UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL

PREUVE ET LOGIQUE INTUITIONNISTE : LES ORIGINES DE LA SÉMANTIQUE BHK

MÉMOIRE

PRÉSENTÉ

COMME EXIGENCE PARTIELLE

DE LA MAÎTRISE EN PHILOSOPHIE

PAR

SIMON BRIEN

MARS 2019

REMERCIEMENTS

La rédaction de ce mémoire n'aurait pas été possible sans l'aide précieuse de nombreuses personnes. La tâche accomplie, j'aimerais prendre le temps de formuler mes remerciements. Je tiens d'abord à exprimer ma gratitude envers mes codirecteurs de recherche, Mathieu Marion et Alain Voizard, dont, l'enseignement, l'encadrement et les avis éclairés m'auront permis de développer les aptitudes nécessaires pour cette rédaction. J'aimerais en particulier remercier Mathieu Marion pour m'avoir donné accès à ses notes de cours sur l'histoire de la logique, particulièrement utiles pour mon chapitre 3, et pour avoir relu très attentivement et commenté soigneusement la dernière version de ce mémoire. J'aimerais également remercier Christophe Malaterre et Serge Robert pour leur aide et leurs précieux commentaires. Je ne pourrai passer sous silence l'appui de mes camarades, Alexandre B. Romano, Julien Ouellette-Michaud, William-J. Beauchemin, François-Julien Côté-Remy, Hind Fazazi et Olivier Lamy-Canuel, dont les réflexions ont eu un impact majeur non seulement sur ce mémoire, mais également sur ma vie intellectuelle.

J'aimerais également remercier le service des bourses de la Fondation de l'UQAM pour m'avoir accordé les subventions nécessaires à la réalisation de ce mémoire.

TABLE DES MATIÈRES

RÉSUMÉ

Ce mémoire porte sur un chapitre de l'histoire de la logique au vingtième siècle, soit l'émergence de logique intuitionniste, qui a longtemps été tenue pour seule rivale de la logique classique, et qui continue de jouer un rôle majeur aujourd'hui, en particulier dans le domaine où se chevauchent logique mathématique et informatique théorique, ou encore dans les fondements des mathématiques. Nous retraçons les étapes de cette émergence à partir de son origine (chapitre 1) dans la critique du principe du tiers exclu par L. E. J. Brouwer dans son texte de 1908, « Que les principes logiques ne sont pas fiables », dont nous montrons qu'elle est basée sur des thèses philosophiquement problématiques sur la construction des objets mathématiques dans l'intuition et sur le divorce radical entre la pensée et le langage dans lequel on communique ces constructions mentales. La logique étant affaire de langage, par des inférences logiques faisant usage du tiers exclu on peut dériver des formules auxquelles plus aucune construction mentale ne correspond, d'où la non-fiabilité de ce principe.

Dans le chapitre 2, nous montrons comment ces thèses sont abandonnées par l'étudiant de Brouwer, A. Heyting, ce qui ouvre la voie à une formalisation de la logique intuitionniste. Nous examinons aussi rapidement une objection de M. A. E. Dummett, qui justifie après coup la démarche de Heyting. Dans le chapitre trois, en prenant pour point de départ l'axiomatisation de la logique classique dans les travaux de Hilbert (en 1923 et 1927) nous retraçons soigneusement les étapes ayant mené à la formalisation de Heyting en 1930, dans les travaux de Kolmogorov, d'Orlov et de Glivenko, ainsi qu'à élaboration d'une sémantique des preuves pour la logique intuitionniste, dont le nom « BHK » dérive des initiales de ses concepteurs. Nous concluons sur les travaux de Gentzen, en montrant comment il reprend l'idée de Brouwer de la preuve comme acte, et comment il implémente la sémantique BHK dans son calcul de déduction naturelle intuitionniste, tout en ouvrant de nouveaux horizons pour la logique intuitionniste.

Mots clés : Logique formelle, Fondements des mathématiques, Intuitionnisme, Déduction naturelle

INTRODUCTION

Nous vivons dans une période de « pluralisme logique ». Plusieurs logiques ont acquis droit de cité (logique intuitionniste, logiques de la pertinence, logiques paraconsistantes, logiques affines ou BCK, etc.). Elles sont utilisées dans une variété de contextes et il n'est guère possible de déclarer, en « moniste », qu'il n'existerait qu'une seule logique, les autres étant en quelque sorte dans l'erreur. On cherche plutôt une perspective à partir de laquelle on peut les retrouver, comme celles des logiques « sous-structurales », où l'élimination d'une ou des règles structurelles pour le calcul des séquents classique permettrait de retrouver les différentes logiques[1]. Pourtant, il n'y a qu'une génération de cela, seule la logique intuitionniste semblait en mesure de rivaliser avec la logique classique, qui dominait notre paysage intellectuel. Ce mémoire a pour but de retracer la genèse de cette logique intuitionniste.

Certaines de ces logiques, comme les logiques affines, n'ont pas d'origine ou même de justification philosophique particulière, d'autres en ont une : la logique intuitionniste, comme nous le verrons, provient de l'œuvre du mathématicien néerlandais L. E. J. Brouwer (1881-1966)[2], les logiques de la pertinence dans la critique de l'implication par C. I. Lewis, etc. L'idée de retracer la genèse d'une logique est de faire ressortir les arguments philosophiques qui en ont fourni le ou les motifs, et d'expliquer les raisonnements au niveau sémantique, et par là-même au niveau syntaxique, qu'ils justifient. S'il est encore question de nos jours d'évaluer les différentes logiques, l'examen des arguments philosophiques qui les sous-tendent reste pertinent. C'est dans ce but que nous examinerons l'histoire de la logique intuitionniste.

---

[1] Voir *Schroeder-Heister & Došen 1993* et *Restall 2000.*

[2] Les écrits de Brouwer sont recueillis dans les deux volumes de ses *Collected Works* (*Brouwer 1975*).

La logique intuitionniste est née de la critique du principe du tiers exclu par Brouwer dans un court texte de 1908, « Que les principes de la logique ne sont pas fiables »[3]. Dans ce mémoire, nous examinerons dans le chapitre 1 (après quelques préliminaires pour définir certaines notions) cette critique en faisant bien ressortir en quoi elle est redevable de positions philosophiques constructivistes sur les entités mathématiques et sur un divorce radical entre pensée et langage : pour Brouwer, le mathématicien construit par des actes mentaux les entités mathématiques et s'il désire les communiquer, toute formulation dans le langage de ses constructions mentales est en principe défectueuse. Il faut donc se méfier du langage et, *a fortiori*, de la logique, qui n'est affaire que des régularités dans le langage. En particulier Brouwer cible, comme nous le verrons, principe du tiers exclu : une fois les constructions mentales du mathématicien exprimées dans le langage, on peut à l'aide de la logique faire de nouvelles inférences dont le résultat pourrait ne correspondre à aucune construction mentale possible. On verra pourquoi le principe du tiers exclu est fautif à cet égard.

Ces thèses philosophiques sur la construction dans l'intuition et le divorce entre pensée et langage sont en soi controversées, et elles ont aussi le défaut de barrer la route à la possibilité même d'une logique intuitionniste qui soit en accord avec les principes constructivistes de Brouwer. Il reviendra à son étudiant Arend Heyting (1898-1980) de laisser de côté les thèses philosophiques, de formaliser la logique intuitionniste et d'en donner une sémantique des preuves pour remplacer la sémantique des conditions de vérité (dans les tables de vérité) associée à la logique classique. Nous examinerons son cheminement à travers les chapitres 2 et 3. Dans le chapitre 2, nous montrerons comment il a mis de côté les thèses philosophiques de Brouwer, tout en examinant rapidement une objection de Michael Dummett (1925-2011) qui justifie cet abandon. Dans le chapitre 3, nous avons voulu étudier avec soin comment s'est mise en place la logique intuitionniste et la sémantique des preuves dans les travaux de Kolmogorov,

---

[3] Voir *Brouwer 1908*.

Glivenko et Heyting. Parmi les problèmes soulevés dans leurs textes il y a la question de la validité de la règle de l'*ex falso*, et il faut souligner qu'en rejetant cette dernière Orlov a présenté ce qui est en fait la première axiomatisation de la logique de la pertinence, car cela montre la proximité des deux logiques.

Le travail qu'effectuèrent ces auteurs consistait à réviser la liste des axiomes de la logique classique qu'ils trouvèrent chez Hilbert (dans des textes de 1923 et 1927), en appliquant les thèses de Brouwer à l'examen de ces axiomes. De cet examen allait aussi ressortir ce qu'on appelle l'interprétation ou sémantique « BHK », à partir des initiales de Brouwer, Heyting et Kolmogorov, qui est aujourd'hui standard. Mais il revient à Gerhard Gentzen de faire un pas de plus en remplaçant le modèle axiomatique comme syntaxe par ses calculs de déduction naturelle et des séquents, qui reflètent encore plus fidèlement l'idée de Brouwer que les preuves sont des actes, tout en donnant dans son calcul de déduction naturelle intuitionniste une interprétation de la sémantique BHK. Nous terminerons notre étude sur ces développements.

L'interprétation de la philosophie de Brouwer est sujette à controverse. Dès 1983, Göran Sundholm avait critiqué l'interprétation de Brouwer qu'on retrouve entre autres dans sa recension des *Collected Works* de Brouwer[4]. Pourtant Dummett a joué un énorme rôle dans l'histoire de l'intuitionnisme, entre autres en proposant une fondation de celui-ci dans la théorie de la signification[5] plutôt que sur un divorce entre pensée et langage, et pour avoir introduit l'intuitionnisme dans la philosophie analytique à travers son propre « antiréalisme ». Plus récemment, les rapports de Brouwer et de Heyting à Husserl et à la phénoménologie ont beaucoup été étudiés[6], et on tend aujourd'hui à présenter un portrait de Brouwer certes plus juste au niveau philosophique, et au demeurant fort intéressant, mais qui fait passer au second plan la nécessité de passer

[4] Voir *Dummett 1980* et *Sundholm 1983.*

[5] Voir les deux articles traduits dans *Dummett 1991a.*

[6] Voir par exemple *Tieszen 1989* et *van Atten 2007.*

outre à certaines de ses thèses pour développer la logique intuitionniste. Notre mémoire n'a pas pour but d'arbitrer ces questions, mais son parti pris le place dans la lignée de Heyting et de Dummett.

*

Pour terminer, deux remarques sur le texte. La lecture de ce mémoire présuppose une connaissance minimale de la logique propositionnelle et de la logique des prédicats du premier ordre, y compris de la déduction naturelle de Gentzen, et les symboles logiques utilisés sont tout à fait usuels, de sorte qu'il ne nous a pas semblé nécessaire d'alourdir le texte avec les explications d'usage. Par ailleurs, nous avons décidé, pour aider à la compréhension du texte de référer, lorsqu'il s'agit des principales figures historiques de ce mémoire, à la date de publication originale d'un texte, bien que la plupart du temps nous utilisions une traduction française ou anglaise. Le lecteur trouvera dans la bibliographie, suite à la référence de l'original, celle de la traduction employée. Par ailleurs, dans quelques cas nous renvoyons à des auteurs classiques en utilisant les conventions de référence usuelle sans fournir d'indication bibliographique.

CHAPITRE 1

Brouwer : du constructivisme à la critique du tiers exclu

Avant de débuter notre présentation de la philosophie des mathématiques de Brouwer, il importe d'apporter quelques précisions sur des concepts présents tout au long de ce mémoire. Dans un premier temps (section 1.1), nous définissons rapidement les principes du tiers exclu, de non-contradiction et de bivalence. Cette présentation nous permettra par la suite de mieux comprendre la façon dont ceux-ci sont critiqués par Brouwer dans sa philosophie des mathématiques. Par la suite (section 1.2), nous présentons le concept de preuve mathématique en distinguant les preuves « constructives » des preuves qui ne le sont pas, pour ensuite présenter (section 1.3) les conceptions de Brouwer et sa critique du principe du tiers exclu.

1.1 Les principes de non-contradiction, du tiers exclu et de bivalence

Selon le principe de non-contradiction, il est impossible d'affirmer et de nier en même temps la même proposition. Dans la *Métaphysique,* Aristote présente ce principe de la manière suivante :

> Il est impossible que le même attribut appartienne et n'appartienne pas en même temps, au même sujet et sous le même rapport, sans préjudice de toutes les autres déterminations qui peuvent être ajoutées, pour parer aux difficultés logiques. (*Met.*, Γ, 3, 1005b, 19-23)[7]

---

[7] Ce principe ne trouve pas son origine chez Aristote, on le trouve sous la même forme auparavant chez Gorgias, dans la *Défense de Palamède* (DK 82 B 11, §25) et dans Platon, *Apologie* 26e-27b, *Gorgias* 495e-496a, *République* IV 436e-437a et X 602e, et *Sophiste* 230b.

Selon Aristote, il est impossible de concevoir qu'un sujet x puisse posséder et ne pas posséder un attribut ou prédicat F, au même moment, sous le même rapport, etc. Donc, ce principe devrait être représenté formellement comme suit :

$$\forall F \, \forall x \neg (Fx \,\&\, \neg Fx)$$

On peut cependant, pour les besoins du mémoire l'exprimer sous forme propositionnelle par l'impossibilité d'affirmer la conjonction :

$$A \,\&\, \neg A$$

Soit:

$$\neg (A \,\&\, \neg A)$$

La raison principale de cette interdiction est appelée depuis le Pseudo-Scotus « *ex contradictione quodlibet* » – nous le reverrons dans le chapitre 3 sous le nom « d'*ex falso* » pour « *ex falso sequitur quodlibet* » – ou de nos jours le « principe de l'explosion » : en effet, de A on peut introduire $A \vee B$, et de $A \vee B$ et $\neg A$ on peut déduire B, ce qu'on peut écrire dans la notation bidimensionnelle de Gentzen ainsi :

$$\dfrac{\dfrac{A}{A \vee B} \qquad \neg A}{B}$$

Ceci n'est qu'une instance du « syllogisme disjonctif », déjà connu des Stoïciens. Donc, d'une contradiction on peut en deux étapes dériver n'importe quel B, et le système logique n'a plus aucune valeur, puisqu'on peut y dériver n'importe quoi. Dans *Métaphysique* Γ, 3, Aristote donne un argument pour défendre ce principe contre ses adversaires (au premier chef Héraclite), qui est de nature « dialectique ». Celui-ci est controversé dans notre contexte contemporain[8], où des systèmes de logique « paraconsistante » ont été développés pour éviter cette « explosion », en rejetant notamment le syllogisme disjonctif comme forme d'inférence valide[9].

Dans la *Métaphysique*, Aristote donne également une définition du principe du tiers exclu :

> Mais il n'est pas possible non plus qu'il y ait aucun intermédiaire entre des énoncés contradictoires : il faut nécessairement ou affirmer, ou nier un seul prédicat, quel qu'il soit, d'un seul sujet. (*Met.*, Γ, 7, 1011b, 23-25)

De manière analogue, nous pouvons représenter ce principe de manière propositionnelle comme suit :

$$A \vee \neg A$$

Dans le contexte de l'œuvre de Brouwer, il faut signaler d'emblée que le principe du tiers exclu sert de caution à la méthode de preuve par l'absurde ou *reductio ad absurdum*. Cette méthode consiste à démontrer la vérité d'une proposition en démontrant que l'hypothèse de sa contradictoire mène à une contradiction, représentée ici par le symbole « $\bot$ » pour « l'absurdité ». On peut voir très facilement ceci : pour prouver A, on fait l'hypothèse que $\neg A$ et on démontre que de cette dernière une contradiction s'ensuit, donc qu'on ne peut pas affirmer $\neg A$, soit $\neg\neg A$. Or pour pouvoir affirmer A, il faut que

$$\neg\neg A \rightarrow A$$

[8] Voir, par exemple, *Evans 1999*.

[9] Voir, par exemple, *Rivenc 2005* pour une introduction à la logique de la pertinence.

Ce qui est justement équivalent au tiers exclu :

$$A \vee \neg A.$$

La converse est aussi possible :

$$A \rightarrow \neg\neg A,$$

Celle-ci n'est pas problématique pour une raison que nous verrons plus loin.

Contrairement aux principes de non-contradiction et du tiers exclu, qui sont de nature syntaxique, le principe de bivalence est sémantique. Celui-ci stipule que tout énoncé est soit vrai, soit faux[10]. Deux conditions sont présupposées, soit qu'un énoncé ne peut être ni vrai ni faux, et qu'un énoncé ne peut être à la fois vrai et faux. Ces conditions impliquent que tout énoncé possède une valeur de vérité, et que celle-ci doit être de manière exclusive le vrai ou le faux. Comme l'indique Michael Dummett, qui a fait de la critique de ce principe la charnière de son « antiréalisme »[11], la bivalence est liée au « réalisme » sémantique[12]. Pour expliquer cela, prenons la conjecture de Goldbach : « Tout nombre naturel pair plus grand que 2 est la somme de deux nombres premiers ». Même si nous avons des raisons de croire qu'elle est vraie, entre autres parce que nous ne connaissons aucun contrexemple, nous ne savons pas si cette conjecture est vraie ou fausse, car nous n'en avons aucune *preuve*. En l'absence de celle-ci, l'idée qu'elle est vraie ou fausse (la bivalence) requiert que nous postulions qu'une réalité la rende vraie

---

[10] Voir, par exemple, *Tennant 1997*, p. 36.

[11] Voir en particulier les deux articles traduits dans *Dummett 1991a*, mais aussi *Dummett 1978*, *Dummett1991b*, et *Dummett 1993*. L'antiréalisme de Dummett constitue un argumentaire pour la révision de la logique classique en faveur de la logique intuitionniste qui, bien que fort intéressant, ne sera pas abordé dans ce mémoire, celui-ci portant strictement sur la genèse de la logique intuitionniste.

[12] Heyting fera, quoi que tardivement, une distinction entre « logique de l'être » pour la logique classique et « logique du savoir » pour la logique intuitionniste qui recoupe ce point, et il remarquait à cet effet que « la logique a besoin, pour son interprétation, d'une ontologie » (*Heyting 1956b*, p. 226).

ou fausse *indépendamment* de notre connaissance – voire, dans le cas d'énoncés indécidables de notre capacité même à connaître en principe - celle des objets mathématiques conçus, conçus sous un mode « platoniciens » (c'est-à-dire non-« naturaliste », puisque leur existence est hors du cadre spatiotemporel de la physique). En d'autres termes, la conjecture de Goldbach, comme tout autre énoncé mathématique que nous pourrions formuler, est déjà rendue vraie ou fausse par cette réalité mathématique indépendamment de nous, il n'y a ici qu'un défaut de connaissance de celle-ci de notre part, et ce n'est pas en fournissant une preuve qu'elle devient vraie : la preuve n'est qu'un moyen pour nous de nous assurer qu'elle est vraie en vertu de cette réalité.

On verra que Brouwer ne discute pas du tiers exclu en ces termes exacts, mais l'idée que l'on vient d'exprimer est très importante pour comprendre sa critique : on ne peut soutenir le principe du tiers exclu (du moins son applicabilité universelle en mathématiques) que dans la mesure où on doit postuler une *réalité extra-mentale* qui rend les énoncés mathématiques vrais ou faux indépendamment de notre capacité à les reconnaître comme vrais ou faux.

1.2 Sur la distinction entre preuve « constructive » et « non constructive »

Selon une définition standard en logique mathématique[13], une « preuve » est une suite finie de formules bien formées débutant par un ou des axiomes tirés d'un ensemble fini de ceux-ci, dont chaque étape est une inférence immédiate résultant de l'usage d'une règle, provenant elle-même d'un ensemble fini de règles, et se terminant par la formule prouvée. Le principe du tiers exclu joue un rôle crucial dans la suite de ce mémoire,

[13] Voir *Church 1956*, p. 52-53.

puisque qu'on peut ne pas vouloir reconnaître comme « preuve » valide une suite de ce genre qui en ferait usage.

La preuve du théorème selon lequel « Il existe 2 nombres irrationnels a et b et un nombre rationnel c, tel que $a^b = c$ » que voici montre bien qu'on peut utiliser pour faire des preuves « logiques », qui ont l'apparence d'être vides de contenu mathématique[14] :

> Soit le nombre $(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$ est rationnel, soit il est irrationnel.
>
> S'il est rationnel, il suffit de prendre $a = b = \sqrt{2}$, donc $c = (\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$. Donc a et b sont donc irrationnels et c rationnel, ce qui est le résultat recherché.
>
> Si $(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$ est irrationnel, il suffit de prendre plutôt $a = (\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$ et b = $\sqrt{2}$. Pour $a^b = c$, on a alors :
>
> $$(\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = (\sqrt{2})^2 = 2,$$
>
> soit encore une fois le résultat recherché : a et b irrationnels et c rationnel.

Cette preuve fait usage du tiers exclu avec la disjonction de cas entre celui où $(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$ est rationnel et le cas contraire où le nombre est irrationnel. L'existence de ces deux possibilités n'est démontrée que par l'idée qu'il nous faut choisir l'une d'entre elles afin d'éviter une contradiction. Or cette preuve ne nous dit pas laquelle des deux disjonctions est la *bonne*, puisque ni la rationalité, ni l'irrationalité $(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$ ne sont prouvées, et c'est bien la preuve d'un des deux membres de la disjonction qui en fournirait le contenu mathématique. Le critère invoqué ici en est un d'*insuffisance*. On peut en effet critiquer les preuves faisant usage du tiers exclu pour leur *manque d'information*.

---

[14] Cet exemple est très courant, voir, par exemple, *Troelstra & van Dalen 1988*, p. 7-8.

Ce qu'on appelle le « constructivisme » en mathématiques[15] remonte à l'œuvre de Leopold Kronecker (1823-1891) et son projet « d'arithmétisation » de l'algèbre et de l'analyse (la théorie des nombres réels), fondant ces disciplines sur la notion de nombre naturel, et en utilisant que des définitions de propriétés dont on peut vérifier, dans un nombre fini d'étapes, si un nombre quelconque la possède ou non[16]. Kronecker rejetait par conséquent toute preuve d'existence d'un nombre, qui ne fournirait pas une méthode pour trouver ce nombre en un nombre fini d'étapes. Refaire l'analyse mathématique sur une base constructiviste de ce genre, avec des définitions « numériques », comme dans l'ambitieux et plus récent projet d'Errett Bishop (poursuivi par Douglas Bridges) permet l'obtention de résultats plus satisfaisants à cet égard[17]. On peut néanmoins répondre à cela que la preuve non constructive reste toutefois valide, même si elle peut être moins satisfaisante à d'autres égards, et de surcroît que, contrairement à ce genre d'exemples, certaines preuves non constructives sont extrêmement difficiles à obtenir, apportant un lot d'information ; elles ont donc leur utilité. On verra que la critique de Brouwer n'est pas de cette nature ; ce n'est pas un argument de nature « pragmatique », mais un argument de principe sur la *fiabilité* de l'usage du tiers exclu dans certains contextes mathématiques.

On peut en comprendre immédiatement la nature en rappelant ce que nous avons vu : que le principe du tiers exclu est équivalent à l'élimination de la double négation :

$$\neg\neg A \rightarrow A$$

---

[15] Pour plus d'informations sur le constructivisme mathématique, son histoire, ses principes et les différentes écoles, voir *Bridges & Richman 1987*, *Troelstra & van Dalen 1988* ou *Edwards 2005*.

[16] Voir *Marion 1995a*.

[17] Voir *Bishop & Bridges 1985*. Il faut cependant faire attention car Bishop utilise des principes « d'omniscience » contre lesquels Brouwer a en fait donné des contrexemples, tandis qu'il rejette l'usage de la notion de suite de choix, donc son constructivisme ne correspond pas à l'intuitionnisme de Brouwer. Pour plus d'informations, voir *Bridges & Richman 1987*, chapitre 1.

qu'on peut présenter sous la forme d'une règle de déduction naturelle :

$$\frac{\neg\neg A}{A}$$

Et nous avons aussi vu que celle-ci est impliquée dans la preuve par l'absurde, qu'on peut réécrire comme suit :

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\neg A\\ \vdots\\ \bot\end{array}}{\neg\neg A}}{A}$$

Pour Brouwer, on n'a pas prouvé A, mais seulement que l'hypothèse de son contraire $\neg A$ mène à l'absurdité, donc que $\neg\neg A$: l'étape suivante de l'élimination de la double négation ne comporte aucun contenu autre que logique, il n'y a pas de « construction » mathématique de A, juste une affirmation vide que cela doit être le cas[18].

En vertu de ce que nous avons expliqué dans la section précédente, l'usage du tiers exclu (l'élimination de la double négation) est justifié philosophiquement par une ontologie réaliste des objets mathématiques : si l'hypothèse que $\neg A$ mène à une absurdité, c'est que $\neg A$ est fausse et donc que la réalité mathématique doit rendre A vraie, même si on ne peut « construire » A. L'adoption d'une thèse « constructiviste » dans la lignée de celle de Kant, pour qui les mathématiques procèdent « par

[18] Si A était un énoncé portant sur l'existence d'un nombre, Kronecker aurait parlé d'une preuve d'existence « pure » dans la mesure on la preuve ne donne pas une méthode pour trouver ce nombre en un nombre fini d'étapes.

construction de concepts »[19] rend caduque cette justification ontologique du tiers exclu. Dummett parlera plutôt de l'adoption d'une théorie de la signification « antiréaliste ». Dès sa thèse de doctorat, Brouwer se réclame de Kant[20]. Son adoption d'une thèse constructiviste, qui n'est pas tout à fait celle de Kant, le mènera à formuler dès l'année suivante une critique du tiers exclu d'une très grande portée, puisqu'elle est à l'origine de la logique intuitionniste. Celle-ci fait l'objet de ce mémoire au détriment des contributions de Brouwer aux fondements des mathématiques proprement dits, mais nous devrons y faire allusion à l'occasion.

1.3 Brouwer et la naissance de l'intuitionnisme

Les écrits de Brouwer s'échelonnent sur cinq décennies, du début du vingtième siècle au milieu des années cinquante, avec un intervalle d'environ dix ans, dans les années trente, durant lequel il ne publiera rien. Les raisons de ce silence à un moment crucial sont difficiles à évaluer, van Dalen l'attribue à un événement majeur : son renvoi de la direction de la revue *Mathematische Annalen* par Hilbert, qui a brisé ses ambitions[21]. Malgré l'absence de changements radicaux, on peut noter une évolution de la pensée de Brouwer sur certains points, entre les publications des premières années et celles, tardives, de l'après-guerre, y compris sur les aspects de sa philosophie qui nous intéressent[22]. Entre autres, Brouwer abandonnera l'idée d'une intuition directe du continu avec laquelle il ouvre sa thèse de doctorat *Sur les fondements des mathématiques* (*Over de Grondslagen der Wiskunde*) en 1907.

---

[19] I. Kant, *Critique de la raison pure*, A 713/B 741.

[20] Voir *Brouwer 1907*, p. 68-69, où Brouwer propose de « rectifier et mettre à jour » le point de vue de Kant.

[21] Voir *van Dalen 1990* et *van Dalen 2005*, section 15.3.

[22] Pour des présentations tardives de l'intuitionnisme, voir *Brouwer 1948* ou *Brouwer 1952*.

Ce mémoire portant sur les origines de la logique intuitionniste, ces dernières ne sont donc pas pertinentes et je me contenterai dans la prochaine section d'une présentation basée sur la thèse de doctorat de 1907, mentionnée ci-dessus, et d'un texte antérieur, de 1905 : « Vie, art et mysticisme » (*Leven, kunst en mystik*), qui n'a aucun contenu mathématique, mais qui nous donne plusieurs pistes pour comprendre ce « mysticisme », qui est à la source de ses thèses les plus fondamentales sur l'intuition mathématique. Mon but dans la prochaine section est d'expliquer les thèses de Brouwer sur l'intuition et le divorce entre les mathématiques et le langage, dont je montrerai par la suite qu'elles sont impliquées dans sa critique du principe du tiers exclu.

La pensée de Brouwer sur ces questions est beaucoup plus complexe que nous ne laisserons entendre[23], et nous devrons nous en tenir à l'essentiel. Nous devrons donc laisser, entre autres, de côté son implication aux côtés de Frederik van Eeden et Gerrit Mannoury dans le mouvement hollandais « *Significa* », inspiré du livre de Lady Victoria Welby *Significs and Language* (1911)[24]. Cette implication méritait d'être soulignée car, contrairement aux liens avec la phénoménologie, cet aspect de la philosophie de Brouwer semble avoir été peu exploité dans la littérature secondaire[25].

1.3.1 Intuition et langage

De manière inusitée pour une thèse en mathématiques, Brouwer présente une réflexion philosophique sur le thème de la conscience et de la relation entre celle-ci et le monde extérieur. La philosophie de l'esprit de Brouwer décrit le développement de la conscience selon trois phases distinctes.

---

23 Voir *van Stigt 1990*, chapitre v, pour une étude plus exhaustive.

24 Voir *Welby 1985* et *Schmitz 1990*, section iv, pour le mouvement hollandais.

25 Pour un aperçu de l'implication de Brouwer, voir *van Stigt 1990*, p. 67-71 et *van Dalen 1999*, sections 7.2, 7.5-7.6 & 10.1.

Dans la première phase, naïve, de développement de la conscience porte sur la notion du Soi, décrite pour la première fois dans « Vie, art et mysticisme ». Brouwer y présente le Soi en tant qu'état où la conscience se voit repliée sur elle-même, sur son intériorité (Brouwer 1905, p. 2). Le Soi semble être, à ce stade, l'unique entité existante reconnue comme telle par la conscience, et Hesseling interprète cela comme une forme de solipsisme[26]. Cette conscience repliée sur elle-même semble être à mi-chemin entre l'immobilisme et la capacité de percevoir des sensations, le Soi n'est pas encore apte à réagir adéquatement aux sensations. Même les notions fondamentales que sont le temps et l'espace ne sont pas présentes. Il n'y a pas de distinction nette entre la conscience et ses sensations. En conséquence, les sensations dont elle ferait l'expérience ne sont pas encore portées vers des objets externes et indépendants, qui seraient distincts de la conscience[27].

La conscience ne peut rester éternellement immobile, elle en vient à se détourner du Soi, portant désormais son attention sur ses perceptions et sensations quant aux objets peuplant le monde extérieur. Brouwer y voit la disparition de la phase « naïve » de la conscience et l'arrivée de « l'intuition primordiale » (*Urintuition*). Cette intuition surgit à partir du moment où l'agent est apte à faire une discrimination temporelle entre les divers éléments présents à lui (Brouwer 1907, p. 53). Dans cette phase, la conscience s'ouvre à ce qui est extérieur à elle et devient ainsi dynamique, capable de penser la temporalité. Et cette action de la conscience permet de différencier deux objets distincts, l'un passé et l'autre présent. Cette relation entre ces deux objets résulte en une « bi-unité ». L'intuition primordiale donc permet de percevoir deux objets distincts, mais liés – sans être équivalents, ces objets forment une paire, qui constitue le fondement de la « bi-unité ». Cette construction mentale de la « bi-unité », peut ensuite

---

[26] Voir *Hesseling 1999*, p. 27.

[27] Dans les termes de Brouwer, le processus « d'objectification » qui est responsable de l'émergence du caractère intentionnel des sensations, n'a pas encore commencé, voir *Placek 1999*, p. 20.

être répétée de manière illimitée, ce qui permet la construction de suites, dont celle des nombres naturels, en répétant l'action réalisée lors de l'intuition primordiale, construisant ainsi chaque nouvel élément de la suite par le biais d'un nouvel acte mental. Ce processus est décrit en 1912, dans « Intuitionisme et formalisme » (*Intuitionismus und Formalismus*) comme suit :

> L'intuitionisme considère la distanciation d'instants vécus en parties qualitativement distinctes, qui ne se réunissent qu'en restant séparées par le temps, comme le phénomène fondamental de l'intellect humain, phénomène qui, par abstraction de son contenu émotionnel, donne le phénomène fondamental de la pensée mathématique, l'intuition de la dyade (bi-unité) pure. Cette intuition de la dyade, intuition originaire des mathématiques engendre non seulement les nombres un et deux, mais aussi tous les nombres ordinaux finis, attendu que l'un des éléments de la dyade peut être pensé comme une nouvelle dyade, et que ce processus s'itère indéfiniment. (*Brouwer 1912*, p. 43)

Selon Brouwer, la construction des suites mathématiques s'effectue selon deux niveaux d'abstraction successifs. Dans le premier niveau, les suites mathématiques contiennent des ensembles dénombrables d'objets, dont la succession est réglée selon leur ordre temporel de construction[28]. Des différents types de suites mathématiques, Brouwer suggère que la suite des nombres ordinaux est la première à être construite par l'agent. Cette construction des nombres ordinaux trouve sa source dans la bi-unité composée d'un « avant » et du « maintenant ». Par cette composition, l'agent peut par la suite passer du « avant » ou 1 au « maintenant », c'est-à-dire à 2. Cependant, l'étape du « maintenant » ne peut durer éternellement et devient elle-même un « avant », ce qui nécessite la construction d'un nouveau « maintenant », qui correspond au 3. En d'autres termes, le second élément d'une bi-unité finit par se « détacher », permettant l'apparition d'une nouvelle bi-unité entre 2 et 3 sur la base de l'ancienne bi-unité

[28] *Brouwer, 1907*, p. 45.

constituée de 1 et 2. C'est ainsi que la conscience génère la construction de la suite des nombres naturels.

S'il est nécessaire, ce premier niveau d'abstraction n'est toutefois pas suffisant, comme l'indique Sundholm :

> The temporal attention does not suffice to give mathematics. For this we need the mathematical *Urintuition* which results from divesting the temporal dualities of all objectual content so that only the pure form, 'the common substratum', of all pairs remains. (Sundholm 1984, p. 269)

En effet, vient ensuite un second niveau d'abstraction caractérisé par l'abandon de l'ordre temporel, la conservation de la temporalité devenant un obstacle pour la construction des mathématiques. Le mathématicien peut dès lors construire de nouveaux nombres, non plus selon la dynamique d'un « avant » et d'un « maintenant », mais bien en introduisant ceux-ci *entre* les nombres déjà existants. Cette notion « d'entre » (ou « between » dans la citation à l'instant) implique également que ce processus peut être potentiellement répété à l'infini, comme le suggère Brouwer : « The between that is never exhausted by the insertion of new units »[29].

Cette deuxième possibilité permet à Brouwer de concevoir une construction du continu mathématique, le mathématicien pouvant effectuer le choix de continuer ce processus par un nouveau « entre » entre tel ou tel nombres déjà construits plutôt qu'entre tel ou tel autres nombres, etc., générant ainsi les suites infinies qui correspondent dans les mathématiques classiques aux nombres entre 0 et 1, sans être restreint à l'application de règles récursives. Nous sommes ici à l'origine de la théorie des suites de choix et du

---

[29] *Brouwer 1907*, p. 8.

continu de Brouwer, qui forme le cœur de ses mathématiques, en relation avec ses travaux en topologie, et un des motifs de son rejet du tiers exclu[30].

Il importe de comprendre à ce stade que les constructions mathématiques sont effectuées selon Brouwer dans la conscience *sans aide du langage*, il y a donc une forme de divorce, les mathématiques étant conçues comme une activité non-langagière ; c'est ce qu'il appellera le « premier acte de l'intuitionnisme » [31]. Comme le suggère van Stigt, cette séparation est liée au caractère solipsiste du mentalisme brouwerien :

> It is based on Brouwer's solipsist principle of the absolute privacy of mind, the closedness of the world of individual consciousness and its monopoly of thought. Thinking is the exclusive act and function of individual man; the world of thought is the world of the Subject, the Inner as well as the Exterior World. Speaking by its very nature is an activity of social man, a physical instrument of physical man for provoking action by others. (*van Stigt 1990*, p. 199)

Cette conception solipsiste était déjà présente dans « Vie, art et mysticisme » où Brouwer parle d'une absence de lien communicationnel entre les différents esprits ou « âmes » :

> From life in the mind follows the impossibility to communicate directly with others, instinctively through and beyond gestures and looks, or even more immaterially through the separation of distance. People then try and drill their off-spring in some form of communication through signs, crude sounds, painfully and helplessly; for never has anyone been able to communicate with others, soul-to-soul. (*Brouwer 1905*, p. 37)

---

[30] Voir sur les « suites de choix » l'étude classique de *Troelstra 1977*. Il n'est pas possible de présenter ces développements dans le cadre de ce mémoire.

[31] Par exemple, *Brouwer 1952*, p. 509-510.

L'aspect purement privé et individuel de l'acte mathématique empêche donc tout lien direct entre les différents esprits. C'est pourquoi le langage est indispensable, devenant un médium de transmission et de publicisation des pensées mathématiques privées. Pour Brouwer, le langage a donc une fonction principalement sociale en rendant possible ces échanges d'information entre les individus, et ce n'est qu'après avoir construit mentalement les suites mathématiques, qu'un mathématicien peut désirer les exprimer dans le langage, dans le but de les communiquer à d'autres personnes.

Bien qu'indispensable, l'utilisation du langage n'en demeure pas moins problématique pour communiquer des constructions mathématiques. Cette difficulté est principalement liée selon Brouwer aux multiples imperfections du langage et à son caractère instable. Cette instabilité du langage serait causée par le fait que deux individus (le locuteur et son auditeur) utilisant le même mot peuvent très bien exprimer des pensées complètement différentes, ou comme l'explique Brouwer :

> ...when using the same words even in the most restricted sciences and referring to the fundamental concepts from which they have been constructed, two people will never think the same. (*Brouwer 1905*, p. 37)

En utilisant un langage commun, ces deux individus en viennent à utiliser les mêmes mots et symboles afin d'exprimer leurs pensées privées. Le problème est qu'il n'existe aucune façon d'évaluer si ces mots et symboles représentent des pensées similaires. Il n'existe donc aucune base sur laquelle nous pouvons vérifier l'exactitude des pensées lorsque qu'exprimées dans un langage commun.

Face au caractère instable du langage commun, l'idée de vouloir créer un nouveau langage aurait pu sembler être la solution au problème. Toutefois, comme l'explique Brouwer, l'idée d'un langage « mathématiquement pur » pouvant exprimer fidèlement la réalisation de la démonstration mathématique semble irréalisable. En effet, toute révision du langage commun ne semble pas apporter une solution au problème principal, celui de garantir l'exactitude des différentes pensées exprimées par les mêmes mots ou symboles :

> … ni le langage usuel, ni un langage symbolique quelconque ne sauraient jouer d'autre rôle que d'auxiliaire non-mathématique pour soulager la mémoire mathématique ou permettre à des individus distincts de construire le même ensemble. Pour cette raison, l'intuitioniste ne peut jamais se croire assuré de l'exactitude d'une théorie mathématique s'il n'en possède pour garanties que la démonstration que cette théorie est non -contradictoire, la possibilité de définir ses concepts pour une suite de mots, ou la quasi-incertitude qu'elle ne conduira jamais à une mésinterprétation dans les relations humaines. (*Brouwer 1912*, p. 44)

Selon van Stigt, l'impossibilité de corriger l'instabilité du langage est principalement causée par l'antériorité, une sorte de priorité conceptuelle pourrions-nous dire, des constructions mathématiques sur le langage[32]. Ce nouveau langage ne jouerait pas plus de rôle dans la construction des mathématiques et ne serait pas plus apte à vérifier la similitude des différentes pensées exprimées par les mêmes mots ou symboles. C'est pourquoi le rôle du langage mathématique doit se limiter à celui de communiquer les constructions mathématiques, sans pour autant être complètement à l'abri des erreurs d'interprétations.

Pour mieux cerner cette priorité des mathématiques sur le langage, il faut saisir l'idée suivante : un théorème n'est pas vrai parce qu'il existe une preuve dans le langage, mais bien parce qu'il existe une construction appropriée dans l'intuition. Du moment où une construction mentale est effectuée, nous n'avons pas besoin d'autres outils ou méthodes afin de démontrer l'existence d'un objet mathématique. Il existe donc une séparation profonde entre d'une part les mathématiques et d'autre part de langage (formel) employé pour décrire les mathématiques.

---

[32] *van Stigt 1990*, p. 218.

Bien que la tradition, et même des logiciens comme Frege, veuille que la logique porte sur « les lois de la pensée », Brouwer voyait avec justesse la logique comme étant concernée par les inférences valides *dans le langage*. Pour cette raison, le divorce entre mathématique et langage a comme conséquence que la logique ne peut pas jouer de rôle dans les constructions mathématiques, comme par exemple chez un Russell qui envisageait une chaine continue d'inférences partant de la logique et se continuant dans l'arithmétique sans qu'on puisse dire où nous sommes passé de l'une à l'autre, ou Hilbert, qui parlait de co-construction de l'arithmétique avec l'aide de la logique. Pour Brouwer, la logique *dépend* des mathématiques[33] :

> While thus mathematics is independent of logic, logic does depend upon mathematics: in the first place intuitive logical reasoning is that special kind of mathematical reasoning which remains if, considering mathematical structures, one restricts oneself to relations of whole and part; the mathematical structures themselves are in no respect especially elementary, so they do not justify any priority of logical reasoning over ordinary mathematical reasoning. It could be put forward: The successor relation, which is essential in mathematics proper, does not yet occur in the mathematics of logical reasoning. Then the reply must be: It is true that this relation no longer occurs explicitly, but here as well as in all mathematics it is presupposed; for it accompanies any mathematical construction, albeit that when the construction is ready, it is no longer immediately apparent for some relations between the elements. (*Brouwer 1907*, p. 73)

Donc, si les mathématiques sont le résultat d'acte mentaux de constructions, et si le langage sert uniquement d'outil de communication de ces constructions, alors l'idée de vouloir fonder le raisonnement mathématique par le biais de la logique formelle est problématique pour Brouwer, les mathématiques n'ayant pas besoin d'être exprimées dans un langage pour être exactes. En effet, même si parfois une formule logique peut

---

[33] L'idée que la logique mathématique soit une forme de calcul mathématique, donc dépende de constructions mathématiques si elle était inusitée à l'époque, reste très prégnante.

ainsi coïncider avec une intuition mathématique, l'exactitude est toujours liée à l'intuition et non à la formule logique qui l'exprime.

Cette notion de dépendance détermine également le rôle de la logique. Comme le précise Placek, Brouwer n'accorde qu'un rôle minimal à la logique, soit de témoigner des régularités présentes dans les raisonnements mathématiques :

> In Brouwer's view, logic comes into being when mathematicians have recourse to language in order to keep track of mathematical constructions and communicate them to others. At first, linguistic structures serve to report on the effected constructions; in this sense they are said to accompany mathematical reasoning. Moreover, in the language of those reports some special expressions occur that allow for the formation of composite sentences, like for instance if ... then, and, or, not, etc. (*Placek 1999*, p. 61)

En n'attribuant qu'un rôle permettant de rendre compte des régularités présentes dans les constructions mathématiques, Brouwer n'accorde aucun rôle créateur à la logique. En fait, comme nous le verrons, cela justifie que nous en remettions en doute les principes.

1.3.2 La critique du principe du tiers exclu

Comme nous l'avions vu à la fin de la section 1.2, l'adoption d'une thèse constructiviste ou « antiréaliste » sur les mathématiques a des conséquences sur la logique, puisque l'usage d'un principe comme le principe du tiers exclu, dans une procédure de preuve comme la *reductio ad absurdum* est basée sur une forme de réalisme sémantique, et présuppose donc une croyance en l'existence d'un monde d'entités mathématiques en soi et indépendantes. Brouwer tire les conséquences de sa thèse selon laquelle les mathématiques résultent de constructions mentales, et ne sont pas des énoncés vrais en vertu d'une adéquation à une réalité pré-existante et indépendante de toute construction, dans un article publié un an après sa thèse, en 1908 : « Que les principes de la logique ne sont pas fiables »[34]. Son argument mérite d'être examiné de près.

Si la logique porte sur les inférences valides dans le langage dans lequel nous aurions exprimé nos constructions mathématiques, une possibilité s'ouvre, celle de partir de l'expression linguistique d'une construction mathématique (peu importe en fait si elle est imparfaite ou non), et enchainer les inférences logiques valides pour obtenir de nouveaux résultats mathématiques, disons, A. Pour Brouwer, c'est une source de danger, car il faut toujours pouvoir vérifier dans l'intuition si une construction mentale correspond bien ou non à A, et il faut donc vérifier si les principes logiques ne permettent pas des chaines d'inférences au bout desquelles nous découvririons qu'aucune construction mentale ne correspond au résultat A. Nous rejoignons ici les soucis des mathématiciens constructivistes, dont nous avons parlé dans la section 1.2. Il va de soi qu'un mathématicien puisse préférer les preuves constructives pour leur plus grande valeur, mais pourquoi se passer des preuves non constructives ? Ne peuvent-elles pas avoir leur utilité propre sans pour autant être en quelque sorte optimales ?

C'est ici que Brouwer fourni un argument d'une très grande portée, car il laisse entendre que les preuves non constructives, par l'usage de principes logiques non fiables, pourraient résulter en des théorèmes qui sont en fait faux. Cette possibilité est loin d'être une vue de l'esprit, et il en fera une démonstration exemplaire quelques années plus tard en critiquant la théorie des ensembles de points de Schoenflies, un mathématicien cantorien pionnier de la topologie : en fournissant littéralement des

---

[34] Voir *Brouwer 1908*, récemment retraduit.

illustrations qui sont des contrexemples, Brouwer a démontré que plusieurs des théorèmes de Schoenflies sont tout simplement faux[35].

Dans « Que les principes de la logique ne sont pas fiables », Brouwer examine trois principes logiques, appelés « principe du syllogisme », « *principium contradictionis* » et « *principium tertii exclusi* ». Il pose donc la question de leur fiabilité en ces termes :

> Peut-on, dans le cas de constructions et de transformations purement mathématiques, négliger provisoirement la présentation du système mathématique érigé, et se mouvoir dans l'édifice linguistique qui l'accompagne, guidé par les principes du syllogisme, de contradiction et du tertium exclusum, confiant dans l'idée que l'évocation temporaire de la présentation des constructions mathématiques raisonnées pourrait justifier chaque partie de l'exposé ? (*Brouwer 1908*, p. 277)

Le premier principe correspond au syllogisme en *Barbara* et Brouwer le juge acceptable. En effet, raisonnement en termes d'emboîtement d'un système dans un autre (hérités de sa thèse de doctorat), Brouwer reconnait le caractère « tautologique »[36] de *Barbara* : l'emboîtement de a dans c est reconnu directement une fois qu'on a emboité a dans b et b dans c. Et le principe de non-contradiction est tout aussi « tautologique » aux yeux de Brouwer, puisque l'emboîtement de a dans b et son impossibilité « s'excluent mutuellement »[37]. La situation est différente dans le cas du principe du tiers exclu :

> Maintenant, le *principium tertii exclusi* : ceci exige que toute supposition soit correcte ou incorrecte ; mathématiquement : que, à supposer que deux systèmes s'emboîtent l'un dans l'autre d'une façon déterminée, on peut en construire soit la terminaison soit le heurt à l'impossibilité. La question de la validité du *principium tertii exclusi* est ainsi équivalente à la question de

---

[35] Voir *Johnson 1987*, p. 67-77.

[36] Il va de soi que Brouwer n'utilise pas ce terme au sens courant aujourd'hui en logique, introduit par Wittgenstein dans son *Tractatus logico-philosophicus*, au 4.46.

[37] *Brouwer 1908*, p. 278.

> la *possibilité de problèmes mathématiques insolubles*. Pour la conviction, déjà proclamée à l'occasion, qu'il n'existe pas de problèmes mathématiques insolubles, aucune indication de démonstration n'est là. (*Brouwer 1908*, p. 278)

L'argument de Brouwer est à l'effet que la validité universelle du tiers exclu est équivalente la thèse de la résolubilité de tout problème mathématique. Les théorèmes d'incomplétude de Gödel et les théorèmes d'indécidabilité de Church et de Turing qui suivirent donneront un appui substantiel à Brouwer contre Hilbert sur ce point, puisqu'ils montrent qu'il n'existe pas d'algorithme permettant de décider pour toute formule qui puisse être écrite dans le système de l'arithmétique de Peano si elle est un théorème ou non.

Mais le sens de la critique de Brouwer doit être bien compris : pour celui-ci, l'usage du tiers exclu peut mener à une situation où nous affirmons A, mais où il est impossible de retrouver le contenu de A par une construction mentale correspondante. C'est exactement le cas pour la méthode de preuve par l'absurde, lorsque nous cherchons à prouver A en faisant l'hypothèse de $\neg A$ pour en déduire une contradiction et inférer de celle-ci que A en usant du tiers exclu (plus précisément de l'élimination de la double négation). En décrivant l'affirmation de A comme « positive » (et celle de $\neg A$ comme « négative »)[38], le sens de la critique de Brouwer est clair : *prouver ainsi quelque chose de positif en mathématiques par l'usage du tiers exclu est illicite*, la raison en étant que de cette manière nous affirmons A, donc quelque chose de « positif » sans construction correspondante, alors que dans le cas inverse nous ne faisons qu'affirmer par $\neg A$ qu'on ne peut pas affirmer A, ce qui n'a rien de problématique. Bien que Brouwer conteste l'usage de l'élimination de la double négation lorsque celle-ci nous mène à une affirmation sans construction, il ne s'oppose donc pas à une démonstration par l'absurde qui se conclut par une négation $\neg A$.

---

[38] Suivant en cela *Heyting 1968*, p. 313, qui est très éclairant.

Par ailleurs, il faut noter que dès la thèse de doctorat, Brouwer définit la négation en termes d'impossibilité de réussir un emboîtement :

> At the point where you enounce the contradiction, I simply perceive that the construction no longer goes, that the required structure cannot be imbedded in the given basic structure. (Brouwer 1908, p. 73)[39]

Dans un passage cité plus haut de « Que les principes de la logique ne sont pas fiables », Brouwer remplace la notion classique de négation comme absence de preuve, par l'idée de la construction d'un « heurt à l'impossibilité »[40]. Brouwer fait de la négation une affirmation *positive* : de l'hypothèse de A, on peut fournir une construction qui « mène au heurt », ce que nous avons appelé plus haut « absurdité » et symbolisée par « $\perp$ ». Cette définition cruciale sera reprise dans la sémantique BHK, dont nous étudierons la genèse dans le chapitre 3, et peut donc se lire comme suit :

$$A \rightarrow \perp \equiv_{\text{def.}} \neg A$$

Dans un texte paru sous le titre « Redécoupage intuitionniste des notions fondamentales des mathématiques » (*Intuitionistische Zerlegung mathematischer Grundbegriffe*), Brouwer explique que la conservation de la négation n'est pas problématique pour un intuitionniste, car celle-ci exprime qu'une tentative de construction ne peut aboutir (Brouwer 1925, p. 291). En d'autres termes, si Brouwer rejette l'élimination de la double négation :

$$\neg\neg A \rightarrow A,$$

---

[39] Voir aussi *Mancosu 1998*, p. 14-15, pour une discussion des variantes de cette définition et des problèmes qu'elles soulèvent.

[40] *Brouwer 1908*, p. 278.

il ne s'oppose pas à l'implication de la négation par la triple négation :

$$\neg\neg\neg A \rightarrow \neg A,$$

car celle-ci ne termine pas par une affirmation sans construction. Voici sa preuve:

> Theorem.
> Absurdity-of-absurdity-of-absurdity is equivalent with absurdity.
> Proof.
> a. If the property y follows from the property x, then from the absurdity of y follows the absurdity of x. Therefore, since absurdity-of-absurdity follows from correctness, absurdity must follow from absurdity-of -absurdity-of-absurdity.
>
> b. Since from the correctness of a property follows the absurdity-of- absurdity of that property, then as a special case from correctness of absurdity, that is, from absurdity, must follow absurdity-of-absurdity-of-absurdity (Brouwer 1925, p. 287).

En d'autres termes, s'il n'est pas possible d'affirmer qu'il n'est pas possible d'affirmer que ce n'est pas le cas que A, alors ce n'est pas le cas que A. L'introduction de la double négation :

$$A \rightarrow \neg\neg A$$

est également acceptée par Brouwer, puisqu'elle dit que de l'hypothèse de A il n'est pas possible d'affirmer $\neg A$.

Pour cette dernière raison, il faut distinguer une forme de raisonnement par l'absurde qui est acceptable pour l'intuitionniste. En effet, nous avons vu que l'intuitionniste rejette ce qu'on peut appeler la *reductio* classique :

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\neg A\\ \vdots\\ \bot\end{array}}{\neg\neg A}}{A}$$

Mais l'intuitionniste accepte cette version :

$$\dfrac{\begin{array}{c}\neg A\\ \vdots\\ \bot\end{array}}{\neg\neg A}$$

Ainsi, si $\neg A$ mène à une contradiction $\bot$, nous sommes encore justifiés de nier qu'on puisse affirmer $\neg A$. Toutefois, cette double négation doit constituer la conclusion du raisonnement par l'absurde intuitionniste, car l'abandon de l'élimination de la double négation nous empêche de déduire A sur la base de $\neg\neg A$. Le raisonnement par l'absurde intuitionniste se caractérise donc par la conservation de la double négation, décrivant l'absurdité de l'absurdité de A. Ce n'est de surcroît qu'un cas particulier de ce qu'on appelle la « *reductio* intuitionniste » :

$$\dfrac{\begin{array}{c}A\\ \vdots\\ \bot\end{array}}{\neg A}$$

Il va de soi que si l'hypothèse de A mène à une contradiction $\bot$, nous sommes justifiés de nier qu'on puisse affirmer A.

J'aimerais conclure cette section et le chapitre avec quelques courtes remarques complémentaires, pour aider à mieux comprendre le sens de la critique de Brouwer. Premièrement, je n'ai fait état que de la critique du principe du tiers exclu dans le texte de 1908. Mais Brouwer fera en 1928 une critique plus compliquée d'une version ce principe :

$$\forall x\, F(x) \vee \neg F(x),$$

qui fait usage de principes intuitionnistes sur les suites de choix et le continu, dont la considération est exclue du cadre de ce mémoire.

Deuxièmement, bien que Brouwer doute de la fiabilité du principe du tiers exclu, il ne faudrait pas croire qu'il le rejette. En effet, Brouwer ne voit aucune objection dans un cadre finitaire, puisque dans de telles domaines « décidables » il est toujours possible d'effectuer une construction mentale avec un nombre fini d'étapes pour vérifier si, disons, un nombre possède telle ou telle propriété (Brouwer parle d'un examen qui se termine), et rendre légitime l'utilisation du principe du tiers exclu[41] :

> Aussi longtemps que seuls certains systèmes finis discrets sont posés, l'examen de la possibilité ou de l'impossibilité d'un emboîtement peut toujours se terminer et conduit à une réponse, de sorte que le *principium tertii exclusi* est un principe de raisonnement fiable. (Brouwer 1908, p. 278)[42]

---

[41] Un théorème de Negri & von Plato confirme cette thèse, voir *Negri & von Plato 2011*, p. 207, prop. 8.6.7. et *Vidal-Rosset 2012*, p. 147 pour une explication de son importance.

[42] Pour une citation plus tardive, dans le texte de 1925 discuté ci-dessus : « Within a specific finite "main system" we can always test (that is, either prove or reduce to absurdity) properties of systems. On the basis of the testability just mentioned, there hold, for properties conceived within a specific finite main system, the principle of excluded middle, that is, the principle that for every system every property is

D'ailleurs, Brouwer affirmait par ailleurs en 1908 :

> Si bien que, dans les ensembles infinis, le *principium tertii exclusi* n'est jusqu'à présent pas fiable. Néanmoins, dans une application injustifiée, on ne peut jamais se heurter à une contradiction et découvrir ainci le caractère infondé de ses raisonnements. Car, pour cela, il faudrait qu'il soit possible que l'effectuation et le caractère contradictoire d'un emboîtement soient simultanément contradictoires, ce que le *principium contradictionis* ne permet pas. (*Brouwer 1908*, p. 279)

Nier le tiers exclu donnerait en effet :

$$\neg(A \vee \neg A),$$

ce qui implique en retour :

$$\neg A \;\&\; \neg\neg A,$$

donc le rejet du principe de non-contradiction, qui est pourtant justifié, comme nous l'avons vu, et c'est pourquoi un intuitionniste ne peut pas rejeter tout bonnement le principe du tiers exclu, même s'il juge qu'il ne peut pas être universellement applicable. Il affirmera plutôt :

$$\neg\neg(A \vee \neg A).$$

Finalement, un mot sur une erreur fréquente sur la logique intuitionniste commise en 1927 par Barzin & Errera. Pour ces derniers, la critique de Brouwer ouvre la porte à

---

either correct or impossible, and in particular the principle of the reciprocity of the complementary species, that is, the principle that for every system the correctness of a property follows from the impossibility of the impossibility of this property » *(Brouwer 1925*, p. 335).

une sémantique trivalente, où la non-contradiction, représentée par *p*', se joindrait aux deux valeurs de vérité :

> Le symbole *p* représente l'énonciation *p* est vraie. Le symbole $\neg p$ (non-*p*, c'est-à-dire la négation de *p*) représente l'énonciation *p* est fausse. Le symbole *p*' représente l'énonciation *p* n'est ni vraie ni fausse, ou, par abréviation, *p*' est tierce. (*Barzin & Errera 1927*, p. 60)

L'erreur de Barzin & Errera s'explique par le fait que ces derniers accordent aux propositions mathématiques non prouvées, pour lesquelles il n'a donc pour l'instant ni preuve de leur validité, ni preuve de leur absurdité, un statut qui n'a jamais été évoqué par Brouwer. Au lieu de voir celles-ci comme appartenant à un stade d'ignorance (provoqué par l'absence de preuve), Barzin & Errera leur octroient une (tierce) valeur de vérité[43]. Or tout ce que l'intuitionnisme fait, c'est conserver le vrai et le faux comme valeurs de vérité, tout en refusant d'affirmer le principe de bivalence. Je reviendrai sur cette critique dans le chapitre 3, car elle a provoqué d'importantes réactions de la part de Glivenko, Church et Heyting.

---

[43] Voir *Mancosu 2011*, p. 91.

CHAPITRE 2

Révision des thèses philosophiques de Brouwer

Dans le premier chapitre, nous avons, après quelques distinctions préliminaires, expliqué la critique du principe du tiers exclu dans les premiers écrits de Brouwer, et donné ses sources dans sa conception du rôle de l'intuition en mathématiques et sa thèse du divorce radical entre les constructions mentales du mathématicien et leur expression dans le langage. Notre but est d'expliquer la genèse de la logique intuitionniste et de la sémantique BHK dans les travaux de Kolmogorov, Glivenko et, principalement, Heyting au tournant des années vingt et trente. Or, nous l'avons vu, pour Brouwer la logique ne porte que sur les inférences valides dans le langage, et non sur les constructions mentales des mathématiciens. L'idée d'une logique intuitionniste est donc loin d'être évidente dans son esprit, et Brouwer ne contribua en rien à son développement. Il ne croyait pas la chose absurde pour autant et laissa à son étudiant Arend Heyting le soin de le faire, pour des raisons somme toute superficielles, comme la possibilité de communiquer avec les mathématiciens classiques et de se faire comprendre par eux.

Ce mémoire se terminera sur une courte section sur les travaux de Gerhard Gentzen dont le but est de montrer qu'en fait, la logique intuitionniste est loin d'être si superficielle, car elle va droit au cœur de ce qu'on doit entendre par « logique ». Quoi qu'il en soit, pour légitimer le projet même d'une logique intuitionniste, il faut procéder à des réaménagements dans la philosophie de Brouwer, et ce court chapitre-ci a pour but de les explorer, en guise de transition entre les thèses de Brouwer, qui ne laissent place à aucun développement logique, et la sémantique BHK dont nous verrons que

Gentzen en fournit une interprétation dans ses calculs de déduction naturelle et des séquents intuitionnistes.

Les conceptions de Brouwer ont été qualifiées tour à tour – nous l'avons fait nous même dans certains cas – de « mysticisme », « d'idéalisme », de « subjectivisme », « solipsisme », de « mentalisme » et même de « psychologisme »[44]. Le but de ce chapitre n'est pas de répertorier toutes ces attributions et d'en faire l'examen critique[45], mais plutôt d'étudier (section 2.1) les aménagements opérés par Heyting pour mettre en place sa formalisation de la logique intuitionniste, et (section 2.2) une rare critique de cet aspect de la philosophie de Brouwer par Michael Dummett, avec une reprise des arguments antipsychologistes de Frege et de l'argument contre le langage privé de Wittgenstein.

Cette critique a été formulée plusieurs décennies après la période qui nous intéresse, et il y a un danger d'introduire un anachronisme. D'ailleurs, c'est un reproche qu'a formulé Göran Sundholm à l'endroit de la lecture de Dummett : ce dernier serait en fait beaucoup plus proche de Heyting que de Brouwer[46]. Nous avons néanmoins jugé bon d'en discuter car les aménagements proposés par Heyting, s'ils s'avèrent nécessaires, ne sont pas satisfaisants sur le plan philosophique, où on ressent un manque ; le passage du premier au troisième chapitre n'en serait que plus aisé.

2.1 Heyting et le projet d'une formalisation de la logique intuitionniste

Nous avons vu dans le chapitre précédent que Brouwer voyait la preuve mathématique en termes purement mentaux. Cette conception n'a toutefois pas été conservée par

---

[44] Cette dernière étiquette fut apposée dans *Dummett 1980*, p. 609, et sera discutée dans la section 2.2.
[45] Voir par exemple *Placek 1999*, p. 84-89 pour une discussion
[46] Voir *Sundholm 1985*, p. 274-276.

Heyting. Bien qu'étudiant de Brouwer, Heyting veut soustraire de l'intuitionnisme ses éléments « mystiques », objectif qui est déjà présent dès la rédaction de sa thèse doctorale[47], comme le souligne van Stigt :

> … the guiding principle of his work of 'bringing projective geometry into concord with the Intuitionist conception of Mathematics'. Setting aside other metaphysical considerations, he starts from the Brouwerian principle that 'one can only reason about a mathematical system after it has been thought, i.e. after one constructed the system in one's mind. (*van Stigt 1990*, p. 286)[48]

En effet, ses travaux excluent toute référence à une « genèse » des mathématiques dans l'intuition, concept qu'il entend par ailleurs de façon plutôt orthodoxe comme une forme de connaissance non-inférentielle. Rompant avec l'idée d'un développement de la conscience qui mènerait à la construction des suites mathématiques, Heyting met de côté les notions de Soi, d'intuition primordiale et de séquence causale, au profit d'études nouvelles portant sur la formalisation logique de l'intuitionnisme. Pour Heyting, il n'est donc plus nécessaire de postuler toute une série de thèses métaphysiques de ce genre afin d'expliquer le développement des mathématiques. Dans des articles tardifs, il ira jusqu'à affirmer que l'intuitionnisme ne présuppose aucune philosophie. En effet, pour Heyting, la seule thèse philosophique nécessaire à l'intuitionnisme est qu'*aucune philosophie n'est nécessaire pour comprendre les mathématiques*[49]. Cette affirmation va à l'encontre de la philosophie de Brouwer, dont les prémisses métaphysiques et épistémologiques sont indissociables de son projet mathématique. Comme le précise Placek, nous pouvons discerner deux éléments dans

---

47 Rédigée en 1925 sous le titre *Axiomatisation intuitionniste de la géométrie projective* (*Intuitionistische axiomatiek der projectieve meetkunde*), la thèse doctorale de Heyting est le premier exemple d'axiomatisation dans l'histoire des mathématiques intuitionnistes.

48 Peut-être est-ce utile de souligner que la thèse de doctorat de Brouwer contient dans sa deuxième partie une longue critique des travaux de Russell sur la géométrie projective, qui ne trouvait grâce à ses yeux.

49 Voir, par exemple, *Heyting 1974*, p.79.

la tentative de Heyting de se distancier de la philosophie des mathématiques de Brouwer:

> One is a rather evident perception that to practice intuitionistic mathematics one need to know of, or subscribe to, any philosophical doctrine. The other maintains the philosophical neutrality of the intuitionistic program of reconstructing mathematics and contrasts this with classical mathematics that allegedly must introduce metaphysical assumptions in order to justify the forms of reasoning it applies. (*Placek 1999*, p. 104)

Selon Heyting, la supériorité des mathématiques intuitionnistes sur les mathématiques classiques réside plutôt dans le fait qu'elles sont libres de tout présupposé métaphysique. En effet, contrairement aux mathématiques classiques, les mathématiques intuitionnistes ne reposent pas sur une sémantique réaliste du genre de celle que nous avons vue dans la section 1.1 et selon laquelle les objets mathématiques existeraient de manière indépendante de nos activités mathématiques[50]. Nous avions vu en outre que cette croyance est nécessaire pour justifier philosophiquement l'utilisation de la méthode de preuve par l'absurde (plus précisément la « *reductio* classique »). Sur ce point, la critique de Heyting du réalisme mathématique est similaire à celle évoquée par Brouwer : il n'y a aucune raison pratique de présupposer l'existence d'objets mathématiques indépendants. Comme l'explique Heyting:

> Even if they should be independent of individual acts of thought, mathematical objects are by their very nature dependent on human thought. Their existence is guaranteed only insofar as they can be determined by thought. They have properties only insofar as these can be discerned in them by thought. But this possibility of knowledge is revealed to us only by the act of knowing itself. Faith in transcendental existence, unsupported by concepts, must be rejected as a means of mathematical proof. (*Heyting 1931*, p. 52)

[50] *Heyting 1930a*, p. 306.

Toutefois, tout rapprochement avec Brouwer se dissipe lorsqu'on regarde leurs conceptions positives. La réplique de Brouwer à la conception platonicienne des mathématiques consiste en la création d'une métaphysique constructiviste basée sur les notions de bi-unité, etc. tandis que Heyting n'emprunte pas cette direction.

Si Heyting laisse de côté assez rapidement toute tentative d'expliquer la genèse des mathématiques, le rejet du divorce entre les constructions mentales du mathématicien et leur expression dans le langage s'opère plus graduellement et n'est pas tout à fait accompli. Dans ses articles publiés au début des années 1930, Heyting conçoit que les mathématiques intuitionnistes sont le résultat d'une activité mentale (*Denktätigkeit*), et que le langage, même s'il est formel, n'est d'abord qu'un outil de communication :

> The intuitionist mathematician proposes to do mathematics as a natural function of his intellect, as a free, vital activity of thought. For him, mathematics is a production of the human mind. He uses language, both the intuitionist foundations of mathematics natural and formalized, only for communicating thoughts, i.e., to get others or himself to follow his own mathematical ideas. (*Heyting 1931*, p. 52)

C'est pourquoi il est en principe impossible de mettre en place un système de formules équivalentes aux mathématiques intuitionnistes, car les possibilités de construire les mathématiques ne peuvent être réduites à un nombre fini de règles logiques établies à l'avance. Cette justification s'explique du fait que, pour Heyting comme pour Brouwer, la logique dépend des mathématiques. C'est pour cette raison que la construction des mathématiques ne doit pas reposer sur une liste de lois logiques préétablies. Au contraire, ce sont les lois logiques qui sont sujettes à être modifiées.

Brouwer et Heyting sont tous deux d'accord sur le fait qu'il n'y a pas de différence essentielle entre le langage ordinaire et le langage formel[51]. Mais alors que Brouwer demeure réticent à adopter la notation symbolique, Heyting en vient à reconnaître certains avantages :

> The attempt to express the most important parts of mathematics in formal language is therefore only justified by its greater conciseness and precision when compared to ordinary language, properties which make it a particularly suitable medium in helping to understand the intuitionist notions and their use. (*Heyting 1930a*, p. 306)

Cette confiance vis-à-vis une plus grande précision de la notation symbolique n'a jamais été partagée par Brouwer. Comme l'explique van Stigt, il ne fait aucun doute que l'association de la notation symbolique avec d'autres courants mathématiques comme le logicisme et le formalisme a été un facteur contribuant à son aversion par Brouwer[52]. Toutefois, la raison principale de cette aversion est simplement son « mentalisme ». Ayant tracé une distinction aussi nette que possible entre les mathématiques et le langage, Brouwer conçoit qu'un langage ne peut jamais parfaitement communiquer les constructions mathématiques, donc il ne peut certainement pas y voir un outil d'une plus grande précision. Au moment où Heyting débute ses travaux sur la formalisation logique de l'intuitionnisme, Brouwer écrit encore :

> The role of mathematical language can only be that of an aid to help remember mathematical constructions or construction methods or to suggest them to others, sufficient for most practical purposes but never completely safeguarding against error. (*Brouwer 1929*, p. 339)

---

[51] Dans sa dissertation doctorale de 1907, Brouwer écrit: « Like all mathematical language, this language [la logique classique] can also be condensed to symbols without any difficulty » (*Brouwer 1907*, p. 159), tandis que dans l'introduction de son article « Sur la logique intuitionniste », Heyting attribue au langage formel les mêmes limites et contraintes que le langage ordinaire (*Heyting 1930a*, p. 306).
[52] *van Stigt 1990*, p. 291.

Brouwer ne peut donc pas accepter la possibilité qu'une formulation précise des mathématiques peut être réalisée au moyen d'une notation symbolique, ou comme l'indique van Stigt :

> ... the most fundamental reason for Brouwer's reluctance to use symbolic notation is an a-priori unwillingness to accept the possibility of precise formulation of mental constructions and the possibility of producing mathematical truths mechanically by means of a logical calculus. (*van Stigt 1990*, p. 292)

Sur ce point, Heyting est moins sévère que Brouwer. Contrairement au langage ordinaire, dans lequel les mots peuvent avoir des connotations et des nuances de sens différentes, le langage formel est non ambigu, et son utilisation nous permettrait de décrire avec une plus grande précision les différentes étapes présentes dans de la construction d'une preuve mathématique[53]. C'est là l'idéal de la formalisation des preuves de Frege dans sa *Begriffsschrift* de 1879.

C'est ainsi que naît l'idée d'une formalisation de la logique intuitionniste. Il est à noter que celle-ci n'a pas tout à fait été rejetée par Brouwer. En effet contrairement à ce que nous pourrions croire, Brouwer a dans les faits encouragé son étudiant, son attitude étant, comme le souligne van Stigt, ambivalente :

> Brouwer's views on a legitimate form and practice of formalization are clear from his attitude to Heyting's work: on the one hand showing an interest in, even encouraging and supporting the development of an Intuitionist axiomatization and formalization, and on the other hand staying aloof and dismissing it as a 'sterile', mathematically unproductive exercise. (*van Stigt 1990*, p. 285)

Les travaux de Heyting sur la formalisation de la logique intuitionniste ne se limitent, comme nous le verrons au prochain chapitre, pas à produire une axiomatisation en

---

[53] *Heyting 1930b*, p. 311.

conformité avec les idées de Brouwer que nous avons vues dans la section 1.3. Heyting produira aussi une *sémantique*, dont le but est de lier la signification des connecteurs logiques et des quantificateurs à la preuve, plutôt qu'au concept de vérité dans la sémantique vériconditionnelle déployée en soutien de la logique classique. Cela l'oblige à repenser la notion de preuve. Lorsque Brouwer présente la preuve mathématique comme une construction mentale, il présente celle-ci comme étant essentiellement un *acte*, comme le remarque Per Martin-Löf, dans un commentaire très éclairant :

> This is what Brouwer wanted to stress by saying that a proof is a mental construction, because what is mental, or psychic, is precisely our acts, and the word construction, as used by Brouwer, is but a synonym for proof. Thus, he might just as well have said that the proof of a judgement is the act of proving, or grasping, it. And the act is primarily the act as it is being performed. Only secondarily, and irrevocably, does it become the act that has been performed. (*Martin-Löf 1996*, p. 29)

Bien sûr, Brouwer n'avait pas en vue des preuves *logiques* dont chaque acte correspondrait à l'application d'une règle d'inférence logique, mais il est utile d'explorer les ramifications de cette idée, puisqu'elles seront incorporées dans la sémantique BHK et par la suite dans les systèmes de déduction naturelle et les calculs des séquents de Gentzen.

Tout d'abord, Il faut concevoir ici l'inférence comme le passage des prémisses à la conclusion, l'inférence étant un acte, et les prémisses et conclusion des *assertions*. Donc dans les règles d'introduction de la conjonction « & » chez Gentzen qui sera discuté dans la section 3.3, on passe des assertions (déjà prouvées) de A et de B à l'assertion de A & B par un acte d'inférence :

$$\frac{A \quad B}{A \,\&\, B}$$

Comme le note Martin-Löf, le concept de vérité est en fait masqué dans cette formulation. Il faudrait l'écrire comme suit, pour rendre explicite que l'acte consiste à passer de la reconnaissance de la vérité de A et de B à la reconnaissance de la vérité de $A \,\&\, B$:

$$\frac{A \text{ est vrai} \quad B \text{ est vrai}}{A \,\&\, B \text{ est vrai}}$$

Par ailleurs, comme le suggère Sundholm, selon la conception qu'en donne Heyting la preuve mathématique est à la fois subjective *et* objective. Sur le plan subjectif, la preuve est d'abord un acte, une démonstration à l'aide de laquelle le mathématicien réussit à connaître la vérité d'une proposition mathématique telle que $A \,\&\, B$ ci-dessus, sur la base de sa reconnaissance de la vérité de A et de B, et ainsi de suite. Dans ce contexte, la « preuve comme acte » a pour objet le théorème prouvé[54]. L'aspect subjectif de la « preuve comme acte » s'exprime également dans son aspect éphémère. En effet, une fois accomplis, ces actes cessent d'exister. Toutefois le mathématicien peut laisser des traces de sa démonstration :

> These traces, or proofs in the objective sense, are what we find written down in mathematical texts and what may be used by other mathematicians to carry out proofs in the subjective sense for the same theorem. (*Sundholm 1994*, p. 122)

Ces traces constituent l'aspect objectif de la preuve mathématique. Étant présentes dans les livres de mathématiques, elles permettent aux autres mathématiciens d'effectuer par eux-mêmes les mêmes actes subjectifs auparavant accomplis : la « preuve comme

[54] *Sundholm 1994*, p. 121.

trace » permet de recréer la preuve du théorème. Il nous faut donc distinguer ces deux notions pour mieux comprendre la notion qui se met en place chez Heyting : la « preuve comme acte » et la « preuve comme trace ». Toutefois, Sundholm souligne que la notion de preuve que donne Heyting est appelée à remplir un autre rôle, celui de « vérifacteur » (*truth-maker*)[55]. Reprenant les idées de Michael Dummett, Sundholm soutient qu'un énoncé mathématique ne peut être affirmé que s'il en existe une preuve. Dummett écrivait :

> From an intuitionistic standpoint, therefore, an understanding of a mathematical statement consists in the capacity to recognize a proof of it when presented with one; and the truth of such a statement can consist only in the existence of such a proof. (*Dummett 1977*, p. 4)

Cette conception intuitionniste permet alors de reconnaître que

$$A \text{ est vraie} = \text{il existe une preuve de } A$$

Et cette conception peut également être interprétée en termes de « vérifacteur » :

$$A \text{ est vraie} = \text{Il existe un vérifacteur pour } A$$

Ce rôle de vérifacteur permet alors d'attribuer une troisième notion à la preuve mathématique, celle de « preuve comme objet ». Cette notion est déjà présente chez Brouwer[56], on verra dans le chapitre 3 qu'elle joue un rôle clef dans sa critique de Hilbert. Comme l'indique Heyting, la preuve d'une proposition est une construction mathématique, *qui peut être traitée elle-même mathématiquement*[57]. En ce sens, chaque

[55] *Sundholm 1994*, p. 117.

[56] Voir *Brouwer 1975*, p. 286-290, pour la notion de preuve comme objet mathématique, avec l'expression « *Beweisführung* », qui avait été introduite dans le cadre de sa preuve du théorème de la barre.

[57] *Heyting 1931*, p. 60.

proposition représente le besoin d'une construction mathématique, ou comme le précise Sundholm :

> What is demanded (intended, expected) by the proposition (problem, expectation, intention) is a certain mathematical object (a mathematical construction which can itself be treated mathematically), that satisfies certain conditions, depending on the proposition in question. The truth of the proposition is demonstrated by constructing a proof-object that meets the relevant conditions as determined by the proposition (conditions as determined by the proposition). (*Sundholm 1994*, p. 123)

Influencé un temps par le jargon de la phénoménologie, Heyting donne comme exemple la proposition « La constante d'Euler *C* est rationnelle »[58], et il explique que celle-ci exprime une « attente », celle de trouver deux entiers *a*, *b* tels que $C = a/b$, et le « remplissement » de cette attente est rendu possible par la donnée d'une preuve permettant d'affirmer que la proposition « La constante d'Euler est rationnelle » est vraie. Appelons cette proposition *E* et sa preuve (avec la donnée des entiers *a* et *b* appropriés) *Pr*(*E*). On peut dire de *Pr*(*E*) qu'elle est la « preuve comme objet » qui permet de reconnaître la vérité de *E*. Cette conception de la preuve en tant qu'acte, trace et objet marque un point de rupture majeur entre l'intuitionnisme de Brouwer et celui de Heyting. À la place d'un divorce entre constructions mathématiques et langage, Heyting suggère une relation beaucoup plus intime entre ces deux éléments. Comme le suggère van Stigt, Heyting met l'accent sur l'importance du langage et de la logique permettant la représentation matérielle des constructions mathématiques:

> Insisting on 'material representation' as an essential element of mathematical existence, Heyting and his successors abandon the principal feature of Brouwer's characterization of mathematics, and with it his distinctive philosophical foundation of mathematics. (*van Stigt 1990*, p. 279)

---

[58] *Heyting 1930a*, p. 307.

En effet, il n'y a plus de distinction nette entre l'objet mathématique en tant qu'il serait construit par un acte mental et sa représentation matérielle et physique (traces, objets) exprimée par le biais du langage. La mémoire étant faillible, le langage devient alors un composant indispensable du développement des mathématiques, les termes logiques permettant de garantir la permanence de l'existence des constructions mathématiques

Heyting précise qu'il conserve l'idée malgré tout d'une existence pré-langagière des mathématiques. Tout comme Brouwer, Heyting conçoit que les mathématiques sont avant tout des constructions en pensée du mathématicien. Toutefois, ces mêmes pensées mathématiques deviennent « réelles » lorsqu'elles sont exprimées par des termes logiques. Elles le deviennent parce que le langage leur permet de devenir une propriété commune qui ne se limite plus aux seuls esprits des mathématiciens les ayant engendrées.

Comme le suggère Sundholm, nous devons reconnaître en bout de piste que Brouwer et Heyting n'étaient pas engagés dans la même entreprise. L'objectif de Brouwer était de fonder une mathématique intuitionniste sur la base de constructions comme actes mentaux. Le rejet de ce mentalisme opéré par Heyting l'écarte du projet intuitionniste initial, au profit d'une conception de la proposition comme exprimant une « attente » vis-à-vis une construction, comme « remplissement », préfigurant la sémantique des preuves que nous expliquerons en détail dans le chapitre 3 :

> … one must differentiate between Heyting the Brouwerian intuitionist and Heyting the semanticist of constructivism. The moral I want to draw is this: Heyting and Brouwer were not engaged in the same enterprise, and, therefore, one should be wary of applying the semantical schemes of Heyting to the writings of Brouwer. Nevertheless, an interesting technical question suggests itself as a suitable conclusion of my paper. Heyting explained propositions as intentions towards constructions (which when carried out produce construction-objects of certain types) and showed how the logical constants correspond with certain operations on construction

> objects, e.g. pair-formation for conjunction and function-abstraction for implication and universal quantification. (*Sundholm 1984*, p. 276)

C'est justement le cœur de la critique qu'il adresse à Dummett dans ce même passage, lorsqu'il le tient comme étant affilié à Heyting.

2.2 L'objection de Dummett

Bien que de nombreux commentateurs mettent en doute la plausibilité philosophique d'une incommunicabilité des constructions mentales[59], il n'existe pas de critique philosophique développée contre le « mentalisme » de Brouwer dans la littérature secondaire : que la thèse soit erronée semble aller de soi au point où il n'est pas nécessaire de prendre soin de la réfuter. Il existe néanmoins une courte critique exprimée par Michael Dummett, dans *The Seas of Language* :

> Brouwer was, notoriously, a solipsist, or something very close to one; but that did not vitiate his development of a theory of meaning for mathematical statements, and a consequent revisionist programme for mathematical practice. The reason is precisely the flagrant untruth of his solipsism. Far from its being the case, as Brouwer maintained, that mathematical constructions are only imperfectly communicable, the very opposite is true: they are perfectly communicable. Individual mathematicians may have different aptitudes, angles of attack, ranges of knowledge, etc., but they do not have different viewpoints on mathematical reality: whatever construction one mathematician discovers, any other is in a position to carry out. Just for this reason, it did not matter that Brouwer was conceiving his mathematical language solipsistically, as the analogue of a sense-datum language: by simply reversing the principle that mathematical language can only imperfectly convey mental constructions carried out by any one mathematician, it could without modification be interpreted as a language common to all mathematicians, and his theory of meaning understood in terms, not of individual mental constructions, but of constructions available to all. (*Dummett 1993*, p. 471- 472)

---

59 Voir, par exemple, *Mancosu 1998*, *Placek 1999*, *Hesseling 2003*, etc.

Dummett rejette bien l'idée de Brouwer que le langage ne peut transmettre que de manière imparfaite les constructions mathématiques supposément privées : elles sont au contraire selon lui parfaitement communicables, par le biais d'un langage commun. Pour comprendre son argument, il faut voir qu'il opère d'abord une analogie entre le langage des « *sense-data* » et la conception du caractère privé de la signification qui lui est associée et la conception du langage de Brouwer : nous avons vu que Brouwer considère qu'une des tares du langage est qu'il ne rend qu'imparfaitement les constructions mentales, ou plus généralement les pensées des locuteurs, et qu'on ne peut jamais savoir si deux personnes pensent la même chose lorsqu'elles utilisent les mêmes mots ou phrases, donc on ne pourrait jamais savoir si deux mathématiciens ont effectué les mêmes actes mentaux, donc la même preuve. Brouwer, et à sa suite Heyting dans la mesure où il ne se démarque pas complètement de lui défendent donc ce qui peut être décrit comme une conception du caractère privé de la signification linguistique qui est analogue à celle du langage des *sense-data*.

Par la suite, Dummett peut faire valoir contre cette conception des arguments bien connu de Frege et de Wittgenstein – il ne le fait cependant pas explicitement dans ce passage mais dans *Frege. Philosophy of Language*[60], dans un passage où il présente les arguments de Frege contre cette conception en lien avec l'argument contre le langage privé de Wittgenstein. L'argument le plus connu de Frege, que reprend Dummett[61], provient du § 26 des *Fondements de l'arithmétique* (*Grundlagen der Arithmetik*) :

> ... supposons deux êtres raisonnables pour qui seuls les rapports ou propriétés projectifs sont objet d'intuition : la position de trois points sur une droite, de quatre points dans un plan. Il se pourrait, dans cette hypothèse, que l'on voie comme un point ce que l'autre verrait comme un plan, et réciproquement. Ce que l'un voit comme un segment de droite

---

[60] *Dummett 1981*, p. 637-642.

[61] *Dummett 1973*, p. 638.

> entre deux points, l'autre le verrait comme l'arête d'intersection de deux plans, etc. selon une correspondance duale. Mais ils pourraient très bien se comprendre et ignoreraient la diversité de leur intuition, car la géométrie projective associe tout théorème à son correspond dual et si leur appréciation esthétique était en désaccord, ce ne serait pas un signe certain de la disparité des intuitions. Leur accord serait total sur les théorèmes de géométrie; simplement, ils traduiraient différemment les mots dans l'intuition. Au mot « point », chacun d'eux associerait une intuition différente. Ainsi, on peut toujours affirmer que ce mot désigne pour eux quelque chose d'objectif, mais il ne faut pas croire que ce puisse être la particularité de leur intuition. C'est en ce sens que l'axe terrestre est lui objectif. (*Frege 1969*, p. 154)

L'argument de Frege est en fait fort simple et peut être repris comme suit avec un exemple encore plus simple. Prenons deux personnes qui goûtent un fruit sans savoir de quelle sorte il s'agit et se disent entre elles que celui-ci « goûte l'ananas ». Il y a deux possibilités : soit ces deux personnes associent la même sensation à l'expression « goûter l'ananas », soit elles y associent deux sensations différentes. Or, on ne peut pas savoir laquelle des deux possibilités est la bonne, mais pour Frege cela importe peu, car ces deux personnes communiquent très bien entre elles, et la possibilité de la communication semble, précisément pour cette raison, ne pas reposer sur une signification privée liée à des sensations.

En définissant l'objectivité comme l'indépendance du sens vis-à-vis des contenus mentaux subjectifs, Frege apporte un argument pour Dummett dans sa critique du solipsisme de Brouwer. En effet, l'argument de Frege permet de renverser la croyance qu'avait Brouwer selon laquelle le langage ne peut traduire qu'imparfaitement les constructions mentales d'un mathématicien : au contraire, il est parfaitement raisonnable de concevoir un langage commun à tous les mathématiciens.

On peut ajouter à cela que Dummett interprétait cet argument comme ayant une conclusion similaire à l'argument sur le langage privé de Wittgenstein[62]. L'interprétation de cet argument des *Recherches philosophiques* (§§ 243-315) est bien sûr sujette à controverse. Mais l'interprétation de Wittgenstein n'est pas en jeu ici, nous ne reprenons que la lecture qu'en faisait Dummett[63]. Il suffit ici de citer le § 258 des *Recherche philosophiques* :

> 258. Imaginons le cas suivant. Je veux tenir un journal sur le retour périodique d'une certaine sensation. À cette fin, je lui associe le signe 'S' et chaque jour où j'éprouve cette sensation, j'écris ce signe sur un calendrier. Je remarquerai d'abord qu'il n'est pas possible de formuler une définition de ce signe. — Mais je peux néanmoins m'en donner une définition ostensive! — Comment cela? Puis-je désigner la sensation? - Pas au sens habituel. Mais je dis ou écris le signe 'S', et en même temps, je fixe mon attention sur la sensation. — Je la désigne donc, pour ainsi intérieurement. — Mais à quoi bon ce cérémonial? Une définition sert en effet à établir la signification d'un signe. — Justement c'est ce que produit la signification d'un signe : grâce à elle, je grave dans ma mémoire la connexion entre le signe et la sensation. — Or « Je la grave pour ma mémoire » peut seulement signifier : Ce processus a pour effet de me permettre de me souvenir correctement de cette connexion à l'avenir. Mais dans notre cas, je ne dispose d'aucun critère de correction. Ici, on aimerait dire : Est correct ce qui me semblera toujours tel. Et cela veut seulement dire qu'ici, on ne peut rien dire du « correct ». (*Wittgenstein 2004*, p.140)

L'argument de Wittgenstein est à l'effet qu'un procédé d'ostension interne dans le but désigner une sensation ne peut pas fonctionner sans un critère externe, public de reconnaissance de la même sensation : car sans ce dernier il n'y aurait aucune façon de faire la différence entre penser qu'on reconnaît la même sensation et reconnaître la même sensation. Donc, si tout langage doit permettre de faire cette distinction, il ne peut y avoir de langage privé. L'argument peut être adapté à Brouwer et aux constructions mentales de son mathématicien : celui-ci ne pourrait jamais s'assurer

---

[62] *Dummett 1981*, p. 640.

[63] Pour une lecture en accord avec ce qui suit, voir, par exemple, *Cook 1965*.

d'avoir effectué la même construction deux fois, le langage privé du mathématicien intuitionniste ne peut réellement exister.

CHAPITRE 3

Formalisation de la logique intuitionniste et sémantique des preuves

L'abandon par Heyting du caractère mentaliste présent dans le projet intuitionniste initial de Brouwer va de pair avec ce que les commentateurs appellent le « tournant logique » de l'intuitionnisme[64]. Cette seconde étape du développement de l'intuitionnisme apparaît dès la seconde moitié des années 1920, notamment par le biais de la révision de la liste des axiomes proposés par Hilbert pour la logique des prédicats classique et les fondements de l'arithmétique. Ce troisième chapitre débutera donc avec la présentation des différentes révisions axiomatiques effectuées par Kolmogorov, Glivenko et Heyting entre 1925 et 1935. En reprenant et en interprétant les principes brouweriens en matière de preuve constructive, ces logiciens vont, tour à tour, soustraire et modifier certains axiomes présents dans le calcul propositionnel classique.

La formulation d'une logique pour l'intuitionnisme voit également apparaître de nouvelles analyses de la signification des propositions mathématiques, en termes d'une « attente » et de son « remplissement » chez Heyting ou encore d'un « problème » (ou « tâche ») et de sa « solution » chez Kolmogorov. Fidèles aux principes de Brouwer, ces analyses sont à la base de ce que l'on nomme aujourd'hui la sémantique « BHK », pour « Brouwer-Heyting-Kolmogorov »[65]. Ce chapitre se conclut sur l'influence de BHK sur les travaux du mathématicien et logicien allemand Gerhard Gentzen. Par la création de deux systèmes de déduction pour la logique du premier ordre, la déduction

---

[64] Voir, par exemple, *Placek 1999* ou *Hesseling 2003*.

[65] Les textes clefs de ces deux derniers auteurs étant *Heyting 1930-1931* et *Kolmogorov 1932*.

naturelle et le calcul des séquents, Gentzen marque un tournant dans la théorie de la démonstration. Nous verrons comment celui-ci reprend les idées intuitionnistes, dans une tentative de se distancier de la méthode axiomatique hilbertienne.

3.1 La théorie de la démonstration dans le programme de Hilbert

Les travaux de Brouwer se concentraient d'abord autour des enjeux entourant la question des fondements des mathématiques. En définissant les mathématiques comme des constructions mentales, Brouwer désirait refonder celles-là sur une base constructiviste. La crise des fondements en mathématiques a vu apparaître bon nombre d'autres théories toutes aussi riches conceptuellement que l'intuitionnisme de Brouwer. Pour n'en nommer qu'une, les travaux du mathématicien David Hilbert constituent une modification importante du point de vue « formaliste ». Les contributions de Hilbert sont diverses, mais ce qui nous intéresse principalement sont les idées de démonstration logique et d'axiomatique qui sont présentes dans ce que nous appelons aujourd'hui le « programme de Hilbert »[66]. Dès le début des années 1920, Hilbert développe un programme visant de nouveaux fondements pour les mathématiques. Rejetant l'approche intuitionniste[67], ce dernier souhaite développer une théorie garantissant la fiabilité des mathématiques, à partir de méthodes qui sont acceptées par ces derniers, sans pour autant abandonner les mathématiques classiques.

---

[66] Selon Jean Largeault, c'est Gentzen qui aurait introduit l'idée de « programme » pour désigner l'ensemble des idées de Hilbert. Voir *Largeault 1972*, p. 262

[67] La querelle entre Hilbert et Brouwer remonte à la conversion de Hermann Weyl aux idées intuitionnistes. Étudiant de Hilbert, ce dernier avait défendu une approche « prédicativiste » dans *Le Continu* (*Das Kontinuum*) en 1918, mais il se rallie à Brouwer quelques années plus tard, avec la publication de l'article en 1921 de « Sur la nouvelle crise des fondements des mathématiques » (*Über die neue Grundlagenkrise der Mathematik*) (*Weyl 1921*). Weyl y reprend la critique intuitionniste de la notion classique d'existence mathématique et de l'utilisation standard du principe du tiers exclu, comme cela sera expliqué dans la section 3.1.3. Cette querelle prendra une tournure personnelle et se terminera par l'éviction en 1928 de Brouwer du comité de rédaction des *Mathematische Annalen* par son directeur, Hilbert. Pour plus d'informations, voir *Van Dalen 1990*, *Hesseling 2003*, p. 126-130, and *van Dalen 2005*, chapitre 15.

Dans un article paru sous le titre « Les fondements logiques des mathématiques » (*Die logischen Grundlagen der Mathematik*)[68], Hilbert présente l'idée d'une nouvelle fondation des mathématiques dont le but ultime est d'éliminer tout doute concernant la sûreté des inférences en mathématiques. Pour se faire, celui-ci propose une conception de la démonstration mathématique basée sur un processus de formalisation :

> L'idée de base de ma théorie de la démonstration est la suivante. Tout ce qui constitue la mathématique suivant l'acceptation en vigueur jusqu'aujourd'hui sera rigoureusement formalisé de sorte que la mathématique proprement dite ou au sens stricte se transforme en un stock de formules. Ces formules ne se distinguent de celles utilisées en mathématiques courantes que par ce qu'en dehors des signes habituels y figurent en outre des signes logiques, notamment ceux pour « implique » ($\rightarrow$) et pour « non » ($\neg$). Certaines formules qui servent de pierres d'angle à l'édifice formel de la mathématique sont nommés axiomes. Une démonstration est un dessin qui doit se présenter intuitivement devant nous comme tel. Elle consiste en inférences conformes au schéma d'inférences:
>
> $$\begin{array}{c} S \\ \underline{S \rightarrow T} \\ T \end{array}$$
>
> (*Hilbert 1923*, p. 132-133)

Dans la définition qu'en donne Hilbert, les formules telles que S, $S \rightarrow T$ et T représentent les différents éléments de la démonstration, soit l'axiome sur lequel repose la démonstration, la formule obtenue de l'axiome par substitution ou la conclusion.

[68] Voir *Hilbert 1923*, dont l'original est paru dans *Mathematische Annalen* (vol. 88, 1923, p.151-165).

3.1.1 Métamathématique et axiomatisation

Le programme de Hilbert présente les mathématiques sur deux niveaux. Aux mathématiques proprement dites se superpose un niveau supérieur, une métamathématique, qui permet selon Hilbert d'assurer la consistance du premier niveau :

> Une métamathématique nécessaire pour assurer la première [la mathématique ordinaire], et dans laquelle, par contraste avec les formes d'inférences purement formelles de la mathématique proprement dite, on applique l'inférence à contenu, mais seulement à prouver la consistance des axiomes. Dans cette métamathématique on travaille sur les démonstrations de la mathématique proprement dite, et ce sont ces démonstrations qui deviennent l'objet de l'étude contentuelle. (*Hilbert 1923*, p. 133)[69]

C'est ainsi que Hilbert présente le développement de cette métamathématique, selon une alternance continue entre deux démarches : par l'obtention de nouvelles formules démonstratives à partir des axiomes, et par l'ajout de nouveaux axiomes par la démonstration de leur consistance. La méthode de Hilbert est la suivante. En partant d'un inventaire de signes, on donne des règles servant à constituer une première série de formules (bien formées). On donne ensuite des axiomes qui serviront de prémisses aux déductions et de nouvelles règles permettant de déduire une formule à partir d'une autre déjà établie. Comme l'indique Hilbert, le raisonnement mathématique doit être vu comme un stock de formules, construites et enchaînées selon des règles explicites[70]. C'est donc de cette façon que sont définies la liste des formules et la liste des axiomes incluses dans le grand système mathématique. Les formules sont des combinaisons des

---

[69] Nous suivons Jean Largeault, qui traduit l'allemand « *inhaltlich* » par la paraphrase « à contenu » ou le néologisme « contentuel », l'idée étant que les déductions en question ont un contenu intuitif – il s'agit de ce que Hilbert appellera les mathématiques « réelles ». Dans sa traduction aujourd'hui largement oubliée de ce même texte, parue dans *Acta Mathematica* en 1926 (vol. 48, p. 92-122), le mathématicien André Weil traduisait plutôt « *inhaltlich* » par « interne » (p. 101).

[70] *Hilbert 1925*, p. 233.

signes élémentaires pris dans une réserve définie. À la base des mathématiques se situe un certain groupe de formules, que nous nommons les axiomes. Ceux-ci sont accompagnés d'une série de règles qui nous permettent de produire de nouvelles formules à partir de formules préalablement établies.

En 1923, Hilbert propose une première liste d'axiomes jugés nécessaires pour sa théorie de la démonstration (Hilbert 1923, p. 134), et il la révise en 1927, avec l'introduction de nouveaux axiomes pour la conjonction et la disjonction, ainsi qu'une révision des axiomes pour la négation (Hilbert 1927, p. 147). Voici ces listes, les axiomes étant accompagnés des noms qu'il leur donne (ce qui s'avèrera utile pour comprendre les idées de Gentzen) :

Axiomes pour l'implication[71]

1. $A \rightarrow (B \rightarrow A)$	(Adjonction d'une hypothèse)
2. $(A \rightarrow (A \rightarrow B)) \rightarrow (A \rightarrow B)$	(Suppression d'une hypothèse)
3. $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (B \rightarrow (A \rightarrow C))$	(Échange des hypothèses)
4. $(B \rightarrow C) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$	(Élimination d'une proposition)

Axiomes pour la conjonction et la disjonction (ajoutés en 1927)

5. $(A \& B) \rightarrow A$

6. $(A \& B) \rightarrow B$

7. $A \rightarrow (B \rightarrow (A \& B))$

8. $A \rightarrow (A \vee B)$

9. $B \rightarrow (A \vee B)$

10. $((A \rightarrow C) \& (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \vee B) \rightarrow C)$

[71] On réfère souvent à ces axiomes sous le nom de « fragment implicationnel », de l'anglais « *implicational fragment* ».

Axiomes pour la négation (1922)

11. $A \rightarrow (\neg A \rightarrow B)$ (Principe de non-contradiction)

12. $(A \rightarrow B) \rightarrow ((\neg A \rightarrow B) \rightarrow B)$ (Principe du *tertium non datur*)[72]

Axiomes pour la négation (1927)

11b. $(A \rightarrow B \,\&\, \neg B) \rightarrow \neg A$ (Principe de contradiction)

12b. $\neg(\neg A) \rightarrow A$ (Loi de la double négation)

L'axiome 11 représente un principe connu sous le nom « d'*ex falso* » – un raccourci pour « *ex falso sequitur quodlibet*» ou «du faux on peut tout déduire» – l'idée étant qu'à la suite de la dérivation d'une contradiction A et $\neg A$, on peut introduire n'importe quel B. Cela va de soi selon un raisonnement des plus simples, que nous avons déjà vu au chapitre 1 : ayant dérivé A, on peut introduire $A \vee B$ (le connecteur étant introduit plus bas), or, puisque que nous avons aussi $\neg A$, par une forme valide connue sous le nom de « syllogisme disjonctif », il s'en suit de $A \vee B$ et de $\neg A$, que B. On verra que ce principe jouera un rôle crucial dans les premières tentatives d'axiomatisation de la logique intuitionniste, menant même un obscur logicien russe, Orlov, à suggérer de le retirer, ce qui eut pour effet qu'il proposa la première axiomatisation de la logique de la pertinence.

À ces axiomes, Hilbert en ajoute deux pour l'identité, qui ne joueront aucun rôle dans le cadre de ce mémoire :

Axiomes pour l'égalité

13. $a = a$

14. $a = b \rightarrow (A(a) \rightarrow A(b))$

---

[72] « *Tertium non datur* » étant l'expression latine désignant le principe du tiers exclu.

Les axiomes 1-14 forment l'ensemble des axiomes du calcul des propositions classique avec l'identité. S'ajoute à ceux-ci en 1927 l'axiome ε (ou « axiome transfini ») et les axiomes pour les quantificateurs.

Axiome ε

15. $A(a) \rightarrow A(\varepsilon x A(x))$

La motivation pour cet axiome mérite un développement, car elle est au fondement de la dispute entre Hilbert et Brouwer qui sera abordée dans la prochaine section. Hilbert voyait Brouwer comme le successeur de Kronecker à qui il faisait ce reproche :

> Kronecker n'a eu qu'un tort, prétendre que les inférences transfinies ne sont pas permises. Il prononçait des interdits contre l'inférence transfinie, notamment, on n'avait pas, selon lui, le droit quand A(n) n'est pas vraie pour tout nombre entier n, d'inférer de là qu'il existe un nombre entier n pour lequel cette proposition est fausse. (Hilbert 1930, p. 190)

Il lui reproche donc de rejeter le principe suivant :

$$\neg \forall x\, A(x) \rightarrow \exists x \neg A(x)$$

C'est ce rejet que Brouwer développera, comme nous le verrons, en une critique de l'application universelle en mathématiques de la loi du tiers exclu :

$$A(x) \vee \neg A(x)$$

La clef du calcul epsilon se trouve donc dans le rejet explicite de ce point de vue, et l'idée de rétablir le tiers exclu par une *fonction de choix*. Selon Hilbert, pour toute propriété A des nombres naturels, 0, 1, 2, 3, ... il y a donc deux possibilités :

(i) Soit il existe un nombre x tel que $A(x)$,

(ii) Soit pour tout x ce n'est pas le cas que $A(x)$.

On peut donc choisir un « représentant » ou « témoin », appelons le e, pour la propriété A, c'est-à-dire un nombre tel que $A(a)$ implique que $A(e)$, quel que soit le nombre a :

$$A(a) \rightarrow A(e)$$

En effet, pour reprendre les termes de l'alternative, dans le cas (i) où il existe un nombre x pour lequel $A(x)$, on choisit e parmi les nombres x pour lesquels $A(x)$, tandis que dans le cas (ii), c'est-à-dire lorsque ce n'est jamais le cas que $A(x)$, alors on choisit e au hasard. Comme le dit Hilbert:

> … prenons par exemple pour A le prédicat « être corruptible »; alors ε(A) sera un homme déterminé doué d'une intégrité si parfaite que s'il venait à se révéler corruptible, tous les hommes en général seraient corruptibles. (*Hilbert 1923*, p. 137)

Dans le cas de l'arithmétique, donc de la suite infinie des nombres naturels, on peut choisir en tenant compte du principe du plus petit nombre un e unique en prenant, dans le cas (i), $e = x$ comme étant le plus petit nombre pour lequel $A(x)$ – ce nombre étant atteint en vérifiant d'abord si 0 possède la propriété, et si ce n'est pas le cas, si 1 possède la propriété, etc., donc dans un nombre fini d'étapes – ou, dans le cas (ii), $e = 0$. Donc e est le produit d'un opérateur qui s'applique à toute propriété A :

$$e = \mathrm{e}xA(x)$$

Cette écriture nous permet d'introduire l'axiome e ci-dessus, et l'ajout de cet axiome permet en retour d'introduire les quantificateurs :

Axiomes de définition des quantificateurs

16. $\forall x\, A(x) \leftrightarrow A(\varepsilon x\, \neg A(x))$

17. $\exists x\, A(x) \leftrightarrow A(\varepsilon x\, A(x))$

De ces axiomes, nous obtenons une liste des principes transfinis purement logiques, dont voici les trois principaux :

18. $\forall a\, A\, (a) \rightarrow A(b)$ (Principe d'Aristote)

19. $A\, (a) \rightarrow \exists a\, A(a)$ (Principe d'existence)

20. $\neg\, \forall(a)\, A(a) \rightarrow (\exists a) \neg\, A(a)$ (Principe du *tertium non datur*)

Par l'ajout de l'axiome ε et de ces axiomes pour les quantificateurs et ces principes transfinis, Hilbert souhaitait rétablir la validité du tiers exclu dans les domaines infinis, contre la critique de Kronecker et de Hilbert. Ces idées sont à la base du « calcul epsilon », qui formera l'outil principal de la théorie de la démonstration dans le cadre du programme de Hilbert (entre autres dans les preuves de consistance à partir d'Ackermann), mais il sera progressivement remplacé dans ce rôle à partir des années soixante par les méthodes introduites par Gentzen. Ces développements sortent du cadre de ce mémoire. Ce qui nous importe est l'importance de la liste des axiomes 1-12 pour le calcul propositionnel. Cette liste d'axiomes sera tour à tour critiquée et révisée par les logiciens intuitionnistes (Kolmogorov, Glivenko, Orlov et Heyting), pour obtenir le calcul propositionnel intuitionniste, et servira de base aux travaux de Gentzen pour l'introduction de ses calculs de déduction naturelle. Nous verrons ces développements plus tard dans ce chapitre, afin de la rendre conforme aux exigences propres à l'intuitionnisme. Cette révision tourne généralement autour des divergences d'idées entre formalistes et intuitionnistes sur les notions de finitisme et de « transfinitisme »[73].

---

[73] Expression que nous empruntons à *Largeault 1992.*

3.1.2 Finitisme et transfinitisme

Contrairement à Brouwer[74], Hilbert concevait la pensée humaine comme un processus *fini* et donc que les démonstrations mathématiques ne peuvent pas être infinies :

> Il est possible de s'expliquer naturellement la solution que ma théorie de la démonstration propose de la difficulté : c'est que notre pensée est finitiste; quand nous pensons, se déroule un processus finitiste. (Hilbert 1923, p. 140)

En effet, pour Brouwer, la possibilité de répéter infiniment une même opération mathématique permet de construire un *objet mental infini* – en ce qui concerne l'idée de la « preuve comme objet » nous renvoyons à la section 2.1 – ce qui ouvre la porte à l'idée d'une *preuve infinie.* Brouwer voyait d'ailleurs ce fait comme sa *principale* objection à Hilbert, puisque les preuves sont des objets linguistiques, donc nécessairement *finis.* Mais Hilbert croyait qu'il est néanmoins possible de raisonner de façon purement formelle sur les suites ou ensembles transfinis. Si nous pouvions démontrer par des méthodes finitistes que la consistance de la partie « réelle » mathématiques n'est pas perturbée par l'ajout de nouveaux axiomes transfinis, il nous est alors possible de justifier leur usage. En effet, si cette justification n'implique qu'un nombre limité d'opérations formelles, une démonstration permettant de démontrer que l'introduction d'un nouvel axiome ne permet pas de déduire des propositions contradictoires, peut être considérée comme une démonstration « finie »[75].

---

[74] Voir *Brouwer 1927*, p. 460, n. 8.

[75] Dans son article « Sur l'infini » (*Über das Unendliche*), Hilbert revient sur l'ajout d'axiomes pour ce qu'il appelle les « éléments idéaux » : « Une extension par adjonction d'éléments idéaux n'est en effet recevable que s'il n'en résulte pas de contradiction à l'intérieur de l'ancien domaine, c'est-à-dire par conséquent si les relations qui apparaissent entre les anciens objets en termes desquels on élimine les objets idéaux sont toujours valables dans l'ancien domaine » (*Hilbert 1925*, p. 235).

Comme nous l'avons déjà observé dans ce mémoire, la question de l'infini mathématique est une question qui peut soulever bien des problèmes. En effet, les énoncés mathématiques portant sur des ensembles infinis risquent de ne pouvoir jamais être démontrés, car une procédure infinie est impossible à réaliser. Donc, nier que tous les membres d'une suite infinie possèdent une propriété A ne peut pas revenir à dire qu'il existe un de ces membres qui ne possède pas la propriété A, sans que nous puissions le fournir : en effet, tant que nous ne pouvons pas en prouver l'existence de façon constructive, on ne peut pas savoir s'il existe ou non par simple inspection d'une suite infinie. Nous revenons donc ici aux idées de Brouwer et à sa critique de l'utilisation du tiers exclu pour les mathématiques portant sur des suites ou totalités infinies (dénombrables ou non). À ce sujet, Hilbert se rapproche des idées de Brouwer, notamment dans sa critique de la démarche logiciste :

> Frege a voulu fonder l'arithmétique sur la logique pure, Dedekind la fonder sur la théorie des ensembles comprise comme un chapitre de la logique pure : ni l'un ni l'autre n'ont atteint leur but. Frege n'avait pas manié avec assez de prudence les conceptualisations usuelles de la logique dans leur application aux mathématiques : il tenait l'extension d'un concept pour quelque chose d'immédiatement donné; il croyait donc avoir le droit de prendre ensuite librement ces extensions comme objets. Il tomba ainsi dans une sorte d'ultra-réalisme du concept. Il en devait aller de même pour Dedekind : son erreur classique a consisté à prendre pour point de départ le système de tous les objets. Pour brillante et séduisante que soit son idée de fonder le nombre fini sur l'infini, le caractère impraticable de cette voie ne fait aujourd'hui plus de doute pour personne. (*Hilbert 1922*, p. 116)

Bien que tous deux soient critiques du projet logiciste, les idées de Hilbert et de Brouwer ne se rejoignent pas sur la question de l'infini mathématique. Brouwer voulait restreindre l'utilisation des méthodes de démonstrations indirectes (tiers exclu, raisonnement par l'absurde) aux seuls ensembles finis, tandis que Hilbert emprunte un chemin différent afin de pouvoir traiter de l'infini mathématique. Comme le précise Largeault, ce dernier divise d'abord les propositions mathématiques entre celles possédant un sens concret et intuitif et celles qui n'en ont pas. Ces dernières sont les propositions qui font intervenir l'infini ou le transfini sous quelque forme que ce soit, dans lesquelles les quantificateurs universels ou existentiels portent sur des individus d'un domaine infini. Le but de Hilbert était plutôt *d'éliminer* les quantificateurs de cette catégorie de propositions, en ramenant les assertions générales, portant sur « tous les objets » à des assertions sur quelques objets particuliers *via* le calcul epsilon[76]. Il cherchait par là à démontrer par des moyens finitistes concrets, que lors de l'ajout de propositions transfinies aux propositions finies, il ne se produit pas de contradiction. Il serait alors légitime d'introduire des propositions transfinies aux propositions finies, à la condition de démontrer la non-contradiction des propositions transfinies par des moyens finitistes et concrets.

Pour Hilbert, il s'agirait donc d'utiliser les raisonnements finitistes pour donner un fondement aux mathématiques classiques, qui outrepassent les limites finitistes. Le calcul transfini devient en quelque sorte une extension du calcul fini, dont la l'utilisation sûre repose sur l'absence de contradiction[77] :

> Nous voyons donc que si l'on se propose de fonder rigoureusement les mathématiques, on ne peut pas accepter comme allant de soi au point de vue de la logique les formes d'inférences couramment utilisées en Analyse. Au contraire notre tâche est justement de nous assurer pourquoi et en quelle mesure l'application des inférences transfinies aussi bien en Analyse qu'en théorie des ensembles n'en conduit pas moins toujours à des résultats corrects. En restant sur le terrain finitiste, il s'agit donc d'arriver à manier librement et à dominer entièrement le transfini ! (*Hilbert 1923*, p. 136)

---

[76] *Largeault 1972*, p. 215.

[77] Une fois la non-contradiction établie, c'est alors le succès seul qui peut déterminer la pertinence d'une théorie. Comme l'explique Hilbert: « Si la question de la légitimité d'une convention peut avoir un sens qui ne se confonde pas avec la donnée d'une démonstration de non-contradiction, il ne peut s'agir que de l'efficacité de cette convention. Le succès est nécessaire ; le critère du succès est l'instance dernière, celle devant laquelle tout le monde doit s'incliner » (*Hilbert 1925*, p. 222).

L'originalité de la thèse hilbertienne tient en ceci qu'en souhaitant « éliminer » les propositions transfinies, elle permet en réalité de les conserver. En effet, par des moyens concrets, trouvés généralement dans les mathématiques constructivistes, l'on parvient à démontrer la consistance des propositions mathématiques transfinies.

Hilbert et Brouwer divergent l'un de l'autre, quant aux exigences constructivistes vis-à-vis la nature des démonstrations mathématiques. Si pour Brouwer une démonstration mathématique est synonyme de preuve directe et constructive, Hilbert ne maintenait pas cette exigence. Pour ce dernier, nous ne devons pas exiger que l'ensemble des objets mathématiques soient directement constructibles. Il suffit que l'on puisse prouver par des moyens constructivistes (donc finitistes) que les nouveaux objets mathématiques introduits dans un système n'introduisent pas de contradiction. Ce sont donc deux types de constructivismes qui s'opposent : celui de l'intuitionniste se limitant à ce qu'un mathématicien peut construire de manière effective, et un formalisme qui introduit des éléments non constructifs, en garantissant leur existence par une preuve finitiste de consistance.

3.1.3. Weyl et les quantificateurs

La première tentative d'offrir une interprétation intuitionniste du calcul de prédicats semble avoir été celle de Hermann Weyl dans un texte de 1921, « Sur la crise contemporaine des fondements des mathématiques » (*Über die Neue Grundlagenkrise der Mathematik*)[78]. Quelques années auparavant, Weyl avait adopté dans son livre *Le Continu* (*Das Kontinuum*)[79], une forme de « prédicativisme », en rejetant comme illégitimes ce qu'on appelait depuis Poincaré et Russell les définitions

[78] *Weyl 1921.*
[79] *Weyl 1994.*

« imprédicatives », c'est-à-dire celles où l'élément à définir est définit en termes d'un ensemble dont il est lui-même membre, comme dans la définition de la borne inférieure d'un ensemble de nombres réels. Cette approche impliquait donc une mutilation des mathématiques, mais sans pour autant remettre en question la logique classique[80]. En 1921, Weyl, qui était considéré les plus brillant étudiant de Hilbert pour ses nombreuses contributions aux mathématiques et à la physique[81], se rallie à l'intuitionnisme de Brouwer, en déclarant : « Brouwer, voilà la révolution ! »[82]. Les raisons de ce ralliement se trouvent dans la réflexion de Weyl sur le continu et les idées de Brouwer sur ce dernier, que nous avions décidé de ne pas aborder dans ce mémoire[83]. Weyl présente cependant, sommairement, une nouvelle conception des quantificateurs. Le quantificateur existentiel est conçu comme un « abstract de jugement » (*Urteilsabstrakte*) : il faut d'abord produire un instance $F(a)$ pour en abstraire $\exists x\, F(x)$ – sinon ce dernier ne serait égal qu'à « une carte qui indique la présence d'un trésor sans cependant en révéler l'endroit » – et le quantificateur universel comme un « bon général pour les jugements » (*Urteilsanweisung*), à l'image (bancaire) d'un « bon » qui peut être échangé pour de l'argent sonnant : $\forall x\, F(x)$ permet donc d'inférer $F(a)$ [84].

Ces conceptions légitiment donc les axiomes suivants :

1. $F(a) \rightarrow \exists x\, F(x)$
2. $\forall x\, F(x) \rightarrow F(a)$

Dans le cas infini, on a donc, respectivement une disjonction infinie dont on ne peut pas faire la somme :

---

[80] Pour une défense récente de cette position, voir *Feferman 1998* et *Giaquinto 2002*.

[81] Voir *Bell & Korté 2016*.

[82] *Weyl 1921*, p. 82.

[83] Pour plus de détails sur ce point, voir *van Dalen 1995*.

[84] *Weyl 1921*, p. 81.

$$F(a) \vee F(b) \vee F(c) \vee \ldots$$

Et un produit infini :

$$F(a) \wedge F(b) \wedge F(c) \wedge \ldots$$

Pour Weyl, cette conception est intuitionniste car la négation du jugement $\exists x\, F(x)$ ou $\forall x\, F(x)$ devient alors impossible, donc la loi du tiers exclu ne peut pas s'appliquer. Cette idée a joué un rôle important, puisqu'elle a influencé Hilbert dans la conception même de son programme, puisqu'il voyait justement là la raison pour laquelle il faut introduire des éléments « idéaux » pour rétablir le tiers exclu, et à partir de 1929, F. P. Ramsey et Wittgenstein[85].

Filant la métaphore de Weyl, Ramsey voyait en 1925 un « menace bolchevique » dans les idées de Brouwer et Weyl[86], mais en 1929, qui fut la dernière année de sa vie (il meurt en janvier 1930), Ramsey s'est rapproché de l'intuitionnisme, en reprenant les idées de Weyl, dans « Les principes de la mathématique finitiste » (*Principles of Finitist Mathematics*) et « La structure formelle des mathématiques intuitionniste » (*The Formal Structure of Intuitionist Mathematics*). Mais les règles qu'il propose dans ce dernier apparaissent restreindre les quantificateurs aux formules en « forme prénexe »[87]. Une formule est dite être en forme prénexe lorsque tous ses quantificateurs se retrouvent à sa gauche, et en logique classique toute formule du calcul des prédicats du premier ordre peut être transformée en une formule en forme prénexe ». Ainsi, par

[85] Voir *Marion 1995b* et *Marion 1998*, chapitre 4.
[86] *Ramsey 2003*, p. 116.
[87] *Ramsey 1991*, p. 208-210.

exemple, la formule de gauche, qui ne l'est pas, est transformée en celle de droite, qui est en forme prénexe :

$$\neg \forall x\, F(x) \rightarrow \exists x \neg F(x)$$

C'était une erreur de Ramsey de penser capturer ainsi les raisonnements intuitionnistes, car en logique intuitionniste le comportement de la négation et l'implication ne permettent pas de convertir certaines formules en forme prénexe. La formule ci-dessus, y est justement rejetée.

Il faut noter que les axiomes de Weyl 1-2, ci-dessus, correspondent respectivement aux règles d'introduction du quantificateur existentiel et d'élimination du quantificateur universel en déduction naturelle. Pourtant Frege avait déjà énoncé la règle de généralisation universelle dans sa *Begriffschrift* en disant (au § 11), qu'on peut pour un a arbitraire (ce qu'on appelle aujourd'hui une « *eigenvariable* ») inférer de

$$A \rightarrow F(a)$$

à

$$A \rightarrow \forall x\, F(x)$$ [88].

Il faudra donc attendre les travaux de Gentzen pour que les règles d'introduction et d'élimination pour les quantificateurs soient clairement établies, qui soient en accord avec la sémantique BHK. Nous aborderons ces derniers dans la section 3.3.3, sans cependant revenir sur la question des quantificateurs.

[88] *Frege 1999*, p. 35. Voir *von Plato 2017*, p. 110-112. Russell a été le premier à reconnaître l'importance de ce point, en distinguant entre « *all* » et « *any* » (*Russell 1903*, p. 519).

3.2 La formalisation de la logique intuitionniste : Kolmogorov, Orlov et Glivenko

Le « constructivisme » de Hilbert a tôt fait d'être critiqué par Brouwer et ses successeurs. Il est à noter que la critique intuitionniste du formalisme remonte à plusieurs années avant la publication des articles de Hilbert de 1923-27. En effet, déjà dans sa thèse doctorale de 1907, Brouwer avait formulé des doutes sur la viabilité du formalisme[89], et en 1912 il dénonçait dans « Intuitionnisme et formalisme » (*Intuitionism en formalism*) l'idée formaliste d'accorder davantage d'importance au langage formel qu'aux actes mentaux permettant la construction des mathématiques :

> La question 'Où réside l'exactitude mathématique ?' reçoit des réponses différentes, l'intuitionniste disant 'dans l'esprit humain' et le formaliste 'sur le papier'. (*Brouwer 1912*, p. 41)

En 1928, la publication des « Réflexions intuitionnistes sur le formalisme » (*Intuitionistische Betrachtungen über den Formalismus*) recentre la critique du formalisme autour de thèses de Hilbert, notamment celles énoncées dans les textes de 1922 et 1927 que nous avons vus. Brouwer met en évidence quatre thèses qui présentent à la fois les similitudes et ce qui distingue l'intuitionnisme du formalisme :

> 1) La distinction entre le développement formaliste d'un stock de formules et la théorie intuitive (contentuelle) des lois de ce développement, théorie qui doit satisfaire à la mathématique intuitionniste des entiers naturels [...]
>
> 2) Le rejet de l'application automatique du principe logique du tiers exclu et la reconnaissance de ce que son domaine de validité n'embrasse que les ensembles finis.

[89] La thèse de 1907 semble comporter toutefois une définition très englobante du formalisme mathématique. En effet, si Hilbert est bien visé, l'étiquette « formaliste » est également attribuée à une série de mathématiciens tels Cantor, Peano, Zermelo, Dedekind et Frege.

> 3) L'identification du principe du tiers exclu avec celui de la résolubilité de tout problème mathématique.
>
> 4) La reconnaissance que la justification contentuelle de la mathématique formaliste par lapreuve de sa consistance implique un cercle vicieux, attendu que cette justification repose sur la vérité contentuelle de l'assertion que de la non-contradiction d'un énoncé suit sa vérité, autrement dit repose sur la validité (contentuelle) du principe du tiers exclu. (*Brouwer 1928*, p. 248)

Si les thèses 1-2 répondent aux conditions de Brouwer, les thèses 3-4 supportant le principe de résolubilité de tout problème mathématique et la justification de l'existence mathématique par preuve de consistance ne sauraient satisfaire les exigences intuitionnistes. Comme l'explique Heyting, cette insatisfaction est due aux divergences de vue entre Brouwer et Hilbert à propos de la conception de l'existence mathématique:

> Ils [les formalistes] voient dans la démonstration de non-contradiction une sorte de justification en soi [...]. Ainsi on connaît exactement le point de litige entre BROUWER et HILBERT. Si futile qu'il paraisse, il implique entre deux conceptions de l'univers une divergence considérable qui ne se laissera pas facilement réduire. (*Heyting 1934*, p.62)

Comme nous l'avons vu, du point de vue intuitionniste une démonstration de non-contradiction (ou de consistance) n'est pas une preuve d'existence[90]. En définissant la négation en termes d'absurdité, Brouwer rejette la *reductio* classique :

---

[90] Dans ses publications des années 1920, Brouwer donne toute une série d'exemples mathématiques (dont son célèbre *Pendelzahl* dans sa conférence de Vienne en 1928) pour illustrer son rejet de la *reductio* classique, dont celle-ci (en 1923), très imagée : « une théorie incorrecte, impossible à arrêter par une contradiction qui la réfuterait, ne laisse pas d'être incorrecte, de même qu'une politique criminelle qu'aucune cour de justice n'est capable d'empêcher ne laisse pas d'être criminelle » (*Brouwer 1923*, p. 199).

$$\frac{\begin{array}{c}\neg A \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \bot\end{array}}{A}$$

La *reductio* classique implique que si toute tentative de prouver $\neg A$ échoue, alors nous pouvons asserter qu'asserter $\neg\neg A$, ce qui revient à asserter A, en vertu du tiers exclu. La formulation de ce principe de preuve masque donc l'usage de la loi de la double négation (l'axiome 12b de Hilbert ci-dessus) :

$$\neg\neg A \rightarrow A$$

Cet axiome est équivalent à la loi du tiers exclu, et Brouwer le rejette tout naturellement. Mais les raisons de Brouwer sont cruciales pour comprendre son intuitionnisme : il rejette la *reductio* classique parce que A peut ne correspondre à aucune construction mentale du mathématicien. On ne peut pas affirmer quelque chose de « positif » par cette voie. En d'autres termes, on en vient à asserter l'existence de quelque chose qu'on ne peut pas construire ou exhiber.

Brouwer précise cependant qu'il est possible de développer, parallèlement aux mathématiques intuitionnistes, des systèmes formels reposant sur la non-contradiction. Ceux-ci seraient consistants, à la manière du système hilbertien, mais ne seraient pas vrais, car non-démontrés à l'aide de preuves constructives.

> Sur la base des idées intuitionnistes, on peut, en dehors des théories vraies, construites à l'écart du tiers exclu, dériver aussi, en recourant à ce principe, assujetti à la restriction ci-dessus, des théories non contradictoires, qui embrasseront une partie beaucoup plus étendue de la mathématique

> traditionnelle que cela n'est le cas des théories vraies. Une mécanisation appropriée du langage de cette mathématique non contradictoire du point de vue intuitionniste, devrait fournir exactement ce que l'école formaliste vise à atteindre. (*Brouwer 1929*, p.269)

Par ailleurs, il importe de noter, comme nous l'avons vu dans la section 1.3, que Brouwer ne rejette pas ce qu'on appelle la *reductio* intuitionniste :

$$\frac{\begin{array}{c} A \\ \vdots \\ \bot \end{array}}{\neg A}$$

En effet, si toute tentative de construire A échoue, alors on ne peut pas asserter A, donc asserter que $\neg A$, ce qui est parfaitement constructif. Ce raisonnement est à la base de la définition de la négation dans la sémantique de BHK[91]:

$$A \to \bot \equiv_{\text{def.}} \neg A$$

L'utilisation de la *reductio* classique devient alors l'un des points de rupture entre l'intuitionnisme et le formalisme. Alors que Brouwer en vient à rejeter certains théorèmes mathématiques parce que leurs preuves sont non constructives, Hilbert rejette cette attitude intransigeante, parce qu'elle nuirait au développement des mathématiques. La sévérité des exigences intuitionnistes en matière d'existence mathématique en vient à l'exaspérer, et tient vers la fin des années vingt des propos très durs, plutôt déplacés pour un cadre académique :

[91] Ce raisonnement se retrouve dans (Brouwer 1925), ainsi qu'une preuve de la validité intuitionniste de « $\neg\neg\neg A \to \neg A$ », comme nous l'avons vu dans la section 1.3.

> Je m'étonne qu'un mathématicien élève des doutes à l'encontre de la stricte validité du Tertium Non Datur. Je m'étonne encore plus qu'il se soit trouvé aujourd'hui toute une secte de mathématiciens pour emboîter le pas. Je m'étonne enfin que dans le public des mathématiciens la capacité de suggestion émanant d'un seul homme subtil et de grand tempérament puisse produire des effets aussi invraisemblables que saugrenus. (*Hilbert 1927*, p.159)

Dans une formule devenue célèbre, Hilbert exprime ainsi sa critique envers l'intuitionnisme et sa vision du tiers exclu :

> Ôter le [*tertium non datur*] au mathématicien serait comme si on voulait enlever à l'astronome son télescope, au boxeur le droit de se servir de son gant. Interdire les théorèmes d'existence et proscrire le [*tertium non datur*] revient quasiment à renoncer à la science mathématique. (*Hilbert 1927*, p. 159)

La position de Hilbert *vis-à-vis* des exigences intuitionnistes en matière de prouvabilité relève d'une réaction qu'on pourrait qualifier de « conservatisme logique », qui sera reprise par bien des philosophes soucieux de défendre la validité universelle du tiers exclu, dont Russell et Quine[92]. Cet alarmisme se retrouve également chez le principal collaborateur de Hilbert, Paul Bernays. Celui-ci va même jusqu'à accuser les intuitionnistes de despotisme :

> En réalité Weyl et Brouwer emboîtent le pas à Kronecker : ils voudraient fonder les mathématiques en jetant par-dessus bord tout ce qui leur semble incommode et en instituant une dictature de l'interdiction de style kroneckerien. Mais c'est démembrer et mutiler notre science, et nous courons le risque, à écouter nos faiseurs de réformes, de perdre la majeure partie de nos trésors les plus précieux. (*Bernays 1930*, p. 75)

---

[92] Joseph Vidal-Rosset a bien montré dans *Vidal-Rosset 2012* que ce « conservatisme logique" est également présent chez des auteurs comme Bertrand Russell et W. V. Quine. Voir en particulier le chapitre de Russell sur Brouwer et le tiers exclu dans *Russell 1940*, chapitre xx.

Hilbert finira par congédier Brouwer de la revue *Mathematische Annalen*, ce qui eut un effet négatif sur ce dernier, qui ne publia rien pendant près d'une décennie.

Il est évident que ces critiques étaient déplacées, nous verrons plus loin pourquoi, lorsqu'on nous discuterons la traduction de Kolmogorov-Gödel. Toutefois, elles indiquent clairement les divergences de conception qu'ont Hilbert et Brouwer vis-à-vis la notion d'existence mathématique. D'un côté, Hilbert fait reposer l'existence des mathématiques transfinis sur la base de la non-contradiction, justifiant de ce fait une utilisation particulière du tiers exclu dans les ensembles infinis. D'un autre côté, Brouwer reconnaît que le tiers exclu appartient au langage et non à l'esprit qui fonde les mathématiques. Or chez Brouwer cette critique ne débouchait pas sur une caractérisation claire de la logique intuitionniste, puisque celle-ci était liée au langage. Tout au plus pouvait-on trouver le rejet de la *reductio* classique et l'acceptation de la *reductio* intuitionniste, qui définit la négation. Des logiciens russes (Kolmogorov, Glivenko, Orlov) et Heyting décidèrent de fournir une axiomatisation de la logique intuitionniste en révisant la liste d'axiomes fournie par Hilbert (en 1923 et 1927), à la lumière de ces indications.

3.2.1 Une première tentative : Kolmogorov

En 1925, le mathématicien russe Andrei Kolmogorov, bien connu pour avoir été par ailleurs un des fondateurs de la théorie des probabilités[93], publie un article sous le titre « Sur le principe du tiers exclu » (*0 principe tertium non datur*). Cette première contribution du mathématicien au débat entourant la question du tiers exclu est remarquable, car elle inclut la première formalisation partielle de la logique

93 Voir ses *Concepts fondamentaux de la théorie des probabilités* (*Grundbegriffe der Warscheinlichkeitsrechnung*) de 1933, dont la traduction est *Kolmogorov 1956*. Sur le rôle de Kolmogorov dans le développement de la théorie des probabilités, voir *von Plato 1994*, chapitre 7.

intuitionniste. Comme nous le verrons plus loin, cette formalisation anticipe déjà les travaux de Glivenko et de Heyting[94]. Kolmogorov débute son texte en reprenant à son compte la critique par Brouwer de l'utilisation du tiers exclu dans les raisonnements transfinis :

> Only the finitary conclusions of mathematics can have significance in applications. But transfinite arguments are often used to provide a foundation for finitary conclusions. Brouwer considers, therefore, that even those who are interested only in the finitary results of mathematics cannot ignore the intuitionistic critique of the principle of excluded middle. (*Kolmogorov 1925*, p. 416)

L'objectif que se donne alors Kolmogorov est de démontrer en quoi cette utilisation illégitime du tiers exclu n'entraîne toutefois pas de contradiction et ce qui expliquerait pourquoi elle fut à peine remarquée dans le passé. Kolmogorov rejoint donc Brouwer, en reconnaissant la supériorité de l'intuitionnisme sur le formalisme, parce que l'intuitionnisme propose une explication de la *signification* des propositions mathématiques, là où les formalistes (dont Hilbert, mais pas complètement puisqu'il admet un domaine limité de mathématiques « réelles ») pensent qu'elles n'ont en fait aucune signification ; ce serait un pur jeu de symboles[95].

---

[94] Les historiens ne sont pas certains de la façon dont Kolmogorov se serait familiarisé avec les travaux de Brouwer. Comme le suggèrent Hesseling et van Dalen, il se pourrait que Kolmogorov puisse avoir été initié à l'intuitionnisme à travers d'autres mathématiciens comme les grands topologistes que furent Alexandroff ou Urysohn. (Alexandroff a publié une excellente introduction qui montre le rôle capital des concepts et résultats de Brouwer dans le développement de la topologie, *Alexandroff 1961*.) Ceux-ci auraient rencontré Brouwer en 1923 lors de la réunion de la Société mathématique allemande à Marbourg, et ils furent très influencés, comme tous les topologistes de cette première génération, par Brouwer et naturellement conduits à ses idées logiques (que d'autres, tels que Karl Menger, finirent par rejeter). Voir *Hesseling 2000*, p. 237. Par-delà cette question, il faut souligner le fait que Brouwer a développé ses idées logiques dans le cadre de ses travaux en topologie – voir sur ce point *Dubucs 1988* – entre autres autour de son théorème de la barre, et qu'il était tout naturel pour les topologistes de l'époque (comme d'ailleurs aujourd'hui) de s'intéresser aux principes logiques sous-jacents.

[95] *Kolmogorov 1925*, p. 417.

Contrairement à Brouwer, Kolmogorov croit pertinent d'utiliser un langage formalisé afin de démontrer que l'utilisation du principe du tiers exclu dans les ensembles transfinis n'est pas intuitivement fondée. C'est pourquoi il présente une liste d'axiomes pour le calcul propositionnel intuitionniste, en révisant la liste des axiomes donnée par Hilbert dans son article de 1922. Kolmogorov présente donc son propre système d'axiomes, le système **B,** constitué des axiomes suivants :

Axiomes pour l'implication

1. $A \rightarrow (B \rightarrow A)$
2. $(A \rightarrow (A \rightarrow B)) \rightarrow (A \rightarrow B)$
3. $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (B \rightarrow (A \rightarrow C))$
4. $(B \rightarrow C) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow A \rightarrow C)$

Axiome pour la négation

5. $(A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A)$

La liste des axiomes présents dans le système **B** de Kolmogorov se limite aux axiomes d'implication et de négation. Il faudra attendre les articles de Glivenko (1929), Heyting (1930-31) et Kolmogorov (1932) afin d'avoir une liste complète et exhaustive des axiomes constituant le calcul propositionnel intuitionniste. Comme nous pouvons l'observer, Kolmogorov reprend les axiomes pour l'implication (connus sous le nom de « fragment implicationnel ») fourni par Hilbert. Kolmogorov propose alors une explication de l'implication telle que la signification de « $A \rightarrow B$ » est capturée entièrement par le fait que, une fois que nous sommes convaincus de la vérité de A, nous acceptons aussi la vérité de B[96].

La situation est différente pour la négation. En effet, l'axiome 5 de Hilbert

[96] *Kolmogorov 1925*, p. 420.

$$A \rightarrow (\neg A \rightarrow B),$$

qui représente comme nous l'avions vu l'*ex falso*, est rejeté par Kolmogorov[97]. Celui-ci explique son rejet en comparant l'axiome 5 à l'axiome 1 :

$$A \rightarrow (B \rightarrow A)$$

Selon Kolmogorov, tandis que l'axiome 1 suit avec une évidence intuitive de l'interprétation correcte de l'idée d'implication logique, l'axiome 5 n'a pas et ne peut pas avoir un fondement intuitif puisqu'il affirme quelque chose des conséquences de quelque chose d'impossible, *on doit accepter B si le jugement vrai A est reconnu comme faux* :

> … while the first axiom of implication follows with intuitive obviousness from a correct interpretation of the idea of logical implication, the axiom now considered does not have and cannot have any intuitive foundation since it asserts something about the consequences of something impossible: we have to accept B if the true judgement A is regarded as false. (*Kolmogorov 1925*, p. 421).

L'axiome 6 de Hilbert:

$$(A \rightarrow B) \rightarrow ((\neg A \rightarrow B) \rightarrow B)$$

pose également problème pour Kolmogorov, puisque c'est une version du tiers exclu. En effet, le principe est exprimé de la façon suivante : si B découle de A aussi bien que de $\neg A$, alors B est vrai ; ce qui n'est autre chose que la *reductio* classique. Contrairement à l'axiome 5 de Hilbert qui est tout simplement éliminé, l'axiome 6 est

[97] Voir *van Dalen 2004*.

révisé afin de pouvoir représenter la *reductio* intuitionniste[98], à savoir que, si de A une contradiction s'ensuit, alors on peut affirmer que ce n'est pas le cas que A, soit $\neg A$:

$$(A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A)$$

La liste des axiomes formant le système **B**, résulte donc d'une reprise des axiomes de l'implication (1-4), du rejet de l'axiome 5 (*ex falso*) et la révision de l'axiome 6 (pour refléter le *reductio* intuitionniste).

Un second système axiomatique pour la logique classique, nommé **H**, peut être obtenu à partir du système **B** simplement par l'ajout d'un sixième axiome pour le principe de l'élimination de la double négation :

Axiome 6. $\neg \neg A \rightarrow A$

Afin de mieux illustrer les distinctions entre les systèmes **B** et **H**, Kolmogorov présente une classe de propositions pour lesquelles la double négation demeure valide. Bien qu'il ne donne pas d'exemple précis de proposition comprise dans cette classe, Kolmogorov note parfois que l'ensemble de ces propositions sont des propositions d'ordre finitiste. Par la présentation de cette classe de propositions f, Kolmogorov désire différencier les domaines dans lesquels le principe du tiers exclu demeure applicable. En effet, la différence entre les systèmes d'axiomes **B** et **H** est que le premier est universellement applicable, et le second ne l'est plus[99]. La raison en est que le système **H** fait un usage général et universel de l'axiome 6, alors que ce dernier n'est applicable que pour une certaine classe de propositions, la classe de propositions ϕ acceptée dans le système **B**. Toute proposition non-finitiste et où la double négation ne

---

[98] Kolmogorov ne parle bien sûr pas de « *reductio* intuitionniste », mais plutôt d'un « principe de contradiction ». Voir Kolmogorov 1925, p. 421.
[99] *Kolmogorov 1925*, p. 425.

peut être appliquée du point de vue intuitionniste, est représentée par le symbole ϕ *. Comme l'explique Hesseling :

> The question Kolmogorov then asks is whether we can still give meaning to the formulas obtained by using **H** outside its proper domain of application. He thinks that this is possible by constructing, alongside ordinary mathematics, a new field called pseudo-mathematics. This is done in such a way that to every formula of the former corresponds a formula of the latter and that, moreover, every formula of pseudo-mathematics is of the type ϕ *. (*Hesseling 2012*, p. 239)

Kolmogorov propose donc une traduction dans une « pseudo-mathématiques »[100], qui peut être résumée de la façon suivante : pour tout atome A : $A^* = \neg\neg A$ et pour les formules complexes[101] :

$$F(\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_k)* = \neg\neg A = \neg\neg F(\phi_1*, \phi_2*, \ldots, \phi_k *)$$

Ce qui lui permet de prouver le résultat de l'interprétation:

$$\text{Si } U \vdash \mathbf{H}\phi, \text{ donc } U^* \vdash \mathbf{B}\phi^*,$$

où U est l'ensemble des axiomes **H**, et U^* est l'ensemble de ses traductions (dont Kolmogorov démontre qu'il peut être dérivé dans **B**).

Cette traduction par Kolmogorov préfigure déjà celle produite par Gödel en 1933[102]. Ce qui est connu aujourd'hui comme la traduction de Kolmogorov-Gödel, de l'arithmétique classique dans l'arithmétique intuitionniste, se lit selon cette table (pour le fragment propositionnel seulement) :

---

[100] *Kolmogorov 1925*, p. 427-428.

[101] Cette formulation de la traduction de Kolmogorov est tirée de *van Atten 2012*, p. 32.

[102] *Gödel 1933*.

$$
\begin{array}{c}
\textit{classique} \longmapsto \textit{intuitionniste} \\
p \longmapsto \neg\neg p \\
\neg A \longmapsto \neg A \\
A \rightarrow B \longmapsto \neg (A \,\&\, \neg B) \\
A \vee B \longmapsto \neg (\neg A \,\&\, \neg B) \\
A \,\&\, B \longmapsto A \,\&\, B
\end{array}
$$

Cette traduction permet de retrouver l'arithmétique classique dans l'arithmétique intuitionniste, et Gödel en tirera la conclusion que les restrictions intuitionnistes dans l'usage du tiers exclu ne constituent pas, contrairement à ce que pensait Brouwer, une restriction de la logique et des mathématiques[103]. Il faut cependant noter qu'elle coupe en partie aussi l'herbe sous le pied des tenants d'un « conservatisme logique », mentionnés au début de la section 3.2, tels que Hilbert et Bernays, mais aussi Russell et Quine.

Toutefois comme le démontre Hesseling, le but de Kolmogorov diverge légèrement de celui de traduire les mathématiques classiques dans les mathématiques intuitionnistes :

> However, Kolmogorov uses the translation differently. In our modern interpretation, following Gödel, we use such a translation as a translation from classical into intuitionistic mathematics. Kolmogorov considers it as a translation into a new domain called pseudo-mathematics. After he has used the translation, he does conclude that the formulas of pseudo-mathematics are true in the usual sense, but he does not identify the domain of pseudo-mathematics as a sub-domain of intuitionistic mathematics. (*Hesseling 2003*, p. 239)

Par la construction du système **B**, Kolmogorov réalise une première formalisation partielle de la logique intuitionniste. En partant d'un système logique classique – la

---

[103] *Gödel 1933*, p. 295, *Gödel 1941*, p. 189-190.

liste des axiomes de Hilbert – Kolmogorov isole et modifie certains axiomes avec comme critère de savoir si un axiome reflète une base intuitive ou possède une évidence intuitive au sens de Brouwer[104]. Bien que Kolmogorov n'y donne pas encore d'indication précise sur ce que devrait être la sémantique de la logique intuitionniste, ses travaux ouvrent la voie vers une formalisation plus élaborée de l'intuitionnisme ainsi que la construction d'une sémantique intuitionniste des preuves à laquelle il contribuera en 1932, la sémantique BHK.

3.2.2 Orlov et les origines de la logique de la pertinence

Dès 1928, le mathématicien russe Ivan Orlov propose une première axiomatisation partielle de ce qu'on appelle aujourd'hui la logique de la pertinence. Dans un article publié sous le titre « Sur la théorie de la compatibilité des propositions » (*Ischislenic sovmestnosti predlozhenii*). Orlov rejette les notions classiques de vérité et de fausseté au profit de la notion de compatibilité. C'est pourquoi Orlov développe un nouveau système basé sur le calcul de la compatibilité des propositions, dont les connecteurs logiques employés sont l'implication et la négation. Orlov y définit l'implication ($p \longrightarrow q$) comme « p est compatible q », au sens où « p n'implique pas la négation de q ». Comme l'indique Kosta Došen, dans une étude qui a réhabilité le travail Orlov, la conception de l'implication de ce dernier diverge de l'implication classique, qui est de l'ordre de l'implication matérielle :

> In an intuitive comment on his implication, Orlov stresses that it is a relevant implication, based on "a connexion of meaning", and should not be confused with material implication, which is necessary but not sufficient for his implication. (*Došen 1992*, p. 342)

---

[104] *Kolmogorov 1925*, p. 422.

En rejetant certains axiomes du calcul propositionnel classique, Orlov obtient un système axiomatique qui, contrairement au calcul classique, n'est pas basé sur l'implication matérielle. Ce premier fragment de la logique de la pertinence est constitué de la liste d'axiomes suivante :

1. $A \rightarrow \neg\neg A$
2. $\neg\neg A \rightarrow A$[105]
3. $A \rightarrow \neg(A \rightarrow \neg A)$
4. $(A \rightarrow B) \rightarrow \neg(\neg B \rightarrow \neg A)$
5. $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (B \rightarrow (A \rightarrow C))$
6. $(B \rightarrow C) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$

Et le *modus ponens*, constituant l'axiome 7 du système de Orlov :

$$\frac{A \quad A \rightarrow B}{B}$$

Ce qui retient le plus notre attention est l'interprétation modale que fait Orlov de la logique intuitionniste naissante. Cette interprétation naît d'un désir de vouloir lier le système de Orlov avec l'intuitionnisme. C'est pourquoi Orlov introduit dans son langage propositionnel l'opérateur $\Box$, tel que « $\Box A$ » signifie « Il est prouvé que A ». Orlov reprend alors le point de vue intuitionniste, voulant que seules les propositions représentées sous la forme $\Box A$ peuvent être affirmé mathématiquement. Il en va de même pour la négation qui est exprimée par Orlov à l'aide du connecteur logique X[106] :

[105] Notons au passage l'acceptation de la *reductio* classique par Orlov dans son système axiomatique. Comme l'explique Došen, Orlov emprunte la voie classique afin de justifier l'élimination de la double négation, $\neg\neg A \rightarrow A$ pouvant être simplifié par la formule $A \rightarrow A$. Voir Došen 1992, p. 346.
[106] *Orlov 1928*, p. 281.

$$XA \equiv_{\text{def.}} \Box \neg A$$

XA, doit être compris comme « il est absurde que A », Orlov reprend donc la conception intuitionniste de la négation en termes d'absurdité. Les liens entre le système de Orlov et l'intuitionnisme se manifestent également sur la question de la prouvabilité dans les ensembles finis et transfinis. Comme le suggère Došen, Orlov présente la même critique que Brouwer et Kolmogorov *vis-à-vis* la possibilité de prouver directement un énoncé mathématique dans le cadre d'un ensemble transfini :

> Orlov says that this refers to provability in principle, which of course covers also cases when A has actually been proved or is obvious. In the realm of the finite. 'It is provable that A or it is absurd that A' holds, even though this may seem to be in conflict with practical limitations. However, according to intuitionistic lights, this disjunction does not hold in the transfinite realm. (*Došen 1992*, p. 349)

Ces considérations sur les limites pratiques de l'applicabilité des preuves construites aux seuls ensembles finis s'accompagnent de l'ajout de 4 nouveaux axiomes, jugés acceptables du point de vue intuitionniste[107] :

8. $\Box A \rightarrow A$
9. $\Box A \rightarrow \Box \Box A$
10. $\Box (A \rightarrow B) \rightarrow (\Box A \rightarrow \Box B)$

Orlov introduit également une *règle de nécessitation* :

$$\frac{A}{\Box A}$$

[107] *Orlov 1928*, p. 281.

Ces trois axiomes et la règle de nécessitation constituent les postulats modaux tels que formulés ultérieurement par Gödel en 1933. Toutefois, comme le remarque Došen, Orlov ne se contente pas d'anticiper Gödel. Ses travaux anticipent également ceux de Becker, à qui on attribue généralement la première formulation de S4 en 1930[108].

Ces postulats modaux sont ainsi joints au système OR (les axiomes 1-7), pour former le système que Došen nomme ORS4. Avec ce nouveau système, Orlov procède à la démonstration d'un certain nombre de théorèmes, respectant les exigences intuitionnistes en termes de démonstration logique[109]. Par exemple, il devient possible de prouver la formule

$$\Box A \rightarrow \Box \neg \Box \neg \Box A,$$

qui asserte que l'affirmation de A implique l'absurdité de l'absurdité de A. De la même façon, nous pouvons prouver

$$\Box \neg \Box \neg \Box \neg A \rightarrow \Box \neg A,$$

qui asserte que l'absurdité de l'absurdité de l'absurdité de $\neg A$ peut être réduite à l'absurdité de $\neg A$, réduction auparavant démontrée par Brouwer dès 1925.

Si les postulats modaux de S4 peuvent être ajoutés au système OR, cette addition ne peut se faire avec la logique classique, comme l'indique Došen :

> Orlov's opinion is that his modal theorems become senseless if we interpret $\rightarrow$ as material implication, and he somehow infers from the classical principle "all true propositions are equivalent" that we cannot add the modal postulates of S4 to classical logic without also adding $A \rightarrow \Box A$,

---

[108] *Došen 1992*, p. 349.
[109] *Orlov 1928*, p. 285.

> which would, of course, make our modal system trivial and useless. *Excluded middle.* whose traces can be found in:
> $$(A \to B) \to ((\neg A \to B) \to B)$$
> and other theorems of OR: did not make problems for understanding intuitionism in ORS4, but is deemed fatal if we want to reach intuitionism via the addition of $\Box$ to classical logic (Došen 1992, p. 350-351).

Došen remarque que pour Orlov une proposition qui n'est pas encore dans la portée de $\Box$ peut toujours être traitée par une logique vérifonctionnelle, mais lorsque celle-ci se trouve dans la portée de $\Box$ (passant de A à $\Box A$), elle ne peut plus être traitée du point de vue vérifonctionnel. Orlov marque donc la différence entre une sémantique classique basée sur le concept de vérité et une sémantique intuitionniste basée sur le concept de preuve (rappelons que « $\Box A$ » est synonyme de « Il est prouvé que A »), dont nous verrons le développement aux débuts des années 1930 par Heyting et Kolmogorov.

Toutefois, comme le précise Došen, cette version de la logique intuitionniste présentée par Orlov ne serait par *la* logique intuitionniste, au sens où nous la retrouvons formulée par Heyting, mais plutôt une variante intuitionniste de la logique de la pertinence (Došen 1992, p. 351). Une différence majeure entre ces deux systèmes concerne la question de l'*ex falso*, qui sera accepté par Heyting et Kolmogorov, mais qui est rejeté ici par Orlov. Comme nous l'expliquerons de façon plus détaillée dans la section de ce chapitre portant sur Heyting, celui-ci accepte l'*ex falso* :

$$\neg A \to (A \to B)$$

sur la base de l'axiome d'implication :

$$A \to (B \to A),$$

qui n'est cependant pas présent dans le système d'Orlov. Cette divergence d'opinions sur la question de l'*ex falso* tourne principalement autour de la négation, conçue du point de vue intuitionniste en termes d'absurdité :

$$A \rightarrow \bot \equiv_{\text{def.}} \neg A$$

D'un côté, Heyting accepte l'*ex falso* et l'idée que de $\bot$ on puisse inférer B. De l'autre côté, sur la base de son axiome 2

$$\neg\neg A \rightarrow A$$

Orlov accepte

$$((A \rightarrow \bot) \rightarrow \bot) \rightarrow A).$$

Orlov semble ainsi proche des idées de Kolmogorov en ce qui concerne le rejet de l'*ex falso.* Toutefois, comme le remarque Došen, ces derniers ont des raisons différentes de rejeter ce principe. En effet, si Kolmogorov le rejette sur la base d'un manque d'évidence intuitive, acceptant de ce fait :

$$A \rightarrow (B \rightarrow A)$$

mais pas :

$$\neg A \rightarrow (A \rightarrow B).$$

Le rejet de Orlov est cependant motivé par le simple fait que ce principe ne peut être inclus dans le système ORS4[110].

---

110 *Došen 1992*, p. 352.

Le but de Orlov étant de créer ce qu'on appellerait aujourd'hui une variante intuitionniste de la logique de la pertinence, il serait trompeur d'affirmer que ses travaux sont dans la lignée de Kolmogorov, Glivenko et Heyting. Pour cette raison, Orlov ne peut être considéré comme ayant contribué à l'émergence de la sémantique BHK. Toutefois, il importe de souligner sa contribution à l'histoire de l'intuitionnisme, au sens où il a permis de former des liens entre la logique intuitionniste, telle que partiellement axiomatisée par Kolmogorov et une première version de la logique de la pertinence, le système ORS4.

3.2.3 Une nouvelle formalisation : Glivenko

Inspirée par les travaux de Kolmogorov, le mathématicien russe Valery Glivenko présente une seconde formalisation de la logique intuitionniste. On ne sait presque rien de Glivenko et, de surcroit, on ne sait pas comment ni pourquoi il s'est intéressé à l'axiomatisation de la logique intuitionniste. Nous savons toutefois qu'il était au courant des travaux de Kolmogorov et de Heyting dès 1928. À la fin de la cette année, Glivenko écrivait une lettre à Heyting portant sur la polémique autour de la critique des idées de Brouwer par Barzin & Errera :

> Dans ma note polémique de Bruxelles, je n'avais pas pu poser ce problème assez nettement, parce que là, conformément au but spécial de cette note, j'ai eu besoin d'un langage qui pourrait être compris sans peine par des savants qui n'ont pas pénétré, à mon avis, assez profondément les idées intuitionnistes. (Glivenko 1928, p. 11)

Nous avions rencontré dans la section 1.3 l'idée de Barzin & Errera voulant que la « logique brouwerienne » revient en fait à l'introduction d'une une troisième valeur de vérité, « ni vrai/ni faux » :

> Le symbole p représente l'énonciation p est vraie. Le symbole $\sim p$ (non-p, c'est-à-dire la négation de p) représente l'énonciation p est fausse. Le symbole p' représente l'énonciation p n'est ni vraie ni fausse, ou, par abréviation, p' est tierce. » (*Barzin & Errera 1927*, p. 60)

Afin de corriger cette erreur, Glivenko présenta une série d'axiomes constituant la logique propositionnelle intuitionniste, d'abord en 1928 avec la liste suivante (Glivenko 1928a, p.226) :

I. $A \to A$

II. $(A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C))$

III. $(A \& B) \to A$

IV. $(A \& B) \to B$

V. $(C \to A) \to ((C \to B) \to (C \to (A \& B)))$

VI. $A \to (A \vee B)$

VII. $B \to (A \vee B)$

VIII. $(A \to C) \to ((B \to C) \to ((A \vee B) \to C)$

IX. $(A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A)$

À partir de cette liste, nous pouvons ensuite démontrer les 3 principes suivants :

1. $\neg\neg(A \vee \neg A)$
2. $\neg\neg\neg A \to \neg A$
3. $((\neg A \vee A) \to \neg B) \to \neg B$

Les deux premiers ont déjà été discutés par Brouwer. En effet, le premier signifie pour l'intuitionniste que le tiers exclu demeure valide (parce que non-contradictoire) sans pour autant être universellement applicable. Le second représente la *reductio* intuitionniste et la conservation de la négation. Brouwer avait déjà défini la négation à partir de l'absurdité (voir la section 1.3.2 pour son raisonnement philosophique à cet effet) :

$$A \rightarrow \perp \equiv_{\text{def.}} \neg A$$

On peut donc comprendre 2, ci-dessus, comme l'absurdité de l'absurdité de l'absurdité est équivalente à l'absurdité, ce que reconnaissait Brouwer, comme nous l'avons vu[111].

En ajoutant un troisième principe, qui n'a pas été repris directement à Brouwer, Glivenko désire répondre à la critique de Barzin & Errera voulant que l'intuitionnisme implique l'existence d'une troisième valeur de vérité. Ce troisième principe peut être compris avec l'aide du théorème suivant :

> Théorème 5 : Dans la logique de Brouwer, la proposition «la proposition $\neg p \vee p$ implique la fausseté d'une proposition q » implique la fausseté de la proposition q (*Glivenko 1929*, p.290).

Supposons que l'intuitionnisme ait une sémantique trivalente comme l'entend Barzin et Errera, avec cette idée qu'une proposition peut être vraie p, peut être fausse $\neg p$, ou peut avoir une tierce valeur « ni vraie/ni fausse » p'. Donc, si p est vraie, alors p' est fausse et $p \rightarrow \neg p'$, et si p est fausse, alors p' est également fausse et $\neg p \rightarrow \neg p'$, entraînant dans les deux cas la fausseté de p' sous la forme $((p \vee \neg p) \rightarrow \neg p')$. Par l'utilisation de l'axiome VIII et du théorème 3 :

Axiome VIII. $(p \rightarrow r) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow ((p \vee q) \rightarrow r))$

Théorème 3. $((\neg p \vee p) \rightarrow \neg q) \rightarrow \neg q$

[111] *Brouwer 1925*, p. 287. Voir la section 1.3.2 ci-dessus.

Glivenko parvient ainsi à démontrer $\neg p'$, soit l'absence d'une tierce valeur de vérité dans l'intuitionnisme (Glivenko 1929, p. 280).

Cette réponse à Barzin & Errera n'est qu'une parmi d'autres : Alonzo Church, l'inventeur du calcul lambda, qui a toujours été proche de l'intuitionnisme, a montré dans « On the Law of the Excluded Middle » le caractère contradictoire de la thèse de Barzin et Errera. En effet, reconnaître une tierce valeur « ni vrai/ni faux » met à mal la consistance de la logique intuitionniste. Comme le suggère Church, la thèse de Barzin et Errera doit être rejetée sur la base de son non-respect du principe de non-contradiction :

> It is not possible, as an alternative to the law of the excluded middle, to assert that some proposition is neither true nor false, because by so doing not only the law of the excluded middle would be denied but also the law of contradiction. In fact, to assert that a proposition *p* is not true and is also not false is to assert at once not-*p* and not-(not-*p*) and consequently to assert that not-*p* is both true and false. (*Church 1928*, p. 75)[112]

L'intérêt de la réplique de Glivenko est d'avoir présenté en même temps une formalisation logique des principes intuitionnistes. Comme Kolmogorov en 1925, Glivenko présente une liste d'axiomes, plus élaborée cette fois-ci, qui sont acceptables du point de vue intuitionniste.

L'axiomatisation de Glivenko contient également les premiers éléments visant une interprétation de la logique classique en termes intuitionnistes. Cette interprétation de la négation est présentée par Glivenko par les deux théorèmes suivants :

> Théorème 6 : Si une certaine expression dans la logique propositionnelle est prouvable dans la logique classique, alors la fausseté de sa fausseté est prouvable dans la logique de Brouwer.

---

[112] Pour la réponse, peu convaincante, de Barzin & Errera à leurs critiques, voir *Barzin & Errera 1929*.

> Théorème 7 : Si la fausseté d'une certaine expression dans la logique propositionnelle est prouvable dans la logique classique, la même fausseté est prouvable dans la logique de Brouwer. (*Glivenko 1929*, p.301)

À la présentation des théorèmes 6 et 7, s'ajoute les 4 nouveaux axiomes suivants:

X. $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (A \rightarrow (A \rightarrow C))$

XI. $(A \rightarrow (A \rightarrow C)) \rightarrow (A \rightarrow C)$

XII. $A \rightarrow (B \rightarrow A)$

XIII. $\neg B \rightarrow (B \rightarrow A)$

L'ajout de l'axiome XIII, c'est-à-dire de l'*ex falso*, marque une différence essentielle entre les systèmes de Kolmogorov et de Glivenko. L'*ex falso* est accepté par Glivenko simplement parce qu'il est une conséquence immédiate du principe suivant :

$$(A \vee \neg B) \rightarrow (B \rightarrow A)$$

Qui est admissible du point de vue intuitionniste, du fait que l'implication $B \rightarrow A$ n'a pas d'autre sens que d'admettre que lorsqu'on accepte la vérité de B, on doit accepter celle de A, tandis que l'inverse :

$$(B \rightarrow A) \rightarrow (A \vee \neg B),$$

ne l'est pas[113].

[113] *Glivenko 1929*, p. 302.

Glivenko devient donc le premier logicien intuitionniste à accepter l'*ex falso*. Comme nous le verrons plus loin, cette acceptation sera reprise par Heyting et par Kolmogorov (qui changera alors son fusil d'épaule), aux débuts des années 1930.

En résumé, La grande contribution de Glivenko est d'avoir réalisé la première formalisation complète de la liste d'axiomes acceptable du point de vue intuitionniste. En effet, tandis que Kolmogorov s'était limité à l'analyse des axiomes pour l'implication et la négation, Glivenko offre un système axiomatique plus complet, à l'instar de celui de Hilbert en 1923 et 1927. Malgré sa concision, la contribution de Glivenko au développement de la logique intuitionniste n'en est pas moins pertinente. En effet, les travaux de Glivenko ont certainement ouvert la voie aux résultats ultérieurs de Heyting, Kolmogorov et Gentzen.

3.3 La sémantique BHK

Il revient à Heyting de compléter les travaux de ses prédécesseurs russes et d'offrir la formalisation des règles de la logique intuitionniste qui sera adoptée par la suite, que nous présenterons brièvement dans la prochaine section. Mais Heyting, comme nous l'avons vu au chapitre 2, a voulu fournir une sémantique des preuves pour légitimer la révision de la logique classique en faveur de la logique intuitionniste. Il a donc effectué les premiers pas vers la sémantique BHK, que nous discuterons aussi dans cette section. Il sera suivi en cela par Kolmogorov, avec une sémantique conforme à celle de Heyting, mais en termes de solution de problème (section 3.3.2).

Il revient au grand logicien Gerhard Gentzen d'avoir fourni en 1934-36 les premiers systèmes de déduction naturelle et de calcul des séquents, pour les logiques classique et intuitionniste, en s'inspirant entre autres des travaux de Hilbert que nous avons vus dans la section 3.1. Il est aisé de voir que son système « NJ » de déduction naturelle intuitionniste correspond à la sémantique BHK, mais son interprétation est aussi fidèle à l'idée de Brouwer de la « preuve comme acte », et le cadre des systèmes de déduction naturelle et de calcul des séquents fournissent aussi des raisons de croire que la logique intuitionniste est loin d'être le simple résultat d'une tentative de formaliser les thèses philosophiques audacieuses de Brouwer.

3.3.1 Heyting : formalisation et sémantique des preuves

Comme nous l'avons vu dans le chapitre précédent, le premier mérite de Arend Heyting est d'avoir d'abord soustrait à l'intuitionnisme son caractère mentaliste et solipsiste. Cette contribution allait de pair avec ses travaux sur la logique intuitionniste publiés au tout début des années 1930. Comme le suggère van Stigt, ces publications ont marqué un tournant dans l'histoire de l'intuitionnisme, Heyting devenant à cette époque le principal promoteur des idées de Brouwer[114] :

> Heyting's publication, more than those of Kolmogorov and Glivenko, caused a stir in the world of logic and led to many further investigations. It made Intuitionism accessible to a wider mathematical audience and drew attention to aspects of Intuitionism which Brouwer tended to ignore or undervalue. He changed the direction of Intuitionism at a critical time of its history and kept it alive when Brouwer retired into silence in the thirties. (*van Stigt 1990*, p. 90)

À la manière de Kolmogorov et de Glivenko, Heyting énumère les axiomes, théorèmes et principes admissibles du point de vue intuitionniste. Toutefois, ce qui caractérise principalement sa contribution est sans aucun doute son interprétation sémantique des

---

[114] Lors du colloque de Königsberg de 1930, ce fut Heyting qui présenta les idées intuitionnistes, aux côtés de Johann von Neumann pour le formalisme, de Rudolf Carnap pour le logicisme et de Friedrich Waismann pour le point de vue de Wittgenstein. Voir *Heyting 1931*.

constantes logiques. Celle-ci est liée à l'interprétation de la proposition, vue comme exprimant une « attente ».

Cette interprétation s'inspire de celle, phénoménologique, d'Oscar Becker[115]. Dans son ouvrage *Mathematische Existenz,* Becker présente trois possibilités quant à l'attente exprimée par la proposition *p* (Becker 1927, p.335-336):

1) L'attente peut être remplie (*Erfüllung*)[116], représentée sous la forme : $+p$
2) L'attente peut être déçue (*Enttäuschung*), représentée sous la forme : $+ (-p)$
3) L'attente ne peut être ni remplie, ni déçue, présentée sous la forme : $- (+p)$

Afin d'illustrer ces trois possibilités, Becker donne l'exemple de la proposition p : « le livre est sur la table »[117]. Dans le premier cas +p correspond à la perception du livre sur la table. Dans le second cas, $+ (-p)$ correspond à l'absence de perception du livre sur la table. Finalement le troisième cas, $- (+p)$ correspond à une situation dans laquelle ni la table ni le livre sont perçus.

Comme le souligne Placek, cet exemple met en évidence ce que Becker décrit comme le *principe d'accès :*

> Becker, moreover, maintains that for any intention there is access to the intended object. This is expressed by a principle he upholds, known as the principle of access, which states that for anything that may be an object there is, at least in principle, abstracting from technical difficulties, access. Thus, even in cases similar to the envisioned situation of people deprived of perceptions of the outside world, the non-fulfilling of the intention must

---

[115] Je ne discuterai pas des liens, au demeurant fort intéressants, entre la phénoménologie de Husserl et l'intuitionnisme mathématique. Pour plus d'informations, voir *Placek 1999*, *Tieszen 2008*, *van Atten 2009*.

[116] Nous traduisons ici l'allemand « *Erfüllung* » par « remplissement » en conformité avec l'usage chez les phénoménologues de langue française.

[117] *Becker 1927*, p. 501, *Placek 1999*, p. 232.

> be based on the fulfilling of some parts thereof. Consequently, the distinction between non-fulfilling and frustration cannot be built on the differentiation between negative and positive fact, or between some agreement and no agreement at all. (*Placek 1999*, p. 133)

Ce principe d'accès décrit par Becker soutient donc que le remplissement de l'attente exprimée par une proposition nécessite l'accès à un objet, à l'instar du livre sur la table. Du point de vue de l'intuitionnisme, cet objet nécessaire est la preuve constructive, ou comme l'exprime Heyting :

> A proof of the proposition *p* is a mathematical construction; the expectation of being able to construct such a proof thus constitutes a new proposition we will denote by $+\,p$ (to be read as: "*p* is provable") (Heyting 1930a, p. 308)

Cette conception de Becker de la proposition comme exprimant une attente est donc reprise par Heyting au début des années 1930. Dans sa conférence de Königsberg, publiée en 1930, « Les fondements intuitionnistes des mathématiques » (*Die intuitionistische Grundlegung der Mathematik*), Heyting met clairement en évidence l'influence de la phénoménologie sur sa conception de la proposition (nous avions vu ce passage dans la section 2.1) :

> We conclude our treatment of the construction of mathematics in order to say something about the intuitionist propositional calculus. We here distinguish between propositions and assertions. An assertion is the affirmation of a proposition. A mathematical proposition expresses a certain expectation. For example, the proposition "Euler's constant C is rational" expresses the expectation that we could find two integers *a* and *b* such that C = *a*/*b*. Perhaps the word "intention," coined by the phenomenologists, expresses even better what is meant here. The affirmation of a proposition means the fulfillment of an intention. (*Heyting 1931*, p. 58-59)

La phrase « la constante d'Euler *C* est rationnelle » est l'affirmation (*Behauptung*) d'une proposition (*Aussage*). Celle-ci exprime une attente (*Erwartung*) celui de trouver deux entiers a et b tels que $C = a/b$. L'affirmation de la proposition consiste donc dans le remplissement de l'attente par la donnée d'une preuve constructive. L'assertion de p est donc synonyme avec « il existe une preuve de p ». Comme l'indique Heyting, le remplissement de l'attente est accomplie par la détermination empirique d'un fait (*die Feststellung einer empirischen Tatsache*), à savoir l'existence d'une preuve qui fournit, pour la constante d'Euler C, les deux entiers a, b tels que $C = a/b$[118]. L'affirmation de p suppose alors que nous sommes capables de prouver p, en fournissant les deux entiers possédant la propriété attendue.

Pour ce qui est de la négation, celle-ci est présentée par Heyting de la façon suivante :

> A logical function is a process for forming another proposition from a given proposition. Negation is such a function. Becker, following Husserl, has described its meaning very clearly. For him negation is something thoroughly positive. The intention of a contradiction contained in the original intention. The proposition "C is not rational," therefore, signifies the expectation that one can derive a contradiction from the assumption that C is rational. (Heyting 1931, p. 59)

Heyting reprend ainsi la conception qu'avait Brouwer de la négation, $\neg p$ signifiant « p conduit à une contradiction ». Plus précisément, une proposition $\neg p$ exprime l'attente de pouvoir réduire p à une contradiction.

Prouver une proposition mathématique, c'est avoir une construction permettant de réaliser l'attente exprimée par cette même proposition. C'est à partir de ce principe général que Heyting élabore son interprétation de la signification des constantes logiques[119]. En voici, de façon résumée, l'interprétation des quatre principaux connecteurs :

---

[118] *Heyting 1930a*, p. 307.

[119] *Heyting 1931*, p.59-61.

- L'attente exprimée par A & B est remplie par la donnée d'une preuve (un remplissement) de A et d'une preuve de B.
- L'attente exprimée par $A \vee B$ est remplie par la donnée d'une preuve de A ou de B.
- L'attente exprimée par $A \rightarrow B$ est remplie lorsque la donnée d'une preuve de A entraîne la donnée d'une preuve de B.
- L'attente exprimée par $\neg A$ est remplie lorsque la tentative de remplissement de l'attente de A mène à une contradiction $\perp$.

Cette interprétation des connecteurs logiques s'accompagne d'une révision de la liste d'axiomes admis du point de vue intuitionniste. Dans une lettre à Becker datant de 1933, Heyting décrit la manière dont il a réalisé son axiomatisation, simplement en passant en revue la liste des axiomes et théorèmes présentée dans le *Principia Mathematica* de Russell et Whitehead pour ensuite conserver ceux qui sont admissibles du point de vue intuitionniste[120]. (Nous avons vu, cependant, le rôle joué par les textes de Hilbert.) Ces axiomes sont présentés dans l'appendice à son article « Les règles formelles de la logique intuitionniste » (*Die formalen Regeln der intuitionistischen Logik*), en voici la liste[121] :

1. $A \rightarrow (A \,\&\, A)$
2. $(A \,\&\, B) \rightarrow (B \,\&\, A)$
3. $(A \rightarrow B) \rightarrow ((A \,\&\, C) \rightarrow (B \,\&\, C))$
4. $((A \rightarrow B) \,\&\, (B \rightarrow C)) \rightarrow (A \rightarrow C)$
5. $B \rightarrow (A \rightarrow B)$
6. $(A \,\&\, (A \rightarrow B)) \rightarrow B$
7. $A \rightarrow (A \vee B)$

---

[120] Voir *Troelstra 1990*, p. 8.

[121] *Heyting 1930b*, p. 314-315.

8. $(A \vee B) \rightarrow (B \vee A)$

9. $((A \rightarrow C) \& (B \rightarrow C)) \rightarrow (A \vee B \rightarrow C)$

10. $\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$

11. $((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A$

L'axiome 10 représente l'*ex falso*. Son acceptation repose sur la conception de l'implication logique exprimée de la façon suivante par Heyting : « The formula $A \rightarrow B$ means in general: "if A is correct, then B is also correct" »[122]. Cette présentation de l'implication logique est similaire à celle formulée par Glivenko, celle-ci y étant vue comme l'acceptation de B sur la base de la reconnaissance de A[123]. En présentant de cette façon l'implication logique, Heyting en vient à accepter l'*ex falso*. En effet, sa présentation de la signification de l'implication $A \rightarrow B$ est suivie d'une justification de celui-ci :

> The case is conceivable that after the statement $A \rightarrow B$ has been proved in the sense specified, it turns out that B is always correct. Once accepted, the formula $A \rightarrow B$ then has to remain correct; that is, we must attribute a meaning to the sign $\rightarrow$ such that $A \rightarrow B$ still holds. The same can be remarked in the case where it later turns out that A is always false. For these reasons the formula
> 2.14 $\vdash B \rightarrow (A \rightarrow B)$ and 4.1 $\vdash \neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$ are adopted. (*Heyting 1930b*, p. 313)

3.3.2 Kolmogorov : la preuve comme solution d'un problème

De cette première interprétation de Heyting de la proposition comme exprimant une attente, s'ajoute celle de Kolmogorov présentée dans son article de 1932, publié sous le titre « Sur l'interprétation de la logique intuitionniste » (*Zur Deutung der*

---

[122] *Heyting 1930b*, p. 313.
[123] *Glivenko 1929*, p. 302.

intuitionistischen Logik). Kolmogorov y affirme d'abord qu'il serait erroné de donner une interprétation des opérateurs logiques basée sur la notion de « vérité ». C'est pourquoi Kolmogorov propose plutôt la notion de « problème » (ou « tâche », de l'allemand « *Aufgabe* ») et de « solution d'un problème » :

> In the second section, assuming the basic intuitionistic principles, intuitionistic logic is subjected to a critical study; it is thus shown that it must be replaced by the calculus of problems, since its objects are in reality problems, rather than theoretical propositions. (*Kolmogorov 1932*, p. 328)

Kolmogorov ne donne pas de définition précise de ce qu'est un problème, se limitant à quelques exemples du type « prouver la fausseté du théorème de Fermat ». Toutefois, il nous est possible de présenter un « problème » comme une requête : celle de trouver un objet qui satisfait une condition donnée : le trouver c'est « résoudre » le problème, l'exhiber est donc sa « solution ». Kolmogorov propose dans son article de 1932 une nouvelle interprétation intuitionniste des constantes logiques en ces termes, sa logique propositionnelle intuitionniste (étendue au calcul des prédicats) devenant un « calcul des problèmes ».

En supposant que A et B représentent des problèmes, l'interprétation est la suivante[124] :

- $A \& B$: résoudre à la fois A et B.
- $A \vee B$: résoudre au moins un des problèmes A ou B.
- $A \rightarrow B$: ramener la solution B à la solution de A.
- $\neg A$: en supposant que la solution de A soit donnée, obtenir une contradiction[125].

---

[124] *Kolmogorov 1932*, p. 329-330.

[125] Nous avons repris cette formulation de *Heyting 1934*, p. 17.

Contrairement à l'interprétation de Heyting, le calcul des problèmes comprend également une explication de la signification des quantificateurs logiques, dont l'interprétation est la suivante :

- $\forall x\, A(x)$: trouver une méthode générale qui permet une solution du problème A pour tout x donné.
- $\exists x\, A(x)$: trouver un objet qui permet une solution du problème A.

Prenons deux exemples afin de mieux comprendre comment s'articule ce calcul des problèmes. Comme premier exemple, prenons le cas du tiers exclu,

$$A \vee \neg A.$$

Celui-ci ne peut être justifié du point de vue du calcul des problèmes[126]. En effet, il nous faudrait trouver une méthode générale qui permettrait de donner une solution au problème A ou de montrer qu'une contradiction découle de l'hypothèse que le problème A peut être résolu. Comme le dit Kolmogorov, à moins d'être omniscient, il faut reconnaître que nous ne pouvons pas trouver de solution au problème exprimé par le tiers exclu[127]. Cette remarque est en parfaite conformité avec le point de vue exprimé par Brouwer dès 1908.

Comme deuxième exemple, prenons l'axiome numéro 6 de la liste de Heyting énumérée ci-dessus :

---

[126] Bien qu'il n'en donne pas de démonstration effective, Kolmogorov précise toutefois qu'une formule telle que $\neg\neg(A \vee \neg A)$ peut être justifiée du point de vue du calcul de problèmes. En effet, cette justification repose principalement sur le respect de la conservation de la négation tel que défendue par Brouwer dans son article de 1925. Voir *Kolmogorov 1932*, p. 332

[127] *Kolmogorov 1932*, p. 332.

$$(A \;\&\; (A \rightarrow B)) \rightarrow B$$

La justification de cet axiome dans le calcul des problèmes doit être comprise de la façon suivante : la solution du problème B doit être réduite à la solution du problème :

$$A \;\&\; (A \rightarrow B)$$

Cela signifie que nous avons à la fois une solution du problème A et une solution du problème $A \rightarrow B$. L'implication exprimée par le problème $A \rightarrow B$ doit être comprise selon Kolmogorov en ce sens : « *to carry the solution of B back to the solution A* »[128]. Il existe donc une solution partielle de B qui est complétée par la solution de A. Nous pouvons donc réduire la solution de B à la solution de A.

Il est également à noter que, dans la formulation de son calcul des problèmes, Kolmogorov révise sa position sur l'*ex falso*. Bien qu'en 1925, Kolmogorov rejetait ce principe sur la base de l'absence d'un « fondement intuitif », ce dernier en vient à l'accepter en 1932, sur la base du raisonnement suivant :

> As far as problem [$\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$] is concerned, as soon as $\neg A$ is solved, the solution of A is impossible, and the problem $A \rightarrow B$ has no content. In what follows, the proof that a problem is without content will always be considered as its solution. (*Kolmogorov 1932*, p. 331)

Comme Glivenko et Heyting avant lui, Kolmogorov en vient ainsi à s'éloigner de la position de Brouwer vis-à-vis l'*ex falso*. Nous avions vu dans le premier chapitre, que ce dernier rejetait l'*ex falso* parce que celui-ci ne correspondrait à aucune construction mentale. Étant donné sa conception d'une priorité de l'activité mentale mathématique

[128] *Kolmogorov 1932*, p. 331.

sur tout phénomène linguistique auquel la logique est associée, il est normal qu'il n'en soit jamais venu à accepter l'*ex falso* comme l'ont fait ses successeurs.

Avec les travaux de Glivenko, Heyting et Kolmogorov, trois contributions majeures liées à l'histoire de l'intuitionnisme ont été réalisées. Heyting a fourni une formalisation complète de la logique intuitionniste, Glivenko a ouvert la voie aux futures traductions entre la logique classique et intuitionniste et le travail combiné de Heyting et Kolmogorov a donné une formulation explicite à ce que l'on appelle maintenant l'interprétation BHK de la logique intuitionniste :

- Une preuve de A & B est donnée par la présentation d'une preuve de A et d'une preuve de B.
- Une preuve de $A \vee B$ est donnée par la présentation d'une preuve de A ou d'une preuve de B.
- Une preuve de $A \rightarrow B$ est une construction qui nous permet de transformer toute preuve de A en une preuve de B.
- L'absurdité $\perp$ n'a pas de preuve. Une preuve de $\neg A$ est une construction qui transforme toute preuve hypothétique de A en une preuve de contradiction.
- Une preuve de $\forall x\ F(x)$ est une construction qui transforme tout $d \in$ D (le domaine de la variable x) en une preuve de $F(d)$.
- Une preuve de $\exists x\ F(x)$ est donnée en présentant un $d \in$ D (le domaine de la variable x) et une preuve de $F(d)$[129] .

On retrouve cette formulation aujourd'hui « standard » de la sémantique BHK, en de nombreux endroits, par exemple, chez Heyting dans *Intuitionism: An Introduction*[130].

---

[129] Les clauses pour l'implication et pour le quantificateur universel font intervenir une notion de « construction », les tentatives d'interpréter celle-ci en termes d'une « théorie des constructions » (entre autres par Georg Kreisel et Nicholas Goodman) se sont avérées infructueuses. Voir *Sundholm 1983* pour une revue de cette littérature.

[130] Voir *Heyting 1956*, p. 102. Pour un contexte plus contemporain, voir par exemple *Girard, Lafont & Taylor 1989*, p. 5-6.

À titre informatif, voici quelques exemples de formules du calcul propositionnel et des prédicats du premier ordre valides selon la sémantique BHK (nous en avons déjà vu certaines) :

$$A \rightarrow \neg\neg A$$

$$\neg A \rightarrow \neg\neg\neg A$$

$$\neg (A \vee B) \leftrightarrow (\neg A \,\&\, \neg B)$$

$$\neg (A \,\&\, B) \leftrightarrow (A \rightarrow \neg B) \leftrightarrow (B \rightarrow \neg A)$$

$$\neg (A \rightarrow B) \leftrightarrow \neg (\neg A \vee B)$$

$$\neg \exists x\, F(x) \leftrightarrow \forall x \neg F(x)$$

$$\neg\neg \forall x\, F(x) \leftrightarrow \forall x \neg\neg F(x)$$

$$\neg\neg \exists x\, F(x) \leftrightarrow \neg \forall x \neg F(x)$$

Et voici quelques exemples de formules valides de la logique classique invalidées par cette sémantique :

$$\neg\neg A \rightarrow A$$

$$\neg A \vee \neg\neg A$$

$$(A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A)$$

$$\neg (\neg A \,\&\, \neg B) \rightarrow A \vee B$$

$$\neg (\neg A \vee \neg B) \rightarrow A \,\&\, B$$

$$\forall x \neg\neg F(x) \rightarrow \neg\neg \forall x\, F(x)$$

$$\neg\neg \exists x\, F(x) \rightarrow \exists x \neg\neg F(x)$$

3.3.3 Gentzen : déduction naturelle et séquents

Quelques années à peine après les travaux de Heyting et de Kolmogorov, Gerhard Gentzen, un étudiant de Paul Bernays (et de Hermann Weyl qui le remplace lorsqu'il est contraint de quitter son poste à cause des lois raciales de l'Allemagne nazie), révolutionna notre façon de concevoir la logique dans ses *Recherches sur la déduction logique* (*Untersuchungen über das logische Schließen*) de 1934[131], en introduisant ses calculs de déduction naturelle et calculs des séquents. Il ne s'agira pas de fournir dans ce qui suit un exposé complet de ces derniers – en fait une connaissance de base en est présupposée – mais simplement de proposer un certain nombre d'indications pour montrer en quoi les travaux de Gentzen se rattachent à ceux que nous venons de présenter, les complètent en quelque sorte et ouvrent de nouveaux horizons pour la sémantique BHK. Par ailleurs, les motivations philosophiques de Gentzen, rattaché à l'école de Hilbert, et de Heyting, influencé par la phénoménologie, diffèrent, ce qui induit des différences dans leur conception même de ce qu'est une « preuve »[132]. Bien qu'il ne faille pas ignorer ces différences et ce qu'elles impliquent (entre autres en ce qui concerne les preuves de consistance), notre discussion se tiendra à un autre niveau, celui de l'interprétation des connecteurs logiques, où leurs conceptions se recoupent.

La sémantique BHK s'est avérée être d'une très grande fécondité, puisqu'on peut voir la « réalisabilité » de Kleene, la logique dialogique de Lorenzen (et la sémantique des jeux), l'isomorphisme de Curry-Howard et son paradigme des propositions-comme-types, qui inclut la théorie constructive des types de Martin-Löf, complétée de nos jours avec l'axiome « d'univalence » pour fournir avec la théorie de l'homotopie un

---

[131] Les travaux de Gentzen ont cependant été préfigurés par ceux de Paul Hertz, et sont aussi contemporains, mais indépendants de ceux du Polonais Stanislaw Jaśkowski, publiés en 1934. Voir *Jaśkowski 1967* et, pour une comparaison avec Gentzen, *Pelletier 1999*, sect. 3.

[132] Voir *Okada 2008* et *Takahashi 2018*.

fondement qui rivalise avec la théorie des ensembles,[133] comme autant d'interprétations de cette sémantique. Le but de ce mémoire était d'en retracer la genèse philosophique et logique, et non d'en explorer les suites, donc nous allons nous concentrer sur ce qui en fut la première interprétation, dans l'œuvre de Gentzen.

L'idée maîtresse de Gentzen est de vouloir « édifier un formalisme qui reflète le plus exactement possible les raisonnements logiques qui sont réellement utilisés dans les démonstrations mathématiques ».[134] Il ne pouvait donc pas accepter le modèle axiomatique, introduit en logique par Frege dans sa *Begriffsschrift* de 1879[135], puisqu'il ne reflète pas le raisonnement « sous hypothèse » typique des mathématiciens, d'où le nom de déduction « naturelle » :

> Mon premier point de vue fut le suivant. La formalisation du raisonnement logique, telle qu'elle a été développée en particulier par Frege, Russell et Hilbert, est relativement fort éloignée du mode de raisonnement qui est utilisé en réalité dans les démonstrations mathématiques. On vise de la sorte à obtenir certains avantages formels appréciables. J'ai voulu d'abord construire un formalisme qui soit le plus près possible du raisonnement réel, C'est ainsi que j'ai obtenu un « Calcul de la déduction naturelle » (« NJ » pour la logique intuitionniste des prédicats, « NK » pour la logique classique des prédicats). (*Gentzen 1934*, Aperçu d'ensemble, § 1)

On notera tout d'abord que l'idée de représenter plus fidèlement le raisonnement des mathématiciens est tirée en droite ligne de Brouwer. Là où Heyting et Kolmogorov ont établi une *sémantique* pour justifier une révision des axiomes de la logique, Gentzen va plus loin et propose une *syntaxe* d'une nature différente et plus en conformité avec l'intuitionnisme de Brouwer. Cette idée sera explicitée dans ce qui suit lorsque nous

[133] Voir *Martin-Löf 1984* et *Univalent Foundation Program 2013*.

[134] *Gentzen 1934*, I, § 1. Les références à Gentzen se font dans la mesure du possible suivant sa propre numérotation, comme c'est l'usage.

[135] Le dernier grand représentant de cette conception de la logique, dont l'idée centrale est qu'elle ne se préoccuperait pas de la validité des inférences, mais de la vérité, est fort probablement Quine, dans *Quine 1986*.

expliquerons les règles de déduction naturelle, mais nous avions pris un peu d'avance sur ce point dans la section 2.1.

Dans le cadre de ce mémoire, il n'est pas inutile de rappeler que Gentzen se réfère explicitement aux travaux de Heyting dès le deuxième paragraphe du livre, et que la citation précédente se continue comme suit :

> Ce calcul s'est ensuite révélé posséder certaines propriétés particulières ; il occupe notamment une position spéciale quant au « principe du tiers » rejeté par les intuitionnistes. (Gentzen 1934, Aperçu d'ensemble, § 1)

L'explicitation de cette remarque nous mènera à un argument par Dummett et Prawitz, sur lequel le chapitre se terminera.

Gentzen caractérise les différences entre le mode syntaxique axiomatique et celui de ses systèmes de déduction naturelle comme suit :

> Dans ces systèmes [de Russell, Hilbert et Heyting] on dérive les formules vraies d'une série de « formules logiques fondamentales » au moyen d'un nombre réduit de procédés de déduction ; la déduction naturelle, par contre, ne part pas, en général, de propositions logiques fondamentales mais d'*hypothèses* [...], auxquelles viennent se rattacher des déductions logiques. Grâce à une déduction ultérieure, le résultat est alors rendu à nouveau indépendant des hypothèses. (*Gentzen 1934*, I, § 1)

En gros, le mode axiomatique procède par une liste d'axiomes, suivant un très petit nombre de règles d'inférences (souvent uniquement le *Modus Ponens* et une règle de substitution), tandis qu'en déduction naturelle il n'y a plus d'axiomes, mais un plus grand nombre de règles d'inférence[136].

---

[136] Pour la valeur des calculs de Gentzen sur les systèmes axiomatiques, voir *Dummett 1973*, p. 432-435

Une autre innovation majeure de Gentzen fut l'utilisation de caractère bidimensionnel du plan, comme Frege l'avait fait sans succès dans sa *Begriffsschrift*. Nous avons utilisé sa notation tout au long de son mémoire (en particulier lorsque nous avions distingué les différentes formes de *reductio* dès la section 1.3 et auparavant dans ce chapitre, mais aussi en discutant de la conception de la preuve chez Brouwer à l'aide des idées de Martin-Löf discutées dans la section 2.1), lorsque nous représentions les déductions (inférences) avec l'aide d'une barre horizontale qui sépare la conclusion A dans la dernière ligne des prémisses et des étapes précédentes du raisonnement au-dessus de cette barre :

$$\frac{\ldots}{A}$$

La première étape de Gentzen consistait donc en l'établissement des règles d'inférence sous ce modèle. Il n'est pas nécessaire de les reproduire toutes, seulement de comprendre comment Gentzen opère. Il part des textes de Hilbert de 1923 et 1927 discutés dans la section 3.1 et de ses axiomes, pour les transformer en règles, qui seront de deux types : celles qui *introduisent* un connecteur (ou quantificateur) à une étape dans la preuve, et celles qui l'*éliminent*. Voici à nouveau axiomes de Hilbert pour la conjonction et la disjonction :

5. $(A \,\&\, B) \rightarrow A$
6. $(A \,\&\, B) \rightarrow B$
7. $A \rightarrow (B \rightarrow (A \,\&\, B))$
8. $A \rightarrow (A \vee B)$
9. $B \rightarrow (A \vee B)$
10. $((A \rightarrow C) \,\&\, (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \vee B) \rightarrow C)$

Le principe de transformation est fort simple : prendre le connecteur principal de ces axiomes, qui est toujours une implication « → », et la transformer en barre horizontale, pour symboliser l'inférence, placer le conséquent comme conclusion au-dessous de celle-ci, et l'antécédente au-dessus en utilisant le caractère bidimensionnel de la page. Donc, l'axiome 7 est transformé en règle d'introduction de la conjonction « & ». Selon la sémantique BHK, « une preuve de A & B est donnée par la présentation d'une preuve de A et d'une preuve de B », donc « A & B » ne sera introduite qu'on moment où nous aurons prouvé A et B :

$$\frac{A \quad B}{A \,\&\, B}$$

L'élimination de la conjonction a pour résultat qu'on se retrouve soit avec A, soit avec B, et requiert donc deux règles :

$$\frac{A \,\&\, B}{A}$$

Et:

$$\frac{A \,\&\, B}{B}$$

On peut procéder de la même manière pour les axiomes 8-10 ci-dessus pour la disjonction. Les axiomes 8-9 peuvent être transformés en règle d'introduction respectant la sémantique de BHK, « une preuve de $A \vee B$ est donnée par la présentation d'une preuve de A ou d'une preuve de B » :

$$\frac{A}{A \vee B} \qquad\qquad \frac{B}{A \vee B}$$

On peut vérifier de la sorte que les règles d'introduction pour la déduction naturelle intuitionniste sont une implémentation de la sémantique BHK, l'axiome 10 correspondant à la règle d'élimination de « $\vee$ », etc.

Le cas de la négation est plus complexe et mérite d'être expliqué. Pour la definition intuitionniste de la négation:

$$A \rightarrow \bot \equiv_{\text{def.}} \neg A$$

On notera qu'il ne s'agit, pour ce que n'est que la *reductio* intuitionniste[137]

$$\begin{array}{c} [A] \\ \vdots \\ \bot \\ \hline \neg A \end{array}$$

que d'un cas particulier de la règle d'introduction de l'implication :

$$\begin{array}{c} [A] \\ \vdots \\ B \\ \hline A \rightarrow B \end{array}$$

137 Les crochets indiquent ici la décharge de l'hypothèse.

Il suffit donc d'ajouter une règle d'élimination de la négation :

$$\frac{A \neg A}{\perp}$$

Et, pour les raisons certes peu claires que nous avons vues dans les sections précédentes, les intuitionnistes admettent l'*ex falso* :

$$\frac{\perp}{A}$$

Les remarques qui précèdent nous permettent donc de voir comment le calcul NJ implémente la sémantique BHK. À cela, nous pourrions ajouter la remarque suivante, pour mieux montrer la philosophie intuitionniste à l'œuvre chez Gentzen. Du point de vue axiomatique, le *Modus Ponens* peut être vu comme une *formule logiquement vraie*:

$$(A \mathbin{\&} (A \rightarrow B)) \rightarrow B$$

Celle-ci correspond en déduction naturelle à la *règle* d'élimination de l'implication :

$$\frac{A \qquad A \rightarrow B}{B}$$

Règle que nous pourrions écrire aussi de cette manière :

$$A, A \rightarrow B \vdash B$$

Les deux formulations sont bien sûr tout à fait équivalentes, mais tandis que la première peut faire l'objet d'une *croyance*, la règle rend explicite un *acte*[138].

Il n'est pas inutile d'expliquer très brièvement une autre idée de Gentzen, celle du calcul des séquents, qu'il développa pour fournir son ingénieuse preuve de consistance de l'arithmétique, qui deviendra *la* source de la théorie ordinale de la preuve. Pour en comprendre le sens, voici la dérivation en déduction naturelle d'un des « paradoxes de la pertinence » selon C. I. Lewis, soit l'idée que toute formule A implique qu'elle est impliquée par une autre :

$$\cfrac{\cfrac{A}{B \to A}}{A \to (B \to A)}$$

Cette dérivation utilise deux fois la règle d'introduction de l'implication (ci-dessus), mais elle ne rend pas tout à fait explicite certains aspects. On peut en outre se demander d'où vient le B dans la deuxième étape.

Pour pallier ce problème, Gentzen introduit un ensemble de règles qui portent sur la *structure* des inférences, d'une formule à l'autre (qu'il appelle des « séquents »). Ici aussi, Gentzen part des travaux de Hilbert en 1923 et 1927, cette fois-ci de son fragment implicationnel que voici à nouveau :

1. $A \to (B \to A)$	(Adjonction d'une hypothèse)
2. $(A \to (A \to B)) \to (A \to B)$	(Suppression d'une hypothèse)
3. $(A \to (B \to C)) \to (B \to (A \to C))$	(Échange des hypothèses)
4. $(B \to C) \to ((A \to B) \to (A \to C))$	(Élimination d'une proposition)

[138] Sur cette remarque philosophique et les avantages de l'approche par les règles, voir *Marion 2016*.

Chacune de ces formules est équivalente à une règle structurale. L'adjonction d'une hypothèse, qui est justement la formule dont nous parlons, est équivalente à la règle d'affaiblissement (à gauche), pour un ensemble de prémisses Γ :

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma, B \vdash A}$$

De la même manière, on peut aisément voir (sans que nous les reproduisions pour ne pas allonger le texte indûment sur ce point) que la suppression d'une hypothèse est équivalente à la règle de contraction, l'échange des hypothèses à celle de permutation, et l'élimination d'une proposition, à celle de la coupure.

Dans ce calcul, la dérivation devient, avec une application de la règle d'affaiblissement suivie de deux applications de la règle d'introduction de l'implication :

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{A \vdash A}{A, B \vdash A}}{B \vdash A \rightarrow A}}{\vdash A \rightarrow (B \rightarrow A)}$$

L'usage de la règle d'affaiblissement est donc essentiel, et c'est la raison pour laquelle d'un point de vue « sous-structural »[139], les logiques de la pertinence dans la lignée de Lewis doivent rejeter cette règle pour bloquer la dérivation de ce qu'ils perçoivent comme un paradoxe.

[139] Sur l'idée de retrouver la pluralité des logiques à travers ce point de vue « sous structural », voir *Restall 2000*.

Cet exemple nous montre bien, par ailleurs, comment Gentzen capture le « raisonnement sous hypothèses ». L'absence de formule à la gauche du tourniquet indique que toutes les hypothèses ont été déchargées et qu'il s'agit d'un théorème, la formule étant logiquement vraie – la vérité logique est vue ici comme un « sous-produit » de l'adoption des règles d'inférences[140].

Pour terminer, nous venons de voir comment le calcul NJ implémente la sémantique BHK, mais on peut se demander naïvement si le fait que la signification des connecteurs soit ici scindée en règles d'introduction et d'élimination n'introduit pas un élément nouveau. Une affirmation de Gentzen implique que cela n'est pas le cas :

> Les introductions représentent pour ainsi dire les « définitions » des signes qu'elles concernent, et les éliminations ne sont en dernière analyse que des conséquences de ces définitions. (*Gentzen 1934*, I, § 5.13)

Ce sont donc les règles d'introduction qui établissent la signification, et celles-ci sont en conformité avec la sémantique BHK.

Gentzen a noté un fait très important, à savoir que les règles sont *symétriques* : les conditions nécessaires pour l'introduction d'un connecteur sont retrouvées lorsque nous l'éliminons. Cela se vérifie aisément dans les cas de la conjonction : nous avons besoin d'une preuve de A et d'une preuve de B pour introduire A & B, et lorsqu'on élimine le connecteur on se retrouve avec A ou B. La preuve que c'est le cas pour toutes ces règles n'est pas nécessaire ici. Au niveau philosophique, il importe de noter que cette idée est enchâssée dans un « principe d'inversion », qu'on doit à Paul Lorenzen[141]. Les défenseurs de la logique intuitionniste, dont Dummett et Prawitz, feront valoir dans

[140] Voir *Hacking 1979*, p. 288-289, qui attribue l'idée à Wittgenstein dans son *Tractatus logico-philosophicus*, 6.126.

[141] Voir *Prawitz 1965*, p. 33. Pour les contributions remarquables de Lorenzen à l'approche de Gentzen en théorie de la preuve, dont l'introduction du principe d'inversion, voir *Schroeder-Heister 2008*.

les années soixante-dix, que la logique classique est prise en défaut ici, puisqu'il faut, pour obtenir le calcul NK de la logique classique ajouter au calcul NJ la règle d'élimination de la double négation :

$$\frac{\neg\neg A}{A}$$

Or cette règle, sans contrepartie dans les règles d'introduction, rompt cette symétrie[142]. On parle parfois superficiellement d'une plus grande simplicité ou même d'une plus grande beauté de la logique classique, en vertu de laquelle nous devrions nous y tenir[143], or cela est illusoire. L'approche de Gentzen permet aussi d'établir de nouveaux critères avec la propriété de la sous formule et les preuves de normalisation, etc., mais la discussion de ces thèmes dépasse largement le cadre de ce mémoire.

142 Pour cet argument voir *Prawitz 1977*.

143 Par exemple, *Quine 1986*, p. 87.

CONCLUSION

Notre mémoire se voulait une contribution à l'histoire de la logique, notre but étant de retracer les origines de la logique intuitionniste à partir des premiers travaux de Brouwer, qui en donnèrent une motivation philosophique, jusqu'aux travaux de Heyting, qui donna une formalisation complète et adéquate, et la sémantique des preuves dites « BHK », qui donne la signification intuitionniste des connecteurs et quantificateurs, permettant de légitimer le rejet certaines formules logiquement vraies dans la logique classique, dans l'axiomatisation de Heyting. Nous avons complété cette étude en montrant comme les calculs intuitionnistes de déduction naturelle et des séquents de Gentzen complètent cette réflexion sur la nature de la logique, qui ouvrent de nouvelles perspectives tout à fait contemporaines.

La plus évidente à cet égard est l'isomorphisme de Curry-Howard entre les dérivations dans la déduction naturelle intuitionniste et les termes dans un calcul lambda typé[144], qui est à l'origine de la plupart des développements de la logique depuis les années soixante-dix, de la théorie intuitionniste des types de Martin-Löf à la logique linéaire. Mais il ne faut pas oublier que les techniques de preuve introduites par Gentzen ont supplanté celles du calcul de Hilbert en théorie de la preuve dès les années soixante, en particulier à la suite de la publication de *Natural Deduction* de Dag Prawitz[145]. Si l'ambition de Brouwer de reformuler les mathématiques du continu sur une base intuitionniste a échoué, en ce sens qu'il n'y a comparativement que peu de mathématiciens qui poursuivent son programme de mathématiques intuitionnistes, ses

---

[144] Ce parallèle fut établi à la fin des années soixante, et publié tardivement dans *Howard 1980*. Pour une présentation, voir *Girard, Lafont & Taylor 1989*, chapitre 3, et pour une étude substantielle, *Sørensen & Urzyczyn 2006*.

[145] *Prawitz 1965*. Le rôle fondamental de cette étude n'est malheureusement pas mis en valeur dans *Pelletier 1999*.

idées logiques, telles que développées par Kolmogorov, Glivenko, Heyting et Gentzen (telles que présentées au chapitre 3), ont eu une très importante postérité.

Notre parcours nous permet de faire ressortir un aspect paradoxal de la critique du tiers exclu par Brouwer dans son texte de 1908, « Que les principes logiques ne sont pas fiables » (section 1.3.2). En effet, la justification philosophique de cette critique (section 1.3) est hautement problématique, du fait du divorce entre les constructions mentales et le langage qu'elle présuppose, et ce n'est qu'au prix de sa reformulation (explorée dans le chapitre 2), que la logique intuitionniste a pu voir le jour. Donc, d'une idée philosophique controversée est née une idée logique des plus fécondes.

BIBLIOGRAPHIE

Alexandroff, P. (1961). *Elementary Concepts of Topology*. New York NY: Dover.

Atten, M. van, (2004). *On Brouwer*. Belmont CA: Thompson/Wadsworth.

Atten, M. van, (2007). *Brouwer meets Husserl. On the Phenomenology of Choice Sequences*. Dordrecht: Springer.

Atten, M. van (2008). « The development of intuitionistic logic ». Récupéré de: https://plato.stanford.edu/entries/intuitionistic-logic-development/

Barzin, M. & Errera, A. (1927). « Sur la logique de M. Brouwer ». *Académie Royale de Belgique, Bulletin de la classe des sciences*, 13: 56–71.

Barzin, M. & Errera, A. (1929). « Sur le principe du tiers exclu ». *Archives de la Société Belge de philosophie*, 1/2: 3-26.

Becker, O. (1927) « Mathematische Existenz. Untersuchungen zur Logik und Ontologie mathematischer Phänomene ». *Jahrbuch für Philosophie und phänomenologische Forschung*, 8: 439–809.

Bell, J. & Korté H. (2016). « Hermann Weyl ». Récupéré de: http://plato.stanford.edu/archives/win2016/entries/weyl/

Benacerraf, P. & Putnam, H. (1983). *Philosophy of Mathematics: Selected Readings*, sec. ed., Cambridge: Cambridge University Press.

Bishop, E. & Bridges, D. (1985). *Constructive Analysis*. Berlin: Springer.

Bridges, D. & Richman, F. (1987). *Varieties of Constructive Mathematics*. Cambridge: Cambridge University Press.

Brouwer, L. E .J. (1907). « *Over de Grondslagen der Wiskunde* » (On the Foundations of Mathematics). Thèse doctorale Université d'Amsterdam. Traduction anglaise dans *Brouwer 1975*: 11–101.

Brouwer, L. E. J. (1908). « De Onbetrouwbaarheid der logische principe » (Que les principes logiques ne sont pas fiables). *Tijdschrift voor wijsbegeerte*, 2: 152- 158. Traduction francaise dans *Revue d'histoire des sciences* 67/2: 257-281.

Brouwer, L. E. J. (1912). « Intuitionismus und formalismus » (Intuitionisme et formalisme). *Bulletin of the American Mathematical society:* 81-96. Traduction française dans *Largeault 1992*: 39-53.

Brouwer, L. E. J. (1925). « Intuitionistische splitsing van mathematische grondbegriffen » (Intuitionist Splitting of the Fundamental Notions of Mathematics). *Verslagen* 32: 877-80. Traduction anglaise dans *Mancosu 1998*: 286-292.

Brouwer, L. E. J. (1928). « Intuitionistische Betrachtungen über den Formalismus » (Remarques intuitionistes sur le formalisme). *Koninklijke Akademie van Wetenschappen*, 31: 374–379. Traduction française dans *Largeault 1992*: 239-252.

Brouwer, L. E. J. (1929). « Mathematik, Wissenschaft und Sprache » (Mathématique, science et langage). *Monatshefte fur Mathematik und Physik*, 36: 153-164. Traduction française dans *Largeault 1992*: 253-270.

Brouwer, L. E. J. (1948). « Consciousness, Philosophy and Mathematics », dans *Brouwer 1975*: 480-494.

Brouwer, L. E. J. (1952). « Historical Background, Principles and Methods of Intuitionism », dans *Brouwer 1975*: 508-515.

Brouwer, L. E. J. (1975). *Collected Works, volume 1: Philosophy and foundations of mathematics.* Amsterdam: North Holland.

Brouwer, L. E. J., (1996). « Life, Art, and Mysticism ». *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 37: 391-429.

Church, A. (1928). « On the Law of the Excluded Middle ». *Bulletin of the American Mathematical Society*, 34: 75-78.

Church, A. (1956). *Introduction to Mathematical Logic.* Princeton: Princeton University Press.

Cook, J. W. (1965), « Wittgenstein on Privacy ». *Philosophical Review*, 74: 281-314.

Dalen, D. van (1990), « The War of the Frogs and the Mice, or the Crisis of the *Mathematische Annalen* », *The Mathematical Intelligencer*, 12/4: 17-31.

Dalen, D. van (1995). « Hermann Weyl's Intuitionistic Mathematics ». *Bulletin of Symbolic Logic*, 1: 145-169.

Dalen, D. van (1999), *Mystic, Geometer, and Intuitionist. The Life of L. E. J. Brouwer. Volume 1: The Dawning Revolution*. Oxford: Oxford University Press.

Dalen, D. van (2004) « Kolmogorov and Brouwer on Constructive Implication and the Ex Falso Rule ». *Russian Mathematical Surveys*, 59/2 : 247–257.

Dalen, D. van (2005), *Mystic, Geometer, and Intuitionist. The Life of L. E. J. Brouwer. Volume 2: Hope and Disillusion*. Oxford: Oxford University Press.

Došen, K. (1992). « The First Axiomatization of Relevant Logic». *Journal of Philosophical Logic*, 21/4 : 339–356.

Dubucs, J.-P. (1988). « L. E. J. Brouwer : topologie et constructivisme ». *Revue d'histoire des sciences* 41/2: 133-155.

Dummett, M. A. E. (1973). *Frege. Philosophy of Language*. Londres: Duckworth.

Dummett, M. A. E. (1977). *Elements of Intuitionism*. Oxford: Clarendon Press.

Dummett, M. A. E. (1978). *Truth and other Enigmas*. Londres: Duckworth.

Dummett, M. A. E. (1991a). *Philosophie de la logique*. Paris: Éditions de Minuit.

Dummett, M. A. E. (1991b). *The Logical Basis of Metaphysics*. Cambridge MA: Harvard University Press.

Dummett, M. A. E. (1993). *The Seas of Language*. Oxford: Clarendon Press.

Edwards, H. M. (2005). *Essays in Constructive Mathematics*. Berlin: Springer.

Evans, J. G. D. (1999) « Dialectic, Contradiction and Paraconsistency », Sim M. (dir.), *From Puzzles to Principles? Essays on Aristotle's Dialectic*. Lanham MD: Lexington Books: 137-149.

Feferman, S. (1998). « Weyl vindicated: *Das Kontinuum* 70 Years Later ». Feferman, S., *In the Light of Logic*. Oxford: Oxford University Press, 249-283.

Frege, G. (1969). *Les fondements de l'arithmétique*. Paris : Éditions du Seuil.

Frege, G. (1999). *Idéographie*. Paris: Vrin.

Gentzen, G. (1934). *Untersuchungen über das logische Schliessen (Recherches sur la déduction logique*). Thèse doctorale, Université de Gottingue. Traduction française (1955) Paris : Presses universitaires de France.

Gentzen, G. (1969). Szabo, M. E. (dir.), *Collected Papers of Gerhard Gentzen.* Amsterdam: North- Holland.

Giaquinto, M. (2002). *The Search for Certainty.* Oxford: Oxford University Press.

Girard, J.-Y., Lafont Y., Taylor, P. (1989). *Proofs and Types.* Cambridge: Cambridge University Press.

Glivenko, V. (1928). « Sur la logique de M. Brouwer ». *Académie Royale de Belgique. Bulletin de la classe des sciences*, 14: 225-228.

Glivenko, V. (1929). « Sur quelques points de la logique de M. Brouwer ». *Académie Royale de Belgique, Bulletin de la classe des sciences*, 15 : 183–188. Traduction anglaise dans *Mancosu 1998*: 301-305.

Gödel, K. (1933), « On Intuitionistic Arithmetic and Number Theory ». Feferman, S. Dawson Jr., J. W., Kleene, S. C., Moore, G. H., Solovay, R. M. & van Heijenoort, J. (dir.), *Kurt Gödel, Collected Works*, vol. 1. New York NY: Oxford University Press, 1986: 287-295.

Gödel, K. (1941), « In What Sense is Intuitionistic Logic Constructive? ». Feferman, S., Dawson Jr., J. W., Goldfarb, W., Parsons, C., Solovay, R. M., (dir.), *Kurt Gödel, Collected Works*, vol. 3. New York NY: Oxford University Press, 1995: 189-200.

Hacking, I. (1979). « What is Logic? ». *Journal of Philosophy*, 76: 285-319.

Heijenoort, J. van (dir.) (1967). *From Frege to Gödel. A Source Book in Mathematical Logic, 1879-1931.* Cambridge MA: Harvard University Press.

Hesseling, E. (2003). *Gnomes in the Fog. The Reception of Brouwer's Intuitionism in the 1920s.* Basel : Birkhäuser.

Heyting, A. (1925). *Intuitionistische axiomatiek der projectieve meetkunde.* Thèse doctorale Université d'Amsterdam.

Heyting A. (1930a). « Sur la logique intuitionniste ». *Académie Royale de Belgique, Bulletin de la Classe des Sciences,* 16: 957–963. Traduction anglaise dans *Mancosu 1998*: 306-310.

Heyting, A. (1930b). « Die formalen Regeln der intuitionistischen Logik » (The Formal Rules of Intuitionistic Logic). *Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften* : 42–56. Traduction anglaise partielle dans Mancosu 1998 : 311–327.

Heyting, A. (1931). « Die intuitionistische Grundlegung der Mathematik » (The Intuitionist Foundations of Mathematics). *Erkenntnis*, 2: 106–115. Traduction anglaise dans *Benacerraf & Putnam 1983*: 52–61.

Heyting, A. (1934). « Mathematische Grundlagenforschung, Intuitionismus, Beweistheorie » (Les fondements des mathématiques. Intuitionnisme. Théorie de la démonstration). Berlin: Springer. Traduction française (1955). Paris: Gauthier-Villars.

Heyting, A. (1956a). *Intuitionism, an Introduction*. Amsterdam: North–Holland.

Heyting, A. (1956b). « La conception intuitionniste de la logique ». *Les études philosophiques*, 11: 226-233.

Heyting, A. (1968). « L. E. J. Brouwer », dans Klibansky, R. (dir.). *La philosophie contemporaine*. Florence: La nuova Italia editrice, 308-315.

Heyting, A. (1974). « Intuitionistic Views of the Nature of Mathematics », *Synthese*, 27: 79-91.

Hilbert, D. (1922). « Neubegründung der Mathematik. Erste Mitteilung » (Nouvelle fondation des mathématiques. Première communication). *Abhandlungen Aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg*, 1: 157-177. Traduction française dans *Largeault 1992*: 107-130.

Hilbert, D. (1923). « Die logischen Grundlagen der Mathematik » (Les fondements logiques des mathématiques). *Mathematische Annalen*, 88: 151-165. Traduction française dans *Largeault 1992*: 131-144.

Hilbert, D. (1925). « Über das Unendliche » (Sur l'infini). *Mathematische Annalen*, 95 : 161-190. Traduction française dans *Largeault 1972*: 215-245.

Hilbert, D. (1927). « Die Grundlagen der Mathematik » (Les fondements des mathématiques). *Abhandlungen Aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg*, 6 : 65-85. Traduction française dans *Largeault 1992*: 145-164.

Hilbert, D. (1930). « Die Grundlegung der elemantaren Zahlenreihe » (Les fondements de l'arithmétique élémentaire). *Mathematische Annalen*, 104: 484-494. Traduction française dans *Largeault 1992*: 187-196.

Howard, W. A. (1980). « The Formula-As-Types Notion of Construction ». Seldin J. P. & Hindley, J. R. (dir.), *To H. B. Curry: Essays in Combinatory Logic, Lambda Calculus and Formalism*. New York NY: Academic Press: 479-91.

Jaśkowski, S. (1967). « On the Rules of Suppositions in Formal Logic". McCall, S. (dir.), *Polish Logic 1920-1939*. Oxford: Oxford University Press: 232-258.

Johnson, D. M. (1987). « L. E. J. Brouwer's Coming of Age as a Topologist ». Phillips, E. R. (dir.), *Studies in the History of Mathematics*, Mathematical Association of America, *Studies in Mathematics*, 26: 61-97.

Kolmogorov, A. (1925), « O principe tertium non datur » (On the Principle of Excluded Middle), *Matematiceskij Sbornik*, 32: 646–667. Traduction anglaise dans *van Heijenoort 1967*: 416-437.

Kolmogorov, A. (1932). « Zur Deutung der Intuitionistischen Logik » (On the Interpretation of Intuitionistic Logic). *Mathematische Zeitschrift*, 35: 58–65. Traduction anglaise dans *Mancosu 1998*: 328–334.

Kolmogorov, A. (1956). *Foundations of the Theory of Probability*. New York NY: Chelsea.

Largeault, J. (1972). *Logique mathématique : textes*. Paris: Armand Colin.

Largeault, J. (1992). *Intuitionisme et théorie de la démonstration*. Paris: Vrin.

Mancosu, P. (dir.) (1998). *From Brouwer to Hilbert. The Debate on the Foundations of Mathematics in the 1920s*. Oxford: Oxford University Press.

Mancosu, P. (2011), *The Adventure of Reason. Interplay between Philosophy of Mathematics and Mathematical Logic, 1900-1940*. Oxford: Oxford University Press.

Marion, M. (1995a). « Kronecker's "safe haven of real mathematics" ». Marion, M. & Cohen R. S. (dir.), *Québec Studies in the Philosophy of Science. Part I: Logic, Mathematics, Physics and History of Science*. Dordrecht: Kluwer, 189-215.

Marion, M. (1995b). « Wittgenstein and Finitism ». *Synthese*, 105: 141-176.

Marion, M. (1998). *Wittgenstein, Finitism, and the Foundations of Mathematics.* Oxford: Oxford University Press.

Marion, M. (2016). « Lessons from Lewis Carroll's Paradox of Inference », *The Carrollian. The Lewis Carroll Journal*, 28: 48-75.

Martin-Löf, P. (1984). *Intuitionistic Type Theory.* Naples: Bibliopolis.

Martin-Löf, P. (1996). « On the Meaning of the Logical Constants and the Justification of Logical Laws », *Nordic Journal of Philosophical Logic*, 1: 11-60.

Negri, S. & Plato J. von (2001). *Structural Proof Theory*. Cambridge. Cambridge University Press.

Okada, M. (2008) « Some Remarks on Difference between Gentzen's Finitist and Heyting's Intuitionist Approaches toward Intuitionistic Logic and Arithmetic », *Annals of the Japan Association for Philosophy of Science*, 16: 1-18.

Orlov, I. E. (1928). « Ischislenic sovmestnosti predlozhenii », *Mathematicheskii Sbornik* 35 : 263-266.

Pelletier, F. J. (1999). « A Brief History of Natural Deduction ». *History and Philosophy of Logic*, 20: 1-31.

Placek, T. (1999). *Mathematical intuitionism and intersubjectivity.* Dordrecht: Kluwer.

Plato, J. von (1994). *Creating Modern Probability.* Cambridge. Cambridge University Press.

Plato, J. von (2012). « Gentzen's Proof systems: Byproducts of a work of a genius ». *Bulletin of Symbolic Logic,* 18/3: 313-367.

Plato, J. von (2017). *The Great Formal Machinery Works.* Princeton NJ: Princeton University Press.

Prawitz, D. (1965). *Natural Deduction. A Proof-Theoretical Study.* Stockholm: Almqvist & Wicksell.

Prawitz, D. (1977). « Meaning and Proofs: On the Conflict between Classical and Intuitionistic Logic ». *Theoria*, 43: 1-40.

Quine, W. V. (1986), *Philosophy of Logic*. Sec. ed. Cambridge MA: Harvard University Press.

Ramsey, F. P. (1991). *Notes on Philosophy, Probability and Mathematics*. Naples: Bibliopolis.

Ramsey, F. P. (2003). *Logique, philosophie et probabilités*. Paris: Vrin.

Restall, G. (2000), *An Introduction to Substructural Logics*. London: Routledge.

Rivenc, F. (2005). *Introduction à la logique pertinente*. Paris: P. U. F.

Russell, B. (1903). *The Principles of Mathematics*. Londres: Allen & Unwin.

Russell, B. (1940). *An Inquiry into Meaning and Truth*. Londres: Allen & Unwin.

Russell, B. & Whitehead, A.N. (1910). *Principia Mathematica*. Cambridge: Cambridge University Press.

Schmitz, H. W. (dir.) (1990). *Essays on Significs*. Amsterdam/Philadelphia: John Benjamins.

Schroeder-Heister P. & Došen, K. (eds.) (1993). *Substructural Logics*. Oxford: Oxford University Press.

Schroeder-Heister, P. (2008) « Lorenzen's Operative Justification of Intuitionistic Logic ». Atten, M. van, *et al.* (dir.). *One Hundred years of Intuitionism. The Cerisy Conference*. Bâle: Birkäuser, 214-240.

Sørensen, M. H., Urzyczyn P. (2006). *Lectures on the Curry-Howard Isomorphism*. Amsterdam: Elsevier.

Stigt, P. van (1990). *Brouwer's Intuitionism*. Amsterdam: North-Holland.

Sundholm, G. (1983). « Constructions, Proofs and the Meaning of Logical Constants ». *Journal of Philosophical Logic*, 12: 151–172.

Sundlholm, G. (1984). « Brouwer's Anticipation of the Principle of Charity ». *Proceedings of the Aristotelian Society,* 85: 263-276.

Sundholm, G. (1994). « Existence, Proof and Truth-Making: A Perspective on the Intuitionistic Conception of Truth ». *Topoi*, 13: 117-126.

Takahashi, Y. (2018) « On the Intuitionistic Background Gentzen's 1935 and 1936 Consistency Proofs and their Philosophical Aspects », *Annals of the Japan Association for Philosophy of Science*, 27: 1-26.

Tennant, N. (1997). *The Taming of the True*. Oxford: Clarendon Press.

Tieszen, R. (1989). *Mathematical Intuition. Phenomenology and Mathematical Knowledge*. Dordrecht: Kluwer.

Troelstra, A. S. (1977) ,*Choice Sequences*. Oxford: Clarendon Press.

Troelstra, A. S. (1990). « On the Early History of Intuitionistic Logic », Petkov, A. *et al.* (dir.) *Mathematical logic*. Plenum, New York NY: 3-17.

Troelstra, A.S. & van Dalen, D. (1988). *Constructivism in Mathematics,* vol.1, Amsterdam : North-Holland.

Univalent Foundation Program (2013). *Homotopy Theory. Univalent Foundations of Mathematics*. Princeton NJ: Institute for Advanced Studies.

Vidal-Rosset, J. (2012). « L'argument de Russell-Tennant ». Guay, A. (dir.), *Autour des Principia Mathematica de Russell et Whitehead*. Dijon: Éditions Universitaire de Dijon : 139-167.

Welby, V. (1985). *Significs and Language. Reprint of the Edition London, 1911, and of Two Articles by V. Welby*. Amsterdam/Philadelphia: John Benjamins.

Weyl, H., (1921). « *Über die neue Grundlagenkrise der Mathematik* » (Sur la nouvelle crise des fondements des mathématiques). *Mathematische Zeitschrift*, 10 : 39-79. Traduction française dans *Largeault 1992*: 55-105.

Weyl, H. (1994). *Le continu et autres écrits*. Paris: Vrin.

Wittgenstein, L. (2004). *Recherches Philosophiques*. Paris: Gallimard.