponse attendue et ils l'ont fait respectivement à 91 % pour les étudiants de 1ère année, 89 % pour les étudiants de 2e année et 99 % pour ceux de 4e année[18]. Les chiffres plus précis révèlent que les trois cohortes ont beaucoup mieux réussi l'identification de la représentation graphique de la fonction exponentielle (a), à 99 %, et que la moins bien réussie est celle de la fonction en escalier (c). Le tableau 5.1 présente les résultats détaillés à cette question.

Tableau 5.1 : Résultats des trois cohortes à la question 1

	 **Graphe (a)**		 **Graphe (b)**		 **Graphe (c)**	
	Fonction (réponse attendue)	Non-fonction	Non-fonction (réponse attendue)	Fonction	Fonction (réponse attendue)	Non-fonction
Étudiants de 1ère année	46 (100 %)	0 (0 %)	43 (93 %)	3 (7 %)	37 (80 %)	9 (20 %)
Étudiants de 2e année	24 (96 %)	1 (4 %)	21 (84 %)	4 (16 %)	22 (88 %)	3 (12 %)
Étudiants de 4e année	29 (100 %)	0 (0 %)	29 (100 %)	0 (0 %)	28 (97 %)	1 (3 %)
Total	99 (99 %)	1 (1 %)	93 (93 %)	7 (7 %)	87 (87 %)	13 (13 %)

18 Comme le montre ce haut taux de réussite, le non-étiquetage et l'absence de graduation des axes du graphique dans la version du questionnaire soumise aux participants n'a pas constitué un frein majeur à leur capacité d'accomplir des tâches avec des représentations graphiques, donc nous avons maintenu les résultats liés aux questions où la graduation était absente.

Dans l'ensemble de cette question, le groupe d'étudiants finissants a majoritairement reconnu quand un graphe peut être ou non une représentation graphique d'une fonction. Du côté des étudiants débutants, ce groupe reconnait les graphes mieux que leurs pairs de 2e année, le taux de réussite diminuant de 2 % entre les deux cohortes.

Les répondants devaient aussi justifier leur réponse lorsqu'ils disaient qu'un graphique ne représente pas une fonction. Nous nous sommes intéressés aux représentations privilégiées par les participants pour faire ces justifications (tableau 5.2). Nous voulions aussi vérifier si certains répondants combinaient deux ou plusieurs représentations de la fonction dans leur justification, ce qui correspondrait aux deux niveaux supérieurs de compréhension de la fonction, selon l'échelle de Hitt *et al.* (2001) présentée dans la section 1.6.

Tableau 5.2: Choix de représentation(s) retenue(s) pour justifier les réponses à la question 1

	Langage verbal		Double représentation	Autres représentations (graphique, algébrique, etc.)	Aucune justification
	Sans représentation	Représentation verbale			
Étudiants de 1ère année	15 (33 %)	26 (57 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	5 (11 %)
Étudiants de 2e année	4 (16 %)	17 (68 %)	1 (4 %)	0 (0 %)	3 (12 %)
Étudiants de 4e année	0 (0 %)	21 (72 %)	7 (24 %)	0 (0 %)	1 (3 %)
Total	19 (19 %)	64 (64 %)	8 (8 %)	0 (0 %)	9 (9 %)

L'analyse des données révèle que, dans chacun des groupes, la majorité des futurs enseignants de mathématiques écrivent quelque chose pour justifier leur réponse. Par exemple, le participant 44-O a écrit : « Il y a plusieurs valeurs dans l'image associées à une valeur du domaine (plusieurs valeurs de y pour un x). » Ce répondant utilise une représentation verbale, selon le modèle de Duval (1995), et ses mots semblent exprimer une interprétation de la fonction comme correspondance. À l'inverse, le participant 036 a seulement écrit : « ce n'est pas une fonction. » On ne trouve ici aucune représentation pour motiver la réponse, donc ce type de justification n'a pas été traité comme une représentation verbale.

Les participants qui ont justifié leur réponse à l'aide d'une représentation correspondent, pour le groupe de débutants, à 57 %, pour le groupe de mi-parcours, à 72 %, et pour les finissants, à 96 %. Donc, les étudiants de 2^{e} année sont moins susceptibles que ceux de 1ère année de bien identifier le graphique qui n'est pas une représentation d'une fonction, mais ils sont plus nombreux à justifier leur réponse à l'aide d'une représentation. La progression entre les cohortes n'est pas étonnante puisque les années de formation peuvent aussi favoriser le recours à une diversité de représentations. Par contre, les écarts ci-dessus peuvent être la conséquence de plusieurs facteurs qui se dessinent lors de l'analyse.

D'abord, le nombre de répondants n'ayant donné aucune justification pouvant expliquer pourquoi un ou plusieurs graphes ne sont pas considérés comme la représentation d'une fonction est comparativement semblable entre les cohortes. Dans les groupes de première et deuxième année, respectivement 11 % et 12 % des étudiants n'ont écrit aucune justification. Par contre, chez les finissants, seule une personne (3 %) s'est abstenue de justifier son choix. Si on exclut ces données, on constate que, parmi ceux qui ont justifié leurs choix d'identifier un graphique comme une représentation d'une fonction ou non, le taux d'utilisation d'une représentation pour justifier la réponse passe de 63 %, à 82 %, puis à 100 %. Cela signifie qu'il y a une augmentation progressive du taux de recours à une représentation de la fonction d'une cohorte à l'autre.

La formulation de la question ne demande pas spécifiquement aux participants d'utiliser plus d'une représentation pour justifier leur choix. Malgré tout, certains étudiants en ont utilisé plus d'une. C'est le cas, par exemple, du participant 22, qui utilise à la fois le langage verbal et une représentation algébrique : « Car pour un même x, l'on peut avoir plus que 1 y ($y = f(x)$) ». Ce type de justifications laisse voir une proximité avec l'un des trois niveaux supérieurs de compréhension de la fonction de l'échelle de Hitt *et al.* (2001), car ces niveaux reposent sur la capacité de traduire une représentation d'une fonction dans un autre système de représentations. Par contre, il serait abusif d'affirmer sur la seule réponse à la question 1 que ceux qui ne l'ont pas fait en seraient incapables.

Donc, comme le montre le tableau 5.2, parmi les participants des trois groupes, la grande majorité a répondu avec le langage verbal. Ce type de réponse a été donné respectivement par 90 %, 84 % et 72 % des étudiants de première, deuxième et quatrième années. Si ces pourcentages diminuent d'une cohorte à l'autre, c'est parce que les finissants sont plus nombreux à justifier leur choix avec deux représentations. Aussi, nous observons que les étudiants débutants qui justifient leur réponse le font tous en langage verbal.

Par la suite, le pourcentage de répondants ayant eu recours à deux représentations dans leur justification, tel que le participant 22, passe de 0 % à 4 % à 24 % de la première à la quatrième année. Cette capacité de traduire une fonction d'une représentation à l'autre, qui correspond à l'un des trois niveaux supérieurs de compréhension de la fonction selon Hitt *et al.* (2001) semble donc en croissance d'une cohorte à l'autre.

Ainsi, d'après les résultats de cette première question, il ressort qu'environ 9 futurs maîtres sur 10 peuvent reconnaître si un graphe représente une fonction.

5.2 Résultats de la deuxième question

L'objectif de la deuxième question est de savoir la façon dont les étudiants des trois cohortes définissent la notion de *fonction*. Les réponses ont été obtenues essentiellement en langage verbal, mais nous avons vérifié si le choix de vocabulaire renvoyait à une représentation ou une interprétation particulière. D'abord, nous avons constaté que, pour cette question, le taux de réponses s'appuyant sur une représentation ou une interprétation de la fonction est élevé. Il est de 91 % chez les débutants, 84 % chez les étudiants en mi-parcours et 100 % chez les finissants. Par exemple, le participant 43-O a cité une interprétation de la fonction : « Une fonction est une relation de dépendance entre deux variables. » De son côté, le participant 36-O a nommé la représentation graphique de la fonction et il emploie un vocabulaire qui pourrait évoquer une interprétation comme la correspondance ou la covariation, mais sans préciser suffisamment ses propos : « Il s'agit d'une équation permettant de mettre en corrélation (ou non) deux éléments (variables). Cette corrélation se dessine dans un graphique à l'aide d'une droite ou d'une courbe (ou les deux). Possibilité d'observer une variation entre les variables. » Il faut noter que, chez les finissants, tous les participants ont répondu à la question; ils ont tous livré une définition qui s'appuie sur au moins une interprétation de la fonction.

Par contre, plusieurs des répondants de première ou deuxième année n'ont pas répondu à la question, souvent en écrivant qu'ils n'en avaient aucune idée. Il s'agit de 9 % des étudiants de première année et de 16 % des étudiants de deuxième année. Nous remarquons ici, que les participants de mi-parcours sont plus nombreux que les débutants à ne pas fournir de définition de la fonction.

Parmi les possibles interprétations ou représentations de cette notion, la relation de dépendance est la définition la plus mentionnée dans chacun des trois groupes. Tel que l'illustre le tableau 5.3, c'est celle qu'on retrouve pour 37 % des étudiants de première année, 68 % de ceux en mi-parcours et 72 % des finissants. Son emploi s'accentue chez les finissants. Rappelons qu'il s'agit de la meilleure façon de se représenter la fonction selon Nicholas (1966).

Tableau 5.3 : Choix de représentation(s) retenue(s)
pour définir la fonction à la question 2

	Représentations					**Interprétations**			**Aucune réponse ou « ne sait pas »**
	Formule	**Graphique**	**Verbale**	**Double**	**Plusieurs**	**Correspondance (Paires ordonnées)**	**Rel. de dépendance**	**Règle**	
Étudiants de 1ère année	5 (11 %)	8 (17 %)	5 (11 %)	3 (7 %)	1 (2 %)	1 (2 %)	17 (37%)	2 (4 %)	4 (9 %)
Étudiants de 2e année	1 (4 %)	0 (0 %)	2 (8 %)	1 (4 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	17 (68 %)	0 (0 %)	4 (16 %)
Étudiants de 4e année	0 (0 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	8 (28 %)	21 (72 %)	0 (0 %)	0 (0 %)
Total	6 (6 %)	8 (8 %)	7 (7 %)	4 (4 %)	1 (1 %)	9 (9 %)	55 (55 %)	2 (2 %)	8 (8 %)

Il importe ici de noter que la totalité des étudiants de quatrième année qui n'ont pas eu recours à la relation de dépendance se sont tournés vers la correspondance, en parlant de paires ordonnées. Il s'agit de 28 % des finissants, alors que 2 % des participants de début de parcours et 0 % de ceux de deuxième année s'en sont servis. Les réponses font recours à une plus grande diversité d'interprétations et de représentations chez les étudiants des deux premières années. Certains utilisent la formule (11 % et 4 % respectivement), et les étudiants de première année s'appuient aussi sur la règle (4 %) et sur le graphique (17 %). Notons qu'aucun des finissants n'a nommé de représentations pour définir la fonction. Certes, ils ont tous utilisé le langage verbal, mais pas pour exprimer la possibilité de représenter verbalement une fonction. Ils ont plutôt écrit une définition basée sur une interprétation de la fonction, se rapprochant ainsi de la « définition » au sens de Vinner et Dreyfus (1989).

Contrairement à ce qui ressortait pour la première question, l'analyse révèle que les finissants n'ont jamais eu recours à une double articulation ou à l'articulation de plusieurs représentations pour définir la *fonction*. Encore une fois, comme cela n'était pas explicitement demandé, nous ne pouvons pas conclure qu'ils seraient incapables de le faire. On peut toutefois noter que quelques étudiants débutants et de mi-parcours en ont montré la capacité. Nous avons trouvé, lors de l'analyse de résultats, que 7 % des étudiants de première année et 4 % de ceux de deuxième année définissaient la fonction à partir de deux représentations acceptablement articulées, par exemple en expliquant qu'une fonction est une relation de dépendance qui se représente par un graphique ou une formule. Des trois cohortes, un seul répondant a articulé plus de deux représentations; il s'agit de quelqu'un de la première année. Celui-ci a écrit : « Une fonction est un ensemble de données dépendantes et indépendantes, mais pour laquelle il n'existe qu'une donnée dépendante (y) pour chaque données indépendantes (x). On peut représenter une fonction par son équation mathématique, mais aussi par un tableau de données ou un graph. » [sic.] Nous avons ici suivi Vinner et Dreyfus (1989), qui classent dans la catégorie de la fonction représentée comme formule leurs participants exprimant une définition de la fonction en parlant d'équation.

Ainsi, cette deuxième question montre que la quasi-totalité des futurs maîtres, soit 9 participants sur 10, peuvent donner une définition de la fonction et que celle-ci repose le plus souvent sur une interprétation : la relation de dépendance.

5.3 Résultats de la troisième question

Cette question demandait aux participants d'associer quatre graphes illustrant la hauteur d'un liquide en fonction de son volume[19], respectivement (a), (b), (c) et (d), au dessin d'un récipient qui se remplit de ce liquide. En fait, pour trois des graphes, il y avait deux comportements prévisibles, selon que le répondant ait davantage une conception mathématique « intuitive empiriste » ou « formaliste » au sens de Sierpinska (1987). Le tableau 5.4 rend compte des résultats obtenus.

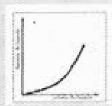
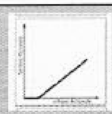
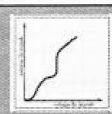
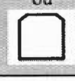
Pour un « intuitif empiriste », le remplissage d'aucun des récipients représentés ne permettrait d'obtenir la variation de hauteur en fonction du volume représentée dans le graphe (a). Les données révèlent que, sans aucune distinction, les participants des trois cohortes sont peu nombreux à n'avoir associé le graphe (a) à aucun dessin. L'absence d'association attendue à cette tâche est observée dans le plus haut pourcentage chez les finissants, dans 34 % des cas. Les deux cohortes inférieures ont répondu ainsi dans un pourcentage de 30 % (1ère année) et 28 % (2e année). Pour les répondants qui combinent certains éléments des conceptions «intuitive empiriste » et « formaliste », il était prévisible d'associer le graphe (a) au dessin 3.3. Cette réponse a été donnée par 11 % des répondants de 1ère année, 16 % des répondants de 2e année et 11 % de ceux de 4e année. Ainsi, pour le graphe (a), 42 % des futurs maîtres ont livré une réponse correspondant à l'un des deux comportements prévus. Par ailleurs, nous prévoyions qu'un certain nombre de répondants effectueraient une translation iconique et associeraient le graphe (a) au récipient 3.2. Cela s'est produit pour 7 %

---

19 Le questionnaire soumis contenait l'expression « par rapport à » qui avait été trouvée dans plusieurs millions de site web en français recensés sur Google pour exprimer un sens équivalent à la forme espagnole d'*une variable dépendante « contra » une variable indépendante* qu'on retrouve entre autres dans Hitt (2002). Nous corrigeons par « en fonction de » dans toutes les questions de notre questionnaire pour mieux respecter le formalisme que nous avons trouvé dans la plupart des recherches, mais compte tenu de la fréquence de « y par rapport à x » dans les sites web et du fait qu'aucun des cent participants n'a demandé de clarification, nous considérons que l'expression est suffisamment connue des participants pour ne pas avoir affecté leurs réponses.

des étudiants de 1$^{\text{ère}}$ année, 24 % de ceux de 2$^{\text{e}}$ année et 21 % des finissants, soit 15 % de l'ensemble des participants. Le graphe (a) a aussi été associé au récipient 3.1 par 21 % des participants, au récipient 3.4 par 15 % et au récipient 3.5 par 3 %.

Tableau 5.4 : Résultats des trois cohortes à la question 3

	 **Graphe (a)**		 **Graphe (b)**		 **Graphe (c)**		 **Graphe (d)**	
	Réponse attendue (pas d'ass.) ou 	Autre réponse	Réponse attendue (pas d'ass.) ou 	Autre réponse	Réponse attendue (pas d'association)	Autre réponse	Réponse attendue  ou pas d'association	Autre réponse
Étudiants de 1$^{\text{ère}}$ année	14 (30 %) 5 (11 %)	27 (59 %)	18 (39 %) 8 (17 %)	20 (43 %)	24 (52 %)	22 (48 %)	4 (9 %) 19 (41 %)	23 (50 %)
Étudiants de 2$^{\text{e}}$ année	7 (28 %) 4 (16 %)	14 (56 %)	13 (52 %) 5 (20 %)	7 (28 %)	12 (48 %)	13 (52 %)	5 (20 %) 11 (44 %)	9 (36 %)
Étudiants de 4$^{\text{e}}$ année	10 (34 %) 2 (7 %)	17 (59 %)	19 (66 %) 4 (14 %)	6 (20 %)	19 (66 %)	10 (34 %)	0 (0 %) 17 (59 %)	12 (41 %)
Total	31 (31 %) 11 (11 %)	58 (58 %)	50 (50 %) 17 (17 %)	33 (33 %)	55 (55 %)	45 (45 %)	9 (9 %) 47 (47 %)	44 (44 %)

Pour le graphe (b), les réponses pour ceux qui n'ont fait aucune association révèlent un taux de 39 %, 52 % et 66 % de la 1$^{\text{ère}}$ à la 4$^{\text{e}}$ année respectivement. Rappelons que ce comportement est le plus prévisible pour ceux ayant une conception « formaliste » des mathématiques. En ajoutant le choix de réponse 3.5, que pourraient privilégier certains « intuitifs empiristes », le taux de réponse correspondant aux comportements que nous attendions passe à 56 %, 72 % et 80 % d'une cohorte à l'autre. Deux autres récipients ont été sélectionnés chacun par un peu plus d'un participant sur dix : le récipient 3.4 (14 % des répondants) et le récipient 3.1 (13 %).

Dans le cas du graphe (c), les constats de cette analyse montrent que les finissants ne l'ont pas associé à un dessin dans 66 % des cas, mais le taux est plus bas chez la cohorte de mi-parcours (48 %) que chez les débutants (52 %). Ici, peu importe la conception mathématique dominante, cette absence d'association était la réponse attendue et elle a été livrée par 55 % de nos participants au total. Presque tous les répondants qui ont associé ce graphe à un dessin l'ont fait avec le récipient 3.3, ce qui correspond à une translation iconique. Cette réponse a été donnée par 46 % des étudiants de 1ère année, 40 % de ceux de 2e année et 34 % de ceux de 4e année, pour un total de 41 % des participants. La tendance à faire de la translation iconique diminue donc d'une cohorte à l'autre, contrairement à ce qui a été observé pour le graphe (a).

Dans la conception «intuitive empiriste », le graphe (d) proposait une représentation graphique correspondant à la variation de la hauteur du liquide en fonction de son volume pour le dessin 3.1. Toutefois, très peu de participants des trois cohortes ont donné cette réponse. Les pourcentages obtenus correspondent à 9 %, 20 % et 0 %. La réponse la plus fréquente a été de ne l'associer à rien, ce que feraient entre autres les « formalistes ». C'est ce qu'ont fait 41 % des participants débutants, 44 % des étudiants de mi-parcours et 59 % des finissants. Pour le graphe (d), ce sont donc 50 % des étudiants de 1ère année, 64 % de ceux de 2e année et 59 % de ceux de 4e année qui ont donné une des deux réponses attendues. Les autres réponses obtenues ont été, dans l'ordre de fréquence pour l'ensemble des participants : le récipient 3.2 (18 %), le récipient 3.4 (13 %), le récipient 3.5 (10 %) et le récipient 3.3 (1 %).

Les résultats à la question 3 montrent qu'au moment d'associer les représentations graphiques et géométriques d'une fonction, le taux de réponse correspondant aux comportements attendus est variable selon les propriétés illustrées dans ces représentations. Ainsi, les réponses pour trois des quatre graphes (b, c et d) correspondent pour environ 6 futurs maîtres sur 10 à notre analyse a priori, mais pour le graphe (a), elles ne correspondent que pour 4 répondants sur 10. Les réponses à la question 3 doivent toutefois être traitées avec prudence, car l'absence de graduation dans les axes des graphes, combinée à l'absence de mention de la vitesse du remplissage, peut affecter la perception des répondants quant à la valeur initiale ou ordonnée à l'origine de la fonction. De même, il faut garder en tête que l'absence d'association que nous avons codé comme le comportement attendu ne signifie pas forcément que les participants auraient fait l'association souhaitée si les représentations graphique et géométrique correspondant à une même fonction avaient été proposées.

5.4 Résultats de la quatrième question

Cette question comporte un énoncé qui met en relation des variables issues d'une situation problématique. Le rôle de la variable dépendante et de la variable indépendante est nommé sous plusieurs angles. Dans cette question, les représentations verbales (a), (b), (c) et (d) sont toutes des représentations de fonctions qui découlent de la situation. Donc, il fallait toutes les sélectionner. Les réponses des participants sont présentées dans le tableau 5.5.

Un premier constat révèle que les trois groupes de participants ont majoritairement identifié les fonctions présentées sous forme de représentation verbale. Le taux de sélection observé en ce qui concerne le choix de réponse (a) est de 86 % pour les finissants, 88 % pour les étudiants de mi-parcours et 87 % pour les débutants.

En lien avec l'affirmation (b), qui porte sur l'aire du cercle en fonction du rayon, les étudiants de mi-parcours performent mieux que les autres groupes. Le taux de sélection se place à 80 %. Par contre, les débutants ont obtenu 57 % contre 52 % pour le groupe de finissants.

Tableau 5.5 : Résultats des trois cohortes à la question 4

	Affirmation (a)		Affirmation (b)		Affirmation (c)		Affirmation (d)	
	Choisie	Non choisie	Choisie	Non choisie	Choisie	Non choisie	Choisie	Non choisie
Étudiants de 1ère année	40 (87 %)	6 (13 %)	26 (57 %)	20 (43 %)	37 (80 %)	9 (20 %)	23 (50 %)	23 (50 %)
Étudiants de 2e année	22 (88 %)	3 (12 %)	20 (80 %)	5 (20 %)	17 (68 %)	8 (32 %)	10 (40 %)	15 (60 %)
Étudiants de 4e année	25 (86 %)	4 (14 %)	15 (52 %)	14 (48 %)	26 (90 %)	3 (10 %)	11 (38 %)	18 (62 %)
Total	87 (87 %)	13 (13 %)	61 (61 %)	39 (39 %)	80 (80 %)	20 (20 %)	44 (44 %)	56 (56 %)

Ensuite, nous avons analysé les réponses données pour l'affirmation (c). Cette question porte sur l'aire d'un cercle en fonction du temps. Cette fois-ci, ce sont les finissants qui identifient en plus grand nombre la présence d'une fonction. Cette affirmation bien qu'elle soit semblable à la précédente met en valeur la variable indépendante temps, ce qui diminue la complexité selon Sierpinska (1992) pour les raisons que nous avons vues dans la section 1.5.2. Les proportions de sélection de cette affirmation sont 90 % pour les finissants, 68 % pour les étudiants de mi-parcours et 80 % pour les débutants.

La dernière affirmation de cette question est plus difficile pour toutes les cohortes. Ici, dans la représentation verbale, la variable dépendante, le volume d'eau, est plus difficile à traiter, car le volume est lui-même un objet mathématique qui dépend d'autres variables implicites comme la hauteur. Ce type de variable implicite peut complexifier le choix de réponse des étudiants. Les pourcentages montrent une sélection de plus en plus faible d'une cohorte à l'autre : 50 %, 40 % et 38 % respectivement, de la première à la quatrième année.

Si l'on compile les réponses aux quatre affirmations, il ressort qu'environ les 2/3 des futurs maîtres reconnaissent quand le langage verbal est la représentation d'une fonction. Ainsi, toutes réponses confondues, les étudiants de 1ère année ont un taux de réussite de 68 %, ceux de 2^{e} année de 69 % et ceux de 4^{e} année de 66 %. Par ailleurs, conformément à nos attentes, les énoncés dans lesquels la variable *temps* est nommée explicitement sont mieux identifiés comme représentations verbales de la fonction que ceux où elle est implicite.

5.5 Résultats de la cinquième question

Cette question propose une fonction représentée sous forme de formule qui définit l'aire d'un cercle. Parmi les expressions algébriques données, seulement une sert à trouver l'aire d'un cercle en fonction de la circonférence. Les participants doivent écrire la justification de leur choix de formule.

Généralement, parmi les participants des trois cohortes, la majorité a choisi la réponse souhaitée parmi les quatre réponses possibles. Le tableau 5.6 révèle les résultats. Lorsqu'on observe seulement les étudiants qui ont fait un choix de réponse, les pourcentages de performance sont de 88 % dans le groupe de finissants, de 77 % dans le groupe de mi-parcours et de 55 % pour les débutants. Contrairement à nos attentes, la réponse (d) qui consiste à fusionner la formule de la circonférence dans celle de l'aire, n'a été sélectionnée que dans 14 % des cas, et principalement par des étudiants de 1ère année.

Tableau 5.6 : Résultats des trois cohortes à la question 5

	Réponse attendue (choix a)	Pas de réponse	Autre choix (b)	Autre choix (c)	Autre choix (d)	Autre choix (plusieurs)
Étudiants de 1ère année	18 (39 %)	13 (28 %)	1 (2 %)	2 (4 %)	10 (22 %)	2 (4 %)
Étudiants de 2e année	16 (64 %)	2 (8 %)	2 (8 %)	1 (4 %)	3 (12 %)	1 (4 %)
Étudiants de 4e année	23 (79 %)	3 (10 %)	1 (3 %)	0 (0 %)	1 (3 %)	1 (3 %)
Total	57 (57 %)	18 (18 %)	4 (4 %)	3 (3 %)	14 (14 %)	4 (4 %)

La majorité des répondants (68 %) ont donné une justification à leur choix en s'appuyant sur au moins une représentation de la fonction. En effet, les participants, selon leur niveau de compréhension au sujet de la notion de *fonction,* pouvaient livrer une représentation généralement algébrique ou verbale. Sur l'ensemble des trois cohortes, nous avons observé une progression du nombre de participants ayant écrit une justification. Chez les futurs maîtres les plus avancés, 89 % précisément ont indiqué une réponse avec une représentation. De même, chez les étudiants de mi-parcours 64 %, et chez les moins expérimentés, 58 % ont répondu. Sous un autre angle, l'analyse des réponses révèle qu'il y a une diminution progressive du nombre de questionnaires sans justification entre les trois cohortes. En effet, les finissants et les étudiants de mi-parcours laissant moins de réponses vides. Il y en a presque 1/2 qui ne répond pas chez les étudiants de 1ère année, contre 1/10 chez les finissants.

En vue du choix de représentation pour la justification, une forte majorité s'est appuyée sur une représentation algébrique, en résolvant un système d'équations comprenant la formule de l'aire et celle de la circonférence. La figure 5.1 est un exemple de ces justifications livrées. Chez les étudiants de mi-parcours, parmi ceux qui ont laissé une justification, 100 % se trouvent dans le sens d'une représentation algébrique suivis de la cohorte de finissants avec 88 % dans ce même sens et, finalement, les débutants avec 69 %.

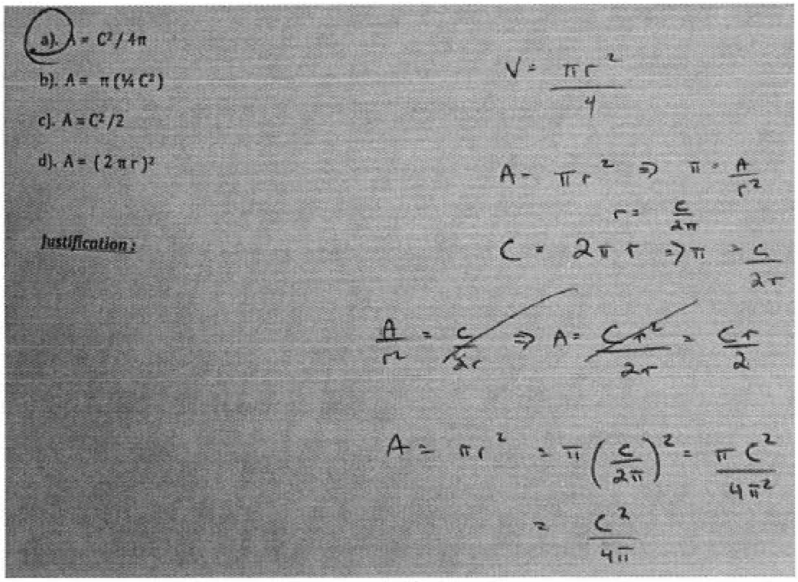


Figure 5.1 : Exemple de justification à l'aide d'une représentation algébrique (participant 5-O)

Le tableau 5.7 catégorise les justifications choisies par les participants. Outre la représentation algébrique, c'est le langage verbal qui revient le plus souvent.

Tableau 5.7 : Choix de représentation(s) retenue(s)
pour justifier la réponse à la question 5

	Représentation algébrique	**Représentation verbale**	**Double représentation**	**Aucune réponse ou « ne sait pas »**
Étudiants de 1ère année	18 (39 %)	8 (17 %)	0 (0 %)	20 (43 %)
Étudiants de 2^{e} année	16 (64%)	0 (0 %)	0 (0 %)	9 (36 %)
Étudiants de 4^{e} année	23 (79 %)	1 (3 %)	2 (7 %)	3 (10 %)
Total	57 (57 %)	9 (9 %)	2 (2 %)	32 (32 %)

Ainsi, pour ce qui est de reconnaître une fonction sous forme de formule, le taux de réussite augmente d'une cohorte à l'autre, passant d'un peu plus de 1 futur maître sur 2 en première année à près de 9 futurs maîtres sur 10 chez les finissants.

5.6 Résultats de la sixième question

Nous avons proposé aux participants d'associer trois fonctions représentées par une expression algébrique *f(x)* avec leurs graphes respectifs. Les données pour les représentations graphiques associées à la formule (a) représentant une fonction linéaire sont présentées dans le tableau 5.8. Les pourcentages d'association avec le graphe 6.4 ou le graphe 6.1 sont de 96 % chez les étudiants de 1ère année, de 92 % chez ceux de 2^{e} année et de 94 % chez les finissants. Ainsi, les futurs maîtres associent facilement une fonction linéaire représentée graphiquement avec sa représentation algébrique.

Tableau 5.8 : Résultats des trois cohortes pour l'expression (a) de la question 6

	Réponses attendues			Pas de réponse	Autres réponses		
	Graphe 6.4	Graphe 6.1	Graphes 6.1 et 6.4		Graphe 6.2	Graphe 6.3	Graphe 6.5
Étudiants de 1ère année	32 (70 %)	12 (26 %)	0 (0 %)	1 (2 %)	0 (0 %)	1 (2 %)	0 (0 %)
Étudiants de 2e année	17 (68 %)	5 (20 %)	1 (4 %)	1 (4 %)	0 (0 %)	1 (4 %)	0 (0 %)
Étudiants de 4e année	22 (76 %)	3 (10 %)	2 (7 %)	1 (3 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	1 (3 %)
Total	71 (71 %)	20 (20 %)	3 (3 %)	3 (3 %)	0 (0 %)	2 (2 %)	1 (1 %)

Le tableau 5.9 montre les associations faites pour l'expression (b). Ici, comme nous le prévoyions, une majorité des répondants l'ont associée au graphe 6.2, qui a la bonne allure, mais qui ne passe pas par le point d'origine (0,0). Bien que la réponse ne respecte pas toutes les propriétés de la fonction, nous considérons que les participants qui ont sélectionné cette réponse – soit 67 % des répondants de 1ère année, 56 % de ceux de 2e année et 69 % de ceux de 4e année – démontrent une capacité partielle à associer la représentation algébrique d'une fonction de second degré avec sa représentation graphique. Par ailleurs, le pourcentage des répondants qui ont donné la réponse attendue, soit ceux qui n'ont associé l'expression (b) à aucun des graphes proposés, croît d'une cohorte à l'autre, passant de 11 %, à 16 %, puis à 17 %.

Tableau 5.9 : Résultats des trois cohortes pour l'expression (b) de la question 6

	Réponse attendue (aucun graphe)	**Réponse partielle (graphe 6.2)**	**Autres réponses**			
			Graphe 6.1	**Graphe 6.3**	**Graphe 6.4**	**Graphe 6.5**
Étudiants de 1ère année	5 (11 %)	31 (67 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	4 (9 %)	6 (13 %)
Étudiants de 2e année	4 (16 %)	14 (56 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	1 (4 %)	6 (24 %)
Étudiants de 4e année	5 (17 %)	20 (69 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	1 (3 %)	3 (10 %)
Total	14 (14 %)	65 (65 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	6 (6 %)	15 (15 %)

Par ailleurs, les réponses données pour la fonction (c) placent les cohortes de finissants et de débutants comme les groupes qui ont le mieux associé cette expression et le graphe 6.3. Donc, tel que le montre le tableau 5.10, les taux de réussite sont de 97 % du côté des finissants, où seulement un participant n'a pas donné la réponse attendue, de 91 % du côté des débutants et de 88 % pour les étudiants de mi-parcours.

Tableau 5.10 : Résultats des trois cohortes pour l'expression (c) de la question 6

	Réponse attendue (graphe 6.3)	**Pas de réponse**	**Autres réponses**				
			Graphe 6.1	**Graphe 6.2**	**Graphe 6.4**	**Graphe 6.5**	**Plusieurs graphes)**
Étudiants de 1ère année	42 (91 %)	1 (1 %)	1 (1 %)	1 (1 %)	0 (0 %)	1 (1 %)	0 (0 %)
Étudiants de 2e année	22 (88 %)	2 (2 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	1 (1 %)
Étudiants de 4e année	28 (97 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	1 (1 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	0 (0 %)
Total	92 (92 %)	3 (3 %)	1 (1 %)	2 (2 %)	0 (0 %)	1 (1 %)	1 (1 %)

Si on additionne les résultats pour les trois expressions algébriques, il ressort que les futurs maîtres associent la représentation algébrique d'une fonction à sa représentation graphique dans plus de 6 cas sur 10. Ainsi, 66 % des réponses données par les étudiants de 1ère année, 65 % de celles des étudiants de mi-parcours et 69 % de celles des finissants correspondaient à une association correcte d'une formule à un graphe. Considérant que, pour les deux fonctions linéaires, les taux de réussite dépassent 90 %, il semble que les futurs maîtres ayant participé à notre étude éprouvent surtout certaines difficultés à associer ou non entre elles des représentations d'une fonction de second degré.

5.7 Résultats de la septième question

La question 7 fait appel à la capacité des participants de transformer un schéma sous forme de graphe, donc de faire la conversion d'une représentation géométrique à une représentation graphique. Le tableau 5.11 présente les résultats.

Tableau 5.11 : Qualification des représentations graphiques produites par les trois cohortes à la question 7

	Graphique attendu	Graphique partiel		Autre graphique		Aucun graphique
		Semblable aux attentes	Effet miroir	Translation iconique	Aucune propriété attendue	
Étudiants de 1ère année	4 (9 %)	17 (37 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	17 (37 %)	8 (17 %)
Étudiants de 2e année	2 (8 %)	11 (44 %)	0 (0 %)	5 (20 %)	4 (16 %)	3 (12 %)
Étudiants de 4e année	8 (28 %)	11 (38 %)	1 (3 %)	1 (3 %)	7 (24 %)	1 (3 %)
Total	14 (14 %)	39 (39 %)	1 (1 %)	6 (6 %)	28 (28 %)	12 (12 %)

Les participants qui répondent tout à fait à cette tâche sont peu nombreux. Il s'agit de 14 % des futurs maîtres participant à notre étude. Nous avons considéré que la représentation graphique correspondait plus fidèlement à la représentation géométrique lorsqu'elle présentait le même nombre de maximums locaux que le modèle de la figure 4.8, mais les valeurs de ceux-ci peuvent varier, car aucune valeur numérique de vitesse n'était indiquée dans la situation. Nous regroupons sous l'appellation de graphiques partiels ceux qui ont fait une translation iconique avec effet miroir, comme dans la figure 4.10, et ceux qui respectent globalement le tracé prévu à la figure 4.8, mais avec de petites imprécisions, comme l'exemple du participant 7-O, qui propose une courbe dans laquelle les minimums sont tous présents, mais pas un des maximums (figure 5.2). Enfin, les autres graphiques sont ceux qui présentent une simple translation iconique, comme dans la figure 4.9, et ceux qui n'ont aucune similitude avec le tracé recherché. Dans ce sens, 46 % des débutants, 52 % des étudiants de mi-parcours et 69 % des finissants ont donné un graphique au moins partiellement bien construit, confirmant malgré tout que les finissants performent davantage.

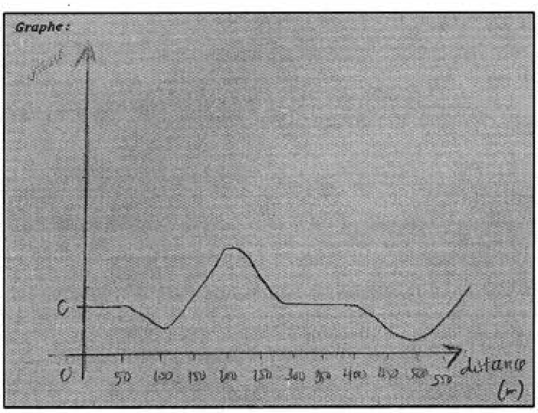


Figure 5.2 : Exemple de réponse codée comme graphique partiel (participant 7-O)

Plusieurs participants, parmi les trois cohortes, n'ont pas donné de réponse à cette tâche : 17 %, 12 % et 3 % de la cohorte des débutants à la cohorte des finissants respectivement. D'autres ont plutôt donné une translation iconique, mais il ne s'agit que de 6 % de l'ensemble des répondants. Ce faible pourcentage ne correspond pas aux observations décrites dans la recherche de Monk (1992).

Globalement, cette tâche de conversion d'une représentation géométrique à graphique est réalisée tout à fait conformément aux attentes par à peine 1 participant sur 10. Chez les finissants, presque 3 répondants sur 10 y sont parvenus. Il est quand même positif de constater que 69 % des finissants, soit près de 7 sur 10, ont tracé un graphe au moins partiellement correct. Ce taux est de 52 % chez les étudiants de mi-parcours et de 46 % chez les débutants. Ainsi, la capacité de faire ce type de transformation augmente d'une cohorte à l'autre.

5.8 Résultats de la huitième question

Cette question propose une représentation numérique sous forme de tableau de valeurs. Les participants doivent indiquer s'il y a ou non une fonction et la modéliser à l'aide d'une représentation si c'est possible.

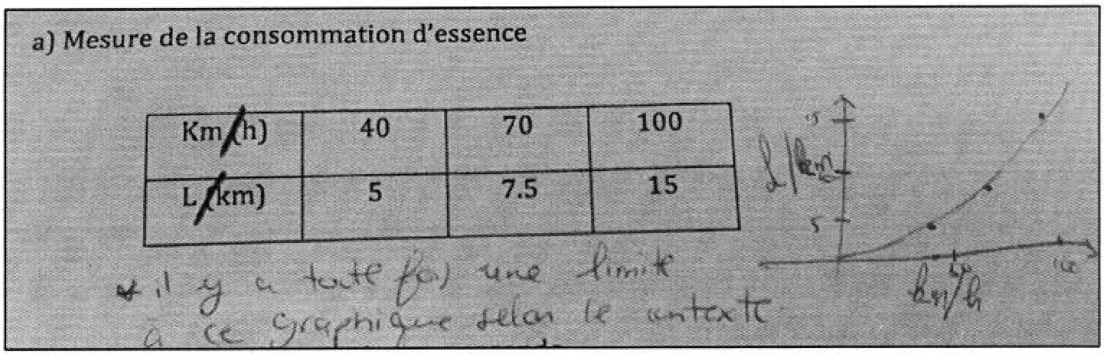
Les données ne permettent pas de trouver une fonction linéaire. Pour cette raison sans doute, 13 % des étudiants de 1$^{\text{ère}}$ année, 32 % de ceux de 2$^{\text{e}}$ année et 45 % de ceux de 4$^{\text{e}}$ année répondent que ce n'est pas une représentation d'une fonction (tableau 5.12). Cela rejoint les propos de Cooney (1999) qui observe chez les futurs enseignants participant à son étude une tendance à définir la fonction uniquement sous forme de formule linéaire et une absence de reconnaissance des fonctions exponentielles ou logarithmiques. Dans notre étude, le pourcentage d'étudiants qui s'accroche à cette vision de la fonction linéaire augmente d'une cohorte à l'autre.

Tableau 5.12 : Résultats des trois cohortes
pour le tableau de valeurs de la question 8

	Tableau considéré comme représentation d'une fonction	Tableau pas considéré comme représentation d'une fonction	Aucune réponse
Étudiants de 1$^{\text{ère}}$ année	19 (41 %)	6 (13 %)	21 (46 %)
Étudiants de 2$^{\text{e}}$ année	13 (52 %)	8 (32 %)	4 (16 %)
Étudiants de 4$^{\text{e}}$ année	11 (38 %)	13 (45 %)	5 (17 %)
Total	43 (43 %)	27 (27 %)	30 (30 %)

De leur côté, 41 % des étudiants de 1$^{\text{ère}}$ année, 52 % de ceux de 2$^{\text{e}}$ année et 38 % de ceux de 4$^{\text{e}}$ année ont identifié le tableau de valeurs comme une représentation d'une fonction. Par contre, ils ne l'ont généralement pas convertie à l'aide d'une représentation graphique comme nous le prévoyions. Certains, comme le participant 33-O ont inscrit une représentation algébrique qui ne permet pas d'obtenir les valeurs inscrites dans le tableau de valeurs : « $f(x) = (30x + 4)/8$ ». D'autres encore, comme le participant 4, ont tracé un graphe en inversant la courbe (figure 5.3). Ce dernier a toutefois montré une certaine compréhension de la fonction en parlant des « limites » de celle-ci, sans doute un renvoi aux concepts de domaine et de codomaine.

Le fait qu'autant des répondants qui ont identifié correctement le tableau de valeurs comme une fonction n'ont pu livrer une représentation dont toutes les propriétés correspondent à cette fonction nous porte à penser que les futurs maîtres interrogés dans notre étude ont des difficultés avec ce type de fonction non linéaire représentée dans un tableau de valeurs.



Km/h)	40	70	100
L/km)	5	7.5	15

Figure 5.3 : Réponse du participant 4

Dans cet esprit, notons que 30 % des participants n'ont pas répondu à la question 8, et 11 % des participants qui l'ont fait, soit par la positive ou par la négative pour dire si le tableau de valeurs représentait une fonction, n'ont ajouté aucune justification à leur réponse. Cette absence de justification apparaît chez 52 % des étudiants de première année, 28 % des étudiants de mi-parcours et 34 % des étudiants de dernière année. Par ailleurs, pour ceux qui ont justifié leur réponse, un certain nombre l'a fait avec le langage verbal sans recourir spécifiquement à une représentation de la fonction. Un exemple de ce type de réponses vient du participant 043, qui a écrit : « Aucun lien multiplicateur »[20]. Les étudiants de mi-parcours sont proportionnellement les plus nombreux, avec 28 %, les finissants avec 24 % et les débutants avec 20 %.

Les conversions ou justifications données par les participants des trois cohortes mettent en jeu des représentations algébriques, verbales et graphiques. Les données montrent que les étudiants de quatrième année utilisent davantage le graphique avec 14 %. Par contre, les étudiants de première année et les étudiants de deuxième année ont plus recours à un calcul algébrique, comme l'exemple du participant 33-O donné ci-dessus, et ils le font respectivement à 15 % et 20 %. Le tableau 5.13 présente l'ensemble des représentations retenues par les répondants pour justifier leur choix.

---

[20] Il est possible que ce participant tente d'évoquer une interprétation sous forme de règle, mais nous n'avons codé des interprétations que dans les réponses où le vocabulaire était davantage explicite.

Tableau 5.13 : Choix de représentation(s) retenue(s)
pour justifier la réponse à la question 8

	Représentation algébrique		Langage verbal			Représentation graphique	Double représentation	Aucune réponse
	Calcul	Formule	Correspondance / Paires ordonnées	Rel. de dépendance	Autre			
Étudiants de 1$^{\text{ère}}$ année	7 (15 %)	1 (2 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	9 (20 %)	4 (9 %)	1 (2 %)	24 (52 %)
Étudiants de 2$^{\text{e}}$ année	5 (20 %)	1 (4 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	7 (28 %)	4 (16 %)	1 (4 %)	7 (28 %)
Étudiants de 4$^{\text{e}}$ année	3 (10 %)	0 (0 %)	1 (3 %)	2 (7 %)	7 (24 %)	4 (14 %)	2 (7 %)	10 (34 %)
Total	15 (15 %)	2 (2 %)	1 (1 %)	2 (2 %)	23 (23 %)	12 (12 %)	4 (4 %)	41 (41 %)

5.9 Résultats de la neuvième question

La question suivante dévoile certaines difficultés liées à la construction d'une courbe qui représente le remplissage d'eau d'un récipient. Ici, les variables en relation sont la hauteur en fonction de la quantité de liquide[21]. Dans la situation proposée, pour un « intuitif empiriste » au sens de Sierpinska (1987), le tracé de la courbe ne devrait pas être ascendant à partir du point (0, 0), car une certaine quantité d'eau doit s'étendre au fond du contenant avant que le liquide ne commence à monter. Donc, la valeur de la quantité d'eau augmente (sur l'axe des abscisses) avant que celle de la hauteur (sur l'ordonnée) ne commence à augmenter. À l'inverse, un « formaliste » au sens de

[21] Tout comme pour la question 3, la formulation d'origine parlait de la hauteur par rapport à la quantité. Tous les participants ont considéré la hauteur comme variable dépendante et la quantité comme variable indépendante, ce qui renforce l'idée que, malgré la moins grande précision mathématique de la formulation, elle n'a pas réellement gêné les participants.

Sierpinska (1987), tracera une courbe ascendante à partir du point (0,0), parce que le débit du remplissage n'est pas décrit dans la question, donc il est possible que le fond du récipient soit comblé en moins d'une unité sur l'axe des x.

D'entrée de jeu, trois étudiants, tous de deuxième année, ont proposé la réponse « intuitive empiriste » (figure 5.4), soit un graphe t ne commençant pas au point d'origine et présentant les pentes attendues.

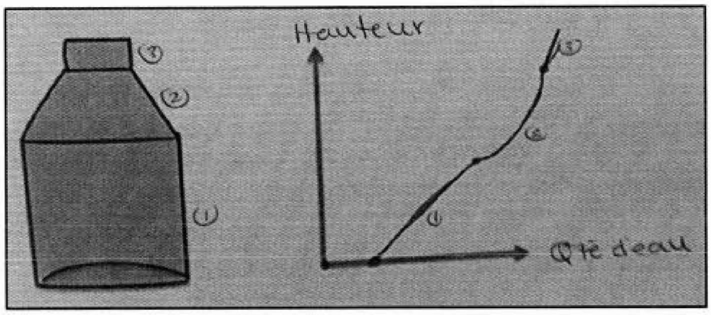


Figure 5.4 : Réponse correspondant à la conception « intuitive empiriste » (participant 045)

Pour ce qui est de la conception « formaliste », les résultats révèlent que 11 %, 52 % et 41 % des étudiants de la cohorte des débutants à celle des finissants respectivement, ont fait un tel tracé. La figure 5.5 en est un exemple de ce type de production.

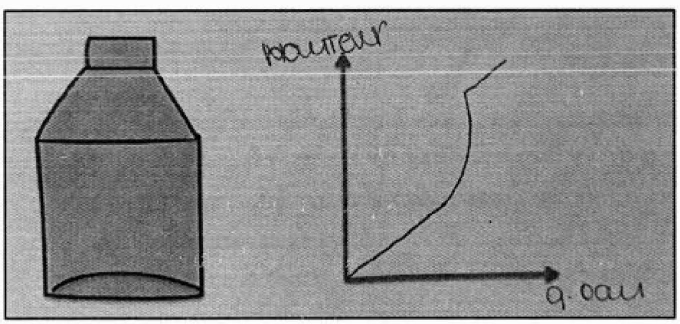


Figure 5.5 : Réponse correspondant à la conception « formaliste » (participant 030)

Toutes cohortes confondues, ce ne sont que le tiers des répondants qui ont tracé la courbe attendue. Mais un second tiers des répondants a proposé une représentation graphique qui correspond au tracé attendu pour le remplissage de la première et de la troisième section du contenant. Par contre, pour le remplissage de la section où le contenant se rétrécit, ceux-ci dessinent la courbe dans le sens contraire; le taux de pourcentage de représentations comme celle de la figure 5.6 est de 35 % chez les participants de première année, 32 % en deuxième année et 38 % en quatrième année.

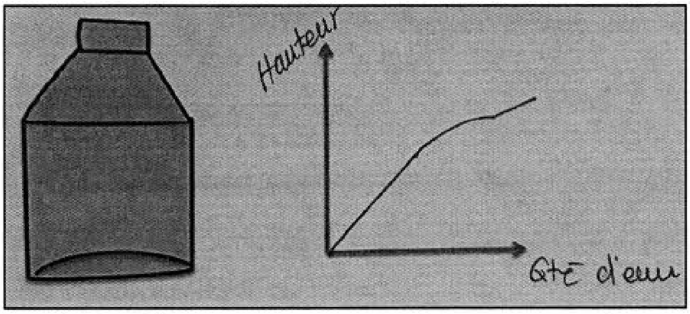


Figure 5.6 : Réponse correspondant à une courbe inversée
(participant 1)

Cette question met en rapport les mêmes types de représentations que la question 3 : représentation géométrique sous forme de dessin d'un récipient et représentation graphique.

5.10 Résultats de la dixième question

Dans cette question, il est demandé aux participants de transférer les fonctions représentées graphiquement (a), (b), (c) et (d) en langage verbal. Ces graphes se trouvent dans la figure 5.7. Plus précisément, il s'agit d'écrire le déplacement effectué par une motoneige. La représentation graphique présente la variation de la hauteur en fonction du temps, mais elle ne dit rien sur la forme de la pente de la montagne ni sur la vitesse à laquelle se déplace la motoneige.

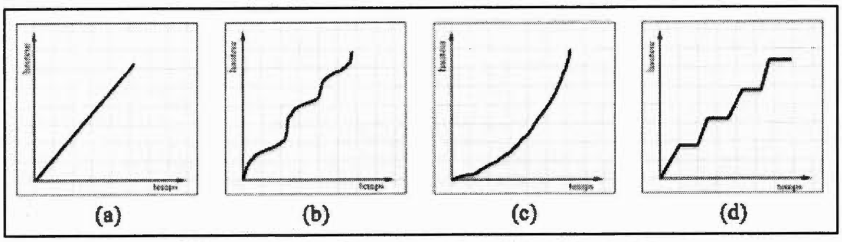


Figure 5.7 : Graphes (a), (b), (c) et (d)

Les résultats à cette question sont présentés dans le tableau 5.14. D'abord, un premier constat révèle que le graphe (a) est bien interprété par les trois cohortes. Ceux qui l'ont expliqué correctement sont 83 %, 92 % et 86 % pour les étudiants de 1^ère^ année, 2^e^ année et 4^e^ année respectivement. Ici, on observe que le mouvement est constant et la fonction est linéaire. Du côté des réponses verbalisant plutôt une translation iconique, citons l'exemple du participant 2-O, qui a écrit : « Il est aller directement à sa destination sans détour. » [sic.] Ce type de réponse qui ne présente pas la relation fonctionnelle entre les variables a pu être influencé par une double sémiotisation dans l'énoncé de la question, puisqu'elle présentait d'un côté une représentation verbale mentionnant le tracé de la motoneige et, de l'autre côté, une représentation graphique spécifiant que les variables étaient la hauteur et le temps[22]. Il existe donc un obstacle didactique en plus de l'obstacle épistémologique associé à la variable temps. Ceux qui ont parlé de la forme de la trajectoire de la motoneige, comme le participant 2-O, ont donc possiblement priorisé la représentation verbale de la question axée sur le « trajet tracé » plutôt que le choix de variables mentionné dans la représentation graphique, hauteur et temps.

[22] Dans la version du questionnaire soumise aux participants, la question était introduite par la phrase suivante : « Les graphes ci-dessous représentent le trajet tracé par une motoneige. » Comme nous l'avons expliqué au début du chapitre 4, le questionnaire avait été créé en ayant davantage en tête les interprétations recensées par Vinner et Dreyfus (1989), mais la suite de nos lectures nous a amené à préciser les représentations et à voir comment le verbe « représentent » créait ici une double sémiotisation liée à la contradiction entre les représentations verbales et graphiques. Par contre, il demeure intéressant d'analyser les résultats justement pour voir quelle représentation a été priorisée par les participants pour comprendre la tâche à effectuer.

Tableau 5.14 : Résultats des trois cohortes
à la question 10

		Représentation verbalisant les propriétés attendues	Représentation ne verbalisant pas la relation entre les variables	Aucune réponse
Étudiants de 1ère année	Graphe *A*	38 (83 %)	5 (11 %)	3 (7 %)
	Graphe *B*	35 (76 %)	6 (13 %)	5 (11 %)
	Graphe *C*	37 (80 %)	4 (9 %)	5 (11 %)
	Graphe *D*	31 (67 %)	8 (17 %)	7 (15 %)
Étudiants de 2e année	Graphe *A*	23 (92 %)	0 (0 %)	2 (8 %)
	Graphe *B*	16 (64 %)	2 (8 %)	7 (28 %)
	Graphe *C*	19 (76 %)	2 (8 %)	4 (16 %)
	Graphe *D*	17 (68 %)	2 (8 %)	6 (24 %)
Étudiants de 4e année	Graphe *A*	25 (86 %)	0 (0 %)	4 (14 %)
	Graphe *B*	21 (72 %)	2 (7 %)	6 (21 %)
	Graphe *C*	22 76 %)	2 (7 %)	5 (17 %)
	Graphe *D*	21 (72 %)	0 (0 %)	8 (28 %)
Total		305 (76 %)	33 (8 %)	62 (16 %)

Le graphe (b) aussi est bien expliqué par la majorité des répondants des trois cohortes, soit 76 %, 64 % et 72 % respectivement, mais moins que le graphe (a). L'écart s'explique entre autres par le nombre relativement élevé de participants qui n'ont pas répondu, soit 11 %, 28 % et 21 %. Comme nous l'avons dit dans le chapitre IV, il était nécessaire d'avoir recours à une variable implicite, soit la vitesse ou la forme de la montagne, pour répondre à cette question. Dans certains cas, les participants ont identifié ces variables sans expliquer précisément leur façon d'influencer la hauteur en fonction du temps, par exemple le participant 23-O, dont la réponse est : « Variation de vitesse ». À l'inverse, un exemple de réponse où la relation entre les variables n'est pas verbalisée clairement provient du participant 22-O qui écrit : « des montées plus difficiles ». Notons aussi, la présence de réponses proposant une translation iconique, comme celles du participant 24-O, « Il monte une pente bossus » [sic.], ou du participant 25-O, « Elle monte une pente avec des bosses ». Ces derniers participants ont bien perçu que la forme de la montagne est une variable implicite, mais l'idée de bosses suggérerait que la motoneige connaît des baisses de hauteur, ce que ne montre pas le graphe (b).

Le troisième graphe de ce groupe d'exercices, le graphe (c), est correctement expliqué par 80 % des étudiants de 1ère année et 76 % de ceux de 2e et 4e années. Les étudiants qui ont bien répondu ont parlé d'augmentation de la vitesse ou de la pente de la montagne. Par contre, quelques participants ont répondu par un effet miroir, comme si la courbe, inversée, montrait que la hauteur augmentait de plus en plus lentement en fonction du temps. Un tel exemple provient du participant 16, qui a écrit : « Elle est montée doucement et graduellement ralenti (sa montée). » [sic.]

Pour le graphe (d), respectivement 67 %, 68 % et 72 % des participants des trois cohortes ont expliqué ce qui s'y passe conformément à la réponse attendue. Du côté des finissants, tous ceux qui ont donné une réponse ont expliqué une relation fonctionnelle qui démontre la dynamique entre les variables, par exemple, le participant 5 écrit que la motoneige « monte un instant, prend une pause et recommence ce processus 4 fois » et le participant 19, que le véhicule « monte de manière constante et à certains moment, il s'arrête » [sic.] Plusieurs participants de 1ère et 2e années ont plutôt décrit ce graphe en s'appuyant sur une translation iconique, par exemple, le participant 2-O, qui dit : « il a zigzagué jusqu'à sa destination. » Ici aussi, l'exemple retenu pourrait s'expliquer par la priorisation de la représentation en mots, faisant référence au tracé de la motoneige, sur la représentation graphique.

Au total, pour l'ensemble des graphes, nos futurs maîtres ont bien effectué la tâche de transférer des représentations graphiques en langage verbal dans plus de 7 cas sur 10.

5.11 Résultats de la onzième question

La question suivante verbalise plusieurs interprétations (a : relation de dépendance, b : règle, f : paires ordonnées) et représentations (d : formule, e : représentation graphique ou symbolique) de la fonction, ainsi qu'une manipulation (c : opération[23]). Les participants doivent choisir celles qui sont une façon de concevoir la fonction. En réalité, toutes permettent d'enrichir la façon de voir de la fonction. Le tableau 5.15 présente les choix retenus par les participants.

Tableau 5.15 : Résultats des trois cohortes à la question 11

	Sélectionné (1ère année)	**Sélectionné (2e année)**	**Sélectionné (4e année)**
(a) relation de dépendance	35 (76 %)	21 (84 %)	27 (93 %)
(b) règle	15 (33 %)	13 (52 %)	14 (48 %)
(c) opération	27 (59 %)	15 (60 %)	19 (66 %)
(d) formule	24 (52 %)	10 (40 %)	10 (34 %)
(e) représentation graphique ou symbolique	26 (57 %)	11 (44 %)	12 (41 %)
(f) paires ordonnées	14 (30 %)	8 (32 %)	7 (24 %)

Un premier constat révèle que les étudiants des trois cohortes reconnaissent en plus grand nombre la notion de *fonction* sous l'angle d'une relation de dépendance entre deux variables (affirmation a). Pour ceux qui ont choisi cette interprétation de la fonction, ce sont les étudiants les plus avancés qui majoritairement s'appuient sur cette relation. Donc, les réponses obtenues sont de 76 %, 84 % et 93 % de la

23 C'est en nous inspirant de la catégorisation des interprétations identifiées par Vinner et Dreyfus (1989) chez leurs participants que nous avions inséré cette idée d'opération arithmétique ou algébrique. Comme nous l'avons signalé au début du chapitre IV, de nouvelles lectures nous ont amené à ajuster la typologie que nous proposons au chapitre I, et l'opération ne nous paraît plus pertinente en tant qu'interprétation, parce qu'il s'agit plutôt d'une manipulation effectuée à partir d'une représentation algébrique ou numérique.

1ère année à la 4e année respectivement. Selon Nicolas (1996), cette catégorie est la meilleure façon de comprendre la notion de *fonction*.

En terme de fréquence, la deuxième réponse la plus souvent retenue par les participants de chacune des trois cohortes est l'opération (affirmation c). L'analyse révèle spécifiquement que 59 %, 60 % et 66 % des étudiants de 1ère année jusqu'à 4e année voient la notion de *fonction* comme opération arithmétique ou algébrique.

Chez les étudiants de 2e année et les finissants, la fonction sous l'angle d'une régularité entre les variables x et y (affirmation b) est le troisième choix le plus fréquent. Effectivement, 33 % des étudiants de première année, 52 % des étudiants de deuxième année et 48 % des finissants la sélectionne. Ainsi, un peu moins de 50 % des futurs maîtres questionnés reconnaissent cette interprétation de la notion de *fonction*.

Il faut attendre au quatrième rang de fréquence pour voir apparaître la fonction en tant que représentation. Le quatrième choix le plus répandu chez les participants de 2e et 4e années est la représentation graphique ou symbolique (affirmation e), et ce choix est plus fréquent que la règle chez les débutants. Les pourcentages sont de 57 %, 44 % et 41 %, de la cohorte des débutants à celle des finissants.

La notion de *fonction* représentée comme formule (affirmation d) est moins sélectionnée. D'ailleurs, plus les étudiants sont avancés dans leur formation universitaire, moins ils choisissent cette représentation. Les participants la sélectionnent dans 52 %, 40 % et 34 % des cas, des débutants aux finissants respectivement.

Un dernier constat dans cette analyse des réponses de la façon de concevoir la fonction dévoile que la notion de f*onction* interprétée comme un ensemble des paires ordonnées (affirmation f) est la moins approuvée par les participants. En fait, le pourcentage de répondants ayant sélectionné cette façon de concevoir la fonction est bas d'une cohorte à l'autre. Effectivement, l'analyse indique que 30 % des étudiants débutants, 32 % des étudiants de mi-parcours et 24 % des étudiants finissants la conçoivent de cette façon. C'est possiblement parce que l'affirmation f ne verbalise pas l'aspect dominant de l'interprétation dans laquelle s'inscrit l'idée de paires ordonnées : la correspondance.

D'ailleurs, dans cet amalgame d'interprétations et représentations de la notion de *fonction*, seulement les affirmations (a) et (c) (relation de dépendance et opération) correspondent à des choix reconnus par la plupart des participants pour concevoir la fonction. Par contre, les propositions (b), (d), (e) et (f) correspondent à des représentations et interprétations beaucoup moins sélectionnées (règle, formule, représentation graphique et ensemble de paires ordonnées). Il est intéressant de noter le parallèle entre ces résultats et la progression des apprentissages au secondaire, où la fonction est d'abord étudiée sous l'angle de la relation de dépendance (MELS, 2015).

Le tableau 5.16 présente les interprétations ou représentations dominantes auprès de nos 100 répondants. Nous n'avons retenu que les questions où les participants avaient un choix d'interprétation ou représentation et, parmi celles-ci, les interprétations ou représentations qui ressortent dans les réponses d'au moins un participant sur cinq.

Tableau 5.16 Synthèse des interprétations et représentations privilégiées dans les réponses permettant de choisir l'une ou l'autre

	Interprétations	**Représentations**
Question 1		Langage verbal
Question 2	Relation de dépendance	
Question 5		Algébrique
Question 8		Langage verbal
Question 11	Relation de dépendance	

Dans le prochain chapitre, nous verrons comment l'ensemble de ces résultats apporte des pistes de réponse aux trois questions de recherche.

CHAPITRE VI

DISCUSSION

Maintenant que nous avons analysé les résultats du questionnaire, il est important de voir comment ceux-ci apportent des pistes de réponses à notre problématique. Dans ce chapitre, nous allons reprendre les trois questions de recherche pour tenter d'y répondre.

6.1 Représentations du concept de fonction les mieux manipulées par les futurs maîtres

La première question à laquelle ce travail veut apporter des pistes de réponse est : *Quelles représentations du concept de fonction sont les mieux manipulées par les futurs maîtres*? Nous considérons pour cela l'ensemble des réponses des 100 étudiants des trois cohortes, puisque qu'un plus grand échantillon nous permet de voir plus clairement les tendances dominantes. La réponse à cette question nous renseignera sur le savoir théorique des futurs maîtres, selon la nomenclature de Norman (2012), plus spécifiquement le savoir lié aux interprétations et représentations selon celle de Fennema et Franke (1992). Nous reprendrons ci-dessous les représentations auxquelles ont recouru les participant pour accomplir les principales activités demandées dans le questionnaire : définir ce qu'est une fonction, identifier si une représentation est celle d'une fonction, associer ou non deux représentations fonctionnelles et, enfin, transformer une représentation d'une fonction par conversion ou par traitement.

6.1.1 Activité de définition de la fonction à l'aide d'une représentation

Une seule question proposée demandait de définir une fonction; il s'agit de la deuxième question. Pour cette tâche, aucune représentation n'a été nommée par une majorité de futurs maîtres, mais trois le sont par un peu plus d'un participant sur vingt : les représentations graphique (8 %), verbale (7 %) et algébrique (6 %). Personne n'a défini la fonction en s'appuyant sur les représentations numérique et géométriques.

La onzième question demandait aux participants d'identifier dans une liste d'énoncés ceux qui correspondaient à des façons dont ils conçoivent la fonction. Deux de ces énoncés mentionnaient des représentations de la fonction. L'un évoquait la formule algébrique; il a été retenu par 44 % des participants. L'autre, sélectionné dans 49 % des questionnaires, nommait les représentations graphiques ou symboliques. Dans les deux cas, ces résultats montrent qu'un peu moins d'un futur maître ayant participé à notre étude sur deux pensent à verbaliser qu'une fonction peut être conçue comme un objet représentable sous forme algébrique ou graphique.

En liant ces deux résultats, il semble qu'aucune représentation ne se démarque chez une majorité des participants pour nommer ce qu'ils considèrent comme une fonction, mais la représentation graphique est retenue par un peu plus de participants que la formule algébrique, tant au moment de définir (+2 %) qu'au moment de sélectionner une façon de concevoir la fonction (+5 %). Nos résultats divergent ici de ceux de Cooney (1999), qui avait demandé à des futurs maîtres de définir le terme *fonction* et qui avait plutôt identifié une prédominance de la représentation algébrique dans les réponses obtenues. La plupart des recherches s'intéressant à la définition de la fonction que leurs participants donnent (par exemple, Vinner et Dreyfus, 1989, Norman, 1992, et Hitt, 1998) observent plutôt les interprétations qui transparaissent dans les réponses que les représentations, donc nous y reviendrons au moment de discuter notre deuxième question de recherche.

6.1.2 Activités d'identification d'une représentation d'une fonction

Quatre des questions de notre outil de recherche ont porté sur une tâche d'identification : les participants devaient dire si la représentation proposée pouvait correspondre ou non à une fonction. Ils ont accompli cette tâche pour quatre des cinq représentations (numérique, algébrique, graphique et verbale). Notre questionnaire reproduit donc la tendance observée par Bloch (2005) qui affirme, tel que nous l'avons vu en 1.3.1, que la représentation géométrique est beaucoup moins utilisée dans les études sur la fonction.

Pour les futurs maîtres ayant participé à notre étude, la représentation de la fonction la moins bien identifiée a été le tableau de valeurs (représentation numérique) de la question 8. Seuls 43 % des répondants ont reconnu que ce tableau pouvait représenter une fonction. Cela s'inscrit dans l'esprit des conclusions de Coppé *et al.* (2007) pour qui les enseignants de mathématiques ne voient pas suffisamment l'importance de reconnaître le tableau de valeurs comme une représentation à part entière de la fonction. Toutefois, il est possible que ce bas taux soit moins lié au type de représentation qu'à la fonction représentée : il ne s'agissait pas d'une fonction linéaire, alors que les études recensées disent que les fonctions non linéaires sont plus difficiles à reconnaître tant par les élèves (Markovits *et al.*, 1986, 1988, Kieran, 2007) que par les futurs maîtres (Cooney, 1999).

Pour toutes les autres représentations qu'ils devaient identifier, la majorité de nos répondants ont su dire quelles étaient des représentations d'une fonction. Le taux de réussite est de 57 % pour la représentation algébrique (question 5), de 68 % pour la représentation verbale (question 4) et de 93 % pour la représentation graphique (question 1). Dans le cas de la représentation algébrique, les répondants faisaient face à un défi supplémentaire, car pour donner leur réponse, ils devaient se remémorer deux autres objets mathématiques, soit la formule pour calculer l'aire d'un disque et celle pour calculer la circonférence d'un cercle. Ainsi, il est probable qu'une partie des répondants qui n'ont pas identifié correctement la représentation algébrique de la fonction y seraient arrivés dans une autre situation problème. Dans le cas de la représentation verbale, deux des quatre énoncés comportaient un des obstacles épistémologiques mentionnés à la section 1.5.2 : le temps comme variable implicite (Sierpinska, 1992). En excluant ces énoncés, le taux de réussite de nos participants à la tâche d'identification d'une fonction représentée verbalement grimperait à 84 %.

À la lumière de ces résultats, il ressort que la quasi-totalité des futurs maîtres ayant participé à notre étude peuvent identifier des graphiques qui sont des représentations d'une fonction. Environ six répondants sur dix peuvent aussi identifier une fonction représentée verbalement ou algébriquement et ce, même lorsque identifier celle-ci présente un obstacle.

6.1.3 Activités d'association de deux représentations d'une fonction

Dans notre outil de recherche, des questions portaient sur deux activités d'association[24] : l'une sur l'association de représentations graphiques et géométriques (question 3), l'autre sur l'association de représentations graphiques et algébriques (question 6). Comin (2005) disait que, dans son étude auprès d'étudiants de Seconde, l'association de représentations graphiques et géométriques était une tâche mieux réussie que celle de représentations graphiques et algébriques. Nos participants ont un

[24] Nous traitons l'association séparément des activités de transformation pour respecter la distinction établie par Duval (2017) que nous avons rapportée à la section 4.2.12.

résultat similaire à ceux de Comin pour l'association des représentations graphiques et algébriques : ils ont bien accompli cette tâche dans 66 % des cas, alors que Comin observait un taux variant de 50 % à 68 % selon la complexité de la fonction. Par contre, nos futurs maîtres ont pu associer les représentations graphiques et géométriques dans 55 % des cas, alors que les participants de l'étude de Comin ont un taux de réussite de 80 %. Le résultat de nos participants peut s'expliquer en partie par l'obstacle épistémologique lié à la réconciliation des deux conceptions des mathématiques (Sierpinska, 1987) dont nous avons parlé dans les sections 1.5.2, 4.2.3 et 5.3.

On constate aussi que nos participants ont mieux réussi la tâche d'association de représentations graphiques et algébriques que celle de représentations graphiques et géométriques. D'un côté, cela peut s'expliquer parce que la translation iconique (Monk, 1992), qui peut fausser les perceptions des participants, est plus visible dans la question 3. De l'autre, nous avons présenté plus de fonctions non linéaires à la question 3 qu'à la question 6. Or, les études antérieures comme celles de Coppé *et al.* (2009) signalent l'existence d'un obstacle didactique lié aux fonctions non linéaires parce que les programmes scolaires traitent d'abord de la fonction linéaire uniquement.

Par ailleurs, pour les deux tâches d'association présentes dans notre questionnaire, plus de la moitié des futurs maîtres a répondu conformément aux résultats attendus, malgré les obstacles épistémologiques et didactiques. Ainsi, les participants semblent capables de repérer suffisamment de propriétés des représentations graphiques, algébriques et géométriques pour dire si elles peuvent être associées ou non.

6.1.4 Activités de transformation d'une représentation d'une fonction

Dans le tableau 4.1, nous avons indiqué que l'activité demandée aux questions 7 à 10 était une conversion. Par ailleurs, les questions 1 et 5 invitaient les participants à justifier leur réponse, ce que plusieurs d'entre eux ont fait par le biais d'une transformation, au sens de Duval (2006b).

Rappelons que, selon Duval (1995), les activités cognitives consistent à se faire une trace mentale à partir d'un élément physique, donc à se construire une représentation, à traiter celle-ci à l'aide d'une autre représentation du même registre, puis à la convertir dans un autre registre sans perdre le rapport à l'élément physique. Duval (2006b) regroupe les activités de *traitement* et de *conversion* sous le terme générique de *transformation*, tel que l'illustre le schéma que nous avons repris comme figure 3.3 du présent mémoire.

Les questions 7 et 9 demandaient spécifiquement de convertir une représentation géométrique en représentation graphique. Dans le premier cas, 14 % des répondants ont fait la conversion attendue. Dans le deuxième cas, le taux est de 33 %. En moyenne, donc, le pourcentage de réussite des futurs maîtres de notre étude pour la tâche de conversion du registre géométrique au registre graphique est de 24 %. Rappelons toutefois que, tant pour la question 7 que pour la question 9, l'analyse des résultats a révélé qu'un tiers supplémentaire des participants a tracé une représentation graphique qui respectait la majorité des propriétés recherchées.

La question 10 portait sur la conversion de représentations graphiques vers des représentations verbales. Nous avons expliqué à la section 5.10 que la formulation initiale de cette question présentait une problématique de double sémiotisation, car la consigne verbale portait sur le tracé et les variables indiquées dans les graphiques, sur la hauteur en fonction du temps. Malgré tout, 76 % des futurs maîtres ont proposé une représentation verbale correspondant à la représentation graphique proposée. Ainsi, nos participants ont montré un plus grand niveau de maîtrise au moment de faire une conversion vers une représentation verbale que vers une représentation graphique.

D'ailleurs, dans les questions 1 et 8, où les répondants pouvaient employer la représentation de leur choix pour répondre, la représentation verbale a été le choix le plus fréquent. À la première question, 64 % des participants ont fait une conversion d'une représentation graphique vers une représentation verbale pour expliquer quels graphiques représentaient ou non une fonction. À la huitième question, 26 % des répondants ont tenté de convertir une représentation numérique en langage verbal. Ce pourcentage semble faible, mais il correspond à près de la moitié des participants qui ont écrit une réponse à cette question.

Dans le cas de la question 5, pour justifier quelle expression algébrique représentait une fonction, les participants pouvaient avoir recours à une conversion. Bien que choix n'ait été retenu que par 11 % des participants, 9 % y ont fait une conversion vers une représentation verbale. Ce résultat s'ajoute à ceux des questions 1, 8 et 10 pour appuyer l'idée que la représentation privilégiée par les futurs maîtres ayant participé à notre étude pour effectuer une conversion est la représentation verbale et ce, peu importe si la représentation d'origine est graphique, numérique ou algébrique.

Il faut toutefois noter qu'à la question 5, le choix de transformation privilégié par la majorité des participants n'a pas été la conversion, mais plutôt le traitement. Ainsi, 57 % des futurs maîtres ont écrit d'autres expressions algébriques pour illustrer de quelle façon, à partir des formules de l'aire et de la circonférence, ils pouvaient effectuer un traitement pour obtenir la représentation algébrique qu'ils avaient sélectionnée.

Dans le modèle de Duval (1993) illustré à la figure 3.4, la capacité de faire des conversions dans les deux sens est nommée l'*articulation*. L'échelle des niveaux de compréhension de la fonction de Hitt *et al.* (2001) parle elle aussi d'articulation lorsqu'il y a des aller-retour entre deux registres de représentations de la fonction ou plus, soit aux 5e et 6e niveaux. La formulation du questionnaire n'exigeait jamais l'articulation de plusieurs représentations. Il ressort que, dans un tel contexte où ce n'est pas demandé explicitement, très peu de futurs maîtres y ont recours : Dans l'ensemble des questions 1 à 11, seules 19 réponses reçues démontraient l'articulation de plus d'une représentation, soit seulement 5 % des réponses qui permettaient aux répondants de laisser une trace montrant qu'ils avaient recouru simultanément à plusieurs registres. Puisque cette articulation est importante pour atteindre les niveaux les plus hauts de compréhension de la fonction selon l'échelle de Hitt *et al.* (2001), il serait important de les sensibiliser à la pertinence d'articuler des représentations de la fonction pour donner des réponses plus riches, par exemple en proposant des tâches les incitant à le faire. Le fait que certains l'aient fait sans que ce soit exigé est encourageant.

6.1.5 Synthèse des représentations privilégiées

À la lumière de cette discussion des résultats et pour répondre à la question *Quelles représentations du concept de fonction sont les mieux manipulées par les futurs maîtres*?, il ressort que la représentation verbale est celle qui est privilégiée par nos répondants pour convertir une autre représentation de la fonction. La représentation verbale est aussi bien identifiée par 7 participants sur 10.

L'autre représentation qui est la plus manipulée pour certaines tâches est la représentation graphique. Une fonction représentée graphiquement est bien identifiée par 9 participants sur 10 et elle est correctement associée à une représentation géométrique ou algébrique par la majorité des répondants. Par contre, seul le quart des participants réussissent pleinement à convertir graphiquement une autre représentation de la fonction.

Dans les réponses obtenues, le seul endroit où la représentation algébrique est le choix dominant est pour traiter un problème posé à partir d'une autre expression algébrique. On remarque toutefois que les tâches d'identification de la représentation algébrique d'une fonction et d'association de la représentation algébrique à une représentation graphique sont réussies par plus de la moitié des futurs maîtres de notre étude. Ainsi, le contexte semble jouer un rôle important dans l'utilisation de la représentation algébrique par les futurs maîtres. En contexte algébrique, ceux-ci prouvent qu'ils sont à l'aise avec l'identification, l'association et le traitement d'une représentation algébrique, mais, en contexte non contraignant, ils se tournent plutôt vers la représentation verbale.

Le questionnaire n'a pas amené les participants à réaliser l'ensemble des tâches avec une représentation géométrique. Elle est bien associée à une représentation graphique par un peu plus de la moitié des répondants; par contre, lorsque ceux-ci doivent convertir une représentation géométrique en représentation graphique, peu d'entre eux produisent le résultat attendu. De même, une seule question portait sur une représentation numérique, et seuls 4 participants sur 10 l'ont identifiée comme la représentation d'une fonction. Notons que, dans les questions où ils pouvaient eux-mêmes choisir une représentation pour modéliser leur réponse, aucun participant n'a recouru à une représentation géométrique ou numérique.

6.2 Interprétations du concept de fonction émergeant dans les réponses

La deuxième question de recherche est : *Peut-on voir émerger des interprétations de la fonction dans les réponses livrées par les futurs maîtres?* Rappelons brièvement ce que disent les études antérieures, comme nous les avons mentionnés dans la section 2.3. Selon Even (1998) et Cooney (1999), les futurs enseignants voient la fonction comme un synonyme d'équation. Chez les enseignants d'expérience, les études de Vinner et Dreyfus (1989), Hitt (1998) et Basturk (2003) indiquent que la fonction est perçue tantôt comme une correspondance entre deux ensembles permettant de créer des paires ordonnées, tantôt comme une règle, mais rarement comme une relation de dépendance. Or, Nicholas (1966) explique que la relation de dépendance est la meilleure façon d'interpréter la fonction, à cause de son importance pour ouvrir la fonction vers d'autres domaines scientifiques. Conformément aux propos de Thompson et Carlson (2017) rapportés dans la section 1.2.4, le raisonnement covariationnel n'a pas été observé dans les résultats de nos participants.

Rappelons que, selon une distinction établie par Vinner et Dreyfus (1989) dont nous avons parlé dans la section 1.2.4, l'« image » sous-jacente d'une interprétation n'est pas directement accessible, seule sa « définition » permet de la verbaliser. Dans cet esprit, nous avons identifié quatre questions de notre outil qui se sont avérées favorables à l'émergence de vocabulaire reflétant une interprétation de la fonction. Ce sont les questions 1, 2, 8 et 11. Celles-ci nous renseignent sur l'emploi d'interprétations comme « définition » de la fonction par les futurs maîtres de notre étude, mais notre outil de mesure n'était pas conçu pour accéder aux interprétations qu'ils possèdent en tant qu'« image ».

6.2.1 Mentions de l'interprétation de la fonction comme correspondance

L'interprétation comme correspondance renvoie à l'idée de deux ensembles et à la formation de paires ordonnées composées d'un élément de chaque ensemble (voir la section 1.2.1). Quelques participants ont semblé faire référence à cette interprétation en expliquant pourquoi le deuxième graphique proposé à la première question n'était pas une fonction. Toutefois, aucun n'a employé explicitement les mots « correspondance » ou « paires ordonnées », donc nous n'avons pas quantifié ces réponses. Par contre, l'idée de correspondance ou de paires ordonnées a été mentionnée explicitement par 9 % des répondants dans la définition qu'ils ont livrée à la deuxième question et par 1 % des répondants pour justifier pourquoi le tableau de valeurs présenté à la huitième question représentait une fonction. Enfin, à la onzième question, 29 % des futurs maîtres ont sélectionné l'affirmation portant sur les paires ordonnées comme une façon de concevoir la fonction.

À l'exception de la onzième question, rien n'obligeait les participants de notre étude à recourir à des interprétations de la fonction. Même si les pourcentages de mention de la correspondance semblent faibles, il est important de noter que près d'un futur maître sur dix a choisi de mentionner cette interprétation pour définir la fonction. Cela rejoint les études mentionnées ci-dessus qui évoquent la place importante occupée par l'interprétation de la fonction comme correspondance chez les enseignants.

6.2.2 Mentions de l'interprétation de la fonction comme règle

L'interprétation de la fonction comme règle met l'accent sur la régularité dans la façon d'associer les données du domaine et du codomaine (section 1.2.3). À la onzième question, 42 % des participants ont sélectionné l'affirmation portant sur la règle comme une façon dont ils concevaient la fonction. Il s'agit d'un taux de sélection supérieur de 13 % à celui obtenu pour l'énoncé sur la correspondance.

Par contre, au moment d'écrire une définition de la fonction (question 2), il n'y a que 2 % des répondants qui ont écrit en parlant d'une règle ou d'une régularité. C'est un pourcentage de 7 % inférieur à celui obtenu pour la correspondance. Il faut toutefois noter que nous avons codé les réponses de 6 % des participants selon la présence de la fonction représentée comme formule algébrique. Une telle représentation ne nous dit pas hors de tout doute quelle interprétation le participant privilégie, mais elle illustre forcément une régularité entre les variables. Cela suggère qu'un nombre à peu près égal de nos participants définissent d'abord la fonction comme correspondance et comme règle.

Ici aussi, nos données s'inscrivent en continuité avec les études antérieures comme celles de Vinner et Dreyfus (1989), Hitt (1998) et Basturk (2003), qui ont identifié que les enseignants et futurs maîtres ont recours aux interprétations de la fonction comme correspondance et comme règle pour répondre à des questionnaires sur la fonction.

6.2.3 Mentions de l'interprétation de la fonction comme relation de dépendance

L'interprétation de la fonction comme relation de dépendance met l'accent sur les deux variables en présence et sur le fait qu'une variation de la valeur de la variable indépendante amène une variation de celle de la variable dépendante (section 1.2.2). C'est l'interprétation de la fonction qui apparaît le plus souvent dans les réponses de nos participants. En effet, 83 % d'entre eux ont sélectionné à la question 11 l'affirmation mettant l'accent sur cette interprétation. Rappelons qu'à cette question le participant devait choisir, parmi une liste d'énoncés portant sur des représentations et des interprétations de la fonction, tous ceux qui lui semblaient être une façon de concevoir la fonction et, parmi tous les énoncés, c'est celui portant sur la relation de dépendance qui a été retenu par le plus grand nombre de nos futurs maîtres.

Dans un même esprit, à la question 2, où il fallait écrire une définition de la fonction, la majorité des répondants (55 %) ont mentionné explicitement la relation de dépendance dans leur définition. Cette question ne demandait pas spécifiquement le recours à une interprétation de la fonction, mais c'est quand même vers celle-ci que se sont tournés plus de la moitié des participants. De même, à la question 8, pour justifier pourquoi le tableau de valeurs présenté était la représentation d'une fonction, 2 % des participants ont parlé de relation de dépendance. Ce pourcentage n'est pas très élevé, mais c'est tout de même l'interprétation qui est ressortie le plus souvent dans les réponses livrées à cette question.

Les participants de notre étude se distinguent de ceux des études recensées dans le chapitre II. Dans les travaux de Hitt (1998) et de Vinner et Dreyfus (1989), qui portaient sur des enseignants d'expérience, il n'y avait que 10 % des répondants qui privilégiaient la relation de dépendance, plus précisément 3 sur 30 dans le premier cas et 3 sur 36 dans le deuxième cas. Or, parmi nos répondants, plus de 1 sur 2 y a recours pour définir la fonction et 8 sur 10 la reconnaissent comme une façon de concevoir une fonction. Il est possible que les résultats des futurs maîtres de notre étude découlent de la formation reçue en didactique de l'algèbre à l'Université du Québec à Montréal, puisque les travaux de Bednarz (2001) et Nadeau (2013), dont nous avons parlé dans la section 2.3.2, indiquent que les étudiants sont amenés à travailler avec des fonctions très complexes et à les traiter sous plusieurs registres afin de leur en donner une vision riche. Rappelons toutefois qu'il faut faire une distinction entre la capacité de verbaliser une interprétation pour en livrer une « définition » au sens de Vinner et Dreyfus (1989) et la véritable formation d'une « image » sous-jacente pour appréhender l'objet mathématique. Le fait que nos participants soient nombreux à verbaliser l'interprétation de la fonction comme relation de dépendance ne signifie pas forcément qu'ils ont développé cette « image » sous-jacente.

6.2.4 Synthèse des interprétations émergentes

Pour répondre à la deuxième question de recherche – *Peut-on voir émerger des interprétations de la fonction dans les réponses livrées par les futurs maîtres?* – il ressort que oui et ce, même si les tâches ne le demandaient pas spécifiquement. En particulier, au moment d'écrire une définition de la fonction, plus de 3 participants sur 5 ont verbalisé qu'une fonction s'interprétait soit comme une relation de dépendance (55 %), soit comme une correspondance entre deux ensembles (9 %), soit comme une règle (2 %). Le recours à une interprétation pour définir une fonction a même été plus fréquent que le recours à une représentation : seul 1 participant sur 4 a mentionné une des représentations de la fonction dans sa définition.

Dans un même esprit, des interprétations de la fonction émergent aussi au moment de sélectionner si une affirmation correspond ou non à une façon de concevoir une fonction. Pour ce type de tâche, 4 participants sur 5 reconnaissent la relation de dépendance comme une interprétation de la fonction, 2 participants sur 5, la règle et 3 participants sur 10, la correspondance. L'affirmation présentant l'interprétation de la fonction comme relation de dépendance a été plus souvent sélectionnée que n'importe quelle affirmation portant sur une représentation de la fonction. Les affirmations portant sur des représentations ont été sélectionnées par un peu moins de 1 participant sur 2.

Même si le cœur du questionnaire ne portait pas sur les interprétations de la fonction, il ressort donc que nos participants y ont recours pour accomplir certaines tâches et que, lorsque c'est le cas, la majorité parle en termes de relation de dépendance.

6.3 Différences entre les interprétations et représentations de la fonction des futurs maîtres en mathématiques en début et fin de parcours

Concernant la troisième question – *À quel point les interprétations et représentations de la fonction des futurs maîtres en mathématiques en 4e année du baccalauréat en enseignement secondaire diffère-t-elle de celle de ceux de 1ère année?* – elle nous amène à vérifier si des tendances se dégagent dans les écarts de pourcentage des étudiants de chacune des cohortes ayant accompli les tâches conformément aux comportements attendus. Comme nous l'avons expliqué à la section 3.4.1, la prise d'une seule mesure temporelle ne permet pas de savoir où chacun des participants se situe dans son processus d'apprentissage de la fonction. La comparaison de trois cohortes permet de voir si des tendances se dessinent concernant l'évolution de la façon de représenter et interpréter les fonctions pendant la formation des futurs maîtres. Par contre, plusieurs variables non contrôlées ici peuvent affecter les résultats d'une cohorte, donc pour pouvoir évaluer pleinement cette évolution, une étude diachronique réévaluant les mêmes participants à plusieurs reprises pendant leur parcours serait nécessaire.

Il serait tentant d'affirmer que plus nous étudions, plus nous sommes capables d'apprendre une notion, un concept et une science. Dans cet esprit, on peut s'attendre à une augmentation du nombre d'interprétations et représentations de la fonction sur lesquelles s'appuient les étudiants en fin de formation comparativement aux débutants, ainsi qu'à un plus haut taux de réussite dans un questionnaire portant sur la fonction. Toutefois, le modèle de la courbe en U (chapitre III) met en garde contre cette vision linéaire de la progression individuelle. Rappelons aussi que, conformément à ce que dit Proulx (2009), même ceux qui maîtrisent le mieux une notion peuvent avoir du mal à l'utiliser après une longue période d'inactivité. Ainsi, si les réponses données par un groupe sont moins bonnes que celles des autres groupes, c'est possiblement parce que la connaissance n'a pas été réactivée récemment et, à l'inverse, si un groupe performe beaucoup mieux, cela peut être parce qu'il vient de travailler ce concept dans le cursus.

Cette mise en garde ayant été établie, voyons comment les trois cohortes ayant participé à notre étude se distinguent ou non dans leur façon d'accomplir différentes tâches en lien avec la fonction.

6.3.1 Écart au moment de définir une fonction ou de sélectionner des façons de la concevoir

L'analyse de deux des questions a permis d'observer à quel point les répondants définissaient et acceptaient de concevoir une fonction à l'aide d'un vocabulaire portant sur une interprétation ou une représentation[25]. La figure 6.1 présente le pourcentage des participants de chacune des trois cohortes ayant eu recours à une interprétation pour décrire la fonction, et plus particulièrement la relation de dépendance, puisque dans la lignée de Nicholas (1966) elle est jugée la préférable. La figure présente aussi le pourcentage moyen de sélection des énoncés renvoyant à une interprétation de la fonction à la onzième question, ainsi que le pourcentage des participants ayant parlé d'une représentation de la fonction pour la définir ou ayant accepté une telle représentation comme une façon de la concevoir.

---

[25] Par exemple, une définition où le vocabulaire parlait de « régularité » a été codée comme interprétation sous forme de règle, le terme « paires ordonnées » a été codé comme interprétation par correspondance et une définition axée sur les notions de variables dépendante et indépendante a été codée parmi l'interprétation comme relation de dépendance.

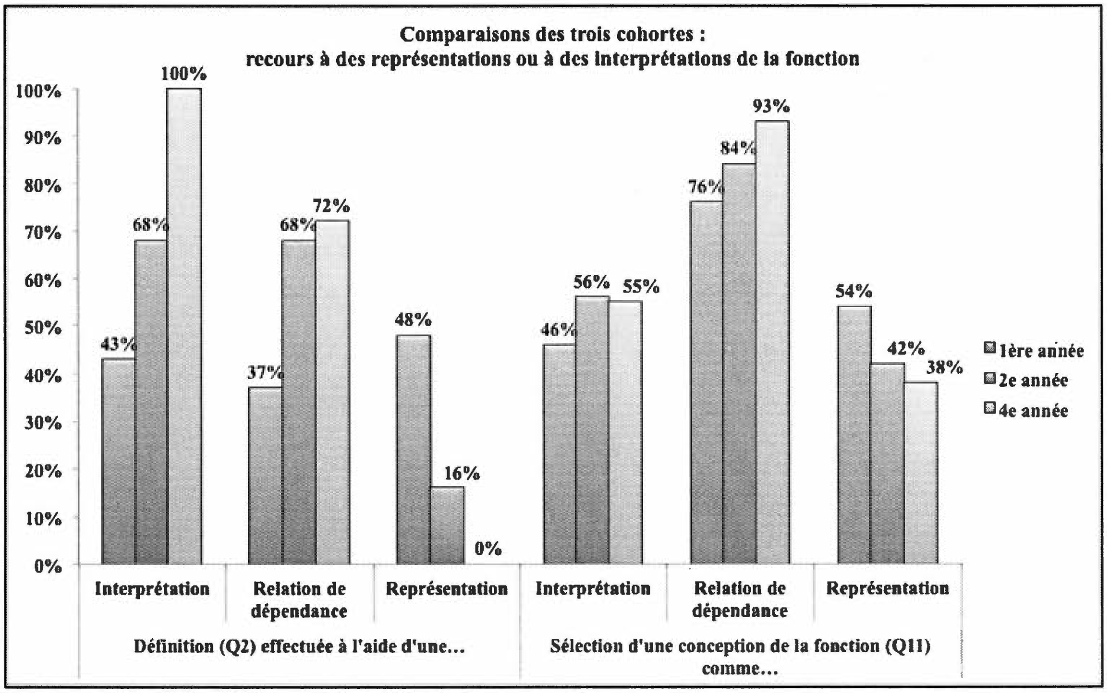


Figure 6.1 : Comparaison des trois cohortes pour définir une fonction ou sélectionner des façons de la concevoir

Cette figure montre que les participants de la cohorte des finissants utilisent le plus une interprétation pour définir une fonction. D'une cohorte à l'autre, il y a une augmentation constante d'environ 30% du pourcentage de participants ayant choisi de définir la fonction à l'aide de l'une ou l'autre des interprétations. Une augmentation du pourcentage des participants ayant recours à la relation de dépendance est aussi observable, mais elle est moins régulière. En fait, un écart d'environ 30 % distingue la cohorte de 2^{e} année de celle des débutants, mais la différence entre les participants de 4^{e} année et celle de 2^{e} année est peu marquée. Notons qu'à l'inverse, pour l'interprétation comme correspondance, les étudiants de 1ère et 2^{e} années ont un comportement plus similaire, étant respectivement 2 % et 0 % à définir la fonction comme une correspondance, tandis que près de 3 finissants sur 10 définissent la fonction ainsi.

Un écart existe aussi entre les cohortes de 1ère et 4e années pour ce qui est de leur choix de sélectionner ou non comme une conception de la fonction des affirmations renvoyant à une interprétation de la fonction : la relation de dépendance, la correspondance et la règle. En moyenne, il y a un écart de presque 10 % entre les deux cohortes en faveur des finissants. Ici aussi, l'écart est marqué entre les cohortes des deux premières années, mais quasiment nul entre les participants de 2e et 4e années. En fait, le pourcentage est même légèrement supérieur chez les participants de mi-parcours, ce qui suggère que le développement d'interprétations de la fonction n'est peut-être pas un processus pleinement linéaire.

Malgré tout, nos données montrent que le pourcentage de finissants qui recourent à une interprétation pour définir la fonction est plus élevé de presque 60 % comparativement à la cohorte de 1ère année et les finissants sélectionnent des interprétations comme des manières de concevoir la fonction avec une fréquence environ 10 % supérieure.

En contrepartie, les finissants sont proportionnellement moins nombreux à accepter des affirmations s'appuyant sur des représentations comme des façons de concevoir la fonction. Le pourcentage d'étudiants en début de parcours qui sélectionnent des représentations parmi la liste de façons de concevoir la fonction est supérieur de plus de 10 % comparativement au pourcentage d'étudiants de 2e ou 4e année. De même, pour définir la fonction, il y a une diminution du pourcentage entre chaque cohorte. Cette diminution est d'environ 30 % entre les cohortes de 1e et 2e années, puis d'un peu plus de 15 % entre les participants de 2e année et les finissants. En fait, aucun étudiant de 4e année n'a parlé d'une représentation dans sa définition de la fonction.

Ainsi, il existe une différence marquée entre les futurs maîtres en début et en fin de parcours en ce qui a trait à leur utilisation ou non d'interprétations et de représentations pour verbaliser une définition ou une façon de concevoir la fonction. Les débutants de notre étude se tournent davantage vers des représentations de la fonction, tandis que les finissants privilégient un vocabulaire qui renvoie à des interprétations. Pour ces tâches, les pourcentages obtenus par les répondants de la cohorte de 2^{e} année se rapprochent davantage de ceux des finissants.

6.3.2 Écart pour les tâches d'identification d'une représentation d'une fonction

La figure 6.2 porte sur les questions demandant aux participants d'identifier quelles représentations pouvaient ou non être celles d'une fonction. Le pourcentage des répondants de chacune des cohortes est indiqué par type de représentation.

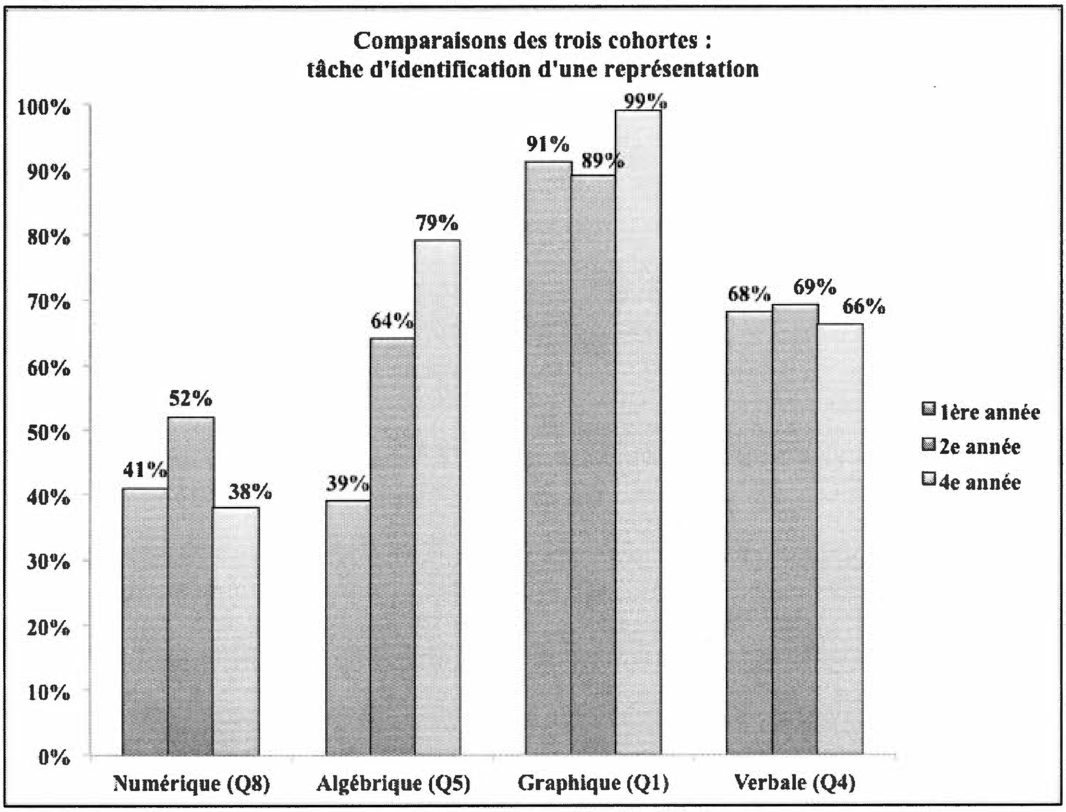


Figure 6.2 : Comparaison des trois cohortes pour l'identification d'une représentation

Pour deux types de représentation – les représentations algébriques et graphiques – le pourcentage de finissants est supérieur au pourcentage d'étudiants de 1ère année. Pour deux autres types de représentation – les représentations numériques et verbales – ce sont les débutants qui obtiennent un plus haut pourcentage que les finissants. Dans ces deux cas, par contre, l'écart entre les cohortes est inférieur à 5 %.

Il est intéressant d'observer que, pour les deux types de représentation où les finissants ont accompli la tâche dans un moindre pourcentage que les débutants, ce sont les étudiants de 2e année qui ont le mieux performé. De même, pour la représentation graphique, ces étudiants de 2e année ont le plus faible pourcentage. Ainsi, pour trois des quatre représentations étudiées dans la tâche d'identification, les participants de 2e année n'ont pas obtenu un pourcentage qui se situe entre celui des étudiants de 1ère année et des finissants. Il est possible que, conformément à ce que dit Proulx (2009), ce soit parce que ces étudiants aient peu de temps auparavant été amenés à réaliser des activités qui ont réactualisé chez eux les représentations numériques et verbales. Toutefois, même si la prise unique de données ne permet pas d'analyser la progression d'un participant dans l'apprentissage du concept de *fonction*, soulevons ici l'hypothèse que les résultats obtenus s'expliqueraient par la courbe en U des apprentissages présentée à la figure 3.1. Le cursus des futurs maîtres les amènerait d'abord à mieux identifier des représentations qu'ils sont en train d'introduire dans leur système, puis à entrer dans une phase de déséquilibre qui mènerait au plus bas pourcentage des finissants pour les représentations numériques et verbales et des étudiants de 2e année pour la représentation graphique.

Pour la tâche d'identification d'une représentation fonctionnelle, il y a donc une différence entre les pourcentages obtenus par les étudiants de 1ère et 4e année, mais l'écart n'est pas en faveur des finissants pour chaque type de représentation. Notons toutefois que, toutes représentations confondues, la réponse attendue aux questions portant sur l'identification est donnée dans 60 % des cas par les étudiants de 1ère année et dans 71 % des cas par les étudiants de 4e année.

6.3.3 Écart pour les tâches d'association de deux représentations d'une fonction

Considérant les cinq types de représentation que nous avons retenu dans notre étude, il existerait dix combinaisons d'association de deux types de représentations de la fonction, et notre questionnaire en contient deux : l'association d'une représentation algébrique à une représentation graphique ainsi que l'association d'une représentation graphique à une représentation géométrique. La figure 6.3 indique le pourcentage de participants de chacune des cohortes qui a fait les associations prévues.

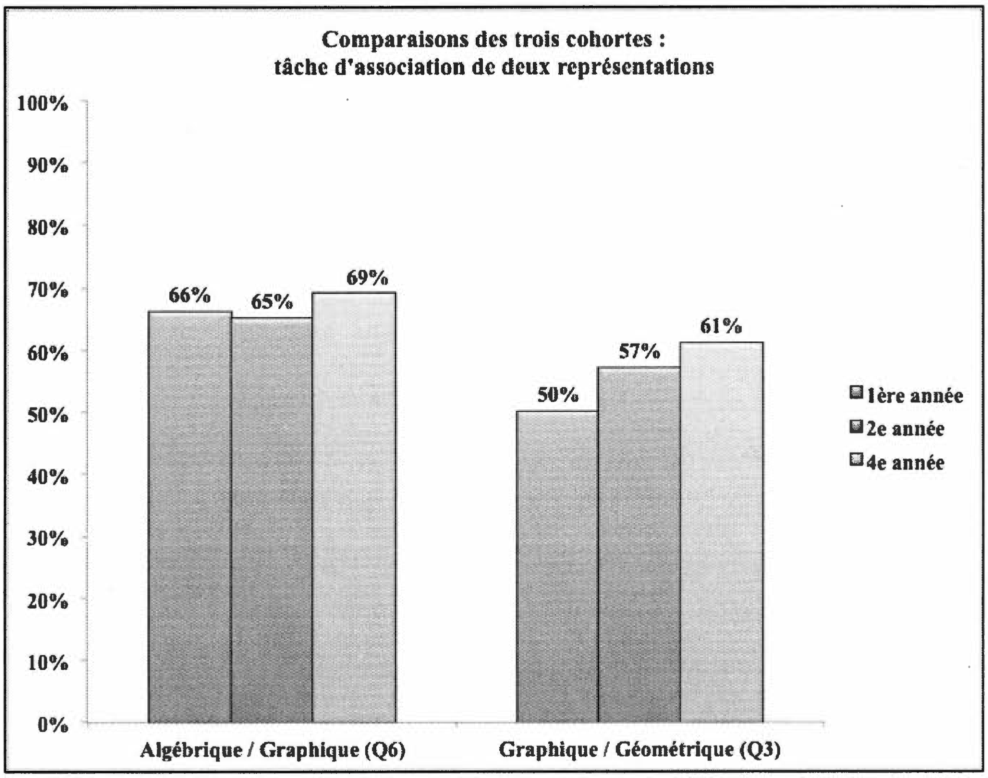


Figure 6.3 : Comparaison des trois cohortes
pour l'association de deux représentations

Pour l'association des représentations algébrique et graphique, il y a seulement 3 % d'écart entre les étudiants finissants et débutants. Les étudiants de 2e année ont un pourcentage presque identique à celui des étudiants de 1ère année. Les participants des trois cohortes ne présentent donc pas de différence importante ici.

Cependant, au moment d'associer des représentations graphiques et géométriques, les participants de 4e année donnent les résultats attendus dans un pourcentage d'environ 10 % supérieur à ceux de 1ère année. Les participants de 2e année ont un pourcentage supérieur à ceux de 1ère année et inférieur aux finissants.

Pour la tâche d'association de représentations, les différences entre les étudiants de début et de fin de parcours ne sont pas aussi tranchées que pour les tâches précédentes.

6.3.4 Écart pour les tâches de transformation d'une représentation d'une fonction

Les tâches de transformation au sens de Duval (2006b) regroupent le traitement d'une représentation à l'intérieur d'un même registre et la conversion d'une représentation d'un registre à un autre. La figure 6.4 présente une synthèse des résultats pour les questions amenant les participants à réaliser une transformation. Nous avons exclu la question 8, car plus de 40 % des participants n'ont pas fait la tâche et, parmi ceux qui ont répondu, nous avons surtout obtenu des réponses verbales ne contenant aucune représentation. Donc, les résultats ne proposent aucune tendance suffisamment forte pour que nous puissions comparer sa prévalence dans les réponses des trois cohortes.

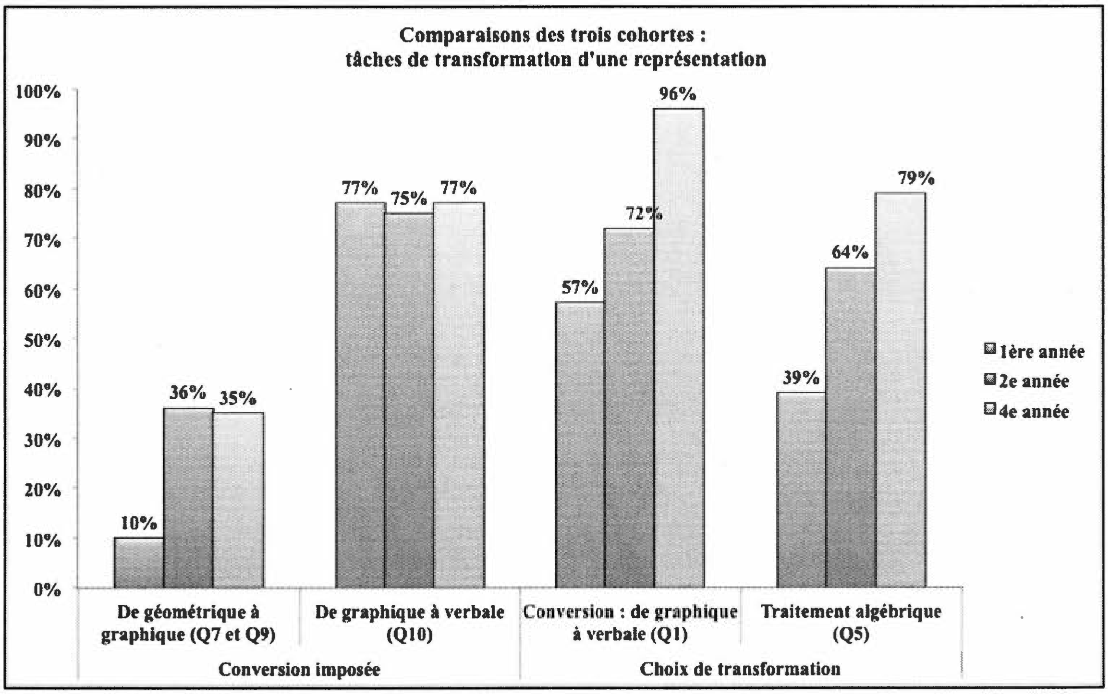


Figure 6.4 : Comparaison des trois cohortes pour la transformation d'une représentation

Pour la question demandant de convertir des représentations graphiques en représentations verbales, les cohortes de 1ère et 4^{e} année ont obtenu exactement le même pourcentage de réponses correspondant aux propriétés de la fonction recherchées. Leur capacité de faire une conversion d'un graphique au registre verbal, lorsqu'elle est imposée, est donc équivalente. Par contre, les participants des deux cohortes se distinguent lorsqu'ils sont libres de faire ou non le même type de conversion : lorsqu'ils pouvaient choisir librement la façon de justifier quels graphiques étaient ou non des représentations d'une fonction, dans toutes les cohortes la majorité des participants ont eu recours à une conversion verbale pour y parvenir, mais cette stratégie a été beaucoup plus fréquente chez les participants de 4^{e} année. L'écart de pourcentage de participants ayant fait cette conversion est de presque 40 %.

Pour ce qui est de la conversion d'une représentation géométrique à une représentation graphique, les participants ont dû faire la tâche deux fois. En moyenne, les étudiants de 2^e et de 4^e années ont obtenu un pourcentage de 25 % supérieur aux participants de $1^{ère}$ année.

Une dernière tâche pouvait amener les participants à faire une transformation. Pour expliquer quelle formule pouvait représenter algébriquement une fonction, la majorité des répondants ont fait un traitement à l'aide d'une autre représentation algébrique. Ce choix a été beaucoup plus fréquent chez les finissants. Ils sont 40 % plus nombreux à avoir eu recours à un traitement dans le registre algébrique que les étudiants de $1^{ère}$ année.

Ainsi, lorsqu'ils étaient libres pour justifier une réponse, les étudiants de 4^e année ont été beaucoup plus nombreux que ceux de $1^{ère}$ année à recourir à la transformation d'une représentation, parfois par une conversion, parfois par un traitement. Dans les cas où une conversion était obligatoire, les deux cohortes ont livré une performance équivalente dans une situation, mais les finissants ont obtenu un meilleur pourcentage dans l'autre.

6.3.5 Synthèse des écarts entre les cohortes

En résumé, à la troisième question – *À quel point les interprétations et représentations de la fonction des futurs maîtres en mathématiques en 4e année du baccalauréat en enseignement secondaire diffère-t-elle de celle de ceux de* $1^{ère}$ *année?* – on peut répondre qu'il existe certaines différences dans le comportement des deux cohortes.

Comparativement aux finissants, les étudiants de 1ère année participant à notre étude ont davantage tendance à définir la fonction en parlant d'une représentation de celle-ci. Pour les deux cohortes, la tâche d'identification d'une fonction est mieux réussie quand la représentation est graphique, mais les débutants obtiennent un meilleur pourcentage que les finissants au moment d'identifier une fonction représentée numériquement ou verbalement.

De leur côté, les finissants s'appuient davantage sur une interprétation que sur une représentation de la fonction au moment de la définir ou d'en sélectionner une de ses conceptions. Le pourcentage d'étudiants de 4e année qui identifient correctement une fonction représentée algébriquement ou graphiquement est supérieur à celui des débutants. Les finissants réussissent aussi un peu mieux les tâches d'association de représentations – du moins pour les paires de représentations que nous avons demandées – et, à une exception près, ils ont un pourcentage de 25 % à 40 % supérieur au moment de transformer une représentation par traitement ou conversion.

Nous ne pouvons pas comparer ces tendances à des études antérieures, car nous n'y avons pas trouvé une telle comparaison entre des cohortes de futurs maîtres. Le fait que les finissants obtiennent un pourcentage plus élevé dans plusieurs tâches pourrait toutefois renforcer l'idée que la formation des futurs maîtres favorise une meilleure appréhension du concept de fonction, comme le suggèrent Kieran (2007) et Even (1998).

CONCLUSION

Dans cette recherche, nous avons vu, dans le chapitre I, la fonction selon plusieurs interprétations et représentations : interprétée comme correspondance, relation de dépendance, règle et covariation, et représentée dans les registres géométrique, numérique, algébrique, graphique et verbal. L'interprétation découle de l'appréhension sous-jacente d'un objet comme la fonction, tandis que la représentation est la forme concrète avec laquelle on modélise cet objet. Les représentations que des futurs maîtres en mathématiques manipulent pour résoudre des problèmes en lien avec la fonction sont au cœur du développement de ce travail de recherche, et nous y avons aussi observé des interprétations qui sont verbalisées par les participants.

Des recherches de didacticiens et d'experts mathématiciens fournissent des informations essentielles qui ont guidé ce travail, par exemple, les niveaux de compréhension des fonctions dévoilés dans la recherche de Hitt *et al.* (2001) : une idée imprécise de la fonction en dépit d'un mélange incohérent de représentations, une reconnaissance complète d'un système de représentations, la transformation d'une représentation de la fonction dans un même système, la traduction d'une représentation dans une autre, l'articulation de deux représentations et l'articulation de plusieurs systèmes. D'autres recherches ont aussi nourri notre réflexion.

Dans le chapitre II, nous avons recensé les études antérieures concernant la compréhension du concept de *fonction* et son enseignement. C'est généralement au niveau équivalent au 2^{e} cycle du secondaire québécois que cette notion apparaît dans le programme et d'abord à travers la fonction linéaire. Concernant les interprétations privilégiées par les enseignants d'expérience, Basturk (2003) a observé une prédominance de la vision de la correspondance entre ensembles et Norman (1992), des paires ordonnées formées par cette correspondance. Vinner et Dreyfus (1989) souligne aussi la place de la correspondance, et Hitt (1998) a relevé à présence égale les paires ordonnées et la règle. Fait à noter : alors que Nicholas (1966) dit que la relation de dépendance est la meilleure façon d'aborder la fonction, entre autres parce que c'est celle qui permet le plus de lien avec les autres domaines, aucune des études recensées n'a identifié cette interprétation de la fonction comme dominante chez un groupe d'enseignants actuels ou futurs. Du côté des représentations des futurs maîtres, les études d'Even (1998) et Cooney (1999) suggèrent que leur vision de la fonction se confond avec l'équation. D'après Basturk (2003), les enseignants proposent surtout des exercices basés sur des fonctions représentées algébriquement, et Coppé *et al.* (2007) conclut que les maîtres ne considèrent pas le tableau de valeurs comme une représentation à part entière.

Le cadre théorique, qui a été exposé dans le chapitre III, s'inscrit dans une vision cognitive du développement. Le premier point saillant en est le modèle d'apprentissage selon la courbe en U (Kuhn, 1983, Minder, 2001, Mahy et Carle, 2012) qui explique que, pour maîtriser une nouvelle notion, il faut d'abord voir les limites de l'ancienne, ce qui entraîne une baisse temporaire de performance. L'autre point saillant est la théorie des registres de représentation de Duval (1995), pour qui il existe trois activités cognitives. Appliquées à la fonction, elles sont la construction d'une première représentation d'une fonction à partir d'une situation, le traitement de cette représentation en une autre du même registre, et la conversion d'une représentation d'un registre à un autre. Lorsque la conversion peut se réaliser dans les deux sens, c'est-à-dire que quelqu'un peut faire des aller-retour entre les registres, il s'agit d'articulation, et lorsqu'elle se fait avec aisance, on parle de coordination. Duval (2017) précise que, pour pouvoir parler à proprement parler d'une activité cognitive, il faut que la tâche mène à la production d'une représentation et non simplement à l'association de deux représentations déjà construites.

Le chapitre IV présente la méthodologie et plus particulièrement le questionnaire administré à 100 participants, des étudiants de trois cohortes au baccalauréat en enseignement des mathématiques au secondaire de l'Université du Québec à Montréal. L'outil contient 11 questions qui font appel à plusieurs tâches et activités cognitives relatives à la fonction : la définir, en reconnaître des conceptions sous plusieurs interprétations ou représentations, identifier si certaines représentations renvoient à une fonction, associer deux représentations d'une même fonction et transformer une représentation de la fonction, soit par traitement, soit par conversion. Le chapitre V présente les résultats détaillés, puis le chapitre VI s'en sert pour répondre aux trois questions de recherche.

D'après les données recueillies, à la question *Quelles représentations du concept de fonction sont les mieux manipulées par les futurs maîtres?*, c'est la représentation verbale qui se démarque chez nos futurs maîtres pour réaliser une conversion. De son côté, la représentation graphique est celle avec laquelle les répondants réalisent le mieux la tâche d'identifier une fonction. La plupart des tâches ont été bien effectuées par plus de 1 participant sur 2, mais les résultats sont plus faibles pour trois tâches : l'identification d'un tableau de valeurs comme représentation numérique d'une fonction, la conversion de ce même tableau de valeurs dans une autre représentation, ainsi que la conversion de représentations géométriques en représentations graphiques. À la deuxième question, *Peut-on voir émerger des interprétations de la fonction dans les réponses livrées par les futurs maîtres?*, la réponse est oui, et c'est la relation de dépendance qui apparaît le plus, tant pour définir la fonction qu'au moment de sélectionner une conception de celle-ci. Le recours assez fréquent des répondants à la relation de dépendance distingue nos participants de ceux des études antérieures recensées, comme Vinner et Dreyfus (1989), Norman (1992), Hitt (1998) et Basturk (2003). Par contre, notre étude n'a considéré que les cas où il y a recours explicite à du vocabulaire lié à une interprétation, donc elle nous renseigne d'avantage sur la capacité des participants de donner une « définition » de fonction au sens de Vinner et Dreyfus (1989) que sur la véritable « image » de cette interprétation qu'ils ont intériorisée. Un autre point à signaler est que peu de participants ont mentionné des interprétations en dehors de la tâche de définition. À la troisième question, *À quel point les interprétations et représentations de la fonction des futurs maîtres en mathématiques en 4^{e} année du baccalauréat en enseignement secondaire diffère-t-elle de celle de ceux de 1ère année?,* il ressort qu'un plus grand pourcentage des étudiants de 1ère année définit la fonction en parlant d'une représentation, tandis que ceux de 4^{e} année s'appuie plus sur une interprétation. Les finissants réussissent dans un plus grand pourcentage à identifier une représentation algébrique ou graphique d'une fonction, et ils performent en plus grand nombre dans les tâches de transformation.

Les réponses à nos questions de recherche amènent des pistes pour l'enseignement de la notion de *fonction* aux futurs maîtres. D'abord, il faut qu'ils soient amenés à développer plusieurs façons d'interpréter la fonction pour en avoir une vision élargie cognitivement et pour y recourir au-delà d'une tâche de définition. Il faut aussi qu'ils soient capables, conformément à Duval (1995), de se construire une première représentation d'une fonction, puis de la traiter et de la convertir peu importe la représentation initiale. Cela leur permettra d'atteindre un haut niveau de compréhension de la fonction selon l'échelle de Hitt *et al.* (2001) et, par conséquent, d'articuler toutes représentations de la fonction. Former des enseignants qui en sont capables est primordial pour que ceux-ci puissent rendre l'objet mathématique qu'est la fonction plus accessible aux élèves.

Les limites de l'étude résultent principalement de la construction de l'outil de mesure, qui a dû être constitué très tôt dans le processus de la recherche pour des raisons administratives liées aux délais pour l'obtention du certificat éthique qui devait être obtenu rapidement pour permettre la passation du questionnaire dans les cours de trois cohortes. Au moment de préparer la demande de certificat éthique, et par conséquent du questionnaire, les lectures effectuées présentaient des typologies de la fonction qui mettaient sur un même niveau des interprétations, comme la correspondance, et des représentations, comme le graphique, telle que celle de Vinner et Dreyfus (1989). Donc, le questionnaire a été conçu de telle sorte que des interprétations et des représentations se côtoient sans distinction dans une même question sous l'étiquette de « représentations ». Nos lectures plus récentes nous ont permis d'affiner notre proposition théorique, notamment sur les différences entre représentation et interprétation, et nous regrettons que nos données ne nous permettent pas de faire un codage assez précis pour apporter un éclairage complet sur chacune de nos questions de recherche. Une autre limite du questionnaire est l'omniprésence de la représentation graphique, ce qui s'explique encore par les lectures effectuées au moment de le construire. Celles-ci pointaient beaucoup sur les difficultés particulières associées à la représentation graphique, telle la translation iconique (Monk, 1992), donc beaucoup de questions portent en ce sens. C'est pourquoi, nous pensons que la forte présence de la représentation graphique dans les réponses de nos futurs maîtres a pu être influencée par une réactivation des connaissances liées à celle-ci. Malgré tout, le fait que les représentations verbale et algébrique soient celles que nous ayons le plus souvent observées lorsque les participants pouvaient choisir librement une représentation pour justifier une réponse nous amène à penser que ce biais n'a pas eu un trop grand impact sur les réponses obtenues. Par contre, une seule question a porté sur une représentation numérique et celle-ci présentait une fonction non linéaire. Comme les fonctions non linéaires sont plus complexes (Coppé *et al.*, 2009), il est impossible de conclure si le faible résultat obtenu à cette question est lié au type de représentation ou au type de fonction représentée. Il aurait fallu plus d'une question sur la représentation numérique pour pouvoir tirer des conclusions sur l'aisance avec laquelle les futurs maîtres la manipulent.

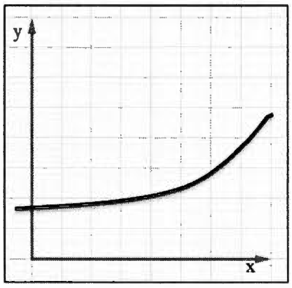
Par ailleurs, certaines questions de l'outil étaient formulées de telle sorte que la façon d'y répondre pouvait différer pour un « formaliste » et un « intuitif empiriste » au sens de Sierpinska (1987). Compte tenu des maladresses dans la formulation initiale des questions mentionnées dans les chapitres IV à VI, il ne nous a pas semblé acceptable méthodologiquement de tenter d'établir une régularité dans les réponses individuelles des participants pour les catégoriser l'un ou l'autre. Mais il serait intéressant, dans une prochaine étude, de comparer la façon dont ces catégories peuvent influencer le recours à certaines représentations et interprétations de la fonction.

Compte tenu de ces biais, il serait important de valider certains résultats en faisant une nouvelle étude avec un questionnaire plus équilibré, dans lequel les trois activités cognitives de Duval (1995) seraient proposées dans des questions laissant la possibilité aux répondants de choisir eux-mêmes leur représentation cible. Une telle démarche demanderait toutefois plus de temps pour la passation du questionnaire, ce qui peut à son tour apporter un biais si les participants se fatiguent et cessent de répondre sérieusement, ou alors une démarche qualitative basée sur des entrevues individuelles, ce qui peut aussi apporter un biais si seuls les étudiants se considérant compétents au sujet de la fonction se portent volontaires. Il serait intéressant que cette nouvelle étude se penche particulièrement sur des tâches qui semblent moins bien maîtrisées par les finissants, selon nos résultats : celles entourant la représentation numérique (tableau de valeurs). Comprendre si les faibles résultats de nos répondants s'expliquent simplement par le problème qui leur a été proposé ou par un obstacle lié à ce type de représentation permettrait de réfléchir aux stratégies pédagogiques pour préparer les futurs maîtres à mieux en comprendre les propriétés afin de soutenir leurs élèves dans leur construction du concept de *fonction*.

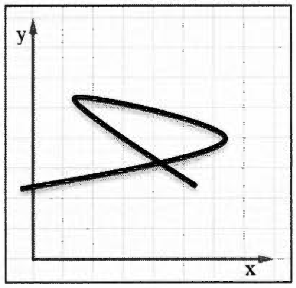
ANNEXE I

QUESTIONNAIRE POUR LA RECHERCHE AU SUJET DES FONCTIONS

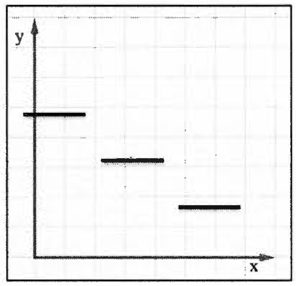
Q1. Encerclez les graphes qui ne représentent pas une fonction et expliquez pourquoi il ne s'agit pas de fonctions.



(a)



(b)



(c)

Justification :

S'il vous manque de l'espace, utilisez le verso de cette page.

Q2. Écrivez une définition de fonction.

____

____

____

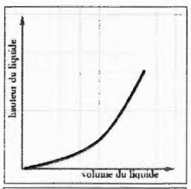
____

____

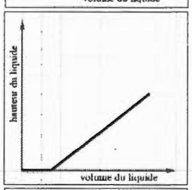
____

Q3. Les graphes ci-contre représentent le remplissage d'eau de récipients.

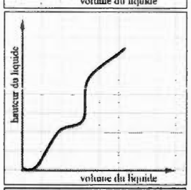
Lorsque c'est possible, associez un graphe à un des récipients, sachant que la fonction correspond à la hauteur du liquide en fonction de son volume.



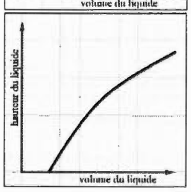
(a)



(b)

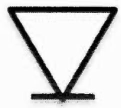


(c)

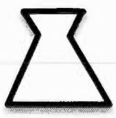


(d)

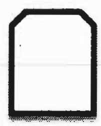
3.1



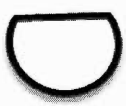
3.4



3.3



3.5



3.2

Q4. En été, un lac de forme circulaire s'assèche graduellement. Toutes les quatre heures, la surface de l'eau (le cercle) diminue.
Choisissez parmi les affirmations suivantes celle ou celles que vous considérez vraies.

a) Le rayon du cercle du lac est fonction du temps. ( )

b) L'aire du cercle du lac est fonction du rayon du cercle. ( )

c) L'aire du cercle du lac est fonction du temps. ( )

d) Le volume d'eau du lac est fonction du rayon du cercle du lac. ( )

Q5. Laquelle des expressions algébriques suivantes définit l'aire ***A*** d'un cercle en fonction de sa circonférence ***C***?

a) $A = C^2 / 4\pi$

b) $A = \pi (¼ C^2)$

c) $A = C^2 /2$

d) $A = (2 \pi r)^2$

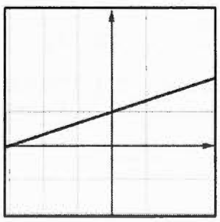
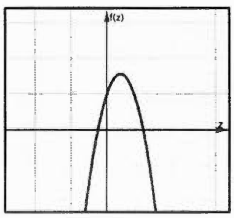
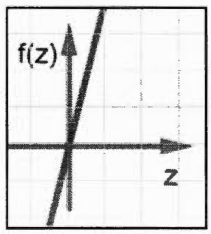
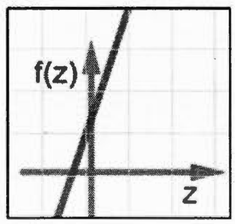
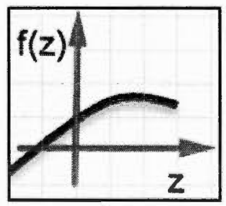
<u>Justification :</u>

Q6. Les expressions ci-contre représentent des fonctions réelles dans lesquelles g est une constante et $z \in \mathbb{R}$.
Lorsque c'est possible, reliez l'expression avec une représentation graphique.

a) $f(z) = g + 3z \quad ; \quad g = 3$

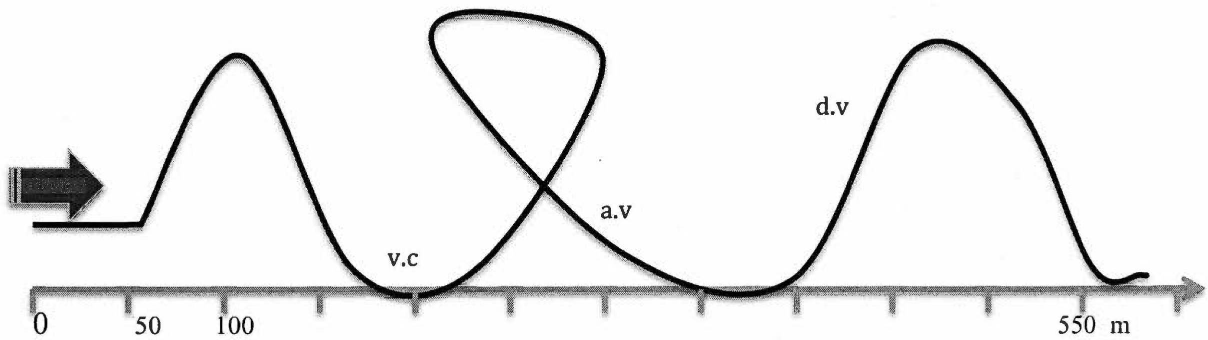
b) $f(z) = gz - 4z^2 \quad ; \quad g = 3$

c) $f(z) = gz \quad ; \quad g = 4$

<table>
<tr><th>6.1</th><th>6.2</th><th>6.3</th><th>6.4</th><th>6.5</th></tr>
<tr>
<td></td>
<td></td>
<td>
</td>
<td>
</td>
<td>
</td>
</tr>
</table>

Q7. Le diagramme ci-contre représente le trajet d'une montagne russe sur laquelle des changements de vitesse sont observées ainsi :
v = vitesse; c = constante; d = diminution; a = augmentation

Représentez graphiquement la vitesse en fonction de la distance parcourue pour le wagon.



Graphe :

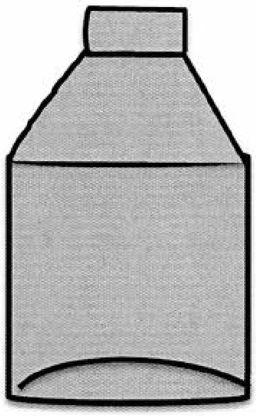
Q8. S'il existe une fonction qui modélise le phénomène écrivez-en une représentation. Sinon, justifiez pourquoi il ne s'agit pas d'une fonction.

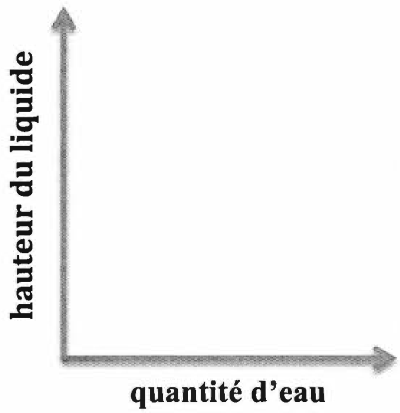
Mesure de la consommation d'essence

Km (h)	40	70	100
L (km)	5	7.5	15

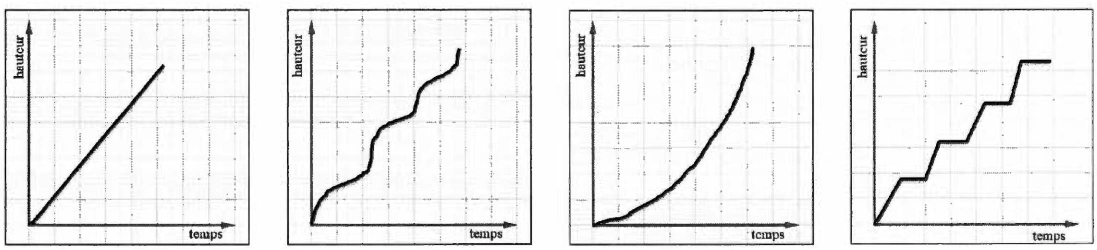
Justification ou fonction :
Vous pouvez utiliser le verso de cette page pour plus d'espace.

Q9. Imaginez que l'on remplisse ce récipient d'eau. Représentez dans le graphe la courbe de la variation de la hauteur en fonction de la quantité d'eau (volume).





Q10. Les graphes ci-dessous représentent la hauteur atteinte (altitude) par une motoneige durant un trajet en fonction du temps.



(a) (b) (c) (d)

Expliquez selon vous que signifie chacun de ces graphes

a. ____
____

b. ____
____

c. ____
____

d. ____
____

Q11. Encerclez la ou les affirmations que vous considérez comme une façon de concevoir la fonction.

a) La fonction est une relation de dépendance entre deux variables.

b) La fonction est une règle de régularité entre x et y.

c) La fonction est une opération dans laquelle les valeurs de (x) permettent le calcul de la valeur de (y).

d) La fonction est une formule dans laquelle une expression mathématique connecte deux facteurs.

e) La fonction est une représentation graphique ou symbolique.

f) La fonction est un ensemble de paires ordonnées.

BIBLIOGRAPHIE

Arbogast, L. F. (1791). *Mémoire sur la nature des fonctions arbitraires qui entrent dans les intégrales des équations aux différentielles partielles*. St. Pétersburg : Akad. Imp. des Sciences.

Artigue, M. (1990). Épistémologie et didactique. *Recherches en didactique des mathématiques, 10*(2.3), 241-286.

Artigue, M. (1993). Enseignement de l'analyse et fonction de référence. *Repères IREM, n. 11*. Metz : Topiques éditions.

Arzarello, F. et Robutti, O. (2001). From body motion to algebra through graphing. Dans Chick, H., Stacey, K., Vincent, J. et Vincent, J. (éd.), *Proceedings of the 12th ICMI Study Conference The Future of the Teaching and Learning of Algebra* (p. 33-40). Melbourne, Australie : University of Melbourne.

Astolfi, J. P. et Peterfalvi, B. (1993). Obstacles et construction de situations didactiques en sciences expérimentales. *Aster, 16*, 103-141.

Audigier F. (1991). Enseigner la société, transmettre des valeurs. La formation civique et l'éducation aux droits de l'homme : une mission ancienne, des problèmes permanents, un projet toujours actuel. *Revue française de pédagogie, 94*, p. 37-48.

Bachelard, G. (1938). *La formation de l'esprit scientifique : contribution à une psychanalyse de la connaissance*. Paris : Vrin.

Baruk, S. (1995) *Dictionnaire de mathématiques élémentaires*. Éditions du Seuil.

Basturk, S. (2003). *L'enseignement des mathématiques en Turquie : le cas des fonctions au lycée et au concours d'entrée à l'université*. (Thèse). Paris : Université Paris-Diderot - Paris VII.

Bednarz, N., Gattuso, L. et Mary, C. (1995). Formation à l'intervention d'un futur enseignant en mathématiques au secondaire. *Bulletin AMQ, 35*(1), 17.

Bednarz, N. (2001). Didactique des mathématiques et formation des enseignants : Le cas de l'Université du Québec à Montréal. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education, 1*(1), 61-80.

Biehler, R. (2005). Reconstruction of meaning as a didactical task: the concept of function as an example. *Meaning in Mathematics Education, 37*, 61-81).

Bloch, I. (2000). *L'enseignement de l'analyse à la charnière lycée/université : connaissances, savoirs et conditions relatives à la validation.* [Thèse de doctorat]. Bordeaux : Université Bordeaux I.

Bloch I. (2005). Un milieu graphique pour l'apprentissage de la notion de fonction au lycée. *Educ. Mat. Pesqui. São Paulo, 7*(1), 31-62.

Boucher, C., Coupal, M., Jacques, M. et Marotte, L. (2010). *Intersection. Mathématique, 2e cycle du secondaire, 2e année. Technico-sciences*, Montréal : Chenelière Éducation.

Brousseau, G. (1976). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. Dans Vanhamme, J. et Vanhamme, W. (éd.), *La problématique et l'enseignement des mathématiques. Comptes rendus de la XXVIIIe rencontre organisée par la Commission Internationale pour l'Etude et l'Amélioration de l'Enseignement des Mathématiques* (pp. 101-117). Louvain la Neuve.

Brousseau, G. (1983). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques, 4*(2), 165-198.

Brousseau, G. (1986). *Théorisation des phénomènes d'enseignement des mathématiques*. [Thèse de doctorat]. Université de Bordeaux I.

Brousseau, G. (1989). Obstacles épistémologiques, conflits socio-cognitifs et ingéniérie didactique. Dans Bednarz, N. et Gamier, C. (éd.), *Construction des savoirs* (p. 277-285). Montréal : Agence d'ARC inc.

Brousseau G. (1997). *La théorie des situations didactiques. Le cours de Montréal 1997*. Récupéré de http://guy-brousseau.com/1694/la-theorie-des-situations-didactiques-le-cours-de-montreal-1997/

Brousseau, G. (1998). Les obstacles épistémologiques, problèmes et ingénierie didactique. Dans Brousseau, G. *Théorie des situations didactiques* (pp. 115-160). Grenoble : La Pensée Sauvage.

Cabana, M. (1996). *La notion de fonction vue sous l'angle de l'étude de la variation* [Mémoire de maîtrise]. Université du Québec à Montréal.

Carle, P. (2009). *Inventaire de quelques processus de changement non linéaires exprimables sous la forme de courbe en U : Réflexions sur la créativité et l'intervention dans de telles situations.* Recueil écrit en collaboration avec Isabelle Mahy et édité à compte d'auteur.

Carlson, M. P. (1998). A cross-sectional investigation of the development of the function concept. *CBMS issues in Mathematics Education, 7*, 114-162.

Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S., et Hsu, E. (2002). Applying covariational reasoning while modeling dynamic events: A framework and a study. *Journal for Research in Mathematics Education, 33*(5), 352-378.

Caron, F. et Muller, E. (2005). Integrating Applications and Modelling in Secondary and Post Secondary Mathematics. *Proceedings of the 28th Annual Meeting of the Canadian Mathematics Education Study Group*, 63-80.

Caron, F. et Savard, G. (2012). Une expérience avec l'exponentielle. *Bulletin AMQ, 52*(3), 24-41.

Charbonneau, L. (1987a). Chronique : l'histoire des mathématiques. Première partie : fonction : du statisme grec au dynamisme du début du XVIIIème siècle. *Bulletin de l'AMQ*, 5-10.

Charbonneau, L. (1987b). Chronique : l'histoire des mathématiques. Deuxième partie : fonction : un personnage en quête d'auteur, le XVIIIème siècle. *Bulletin de l'AMQ*, 5-8.

Chauvat, G. (1999). Courbes et fonctions au collège. *Petit x, 51*, 23-44.

Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en didactique des mathématiques, 12*, 73-112.

Chorlay, R. (2007). La multiplicité des points de vue en Analyse élémentaire comme construit historique. Dans Barbin, E. et Bénard, D. *Histoire et enseignement des mathématiques-Rigueurs, erreurs, raisonnements* (p. 203-227). France : INRP.

Clement, J. (1985). Misconceptions in graphing. Dans *Proceeding of the Ninth International Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (p. 369-375). Utrecht, The Netherlands.

Comin, E. (2005). Variables et fonctions, du collège au lycée. *Petit x, 67*, 33-61.

Confrey, J. et Smith, E. (1994). Exponential functions, rates of change, and the multiplicative unit. *Educational Studies in Mathematics, 26*, 135-164.

Confrey, J. et Smith, E. (1995). Splitting, covariation, and their role in thedevelopment of exponential functions. *Journal for Research in Mathematics Education, 26*, 66-86.

Conseil des ministres de l'Éducation Canada (CMEC) (2016). *À la hauteur : Résultats canadiens de l'étude PISA de l'OCDE. Le rendement des jeunes du Canada en sciences, en lecture et en mathématiques.* Toronto : CMEC. Récupéré de http://www.cmec.ca/Publications/Lists/Publications/Attachments/365/Book_PISA2015_FR_Dec5.pdf

Cooney, T. J. (1999). Conceptualizing teachers' ways of knowing. *Educational Studies in Mathematics ,38*, 163–187.

Coppé, S., Dorier, J.-L., et Yavuz, I. (2007). De l'usage des tableaux de valeurs et des tableaux de variations dans l'enseignement. De la notion de fonction en France en seconde. *Recherches en didactique des mathématiques, 27*(2), 151-186.

Cousquer, E. (1995). *De la théorie des proportions à la théorie des nombres réels.* Récupéré de http://johan.mathieu.free.fr/maths/doc_maths/histoire/reels/R1-De_la_theorie_des_proportions_a_la_notion_de_nombre_reel.pdf

D'Amore, B. (2001). Conceptualisation, registres de représentation sémiotiques et noétiques : interactions constructivistes dans l'apprentissage des concepts mathématiques et hypothèse sur quelques facteurs inhibant la dévolution. *Scientia Paedagogica Experimentalis, 38*(2), 143-168.

De Cotret, S. R. (1985). Étude historique de la notion de fonction : analyse épistémologique et expérimentation didactique. [Mémoire de maîtrise]. Montréal : Université du Québec à Montréal.

De Cotret, S. R. (1987). La notion de fonction à travers les représentations graphiques dumouvement. Une expérimentation suggérée par l'histoire. Dans Bergeron, J. C., Herscovics, N. et Kieran, C. (dir.) *Actes du onzième congrès international* (Vol. III, p. 155-161). Montréal.

De Cotret, S. R. (1988). Une étude sur les représentations graphiques du mouvement comme moyen d'accéder au concept de fonction ou de variable dépendante. *Petit x,* (17), 5-27.

DeMarois, P. et Tall, D. (1996). Facets and layers of the function concept. *Proceedings of PME 20*, 2, 297-304.

De Saussure, F. (1916). *Cours de linguistique générale, publié par Ch. Bally et A. Sechehaye avec la collaboration de A. Riedlinger*. Paris : Payot.

Dhombres, J. (1988). Un texte d'Euler sur les fonctions continues et les fonctions discontinues, véritable programme d'organisation de l'analyse au 18e siècle. *Cahiers du séminaire d'histoire des mathématiques, 9,* 23-68.

Dirichlet, G. L. (1840). Recherches sur diverses applications de l'Analyse infinitésimale à la Théorie des Nombres. *Journal für die reine und angewandte Mathematik 21*, 1-12 et 134-155.

DiSessa, A. A, Hammer, D., et Sherin, B. (1991). Inventing graphing: Meta-representational expertise in children. *Journal of mathematical behavior*, 10, 117-160.

Douady, R. (1986). Jeux de cadre et dialectique outil-objet. *Recherches en didactique des mathématiques*, *7*(2), 5-31.

Dubinsky, E. et Harel, G. (1992). The nature of the process conception of function. Dans Harel, G. et Dubinsky, E. (éd.), *The concept of function: Aspect of epistemology and pedagogy* (p. 85-106). Washington : Mathematical Association of America.

Dufour, S. (2011). L'utilisation des représentations par deux enseignantes du collégial pour l'introduction de la dérivée. [Mémoire de maîtrise]. Montréal : Université du Québec à Montréal.

Duroux, A. (1982). *La valeur absolue : difficultés majeures pour une notion mineure.* [Mémoire de maîtrise]. IREM de Bordeaux.

Duval, R. (1988). Graphiques et équations : l'articulation de deux registres. *Annales de didactique et de sciences cognitives, 1*, 235-253.

Duval, R. (1991). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de didactique et de sciences cognitives, 5*, 37-65.

Duval, R. (1993). Semiosis y noesis. *Lecturas en didáctica de la matemática : Escuela Francesa*, 118-144.

Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine : Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Berne : Peter Lang.

Duval R. (1996). Quel cognitif retenir en didactique des mathématiques? *Recherche en Didactique des Mathématiques, 16*(3), 349-382.

Duval, R. (1998). Geometry from a cognitive point of view. *New ICMI Studies Series, 5*, 37-51.

Duval, R. (2003). Comment analyser le fonctionnement représentationnel des tableaux et leur diversité? *Spirale-Revue de recherches en éducation, 32*(32), 7-31.

Duval, R. (2005). Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie : développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. *Annales de didactique et sciences cognitives, 10*, 5-53.

Duval, R. (2006a). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*. 61, 103-131.

Duval, R. (2006b). Transformations de représentations sémiotiques et démarches de pensée en mathématique. Dans Rauscher, J.-C. (éd.), *Actes du XXXII^e Colloque COPIRELEM* (p. 67-89). Strasbourg : IREM.

Duval, R. (2017). *Understanding the Mathematical Way of Thinking – The Registers of Semiotic Representations*. (s.l.) : Springer.

Educlever. (2018). *Cours de mathématiques 3^e - Représentation graphique d'une fonction*. Récupéré de https://www.maxicours.com/se/fiche/1/2/268221.html/3e#

Eisenberg, T. (1992). On the development of a sense for functions. Dans Harel, G. et Dubinsky, E. (éd.), *The concept of function: Aspect of epistemology and pedagogy* (p. 153-174). Washington : Mathematical Association of America.

Esmenjaud-Genestoux, F. (2000). *Fonctionnement didactique du milieu culturel et familial dans la régulation des apprentissages scolaires*. Université de Bordeaux I.

Euler, L. (1748). *Introduction à l'analyse infinitésimale*. Traduction du latin par J. B. Labey (1797), *Introduction in analysis infinitorum*. Paris : Bachelier.

Even, R. (1990). Subject matter knowledge for teaching and the case of functions. *Educational Studies in Mathematics, 21*, 521-544.

Even, R. (1993). Subject-matter knowledge and pedagogical content knowledge: Prospective secondary teachers and the function concept. *Journal for Research in Mathematics Education, 24*, 94-116.

Even, R. (1998). Factors involved in linking representations of functions. *Journal of Mathematical Behavior, 17*, 105-121.

Fennema, E. et Franke, M. L. (1992). Teachers' knowledge and its impact. Dans Grouws, D. (éd.). *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (p. 147-164). Reston, Virginia : National Council of Teachers of Mathematics.

Fikrat, L. (1994). *La notion de fonction et ses représentations* [Mémoire de maîtrise]. Montréal : Université du Québec à Montréal.

Fonction. (2014). Dans *USITO*. Sherbrooke : Les Éditions Delisme. Récupéré le 29 avril 2017 de https://www-usito-com.proxy.bibliotheques.uqam.ca:2443/dictio/#/contenu/fonction.ad

Fourier, J. (1822). *Théorie analytique de la chaleur*. Paris : Éditions Jaques Gabay, 1988.

Gaudin, N. (2002). Conceptions de fonction et registres de Représentation : Étude de cas au lycée. *For the Learning of Mathematics 22*(2), 35-47.

Grenier, D. (2007). *Connaissance, conception et obstacle. Exemples en mathématiques*. Récupéré de http://imss-www.upmf-grenoble.fr/prevert/SpecialiteDEMS/Cours%202007/UE1/bachelardGrenier%20master%20ICA.DS.pdf

Grugnetti, L., Marchini, C. et Maffini, A. (1999). Le concept de fonction dans l'école italienne; usage de l'épistémologie et de l'histoire des mathématiques pour en clarifier le sens. *Histoire et épistémologie dans l'éducation mathématique*, 421-444.

Guzmán R., I. (1998). Registros de representación, el aprendizaje de nociones relativas a funciones: voces de estudiantes. *RELIME. Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, 1*(1), 5-21.

Haguel, M.-J., et Lemoine, C. (1993). Variable et fonction : influence de la modélisation et de la programmation fonctionnelle (Recherche) (p. 289). Sherbrooke : Département de mathématiques-Collège de Sherbrooke.

Hitt F. (1994). Teachers' difficulties with the construction of continuous and discontinuous functions. *Focus on Learning Problems in Mathematics*. Center for Teaching/Learning of Mathematics, *16*(4), 10-20.

Hitt, F. (1998). Difficulties in the Articulation of Different Representations Linked to the Concept of Funtion. *Journal of Mathematical Behavior, 17*(1), 123-134.

Hitt, F. (2000). Construction of mathematical concepts and use of symbolic calculators. *The fourth international DERIVE-TI89/92 Conference: Computer Algebra in Mathematics Education*. Liverpool, Royaume-Uni.

Hitt. F. (2002). *Funciones en contexto*. Mexico : Prentice Hall.

Hitt, F. (2003). Le caractère fonctionnel des représentations. *Annales de didactique et de sciences cognitives, 8*, 255-271.

Hitt, F. (2004). Les représentations sémiotiques dans l'apprentissage de concepts mathématiques et leur rôle dans une démarche heuristique. *Revue des sciences de l'éducation, 30*(2), 329-354.

Hitt, F. (2006). Students' functional representations and conceptions in the construction of mathematical concepts. An Exemple: The concept of limit. *Annales de didactiques et de sciences cognitives, 11*, 251-267.

Hitt, F. (2007). Utilisation de calculatrices symboliques dans le cadre d'une méthode d'apprentissage collaboratif, de débat cognitif et d'auto-réflexion. Dans Baron, M., Guin, D. et Trouche, L. (Éd.). *Environnements informatisés pour l'éducation et la formation scientifique et technique : modèles, dispositifs et pratiques* (p. 65-88). Paris : Hermes.

Hitt, F., Gonzales-Martin, A. S., et Morasse, C. (2008). Visualization and students' functional representations in the construction of mathematical concepts. An example : the concept of co- variation as a prelude of the concept of function. Dans *Proceedings of the ICME-11*. Monterrey, N. L., Mexico.

Hitt, F., Guzmán, J. et Páez, R. (2001). Que signifie être compétent dans une théorie des représentations des concepts mathématiques? Dans *Actes du Colloque Annuel du Groupe des Didacticiens des Mathématiques du Québec* (p. 173-187). Montréal : GDM.

Hitt, F. et Morasse, C. (2009). Advanced numerical-algebraic thinking: constructing the concept of covariation as a prelude to the concept of function. *Electronic journal of research in educational psychology, 7(1)*(17), 244-260.

Hitt F. et Passaro V. (2007). De la résolution de problèmes à la résolution de situations problèmes : le rôle des représentations spontanées. Dans *Actes de la Commission Internationale pour l'Étude et l'Amélioration de l'Enseignement des Mathématiques* (p. 117-123). Dobogókö, Hongrie : CIEAEM-59.

Janvier, C. (éd.). (1987). *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics*. Hillsdale, New Jersey : Erlbaum.

Janvier, C. (1998). The Notion of Chronicle as an Epistemological Obstacle to the Concept of Function. *Journal of Mathematical Behavior, 17*(1), 79-103.

Kaput, J. (1987a). Representation systems and mathematics, The notion of function as an example. Dans Janvier C. (éd.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (p. 67-71). Hillsdale, New Jersey : Erlbaum.

Kaput, J. (1987b). Towards a theory of symbol une in mathematics. Dans Janvier C. (éd.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (p. 159-195). Hillsdale, New Jersey : Erlbaum.

Kaput, J. (1991). Notations and representations as mediators of constructive processes. Dans Von Glasersfeld, E. (éd.), *Radical constructivism in mathematics education* (p. 53-74). Kluwer Academic Publishers.

Kidron, I. et Tall, D. (2015). The role of visualization and symbolism in the potential and actual infinity of the limit process. *Educational Studies in Mathematics, 88*, 183-199.

Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. Dans Grouws, D. (éd.). *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (p. 390-419). Reston, Virginia : National Council of Teachers of Mathematics.

Kieran, C. (2007) Learning and teaching algebra at the middle school through college levels. Dans Lester, F. K. (éd.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. (s. l.), IAP.

Kleiner, I. (1989). Evolution of the Function Concept: A Brief Survey. *The College Mathematics Journal*, *20*(4), 282-300.

Kuhn, T. S. (1983). *La Structure des révolutions scientifiques*. Paris : Flammarion.

Lagrange, J. L. (1797). *Théorie des fonctions analytiques contenant les principes du calcul différentiel dégagés de toute considération d'infiniments petits ou d'évanouissans de limites ou de fluxions, et réduits à l'analyse algébrique des quantités finies*. Paris.

Mac Lane, S. (1986). *Mathematics Form and Function*, Heidelberg : Springer.

Mahy, I. et Carle, P. (éd.). (2012). *Théorie U : changement émergent et innovation : modèles, applications et critique*. (s. l.) : Presses de l'Université du Québec.

Maran, T. (2017). La sémiotisation de la matière. Une zone hybride entre l'écocritique matérialiste et la biosémiotique. *Cygne noir,* (5), http://revuecygnenoir.org/numero/article/maran-semiotisation-de-la-matiere.

Markovits, Z., Eylon, B.-S. et Bruckheimer, M. (1986). Functions today and yesterday. *For the Learning of Mathematics, 6*(2), 18-28.

Markovits, Z., Eylon, B., et Bruckheimer, M. (1988). Difficulties students have with the function concept. *The ideas of algebra*, K-12, 43-60.

Mathovore (s.d.). *Exercices sur le calcul littéral, série 4*. Récupéré le 15 juillet 2018 de https://www.mathovore.fr/exercices-sur-le-calcul-litteral-quatrieme-serie-4

Maull, W. et Berry, J. (2001). An Investigation of Student Working Styles in a Mathematical Modelling Activity. *Teaching Mathematics and its Applications, 20*(2), 78-88.

Minder, M. (2001). *Didactique fonctionnelle : objectifs, stratégies, évaluation.* Bruxelles : DeBoeck.

Ministère de l'Éducation, du Loisir et du Sport (MELS). (s. d.). *Programme de formation de l'école québécoise. Enseignement secondaire, premier cycle.* Québec, Gouvernement du Québec.

Ministère de l'Éducation, du Loisir et du Sport (MELS). (2015). *Programme de formation de l'école québécoise. Mathématique.* Québec, Gouvernement du Québec. Récupéré de http://www1.mels.gouv.qc.ca/sections/programmeFormation/secondaire2/index.asp?page=math

Monk, S. (1992). Students' understanding of a function given by a physical model. Dans Harel, G. et Dubinsky, E. (éd.), *The concept of function: Aspect of epistemology and pedagogy* (p. 175-194). Washington : Mathematical Association of America.

Murillo Lopez, S. (2008). Étude d'une pratique ordinaire face à un obstacle didactique : La correction en classe de mathématiques dans le cas de la fonction réciproque. [Thèse de doctorat]. Université de Toulouse.

Nadeau, D. (2013). *Des futurs enseignants du secondaire parlent de leur préparation mathématique par les mathématiques avancées : réinvestissements et ruptures.* [Mémoire de maîtrise]. Montréal : Université du Québec à Montréal.

Nicholas, C. P. (1966). A dilemma in definition. *The American Mathematical Monthly*, *73*, 762-768.

Noël, J. (1997). L'analyse des pratiques éducatives. Un cadre éthique et symbolique pour éduquer le regard de l'enseignant. *Recherche et Formation*, (24), p. 49-69.

Norman, A. (1992). Teachers' mathematical knowledge of the concept of function. Dans Harel, G. et Dubinsky, E. (éd.), *The concept of function: Aspect of epistemology and pedagogy* (p. 215-232). Washington : Mathematical Association of America.

Parmentier M. (1989). *Leibniz; la naissance du calcul différentiel*. Paris : Vrin.

Passaro, V. (2007). *Étude expérimentale sur le développement du concept de covariation entre deux grandeurs révélé par une analyse des représentations spontanées d'élèves du premier cycle du secondaire.* (Mémoire de maîtrise). Université du Québec à Montréal, Canada.

Passaro, V. (2015). *Analyse du raisonnement covariationnel favorisant le passage de la fonction à la dérivée et des situations qui en sollicitent le déploiement chez des élèves de 15 à 18 ans*. (Thèse de doctorat). Montréal : Université de Montréal.

Passaro, V. (2016, octobre). *Des situations pour travailler la notion de fonction et préparer l'introduction à la dérivée*. Communication présentée au Congrès du GRMS, Cégep Garneau, Québec.

Peano, G. (1911). Le definizioni in matematica. *Arxivs de l'Institut de ciencies, 1*, 49-70.

Penglase, M. et Arnold, S. (1996). The graphics calculator in mathematics: A critical review of recent research. *Mathematics Education Research Journal, 8*, 58-90.

Perrin-Glorian, M. J. (1993). *Utilisation de la notion d'obstacle en didactique des mathématiques*. Cahier du séminaire Recherche/Réflexion/Interaction, IUFM de Grenoble.

Peterson, P. L. (1988). Teachers' and students' cognitional knowledge for classroom teaching and learning. *Educational researcher, 17*(5), 5-14.

Piaget, J., Grize, J.-B., Szeminska, A., et Bang, V. (1968). *Epistemology and psychology of functions.* Paris : Presses universitaires de France.

Ponte, J. P. (1992). The history of the concept of function and some educational implications. *The Mathematics Educator, 3*(2), 3-8.

Proulx, J. (2009). Réflexions préliminaires sur les connaissances mathématiques des enseignants du secondaire : Connaissances factuelles et développement de connaissances. Dans *Actes du colloque Espace Mathématique Francophone (EMF-2009).* Récupéré de http://196.1.95.56/EMF2009/Groupes %20de %20travail/GT1/Proulx.pdf

Raftopulos, A. et Portides, D. (2012). Le concept de fonction et sa projection spatiale. *Annales de didactique et de sciences cognitives, 17*, 169-194.

Richard, P. R. et Sierpinska, A. (2004). Étude fonctionnelle-structurelle de deux extraits de manuels anciens de géométrie. *Revue des sciences de l'éducation, 30*(2), 379-409.

Rogalski, J. (1984). Représentations graphiques dans l'enseignement : concepts et méthodes d'analyse appliqués au graphe de fonctions. Signes et discours dans l'éducation et la vulgarisation scientifique. *Sixièmes journées internationales sur l'éducation scientifique*. Chamonix : Giordan et Martinand éd.

Rüthing, D. (1984). Some definitions of the concept of function from Joh. Bernoulli to N. Bourbaki. *The Mathematical Intelligencer*, 72-77.

Ruthven, K. (1990). The influence of graphic calculator use on translation from graphic to symbolic forms. *Educational Studies in Mathematics, 21*, 431-450.

Saldanha, L. A., et Thompson, P. W. (1998). Re-thinking co-variation from a quantitative perspective: Simultaneous continuous variation. Dans *Proceedings of the 20th annual meeting of the north american chapter of the international group for the psychology of mathematics education* (vol. 1, p. 298-303). Raleigh, North Carolina : S. B. Berensen, K. R. Dawkins, M. Blanton, W. N. Coulombe, J. Kolb, K. Norwood & L. Stiff.

Scharmer, C. O. (2007) *Theory U: Leading from the Future as it Emerges*. Cambridge : The Society for Organizational Learning.

Schneuwly, B. (2008). *Vygotski, l'école et l'écriture* (Cahier de la section des sciences de l'éducation). Genève : Section des sciences de l'éducation.

Selden, A. et Selden, J. (1992). Research perspectives on conception of functions: Summary and overview. Dans Harel, G. et Dubinsky, E. (éd.), *The concept of function: Aspect of epistemology and pedagogy* (p. 1-16). Washington : Mathematical Association of America.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational studies in mathematics, 22*(1), 1-36.

Sfard, A. (1992). Operational origins of mathematical objects and the quandary of reification: The case of function. Dans Harel, G. et Dubinsky, E. (éd.), *The concept of function: Aspect of epistemology and pedagogy* (p. 59-84). Washington : Mathematical Association of America.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational researcher, 15*(2), 4-14.

Sierpinska, A. (1987). Sur la relativité des Erreurs. Dans *Proceedings of the 39th CIEAEM meeting* (p. 70-87). Sherbrooke : Éditions de l'Université de Sherbrooke.

Sierpinska, A. (1989). Sur un programme de recherche lié à la notion d'obstacle épistémologique. Dans Bednarz,, N. et Gamier, C. (éd.), *Construction des savoirs*. Montréal : Agence d'ARC inc.

Sierpinska, A. (1992). On Understanding the Notion of Function. Dans Harel, G. et Dubinsky, E. (éd.) *The Concept of Function. Aspects of Epistemology and Pedagogy*. (p. 25-58). Washington : Mathematical Association of America.

Skemp, R. (1971). *The psychology of learning mathematics* (2e éd.). Middlesex : Penguin Books.

Skemp, R. (1978). Relational understanding and instrumental understanding. *The Arithmetic Teacher, 26*(3), 9-15.

Stölting, P. (2008). *La pensée fonctionnelle des élèves de 10 à 16 ans – analyses comparatives et études empiriques de son enseignement en France et en Allemagne*. [Thèse de doctorat]. Universität Regenburg- Université Paris Diderot (Paris 7), Allemagne-France.

Sutherland, R. (2002). *A comparative study of algebra curricula*. Londres : Qualifications and Curriculum Authority.

Tall, D. (1992). The transition to advanced mathematical thinking: functions, limits, infinity and proof. Dans Grouws, D. (éd.). *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (p. 495-511). Reston, Virginia : National Council of Teachers of Mathematics.

Tall, D., Gray, E., Bin Ali, M. Demarois, P., McGrowen, M., Pitta, D., Pinto, M., Thomas, M. et Yusof, Y. (2001). Symbols and the bifurcation between procedural and conceptual thinking. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education, 1*, 80-104.

Thompson, P. W., et Carlson, M. P. (2017). Variation, covariation, and functions: Foundational ways of thinking mathematically. Dans J. Cai (Ed.), *Compendium for research in mathematics education* (p. 421-456). Reston, VA : National Council of Teachers of Mathematics.

Van der Veer, R. (1994). The concept of development and the development of concepts. Education and development in Vygotski's thinking. *European Journal of Psychology of Development, 9*, 293-300.

Vandebrouck, F. (2010). Espaces mathématiques de travail en analyse. Dans *Symposium Franco-Chypriote « Mathematical Working Space »* (p. 157-174). Paris.

Vandebrouck, F. (2011). Perspectives et domaines de travail pour l'étude des fonctions. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives,* (16), 149-185.

Verstappen, P. (1982). Some reflections on the introduction of relations and functions. Dans G. van Barneveld & H. Krabbendam (Éd.) *Proceedings of Conference on Functions* (pp. 166-184). Enschede, The Netherlands : National Institute for Curriculum Development.

Vinner, S. (1983). Concept definition, concept image and the notion of fonction. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology,14*(3), 293-305.

Vinner, S. et Dreyfus, T. (1989). Images and Definitions for the Concept of Function. *Journal for Research in Mathematics Education, 20*(4), 356-366.

Vygotski, L. S. (1962). *Thought and Language*. Cambridge MIT Press.

Vygotski, L. S. (1981). The genesis of higher mental functions. Dans J. V. Wertsch (éd.), *The concept of activity in Soviet Psychology*. Armonk, NY : Sharpe.

Vygotski, L. S. (1985[1933]). Le problème de l'enseignement et du développement mental à l'âge scolaire. Dans Schneuwly, B. et Bronckart, P. (éd.), *Vygotski aujourd'hui* (p. 95-117). Paris : Delachayx et Niestlé.

Yerushalmy, M. (2000). Problem solving strategies and mathematical resources: A longitudinal view on problem solving in a function-based approach to algebra. *Educational Studies in Mathematics, 43*, 125-147.

Youschkevitch, A. P. (1981). Le concept de fonction jusqu'au milieu du 19ème siècle. Fragments d'histoire des mathématiques. *Brochure APMEP*, (41), 7-68.