UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL

ACTION HAMILTONIENNE D'UN TORE SUR UNE VARIÉTÉ LOCALEMENT CONFORMÉMENT SYMPLECTIQUE

MÉMOIRE

PRÉSENTÉ

COMME EXIGENCE PARTIELLE

DE LA MAÎTRISE EN MATHÉMATIQUES

PAR

ALEXANDRO GONZALEZ LEPE

JANVIER 2019

REMERCIEMENTS

Le présent document est le fruit non seulement des six dernières années d'études mathématiques intensives, mais s'inscrit surtout dans tout un parcours où s'entrelacent, se traversent et s'entrechoquent les différents mondes qui alimentent ma vie. C'est grâce à cette diversité que j'ai réussi à me tenir éveillé le long du chemin abstrait des dernières années.

Je tiens à remercier d'abord mon directeur V. Apostolov pour son franc-parler, son soutien et son honnêteté. La profondeur de sa compréhension générale des mathématiques m'étonneront toujours. Un merci à Baptiste Chantraine pour suggérer l'argument de la preuve du lemme (2.4.1.2) et aussi pour avoir accepté d'être évaluateur du présent mémoire. Je remercie grandement aussi Olivier Collin pour son support, sans lequel je n'aurais peut-être pas entamé d'études supérieures. Merci de croire que la curiosité et l'intérêt mathématiques ne peuvent se chiffrer. Merci beaucoup à Abdellah pour sa curiosité sans limites et sa générosité. Ta passion mathématique est contagieuse ! Merci à Isaque pour son humour et ses cours de portugais.

Je remercie mes parents pour leur disponibilité, leur écoute et leur soutien constants. Merci à mon frère David pour être mon compagnon de tous les sports, sans toi mon dos serait peut-être courbé à vie et mon corps ressemblerait à une chaise de bureau. Merci à ma soeur Camila pour ton enthousiasme à travers les multiples aventures musicales que je t'ai proposées, sans nos séances hebdomadaires de lévitation, je serais devenu fou ! Merci à Laura pour ta patience, pour m'avoir parfois accompagné, le plus souvent porté le long des montagnes russes.

TABLE DES MATIÈRES

RÉSUMÉ

La théorie des variétés symplectiques munies d'une action hamiltonienne de tore de dimension maximale prend ses origines dans l'étude classique des systèmes hamiltoniens intégrables. Grâce aux théorèmes célèbres de convexité d'Atiyah et de Guillemin-Steinberg, ainsi que du théorème de classification de Delzant, les variétés symplectiques compactes munies d'une telle action de tore (appelées variétés toriques) constituent aujourd'hui la classe la plus importante des variétés projectives complexes sur laquelle des calculs spécifiques sont réalisables et où de nombreuses conjectures clefs en géométrie complexe ont été testées. Dans ce mémoire, nous étudions la théorie générale menant à la classification des variétés toriques, en passant par des notions de géométrie différentielle, d'algèbre linéaire complexe et d'actions hamiltoniennes. Nous examinons aussi une partie de la preuve du théorème de Delzant.

Peu d'exemples aussi riches sont connus en dehors de la catégorie de variétés symplectiques. Cependant, un résultat récent de Eliashberg-Murphy établit l'existence d'une structure localement conformément symplectique (LCS) sur toute variété presque-complexe compacte à premier nombre de Betti non-nul. En même temps, Apostolov-Dloussky ont démontré que toute surface complexe compacte est dominée par une telle structure. Nous faisons donc l'étude systématique des variétés LCS munies d'une action hamiltonienne tordue d'un tore. En se restreignant à la classe des variétés localement conformément kählériennes (LCK), N. Istrati est arrivée récemment à démontrer qu'une variété LCK torique compacte possède nécessairement une métrique de Vaisman. Nous examinons en détails ce résultat qui, avec les travaux de Pilca et de Lerman, mène à la classification des variétés LCK toriques compactes.

Mots-clés : Géométrie symplectique, variété kählérienne, action hamiltonienne, application moment, variété torique, variété localement conformément symplectique.

INTRODUCTION

Ce mémoire est une étude détaillée de l'article *A characterisation of toric lck manifolds* (Istrati, 2016) de Nicolina Istrati. Nous présentons l'essentiel du bagage mathématique nécessaire à la compréhension de cet article.

Dans le premier chapitre, nous introduisons l'algèbre linéaire complexe, dont nous aurons besoin pour définir les variétés complexes et kählériennes.

Dans le second chapitre, on donne les définitions de base de la géométrie différentielle et énonçons les résultats dont nous aurons besoin. Voir le chapitre 1 de (Kobayashi et Nomizu, 1963) pour une introduction approfondie de la géométrie différentielle. Nous introduisons trois différentes structures sur des variétés différentiables : complexe, riemannienne et symplectique, puis nous introduisons la théorie de base liée à chacune de ces structures. Nous énonçons aussi les résultats de topologie algébrique dont nous aurons besoin (pour une étude détaillée, voir (Hatcher, 2002)).

Dans le chapitre 3, nous présentons la définition d'une action d'un groupe de Lie sur une variété. Plus spécifiquement nous étudions les actions symplectiques et hamiltoniennes dans le cas où notre variété est symplectique. Ceci nous mène au cas des variétés toriques, c'est-à-dire des variétés symplectiques compactes et connexes munies d'une action hamiltonienne de tore fidèle et maximale. Nous donnons en détail une des deux parties de la preuve du théorème de Delzant (1988) permettant de réduire l'étude des variétés toriques à l'étude des polytopes convexes dans l'espace euclidien.

Finalement, dans le chapitre 4 nous révisons en détail les théories des variétés localement conformément symplectiques (LCS) et localement conformément kählériennes (LCK), ce qui nous permet de démontrer le théorème d'Istrati (2016) qui stipule qu'une variété LCK torique admet une métrique dont la forme de Lee est parallèle par rapport à la connexion de Lévi-Civita.

CHAPITRE I

ALGÈBRE LINÉAIRE

Nous suivrons les références suivantes : (Huybrechts, 2006) ; (Kostrikin et Manin, 1997).

1.1 Algèbre linéaire complexe

1.1.1 Espaces vectoriels complexes

Définition 1.1.1.1. Soit L un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension complexe n. L est aussi un $\mathbb{R}$-espace vectoriel (obtenu en oubliant le scalaire i) que l'on dénote $L_{\mathbb{R}}$, la forme réelle de L.

Exemple 1.1.1.2. $L = \mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n} = L_{\mathbb{R}}$.

Définition 1.1.1.3. Soit $f : L \to M$ une application $\mathbb{C}$-linéaire, où L,M sont deux $\mathbb{C}$-espaces vectoriels. On note

$$f_{\mathbb{R}} : L_{\mathbb{R}} \to M_{\mathbb{R}}$$

l'application $\mathbb{R}$-linéaire correspondante.

Théorème 1.1.1.4.

i) Si $E = \{e_1, \dots, e_m\}$ est une $\mathbb{C}$-base de L, alors

$$E_{\mathbb{R}} = \{e_1, \dots, e_m, ie_1, \dots, ie_m\}$$

est une $\mathbb{R}$*-base de* $L_{\mathbb{R}}$*. En particulier,* $2\dim_{\mathbb{C}}(L) = \dim_{\mathbb{R}}(L_{\mathbb{R}})$.

ii) Soit $f : L \to M$ *une application* $\mathbb{C}$*-linéaire, et* $A_f = (a_{kj})_{n\times m}$ *la matrice correspondante dans les bases* $E = \{e_1, \ldots, e_m\}$ *de* L *et* $E' = \{e'_1, \ldots, e'_n\}$ *de* M*, avec* $a_{kj} = b_{kj} + ic_{kj}$*. Alors*

$$A_{f_{\mathbb{R}}} = \begin{pmatrix} B & -C \\ C & B \end{pmatrix}$$

dans les bases réelles correspondantes $E_{\mathbb{R}}$ *et* $E'_{\mathbb{R}}$*.*

Démonstration.

i) Tout élément $l \in L$ s'écrit

$$l = \sum_{j=1}^{m} l_j e_j = \sum_{j=1}^{m} (a_j + ib_j)e_j = \sum_{j=1}^{m} a_j e_j + \sum_{j=1}^{m} b_j(ie_j) \ .$$

Alors $E_{\mathbb{R}}$ génère $L_{\mathbb{R}}$. Voyons la $\mathbb{R}$-indépendance linéaire de $E_{\mathbb{R}}$.

Supposons que

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{j=1}^{m} b_j e_j + \sum_{j=1}^{m} c_j(ie_j) \\ &= \sum_{j=1}^{m} (b_j + ic_j)e_j \ , \end{aligned}$$

avec b_j, $c_j \in \mathbb{R}$. Par $\mathbb{C}$-indépendance linéaire de E, on a pour tout $j \in \{1, \ldots, m\}$ que

$$b_j + ic_j = 0,$$

ce qui implique que tous les coefficients b_j, c_j sont nuls, tel que voulu.

ii) On a que

$$f(e_j) = A(e_j) = (B + iC)(e_j) = B(e_j) + iC(e_j) = \sum_{k=1}^{n} b_{kj} e'_k + \sum_{k=1}^{n} c_{kj}(ie'_k) \ ,$$

$$\begin{aligned} f(ie_j) = A(ie_j) = i(B + iC)(e_j) = i\sum_{k=1}^{n} (b_{kj} + ic_{kj})e'_k &= \sum_{k=1}^{n} (-c_{kj} + ib_{kj})e'_k \\ &= \sum_{k=1}^{n} -c_{kj} e'_k + \sum_{k=1}^{n} b_{kj}(ie'_k) \ . \end{aligned}$$

Ainsi, dans les bases $E_{\mathbb{R}}$ et $E'_{\mathbb{R}}$, on peut écrire

$$A_{f_{\mathbb{R}}} = \begin{pmatrix} B & -C \\ C & B \end{pmatrix} .$$

□

Corollaire 1.1.1.5. $\det(f_{\mathbb{R}}) = |\det_{\mathbb{C}}(f)|^2$.

Démonstration. On utilise les transformations de Gauss-Jordan, sous lesquelles nous savons le déterminant invariant :

$$\begin{aligned}\det(A_{f_{\mathbb{R}}}) &= \det\begin{pmatrix} B & -C \\ C & B \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} B+iC & -C+iB \\ C & B \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} B+iC & 0 \\ C & B-iC \end{pmatrix} \\ &= \det\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & \overline{A} \end{pmatrix} = \det(A)\det(\overline{A}) = \det(A)\overline{\det(A)} = |\det_{\mathbb{C}}(A)|^2 .\end{aligned}$$

□

Exemple 1.1.1.6. $\mathbb{C} \cong \mathcal{M}_{1\times 1}(\mathbb{C}) = \{(x+iy) \mid x,y \in \mathbb{R}\}$. La forme réelle des matrices complexes 1×1 est $\left\{ \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} \;\middle|\; x,y \in \mathbb{R} \right\}$.

Définition 1.1.1.7. Une structure complexe sur un espace vectoriel réel V est un opérateur linéaire $J : V \to V$ t.q. $J^2 = -Id_V$. On note (V,J) un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'une telle structure.

Remarque 1.1.1.8. Si $V = L_{\mathbb{R}}$, l'endomorphisme

$$\begin{aligned} J : L_{\mathbb{R}} &\to L_{\mathbb{R}} \\ l &\mapsto il \end{aligned}$$

définit une structure complexe dite canonique sur $L_{\mathbb{R}}$.

Lemme 1.1.1.9. *Si $J : V \to V$ est structure complexe, alors on a que $J \in Gl_n(V)$.*

Démonstration. On a que

$$-1 = \det(-Id_V) = \det(J^2) = (\det(J))^2 \; .$$

Ainsi $\det(J) \neq 0$. $\square$

Proposition 1.1.1.10. *Pour* (V,J) *donné, on pose*

$$z \cdot v := xv + yJ(v), \quad \forall z = x + iy \in \mathbb{C}.$$

Ceci introduit une structure d'espace vectoriel complexe L *sur* V *telle que* $L_{\mathbb{R}} = V$.

Corollaire 1.1.1.11. *Pour* (V,J) *donné,* $\dim_{\mathbb{R}}(V) = 2n$, *et* V *possède une base réelle* $E_J = \{e_1, \ldots, e_n, J(e_1), \ldots, J(e_n)\}$.

Démonstration. Par le théorème (1.1.1.4), on a que $\dim_{\mathbb{R}}(V) = 2\dim_{\mathbb{C}}(L)$, donc V est bien de dimension paire. $E = \{e_1, \ldots, e_n\}$ est $\mathbb{C}$-base de L. Alors $\dim_{\mathbb{R}}(V) = 2n$. Il suffit alors de montrer que $\{e_1, \ldots, e_n, J(e_1), \ldots, J(e_n)\}$ sont des vecteurs linéairement indépendants. Supposons alors que

$$0 = \sum_{k=1}^{n} a_k e_k + b_k J(e_k) = \sum_{k=1}^{n} (a_k + ib_k) \cdot e_k \; .$$

Comme les vecteurs e_k sont $\mathbb{C}$-linéairement indépendants, on a pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$ que $a_k + ib_k = 0$, ce qui implique que tous les coefficients a_k, b_k sont nuls, tel que voulu.

Ainsi, dans la base E_J, l'opérateur linéaire J s'écrit

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix} \; .$$

$\square$

Définition 1.1.1.12. Pour (V,J) donné, on a que $-J$ est aussi une structure complexe sur V et que l'on appelle structure complexe conjuguée.

Définition 1.1.1.13. Soit L un $\mathbb{C}$-espace vectoriel. Son conjugué $\overline{L}$ est le $\mathbb{C}$-espace vectoriel muni de la multiplication scalaire

$$z \star l := \overline{z} \cdot l, \forall z \in \mathbb{C} ,$$

où $\star$ est la multiplication scalaire sur $\overline{L}$, et $\cdot$ celle sur L. Ainsi, si L est l'espace complexe associé à (V, J), alors $\overline{J}$ est l'espace complexe associé à $(V, -J)$.

1.1.2 Complexification

Soit V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Définition 1.1.2.1. À $V \oplus V$ on donne la structure complexe

$$\begin{aligned} J_0 : V \oplus V &\to V \oplus V \\ (v_1,v_2) &\mapsto (-v_2,v_1) . \end{aligned}$$

Alors $(V \oplus V,J_0)$ est forme réelle d'un espace vectoriel complexe qu'on note $V_{\mathbb{C}}$, la complexification de V. i.e. $(V_{\mathbb{C}})_{\mathbb{R}} = V \oplus V$.

Remarque 1.1.2.2. On remarque que

$$V_{\mathbb{C}} \cong V \underset{\mathbb{R}}{\otimes} \mathbb{C} .$$

En effet, si $E = \{e_1,\ldots,e_n\}$ est $\mathbb{R}$-base de V, une base de $V \underset{\mathbb{R}}{\otimes} \mathbb{C}$ est

$$\{e_j \otimes 1, e_j \otimes i \mid j \in \{1,\ldots,n\}\} ,$$

ce qui donne deux copies de V. Ainsi, on a que

$$\dim_{\mathbb{R}}(V) = \dim_{\mathbb{C}}(V_{\mathbb{C}}) .$$

Cette décomposition nous donne l'inclusion

$$V \hookrightarrow V_{\mathbb{C}}, \ v \mapsto v \otimes 1 .$$

La conjugaison complexe sur $V_{\mathbb{C}}$ est donnée par $\overline{v \otimes \alpha} := v \otimes \overline{\alpha}$ que l'on étend $\mathbb{R}$-linéairement. Alors $V \subset V_{\mathbb{C}}$ est caractérisé comme étant le sous-espace U de $V_{\mathbb{C}}$ tel que $\overline{U} = U$.

En termes de $V \underset{\mathbb{R}}{\otimes} \mathbb{C}$, J_0 correspond à la multiplication par i. Ainsi $V_{\mathbb{C}}$ possède la structure complexe

$$i : V_{\mathbb{C}} \to V_{\mathbb{C}}, \ v \otimes \alpha \mapsto v \otimes (i\alpha) \ .$$

Parallèlement, si V a une structure complexe J, nous pouvons l'étendre à $V_{\mathbb{C}}$, en posant

$$J(v \otimes \alpha) := J(v) \otimes \alpha \ ,$$

et en l'étendant $\mathbb{R}$-linéairement. Voyons que $J \in End(V_{\mathbb{C}})$:

$$J(\alpha(v \otimes \beta)) = J(v \otimes (\alpha\beta)) = J(v) \otimes (\alpha\beta) = \alpha(J(v) \otimes \beta) = \alpha(J(v \otimes \beta)) \ .$$

De plus,

$$J(J(v \otimes \alpha)) = J(J(v) \otimes \alpha) = -v \otimes \alpha \ .$$

Ainsi J est aussi une structure complexe sur $V_{\mathbb{C}}$.

Lemme 1.1.2.3. *Si J est une structure complexe sur $V_{\mathbb{C}}$, alors $Spec(J) = \{\pm i\}$.*

Démonstration. Comme $P(t) := t^2 + 1 = (t+i)(t-i)$ est un polynôme tel que $P(J) = 0$, on a que $Spec(J) \subseteq \{\pm i\}$. Il suffit ensuite de remarquer que si $\{e_1, \ldots, e_n\}$ est $\mathbb{R}$-base de V, alors les vecteurs $e_j + iJ(e_j)$ et $e_j - iJ(e_j)$ sont des vecteurs propres de J de valeurs propres respectives $-i$ et i. $\square$

Définition 1.1.2.4. Soit J une structure complexe sur V dont on note par abus de notation $J \in End(V_{\mathbb{C}})$ son extension $\mathbb{C}$-linéaire. On dénote les espaces propres de J par

$$V^{1,0} := \{v \in V_{\mathbb{C}} \mid J(v) = iv\}$$
$$V^{0,1} := \{v \in V_{\mathbb{C}} \mid J(v) = -iv\} \ .$$

Proposition 1.1.2.5. *On a que* $V_{\mathbb{C}} = \left(V^{1,0} \oplus V^{0,1}\right)$ *et que la conjugaison induit un* $\mathbb{R}$*-isomorphisme*

$$V^{1,0} \cong V^{0,1} .$$

Démonstration. D'abord, $V^{1,0} \cap V^{0,1} = \{0\}$. En effet, si $v \in V^{1,0} \cap V^{0,1}$, alors

$$J(v) = iv = -iv ,$$

donc $v = 0$. Nous allons montrer que l'application suivante est un isomorphisme

$$\begin{aligned} \varphi : V^{1,0} \oplus V^{0,1} &\to V_{\mathbb{C}} \\ v \oplus w \quad &\mapsto v + w . \end{aligned}$$

On a que φ est clairement $\mathbb{C}$-linéaire. Voyons qu'elle est injective :

$$Ker(\varphi) = \{v \oplus w \in V^{1,0} \oplus V^{0,1} \mid v + w = 0\} = \{v \oplus w \in V^{1,0} \oplus V^{0,1} \mid v = -w\} = \{0\} .$$

Son inverse est

$$\varphi^{-1} : V_{\mathbb{C}} \to V^{1,0} \oplus V^{0,1}, \ v \mapsto \frac{1}{2}(v - iJ(v)) \oplus \frac{1}{2}(v + iJ(v)) .$$

Comme $V_{\mathbb{C}} = V^{1,0} \oplus V^{0,1}$, il est clair que $V^{1,0} \cong V^{0,1}$ vu que la conjugaison

$$v - iJ(v) \mapsto \overline{v - iJ(v)} = \overline{v} + iJ(\overline{v})$$

définit bien un $\mathbb{R}$-endomorphisme de $V^{1,0}$ à $V^{0,1}$ qui est son propre inverse. $\square$

Lemme 1.1.2.6. *Soit* V *un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel muni d'une structure complexe* J*. Soit* $V^* = \hom_{\mathbb{R}}(V,\mathbb{R})$ *son dual (réel). Celui-ci est muni d'une structure complexe naturelle donnée par*

$$J(\alpha)(v) := \alpha(J(v)) .$$

On a aussi que

$$(V^*)_{\mathbb{C}} \cong (V_{\mathbb{C}})^* ,$$

ce qui nous donne la décomposition suivante

$$(V^*)^{1,0} = \{f \in \hom_{\mathbb{R}}(V,\mathbb{C}) \mid f(J(v)) = if(v)\} = (V^{1,0})^* ,$$
$$(V^*)^{0,1} = \{f \in \hom_{\mathbb{R}}(V,\mathbb{C}) \mid f(J(v)) = -if(v)\} = (V^{0,1})^* .$$

Démonstration. Vérifions d'abord que $(V^*)_{\mathbb{C}} = \hom_{\mathbb{R}}(V,\mathbb{R}) \underset{\mathbb{R}}{\otimes} \mathbb{C} \cong \hom_{\mathbb{R}}(V,\mathbb{C})$. On prend le morphisme

$$\psi : (V^*)_{\mathbb{C}} \to \hom_{\mathbb{R}}(V,\mathbb{C}),\ f \otimes 1 \mapsto f,\ f \otimes i \mapsto if .$$

On a que $f \in (V^*)_{\mathbb{C}}$ peut s'écrire comme

$$f = g \otimes 1 + h \otimes i ,$$

où $g,h \in \hom_{\mathbb{R}}(V,\mathbb{R})$. Alors

$$\begin{aligned} Ker(\psi) &= \{f \in (V^*)_{\mathbb{C}} \mid \psi(f) = 0\} \\ &= \{f = g \otimes 1 + h \otimes i \in (V^*)_{\mathbb{C}} \mid g + ih = 0\} = \{0\} . \end{aligned}$$

Alors ψ est injective. Si $f \in \hom_{\mathbb{R}}(V,\mathbb{C})$, on peut décomposer f en partie réelle et imaginaire

$$f = u + iv .$$

On a donc que $\psi(u \otimes 1 + v \otimes i) = f$. Ainsi ψ est bien un $\mathbb{C}$-isomorphisme. Maintenant, pour $f \in \hom_{\mathbb{R}}(V,\mathbb{C})$, on définit $\tilde{f} \in \hom_{\mathbb{C}}(V_{\mathbb{C}},\mathbb{C}) = (V_{\mathbb{C}})^*$ par $\tilde{f}(v \otimes 1 + w \otimes i) := f(v) + if(w)$. Soit alors $\varphi : f \mapsto \tilde{f}$ ce morphisme $\mathbb{C}$-linéaire. On a que

$$\begin{aligned} Ker(\varphi) &= \{f \in \hom_{\mathbb{R}}(V,\mathbb{C}) \mid \tilde{f} = 0\} \\ &= \{f \in \hom_{\mathbb{R}}(V,\mathbb{C}) \mid f(v) = -if(w)\} = \{0\} . \end{aligned}$$

De plus, on a que

$$\dim_{\mathbb{R}}(\hom_{\mathbb{R}}(V,\mathbb{C})) = 2 \dim_{\mathbb{R}}(V) = \dim_{\mathbb{R}}(V_{\mathbb{C}}) = \dim_{\mathbb{R}}((V_{\mathbb{C}})^*) .$$

Donc φ est un $\mathbb{C}$-isomorphisme. En combinant ψ et φ, on obtient l'isomorphisme

$$(V^*)_{\mathbb{C}} \cong (V_{\mathbb{C}})^* .$$

$\square$

Ainsi, il est justifié d'écrire $V^*_{\mathbb{C}}$ sans ambigüité, et on a

$$V^*_{\mathbb{C}} = (V^*)^{1,0} \oplus (V^*)^{0,1} .$$

1.1.3 Algèbre extérieure

Définition 1.1.3.1. Soit V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension d. On définit sa k-algèbre extérieure par

$$\Lambda^k(V) := \{f : V^k \to \mathbb{R} \quad k\text{-linéaire alternée}\} .$$

Alors on a l'algèbre extérieure $\Lambda(V) := \bigoplus_{k=1}^{d} \Lambda^k(V)$.

Lemme 1.1.3.2. *Soit $w \in \Lambda^2(V)$ non-dégénérée, avec $\dim_{\mathbb{R}}(V) = 2n$ et $n \geq 2$. Alors l'application*

$$\Lambda^1(V) \to \Lambda^3(V)$$
$$\alpha \mapsto \alpha \wedge w$$

est injective.

Démonstration. w est une forme bilinéaire alternée non-dégénérée sur V. Soit $\{e_1, \ldots, e_{2n}\}$ une base symplectique de V dans laquelle $w = e_1 \wedge e_{n+1} + \cdots + e_n \wedge e_{2n}$. Dans cette base, $\alpha = \sum_{j=1}^{2n} a_j e_j$. Supposons que $\alpha \wedge w = 0$. On a que

$$0 = \alpha \wedge w = \sum_{j=1}^{2n} a_j e_j \wedge e_1 \wedge e_{n+1} + \cdots + \sum_{j=1}^{2n} a_j e_j \wedge e_n \wedge e_{2n} .$$

On remarque que chaque terme $e_j \wedge e_k \wedge e_{n+k}$ n'apparaît qu'une fois dans la dernière égalité. Il faut donc que $a_j = 0,\ \forall j \in \{1, \ldots, 2n\}$. Donc $\alpha = 0$, comme voulu . $\square$

De la même façon, on définit

$$\Lambda^k(V_{\mathbb{C}}) = \{f : (V_{\mathbb{C}})^k \to \mathbb{C} \quad k\text{-linéaire alternée}\} \ ,$$

et on pose $\Lambda(V_{\mathbb{C}}) := \bigoplus_{k=0}^{d} \Lambda^k(V_{\mathbb{C}})$. On remarque que

$$\Lambda^k(V_{\mathbb{C}}) = \Lambda^k(V \underset{\mathbb{R}}{\otimes} \mathbb{C}) = (\Lambda^k(V)) \underset{\mathbb{R}}{\otimes} \mathbb{C} = (\Lambda^k(V))_{\mathbb{C}} \ ,$$

et alors $\Lambda(V) \subset \Lambda(V_{\mathbb{C}})$ est le sous-espace invariant par la conjugaison complexe. On définit alors

$$\Lambda^{p,q}(V) := \Lambda^p(V^{1,0}) \underset{\mathbb{C}}{\otimes} \Lambda^q(V^{0,1}) \ .$$

Proposition 1.1.3.3. *Pour (V,J) donné, on a les propriétés suivantes :*

(1) $\Lambda^{p,q}(V) \subset \Lambda^{p+q}(V_{\mathbb{C}})$;

(2) $\Lambda^k(V_{\mathbb{C}}) = \bigoplus_{p+q=k} \Lambda^{p,q}(V)$;

(3) $\overline{\Lambda^{p,q}(V)} = \Lambda^{q,p}(V)$;

(4) $\wedge : \Lambda^{p,q}(V) \times \Lambda^{r,s}(V) \to \Lambda^{p+r,q+s}(V)$.

Démonstration. Comme V est un espace vectoriel de dimension finie,

$$\Lambda^{1,0}V = \Lambda^1 V^{1,0} = (V^{1,0})^* \cong V^{1,0} \ .$$

Soient donc $\{v_1, \ldots, v_n\}$ et $\{w_1, \ldots, w_n\}$ bases respectives de $V^{1,0}$ et $V^{0,1}$. Alors

$$\{v_{j_1} \otimes \cdots \otimes v_{j_p} \otimes w_{i_1} \otimes \cdots \otimes w_{i_q} \mid 1 \leq j_1 < \cdots < j_p \leq n \text{ et } 1 \leq i_1 < \cdots < i_q \leq n\}$$

est une base de $\Lambda^{p,q}(V)$. Ceci montre (1), car $v_J \otimes w_I \in \Lambda^{p+q}(V_{\mathbb{C}})$.

Ainsi $\bigoplus_{p+q=k} \Lambda^{p,q}(V) \subseteq \Lambda^k(V_{\mathbb{C}})$. Comme $\{v_1, \ldots, v_n, w_1, \ldots, w_n\}$ est base de $V_{\mathbb{C}}$, l'inclusion $\Lambda^k(V_{\mathbb{C}}) \subseteq \bigoplus_{p+q=k} \Lambda^{p,q}(V)$ est claire, d'où (2). L'énoncé (3) découle de la proposition 1.1.2.5 et du fait que la conjugaison commute avec le produit extérieur, c'est-à-dire $\overline{a_1 \wedge a_2} = \overline{a_1} \wedge \overline{a_2}$.

Ayant trouvé une base explicite pour $\Lambda^{p,q}(V)$, (4) est évident. □

Remarque 1.1.3.4. On considère l'algèbre extérieure $\Lambda(V_{\mathbb{C}}^*)$. Il découle de ce qui précède que

$$\Lambda(V_{\mathbb{C}}^*) = \Lambda(V^*)^{1,0} \oplus \Lambda(V^*)^{0,1} .$$

On a ensuite que

$$\Lambda^{p,q}(V_{\mathbb{C}}^*) = \Lambda^p(V^*)^{1,0} \underset{\mathbb{C}}{\otimes} \Lambda^q(V^*)^{0,1} ,$$

où, par convention, $\Lambda^{p,q}(V_{\mathbb{C}}^*) = 0$ si $p,q < 0$. De plus, on a aussi nécessairement que $\Lambda^{p,q}(V_{\mathbb{C}}^*) = 0$ si p ou $q > d$, où $d = \dim_{\mathbb{R}}(V)$. La proposition précédente implique que

$$\Lambda^r(V_{\mathbb{C}}^*) = \bigoplus_{p+q=r} \Lambda^{p,q}(V_{\mathbb{C}}^*)$$

et aussi que

$$\Lambda(V_{\mathbb{C}}^*) = \bigoplus_{r=0}^{2d} \Lambda^r(V_{\mathbb{C}}^*) = \bigoplus_{r=0}^{2d} \bigoplus_{p+q=r} \Lambda^{p,q}(V_{\mathbb{C}}^*) .$$

1.1.4 Produit hermitien

Soit L un espace vectoriel complexe, et $V := L_{\mathbb{R}}$ sa forme réelle, munie d'une structure complexe J.

Définition 1.1.4.1. Un produit hermitien sur L est une application $h : L \times L \to \mathbb{C}$

telle que $\forall u,v,w \in V$ et $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$:

(1) $h(u,v) = \overline{h(v,u)}$;

(2) $h(\alpha u + \beta v,w) = \alpha h(u,w) + \beta h(v,w)$;

(3) $h(u,u) \geq 0$, et $h(u,u) = 0$ si et seulement si $u = 0$. [défini positif]

Exemple 1.1.4.2. Sur $L := \mathbb{C}^n$, nous avons le produit hermitien standard

$$H_{st}((z_1, \dots ,z_n),(w_1, \dots ,w_n)) := \sum_{i=1}^{n} z_i \overline{w}_i \ .$$

Proposition 1.1.4.3. *Soit h un produit hermitien sur L, avec $g := Re(h)$ et $w := Im(h)$ sa partie réelle et imaginaire. On a que*
I) g est un produit euclidien J-invariant sur (V,J) ;
II) $w(v_1,v_2) = g(v_1,Jv_2), \forall v_1,v_2 \in V$, et w est anti-symétrique ;
III) il y a une bijection entre les produits hermitiens sur L et les produits euclidiens J-invariants sur (V,J).

Démonstration. Comme h est $\mathbb{R}$-bilinéaire sur les deux arguments, g et w sont bilinéaires sur (V,J). De plus, on a que

$$g(v_1,v_2) + iw(v_1,v_2) = h(v_1,v_2) = \overline{h(v_2,v_1)} = g(v_2,v_1) - iw(v_2,v_1) \ .$$

Alors g est symétrique et w anti-symétrique.
De plus, on a que

$$g(Jv_1,Jv_2) + iw(Jv_1,Jv_2) = h(iv_1,iv_2) = i\bar{i}h(v_1,v_2) = g(v_1,v_2) + iw(v_1,v_2) \ .$$

Ainsi, g et w sont J-invariants sur V. Il est clair que g est définie positive vu que h l'est. Ensuite, on a que

$$g(Jv_1,v_2) + iw(Jv_1,v_2) = h(iv_1,v_2) = ih(v_1,v_2) = -w(v_1,v_2) + ig(v_1,v_2) \ .$$

d'où que $-w(v_1,v_2) = g(Jv_1,v_2) = g(J^2v_1,Jv_2) = -g(v_1,Jv_2)$. Ainsi, on a bien que

$$w(v_1,v_2) = g(v_1,Jv_2) \ .$$

Pour la bijection, on prend $h \mapsto g := Re(h)$. Par I), c'est bien défini. On définit son inverse

$$g \mapsto h_g := g + iw \ ,$$

où $w(v_1,v_2) = g(v_1,Jv_2)$. Comme h_g est bien un produit unitaire sur L (simple à voir), on a que c'est une bijection. $\square$

CHAPITRE II

VARIÉTÉS

2.1 Variétés différentiables

Nous supposons acquises les notions de bases de la géométrie différentielle (chapitre 1 de (Kobayashi et Nomizu, 1963)) et énonçons ici simplement les résultats dont nous aurons besoin.

Soit M une variété lisse, avec TM son fibré tangent. On désigne par $\mathfrak{X}(M)$ l'espace des champs de vecteurs de M. Nous supposerons toujours que nos variétés sont connexes.

2.1.1 Rappels

Pour une étude plus approfondie des notions dans cette sous-section, voir (Warner, 2013), p.11 - 16 et (Kobayashi et Nomizu, 1963), chapitre 1.

La dérivée de Lie d'une fonction $f \in C^\infty(M)$ dans la direction d'un champ $X \in \mathfrak{X}(M)$ est la fonction lisse $L_X f := X(f) = df(X) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(\phi_t^X)^*(f)$, où ϕ_t^X est le flot de X. Pour un (0,p)-tenseur, on définit

$$\begin{aligned} L_X : \Gamma((T^*M)^{\otimes p}) &\to \Gamma((T^*M)^{\otimes p}) \\ S &\mapsto \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (\phi_t^X)^* S \ . \end{aligned}$$

Dans le cas d'un champ de vecteurs $Y \in \mathfrak{X}(M)$, sa dérivée de Lie équivaut au crochet de Lie de champs de vecteurs $L_X Y := \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (\phi_t^X)_* Y = [X,Y] = XY - YX$. Une k-forme différentielle sur M est une section de l'espace des formes extérieures sur le fibré tangent. On note l'espace des k-formes différentielles par $\Omega^k(M) = \Gamma(\Lambda^k(TM))$, avec la convention que $\Omega^0(M) = \mathcal{C}^\infty(M)$.

Proposition 2.1.1.1. *Pour tout tenseur $T \in \Gamma((T^*M)^{\otimes r})$, on a que*

$$L_X(T(Y_1,\dots,Y_r)) = (L_X T)(Y_1,\dots,Y_r) + \sum_{j=1}^{r} T(Y_1,\dots, L_X Y_j, \dots Y_r) \ ,$$

pour $X, Y_1, \dots, Y_r \in \mathfrak{X}(M)$.

Corollaire 2.1.1.2. *La dérivée de Lie est une dérivation, c'est-à-dire*

$$L_X(\alpha \wedge \beta) = (L_X \alpha) \wedge \beta + \alpha \wedge (L_X \beta)$$

et ce, $\forall X \in \mathfrak{X}(M), \forall \alpha,\beta \in \Omega(M)$.

Définition 2.1.1.3. Si $X \in \mathfrak{X}(M)$, le produit intérieur d'une k-forme différentielle sur M est

$$\begin{aligned} \iota_X : \Omega^k(M) &\to \Omega^{k-1}(M) \\ w &\mapsto \iota_X w : \mathfrak{X}(M) \times \cdots \times \mathfrak{X}(M) \to \Omega^0(M) \\ &\qquad (X^1, \dots, X^{k-1}) \mapsto w(X, X^1, \dots, X^{k-1}) \end{aligned}$$

Par convention, on dira que $\iota_X f = 0$, si $f \in \Omega^0(M)$.

Proposition 2.1.1.4.

$$\iota_X(w \wedge \eta) = (\iota_X w) \wedge \eta + (-1)^k w \wedge (\iota_X \eta)$$

où $w \in \Omega^k(M)$ et $\eta \in \Omega^l(M)$. De plus, ι_X est $\mathbb{R}$-linéaire.

Théorème 2.1.1.5 (identités de Cartan).

$$(a)\ L_X = \iota_X \circ d + d \circ \iota_X = (d + \iota_X)^2;$$

$$(b)\ \iota_{[X,Y]} = L_X \circ \iota_Y - \iota_Y \circ L_X\ ,$$

pour $X,Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Corollaire 2.1.1.6. $L_X \circ d = d \circ L_X$.

Corollaire 2.1.1.7. *Si* $w \in \Omega^r(M)$*, on a que*

$$\begin{aligned} dw(X_0,X_1,\dots X_r) &= \frac{1}{r+1}\sum_{i=0}^{r}(-1)^i L_{X_i}(w(X_0,\dots,\hat{X}_i,\dots,X_r)) \\ &+ \frac{1}{r+1}\sum_{0\le i<j\le r}(-1)^{i+j} w([X_i,X_j],X_0,\dots,\hat{X}_i,\dots,\hat{X}_j,\dots,X_r) \end{aligned}$$

$\forall X_0,X_1,\dots,X_r \in \mathfrak{X}(M)$. *En particulier, si* w *est une 1-forme, on a que*

$$dw(X,Y) = \frac{1}{2}\big(L_X(w(Y)) - L_Y(w(X)) - w([X,Y])\big)\ .$$

2.2 Géométrie complexe

Définition 2.2.0.1. Soit M variété lisse. $J \in \Gamma(End(TM))$ est une structure presque complexe sur M si pour tout $p \in M$, $J_p \in End(T_pM)$ est une structure complexe sur T_pM. (i.e. $J_p^2 = -Id_{T_pM}$). Alors on dit que (M,J) est une variété presque complexe.

Proposition 2.2.0.2. *Toute variété presque-complexe est de dimension paire et orientable.*

Démonstration. Soit M variété presque-complexe n-dimensionnelle, et J sa structure presque-complexe. Alors $J^2 = -Id$. En prenant le déterminant, on obtient

$$\det(J)^2 = \det(J^2) = \det(-Id) = (-1)^n\ .$$

Comme M est une variété différentiable réelle, on a $\det(J) \in \mathbb{R}$, donc il faut que n soit pair.

Pour chaque $p \in M$, on se donne une base $\{e_1, \ldots ,e_n, J(e_1), \ldots , J(e_n)\}$ sur T_pM (voir théorème (1.1.1.4)). Ceci définit une orientation sur M. □

Définition 2.2.0.3. Une variété complexe M est une variété différentiable de dimension $2n$ munie d'une structure analytique complexe. En d'autres mots, si $\{U_i,\varphi_i\}_{i\in I}$ est un atlas différentiable sur M, les changements de carte

$$\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i \cap U_j) \subset \mathbb{C}^n \to \varphi_j(U_i \cap U_j) \subset \mathbb{C}^n$$

sont holomorphes.

Exemple 2.2.0.4.

$$\mathbb{C}P^m = {\mathbb{C}^{m+1}\backslash\{0\}}/_{\mathbb{C}^*}$$

est une variété complexe, l'ensemble des droites vectorielles complexes de $\mathbb{C}^{m+1}$. On note une classe d'équivalence $[z_0, \ldots ,z_m]$ qu'on appelle aussi coordonnées homogènes. Un atlas de cartes pour $\mathbb{C}P^m$ est

$$U_i := \{[z_0, \ldots ,z_m] \in \mathbb{C}P^m \mid z_i \neq 0\}$$

avec les difféomorphismes

$$\begin{array}{rccc} \varphi_i : & U_i & \to & \mathbb{C}^m \\ & [z_0, \ldots ,z_m] & \mapsto & (\frac{z_0}{z_i}, \ldots , \widehat{1}, \ldots , \frac{z_m}{z_i}) \end{array}$$

et alors on a que les changements de carte

$$\begin{array}{rccc} \varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : & \mathbb{C}^m & \to & \mathbb{C}^m \\ & (z_1, \ldots ,z_m) & \mapsto & (\frac{z_1}{z_m}, \ldots , \frac{\widehat{z_j}}{z_j}, \ldots , \frac{1}{z_j}, \ldots , \frac{z_m}{z_j}) \end{array}$$

sont holomorphes. On remarque qu'on peut aussi voir $\mathbb{C}P^m = {S^{2m+1}}/_{S^1}$. où l'action de S^1 est $(e^{it},z) \mapsto e^{it} \cdot z$, où $|z| = 1$. Nous reviendrons plus précisément sur la notion d'action de groupe sur une variété dans la section (3.1).

Pour $U \subseteq M$ un ouvert d'une variété complexe de dimension $2n$, on note l'ensemble des fonctions lisses sur U par $\mathcal{C}^\infty(U) = \{f : U \xrightarrow{\mathcal{C}^\infty} \mathbb{C}\}$. Soient $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$ des coordonnées locales sur U, correspondant aux coordonnées usuelles sur $\mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$. Alors TU est $\mathbb{R}$-engendré par $\{\frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial y_j}\}_{1\leq j\leq n}$ et les éléments duaux correspondants $\{dx_j, dy_j\}_{1\leq j\leq n}$ forment une $\mathbb{R}$-base de T^*U. On peut choisir d'autres coordonnées locales, en posant que $z_j := x_j + iy_j$. En étendant la différentielle par $\mathbb{C}$-linéarité,

$$dz_j = dx_j + idy_j \qquad \text{et} \qquad d\overline{z}_j = dx_j - idy_j$$

sont des 1-formes dont les éléments duaux sont donnés par

$$\frac{\partial}{\partial z_i} := \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial}{\partial x_i} - i\frac{\partial}{\partial y_i}\Big) \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial}{\partial \overline{z}_i} := \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial}{\partial x_i} + i\frac{\partial}{\partial y_i}\Big) \ .$$

Ce choix de changement de coordonnées est cohérent vu qu'en développant les expressions, on obtient que

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial z_j} dz_j + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}_j} d\overline{z}_j = df = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j + \frac{\partial f}{\partial y_j} dy_j \ .$$

2.2.1 Champs holomorphes

Définition 2.2.1.1. Un champ de vecteurs $X \in \mathfrak{X}(M)$ sur une variété presque-complexe (M,J) est dit holomorphe si $L_X J = 0$, où la dérivée de Lie agit sur la structure presque-complexe par

$$L_X J = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (\phi_{-t}^X)_* \circ J \circ (\phi_t^X)_* \ .$$

Lemme 2.2.1.2. *Soient $X,Y \in \mathfrak{X}(M)$.*

$$L_X(J(Y)) = (L_X J)(Y) + J(L_X Y) \ .$$

Corollaire 2.2.1.3. *X est un champ holomorphe si et seulement si on a pour tout champ $Y \in \mathfrak{X}(M)$ que $[X,J(Y)] = J[X,Y]$.*

Définition 2.2.1.4. Soit $A \in End(TM)$. Le tenseur de Nijenhuis est défini par

$$N_A(X,Y) := -A^2[X,Y] + A\big([AX,Y] + [X,AY]\big) - [AX,AY] \ .$$

Vérifions que N_A est un tenseur. Soient $f,g \in \mathcal{C}^\infty(M)$, on a que

$$\begin{aligned} N_A(fX,gY) &= -A^2[fX,gY] + A[A(fX),gY] + A[fX,A(gY)] - [A(fX),A(gY)] \\ &= -fgA^2[X,Y] - f(Xg)A^2Y + g(Yf)A^2X + fgA[AX,Y] + f(AXg)AY \\ &\qquad - g(Yf)A^2X + fgA[X,AY] + f(Xg)A^2Y - g(AYf)AX - fg[AX,AY] \\ &\qquad\qquad - f(AXg)AY + g(AYf)AX \\ &= fgN_A(X,Y) \ . \end{aligned}$$

Ainsi N_A est un tenseur, et vu qu'il prend comme valeur deux champs de vecteurs et en retourne un, c'est un (1,2)-tenseur.

Définition 2.2.1.5. Soit (M,J) une variété presque complexe. Alors J est dite intégrable si

$$N_J(X,Y) = 0, \forall X,Y \in \mathfrak{X}(M) \ .$$

Théorème 2.2.1.6 (Newlander-Nirenberg). *Une variété presque complexe (M,J) est une variété complexe si et seulement si J est intégrable.*

Lemme 2.2.1.7. *Soit (M,J) une variété complexe. Si X est un champ holomorphe, alors $J(X)$ l'est aussi.*

Démonstration.

$$\begin{aligned} (L_{JX}J)(Y) &= (L_{JX}JY) - JL_{JX}Y \qquad (2.2.1.2) \\ &= [JX,JY] - J[JX,Y] = -N_J(X,Y) + [X,Y] + J[X,JY] \\ &= [X,Y] + J[X,JY] \qquad (2.2.1.6) \\ &= [X,Y] + J^2[X,Y] \qquad (2.2.1.3) \\ &= 0 \ . \end{aligned}$$

□

2.3 Géométrie riemanienne

Nous survolons brièvement les notions de géométrie riemannienne dont nous aurons besoin, en particulier pour la fin de la preuve du théorème central du mémoire (4.2.3.6). Pour plus de détails, voir le livre (Gallot *et al.*, 1990).

2.3.1 Variétés riemanniennes

Définition 2.3.1.1. Une variété riemannienne (M,g) est M une variété lisse munie d'un produit euclidien g_p sur chaque espace tangent T_pM tel que g soit lisse sur M. C'est-à-dire que l'on demande que $g \in \Gamma((T^*M)^{\otimes 2}))$ soit une section lisse. Soient $\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)$ les champs de vecteurs coordonnées dans une carte locale autour de $p \in M$. Soient $u,v \in T_pM$, avec $u = \sum_{i=1}^n u_i\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)|_p$ et $v = \sum_{i=1}^n v_i\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)|_p$. Alors si on pose

$$g_{ij}(p) := g\Big(\big(\frac{\partial}{\partial x_i}\big)|_p, \big(\frac{\partial}{\partial x_j}\big)|_p\Big) ,$$

on a que

$$g_p(u,v) = \sum_{i,j} g_{ij}(p)u_iv_j .$$

Théorème 2.3.1.2. *Il existe toujours au moins une métrique riemannienne sur une variété lisse.*

Démonstration. On commence par construire des métriques riemanniennes sur les domaines des cartes locales de M, puis on utilise une partition de l'unité pour rendre la construction globale. Soit $\{(U_k,f_k)\}_{k\in K}$ un atlas tel que $\{U_k\}$ est un recouvrement localement fini de M, et $\{\alpha_j\}_{j\in J}$ une partition de l'unité qui lui est subordonnée. Notons $n = \dim(M)$ et q un produit scalaire de $\mathbb{R}^n$. Soit $k \in K$. On définit alors $q_k := f_k^*(q)$. On a que q_k est une métrique riemannienne sur U_k. En effet, q_k est définie positive vu que $(f_k)_*$ est un isomorphisme et que q est euclidien. De plus, q_k est lisse car q est lisse et que f_k est un difféomorphisme. Maintenant, raffinons notre construction de partition de l'unité pour que $\{\alpha_k\}_{k\in K}$ soit une partition de l'unité subordonnée à $\{U_k\}$ (avec les mêmes indices). Ceci peut être fait puisque $\{U_k\}$ est localement fini et M est paracompacte. Alors on peut poser

$$g := \sum_{k\in K} \alpha_k q_k \ .$$

Nous allons vérifier que g est une métrique riemannienne sur M. D'abord, il est clair que g est lisse. Ensuite, pour $p \in M$, il existe au moins un $j \in K$ tel que $\alpha_j(p) > 0$. Aussi, pour $u_p \in T_pM \backslash \{0\}$, on a pour tout $k \in K$ que $q_k(u_p,u_p) > 0$ étant donné que q_k est définie positive. Alors

$$g(u_p,u_p) = \sum_{k\in K} \alpha_k(p) q_k(u_p,u_p) \geq \alpha_j(p) q_j(u_p,u_p) > 0$$

tel que voulu. $\square$

Définition 2.3.1.3. Soient (M,g) et (N,h) deux variétés riemanniennes. On dit qu'un difféomorphisme $\varphi : M \to N$ est une isométrie riemannienne si $\varphi^* h = g$. Si $(N,h) = (M,g)$, on note $Isom(M,g) = \{\phi \in Diff(M) \mid \phi^* g = g\}$ le groupe d'isométries de (M,g).

Définition 2.3.1.4. On dit qu'un champ de vecteurs K est de Killing si son flot $\phi_t^K \in Isom(M,g)$. De manière équivalente, K est de Killing si et seulement si $L_K g = 0$.

Définition 2.3.1.5. Soient (M,g) et (N,h) deux variétés riemanniennes. Une immersion riemannienne est une immersion lisse $\varphi : M \to N$ telle que $\varphi^* h = g$.

Exemple 2.3.1.6. Soit $S^n(r) = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = r\}$. L'inclusion $i : S^n(r) \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ est une immersion. La métrique canonique sur $S^n(r)$ est donnée par $g^{S^n(r)} := i^* g^{euc}$.

Définition 2.3.1.7. Soient (M,g) et (N,h) deux variétés riemanniennes. Une submersion lisse $\varphi : (M,g) \to (N,h)$ est une submersion riemannienne si φ est surjective et $\forall p \in M$, on a que

$$(\varphi_*)_p : ((Ker(\varphi_*)_p)^{\perp}, g) \to (T_{\varphi(p)}N,h)$$

est une isométrie d'espaces euclidiens.

Exemple 2.3.1.8. Les projections orthogonales $p : (\mathbb{R}^n,g^{euc}) \to (\mathbb{R}^k,g^{euc})$ avec $n > k$ sont des submersions riemanniennes. En effet, on a $p_* \equiv Id$ sur $(Ker(p_*))^{\perp}$. Alors on a que

$$g^{euc}(p_*(v),p_*(w)) = g^{euc}(v,w)$$

et cela $\forall v,w \in (Ker(p_*))^{\perp}$.

Définition 2.3.1.9. Pour $p \in M$, l'isomorphisme $g_p : T_pM \to T_p^*M, v \mapsto g_p(v,\cdot)$ induit un isomorphisme entre $\Gamma(TM)$ et $\Gamma(T^*M)$. Pour $X \in \Gamma(TM)$, on définit $X^\flat := g(X,\cdot) \in \Gamma(T^*M)$, et $\sharp$ l'isomorphisme inverse (i.e. $(X^\flat)^\sharp = X$). On les appelle les isomorphismes musicaux.

2.3.2 Connexions

Définition 2.3.2.1. Une connexion ∇ sur TM est une application $\mathbb{R}$-bilinéaire

$$\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$$

telle que $\forall f \in \mathcal{C}^\infty(M)$, on a que

$i)\nabla_X(fY) = df(X)Y + f\nabla_X Y$ [Leibniz]

$ii)$ $\nabla_{fX}Y = f\nabla_X Y$ [$\mathcal{C}^\infty(M)$-linéarité sur le premier facteur]

Exemple 2.3.2.2. Sur une variété lisse avec un fibré tangent trivial ($TM = \mathbb{R}^k \times M$), on peut définir la connexion plate

$$\nabla^o_X(Y) := (dY_1(X), \ldots, dY_k(X)) .$$

Remarque 2.3.2.3. Une connexion ∇ sur TM induit une connexion sur T^*M, définie par

$$(\nabla^*_X \alpha)(Y) := d(\alpha(Y))(X) - \alpha(\nabla_X Y) \ ,$$

où $\alpha \in \Gamma(T^*M), X,Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Définition 2.3.2.4. La torsion de ∇ est le tenseur de type (1,2) défini par

$$\begin{aligned} T^\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) &\to \mathfrak{X}(M) \\ (X,Y) &\mapsto \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y] \ . \end{aligned}$$

Définition 2.3.2.5. Une connexion ∇ sur TM est dite symétrique si $T^\nabla \equiv 0$. Elle est dite g-métrique si $\nabla g = 0$, où

$$(\nabla g)(X,Y,Z) := L_X(g(Y,Z)) - g(\nabla_X Y,Z) - g(Y,\nabla_X Z) \ .$$

Théorème 2.3.2.6 (Lévi-Civita). *Pour (M,g) une variété riemannienne, il existe une unique connexion ∇^g sur TM, telle que*

$$i) \ T^{\nabla^g} = 0 \ ,$$

$$ii) \ \nabla^g g = 0 \ .$$

Proposition 2.3.2.7. *Un champ de vecteurs K est de Killing si et seulement si il satisfait l'équation*

$$(\nabla_X K^\flat)(Y) = dK^\flat(X,Y) \ ,$$

où $X,Y \in \Gamma(TM)$, et ∇ la connection de Lévi-Civita.

Démonstration. Soit ∇ la connexion de Lévi-Civita pour la métrique g. Notons $\alpha := K^\flat = g(K,\cdot) \in \Omega^1(M)$. Nous remarquons d'abord que

$$\begin{aligned} (\nabla_X \alpha)(Y) &= d(\alpha(Y))(X) - \alpha(\nabla_X Y) = L_X(g(K,Y)) - g(K,\nabla_X Y) \\ &= g(\nabla_X K,Y) \ . \qquad [\ \nabla g = 0\ ] \end{aligned}$$

Étant donné que K est de Killing si et seulement si $L_K g = 0$, nous obtenons que K est de Killing si et seulement si

$$\begin{aligned}
0 = (L_K g)(X,Y) &= L_K(g(X,Y)) - g(L_K X, Y) - g(X, L_K Y) && (2.1.1.1)\\
&= L_K(g(X,Y)) - g(\nabla_K X - \nabla_X K, Y) - g(X, \nabla_K Y - \nabla_Y K) && [\ \nabla \text{ est symétrique }]\\
&= \nabla g(K,X,Y) + g(\nabla_X K, Y) + g(X, \nabla_Y K) = g(\nabla_X K, Y) + g(X, \nabla_Y K)\\
&= (\nabla_X \alpha)(Y) + (\nabla_Y \alpha)(X)\ ,
\end{aligned}$$

donc que $(\nabla_X \alpha)(Y) = -(\nabla_Y \alpha)(X)$. Par le corollaire (2.1.1.7), nous avons de plus que

$$\begin{aligned}
(\nabla_X \alpha)(Y) - (\nabla_Y \alpha)(X) &= L_X(\alpha(Y)) - \alpha(\nabla_X Y) - L_Y(\alpha(X)) + \alpha(\nabla_Y X)\\
&= L_X(\alpha(Y)) - L_Y(\alpha(X)) - \alpha([X,Y])\\
&= 2d\alpha(X,Y)\ .
\end{aligned}$$

Finalement, ceci implique que

$$2d\alpha(X,Y) = (\nabla_X \alpha)(Y) - (\nabla_Y \alpha)(X) = 2(\nabla_X \alpha)(Y)\ ,$$

d'où le résultat.

□

2.4 Géométrie symplectique

2.4.1 Variétés symplectiques

Définition 2.4.1.1. Une variété pré-symplectique est une paire (M,ω), où M est une variété lisse et $\omega \in \Omega^2(M)$ est une 2-forme non-dégénérée. Rappelons qu'une 2-forme w est non-dégénérée si $\forall p \in M$, on a que $w_p : T_pM \to T_p^*M$ est un isomorphisme, i.e.

$$\forall \xi \in T_pM \backslash \{0\}, \exists \eta \in T_pM \text{ t.q. } w(\xi,\eta) \neq 0 \ .$$

Lemme 2.4.1.2. *Une variété M est pré-symplectique si et seulement si elle admet une structure presque complexe.*

Démonstration.
$(\Longleftarrow)$
Soit J une structure presque-complexe sur M. Par le théorème (2.3.1.2), il existe une métrique riemannienne g sur M. Soit

$$g_0(\xi,\eta) := \frac{g(\xi,\eta) + g(J(\xi),J(\eta))}{2}$$

une nouvelle métrique riemannienne qui est J-invariante par construction. Définissons maintenant

$$\omega_0(\cdot,\cdot) := g_0(J(\cdot),\cdot) \ .$$

Il est clair que ω_0 est lisse, vu que g_0 et J le sont. Comme g_0 est bilinéaire et que J est linéaire, ω_0 est bilinéaire. Voyons que ω_0 est alternée :

$$\omega_0(\xi,\eta) = g_0(J(\xi),\eta) = g_0(\eta, J(\xi)) = g_0(J(\eta), J \circ J(\xi)) = -g_0(J(\eta), \xi) = -\omega_0(\eta,\xi) \ .$$

Alors $\omega_0 \in \Omega^2(M)$. Vérifions que ω_0 est non-dégénérée. Soit $p \in M$ et $\xi_p \in T_pM\backslash\{0\}$. Par le lemme (1.1.1.9), $J(\xi_p) \neq 0 \in T_pM$. Comme g_0 est non-dégénérée,

$\exists \eta_p \in T_pM$ tel que $g_0(J(\xi_p),\eta_p) \neq 0$. Alors ω_0 est non-dégénérée et (M,ω_0) est présymplectique.

$(\Longrightarrow)$

Soit ω une forme présymplectique, et g une métrique riemannienne sur M. La non-dégénérescence de ω et de g permet de voir celles-ci comme des isomorphismes en chaque fibre entre les fibrés tangent et cotangent :

$$g,\omega : TM \to T^*M \ .$$

Définissons $L := g^{-1} \circ w \in End(TM)$. En chaque point $p \in M$, $L_p \in Gl_n(T_pM)$. Par le théorème de décomposition polaire, on peut décomposer L de façon unique comme $L = OS = SO$, où O est orthogonale par rapport à g et S est symétrique. Plus explicitement, $S = \sqrt{LL^T}$. Il faut voir que S est lisse malgré la racine. D'abord, LL^T est symétrique, donc diagonalisable. Soit λ une valeur propre de LL^T et v un vecteur propre lui étant associé. Alors

$$|L^Tv|^2 = (L^Tv,L^Tv) = (LL^Tv,v) = (\lambda v,v) = \lambda|v|^2 \ .$$

En outre, les valeurs propres de LL^T sont toutes strictement positives. Nous aurons besoin du lemme suivant pour s'assurer que S est bien lisse.

Lemme 2.4.1.3. *L'application $f : X \to X^2$ est un difféomorphisme global de l'espace des opérateurs auto-adjoints définis positifs.*

Démonstration. Par ce qui précède, f est surjective, et il est clair que f est lisse. Voyons que f est injective. Supposons que $X^2 = Y^2$. Soit v un vecteur propre de X (de valeur propre $\lambda > 0$ vu que X est définie positive). Posons $w := Y(\frac{v}{\lambda})$. Alors

$$Y(w) = \frac{Y^2(v)}{\lambda} = \frac{X^2(v)}{\lambda} = \lambda v \ .$$

Nous voyons qu'ainsi $Y(v-w) = Y(v) - Y(w) = \lambda w - \lambda v = -\lambda(v-w)$. Comme Y est définie positive, il faut que $v = w$. Donc v est vecteur propre de Y de valeur

propre λ, et dans une base diagonalisant X, on voit que $X = Y$.
Remarquons que $df_X(A) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(X + tA)^2 = XA + AX$. Montrons que df_X est injective. Supposons que $XA + AX = 0$. Soit v un vecteur propre de X avec valeur propre correspondante $\lambda > 0$. Alors $X(A(v)) = -\lambda A(v)$. Puisque X est définie positive, $A(v) = 0$. On répète ce procédé sur une base diagonalisant X et on obtient que $A = 0$. Par le théorème du rang, on a directement que df_X est surjective. Alors la différentelle df est un isomorphisme en chaque point. On peut donc inverser f localement (théorème d'inversion locale) de façon lisse. Toutefois, comme f est bijective, il faut que ce soit un difféomorphisme global. □

Étant donné que S^2 est symétrique et définie positive, $f^{-1}(S^2) = S$ est lisse. On a alors que $O = S^{-1}L$ est lisse. De plus, puisque $\omega = g \circ L$ est alternée, alors $g(L\xi,\eta) + g(\xi,L\eta) = 0$, c'est-à-dire que L est anti-auto-adjoint. En conséquence, on obtient

$$g(S^2\xi, \eta) = g(S\xi,S\eta) = g(OS\xi,OS\eta) = g(L\xi,L\eta) = -g(L^2\xi,\eta) \ .$$

Par non-dégénérescence de g, $S^2 = -L^2$. Alors

$$L^2 = O^2S^2 = -O^2L^2 \ .$$

Comme L est inversible, L^2 l'est aussi, et on a finalement que

$$-O^2 = Id \ ,$$

donc O est une structure presque complexe sur M, comme voulu. □

Définition 2.4.1.4. Une variété symplectique est une variété pré-symplectique (M,ω), où on a de plus que ω est fermée ($d\omega = 0$).

Exemple 2.4.1.5. Soit $\mathbb{R}^{2n}$ muni des coordonnées usuelles $(p_1,\dots,p_n,q_1,\dots,q_n)$, et doté de la forme symplectique $\omega_0 := \sum_{i=1}^n dp_i \wedge dq_i$, qu'on appelle la forme symplectique standard sur $\mathbb{R}^{2n}$. On remarque que $\omega_1 := \sum_{i=1}^n p_i dq_i \in \Omega^1(M)$ est telle que $d\omega_1 = \omega_0$. Ainsi ω_0 est bien fermée, vu qu'elle est exacte.

Exemple 2.4.1.6. On considère $\mathbb{C}^n$ variété lisse munie des coordonnées linéaires $z_1,\dots,z_n$. La 2-forme $\omega := \frac{i}{2}\sum_{k=1}^n dz_k \wedge d\bar{z}_k$ est symplectique. Identifions $\mathbb{C}^n$ à $\mathbb{R}^{2n}$:

$$z_k = x_k + iy_k \mapsto (x_k, y_k) \ .$$

Alors

$$\begin{aligned}
\omega &= \frac{i}{2}\sum d(x_k + iy_k) \wedge d(x_k - iy_k) \\
&= \frac{i}{2}\sum (dx_k + idy_k) \wedge (dx_k - idy_k) \qquad \text{[car holomorphe = } i\text{-linéarité]} \\
&= \frac{i}{2}\sum -2i\big(dx_k \wedge dy_k\big) \\
&= \sum dx_k \wedge dy_k \ .
\end{aligned}$$

Ainsi, cette forme symplectique est la forme symplectique standard, sous l'identification $\mathbb{R}^{2n} \cong \mathbb{C}^n$.

Corollaire 2.4.1.7. *Une variété symplectique est de dimension paire et orientable.*

Démonstration. Par le lemme (2.4.1.2), une variété symplectique admet une structure presque complexe. Le résultat découle directement de la proposition (2.2.0.2). □

Définition 2.4.1.8. Soient (M_1,ω_1) et (M_2,ω_2) deux variétés symplectiques. Lorsqu'une application $f : M_1 \to M_2$ préserve la structure symplectique (i.e. $f^*\omega_2 = \omega_1$), on dit que f est un morphisme symplectique. Si de plus f est un difféomorphisme global, f est un symplectomorphisme. On note l'ensemble des symplectomorphismes de (M,ω) dans (M,ω) par $Symp(M,\omega)$.

Définition 2.4.1.9. Soit (M,ω) une variété symplectique. Une carte de Darboux est une carte (U,φ) avec fonctions coordonnées $(p_1,\ldots,p_n,q_1,\ldots,q_n)$ telle que

$$\omega|_U = \omega_0 = \sum_{i=1}^{n} dp_i \wedge dq_i \ .$$

Théorème 2.4.1.10 (Théorème de Darboux). *Soit (M,ω) une variété symplectique $2n$-dimensionnelle. Alors, $\forall p \in M$, il existe une carte de Darboux centrée en p. En d'autres termes, (M,ω) est localement symplectomorphe à $(\mathbb{R}^{2n},\omega_0)$.*

Exemple 2.4.1.11. $S^2 = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid \|v\| = 1\}$ est une variété lisse. On peut identifier les vecteurs tangents en $p \in S^2$ aux vecteurs de $\mathbb{R}^3$ orthogonaux à p. Ainsi, $T_pS^2 \cong \{p\}^\perp$. À l'aide de cette identification, on définit une forme symplectique sur S^2 :

$$\omega_p(u,v) := < p, u \times v > \ .$$

Comme $\omega \in \Omega^2(S^2)$, ω est nécessairement fermée, vu que c'est une forme volume (i.e. $\Omega^3(S^2) = 0$). De plus, c'est une forme différentielle non-dégénérée, étant donné que pour $u \neq 0$, il suffit de prendre $v = u \times p$ pour voir que

$$\begin{aligned}
\omega_p(u,v) &= < p, u \times (u \times p) > \\
&= < p, < u,p > u - < u,u > p > && [\text{ égalités du double produit vectoriel}] \\
&= < p, - < u,u > p > = -\|u\|^2 < p,p > && [\text{car } < u,p > = 0] \\
&= -\|u\|^2 \neq 0 \ . && [\text{car } < p,p > = \|p\|^2 = 1]
\end{aligned}$$

Donc ω est bien une forme symplectique sur S^2. On prend les coordonnées cylindriques locales $\theta \in [0,2\pi)$ et $h \in (-1,1)$ sur S^2 sans ses pôles (qu'on note n et s). Sur l'ouvert $S^2\backslash\{n,s\}$, on a que $\omega|_{S^2\backslash\{n,s\}} = d\theta \wedge dh$, c'est-à-dire qu'on a trouvé explicitement une carte de Darboux. En effet, soit $p \in S^2\backslash\{n,s\}$ et $\xi_p, \eta_p \in T_pS^2$. SO(3), l'ensemble des isométries de $\mathbb{R}^3$ qui préservent l'orientation (c-à-d les rotations), agit sur le triplet $\{p,\xi_p,\eta_p\}$ sans modifier le volume du parallélipipède engendré. Alors après une rotation, on peut placer p en $(1,0,0) \in \mathbb{R}^3$. Ainsi, ξ_p et η_p

sont dans le plan yz. Alors on a

$$\omega(\xi_p,\eta_p) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \xi_p^2 & \xi_p^3 \\ 0 & \eta_p^2 & \eta_p^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \xi_p^2 & \xi_p^3 \\ \eta_p^2 & \eta_p^3 \end{vmatrix} .$$

Avec nos coordonnées locales, T_pS^2 a pour base $\{\frac{\partial}{\partial\theta}|_p, \frac{\partial}{\partial h}|_p\}$, et en identifiant T_pS^2 au plan $yz = \{p\}^\perp$, on a que

$$\xi_p^2 \leftrightarrow d\theta(\xi_p); \quad \xi_p^3 \leftrightarrow dh(\xi_p); \quad \eta_p^2 \leftrightarrow d\theta(\eta_p); \quad \eta_p^3 \leftrightarrow dh(\eta_p) .$$

Alors

$$\omega(\xi_p,\eta_p) =< p, \xi_p \times \eta_p >= d\theta \wedge dh(\xi_p, \eta_p) .$$

On dit que $\omega \in \Omega^2(S^2)$ telle que définie est la forme symplectique naturelle de S^2.

2.4.2 Champs hamiltoniens

Soit (M,ω) une variété symplectique.

Proposition 2.4.2.1. *Soit $X \in \mathfrak{X}(M)$, et $\phi_t^X : M \to M$ son flot. Les énoncés suivants sont équivalents :*

(1) $(\phi_t^X)^*\omega = \omega$, *pour tout t où le flot est défini* ,

(2) $L_X\omega = 0$,

(3) $d(\iota_X\omega) = 0$.

Démonstration.

$(1) \Longrightarrow (2)$ On a

$$L_X\omega = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (\phi_t^X)^*\omega = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \omega = 0 .$$

$(2) \Longleftrightarrow (3)$

Par le théorème (2.1.1.5) (a), on a que $L_X\omega = \iota_X(d\omega) + d(\iota_X\omega)$. Mais comme ω

est fermée, $L_X\omega = d(\iota_X\omega)$.

(2) $\Longrightarrow$ (1) D'abord,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\Big|_{t=s}\phi_t^*\omega = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\phi_{t+s}^*\omega = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\phi_s^*\circ\phi_t^*\omega \\ = \phi_s^*\circ\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\phi_t^*\omega = \phi_s^*\circ L_X\omega = 0\ .\end{aligned}$$

De plus, comme $\phi_0^*\omega = \omega$, alors le calcul précédent implique que $\phi_t^*\omega = \omega, \forall t$ où le flot est défini. □

Définition 2.4.2.2. Soit $X \in \mathfrak{X}(M)$. On dit que X est symplectique si X satisfait une des trois conditions de la proposition (2.4.2.1).

Remarque 2.4.2.3. La non-dégénérescence d'une 2-forme $\omega \in \Omega^2(M)$ nous livre une bijection entre les 1-formes et les champs de vecteurs :

$$\begin{aligned}\omega : \mathfrak{X}(M) &\to \Omega^1(M)\\ X &\mapsto \iota_X\omega\end{aligned}$$

vu que $\omega_p : T_pM \to T_p^*M$ est un isomorphisme en chaque point $p \in M$.

Définition 2.4.2.4. On dit qu'un champ $X \in \mathfrak{X}(M)$ est hamiltonien s'il existe une fonction $H \in \mathcal{C}^\infty(M)$ telle que

$$X = -\omega^{-1}(dH)\ .$$

On appelle H une fonction hamiltonienne de X. Parfois on note X_H un champ hamiltonien de fonction hamiltonienne H. Une fonction hamiltonienne n'est pas unique. En effet, si on prend $c \in \mathbb{R}$ une constante, $H + c$ est aussi fonction hamiltonienne de X_H. On remarque que tout champ hamiltonien X_H est symplectique. En effet, $d(\iota_{X_H}\omega) = d(-dH) = -d^2H = 0$. Toutefois le contraire n'est pas toujours vrai, comme dans l'exemple (2.4.2.6). Une autre propriété des champs hamiltoniens est la linéarité par rapport aux fonctions hamiltoniennes associées. C'est-à-dire que l'égalité suivante est vérifiée :

$$aX_f + bX_g = X_{af+bg}$$

et ce, $\forall f,g \in \mathcal{C}^\infty(M)$ et $\forall a,b \in \mathbb{R}$. En effet, on a que

$$\iota_{X_{af+bg}}\omega = -d(af+bg) = -adf - bdg = a\iota_{X_f}\omega + b\iota_{X_g}\omega = \iota_{aX_f+bX_g}\omega \ .$$

L'égalité découle de la non-dégénérescence de ω.

Remarque 2.4.2.5. Par dualité symplectique, $H^1_{dR}(M)$ mesure l'obstruction des champs symplectiques à être hamiltoniens. Par exemple, l'égalité $H^1_{dR}(\mathbb{R}^n) = 0$ implique que sur une variété M, tous les champs symplectiques sont localement hamiltoniens (dans des cartes). Si $H^1_{dR}(M) = 0$, alors tous les champs symplectiques sont globalement hamiltoniens.

Exemple 2.4.2.6. Soit $\mathbb{T}^2 \cong S^1 \times S^1$ le 2-tore. les difféomorphismes

$$\begin{array}{rcl} \theta_1, \theta_2 : S^1 \backslash \{0\} & \to & (0,2\pi) \\ e^{it} & \mapsto & t \end{array}$$

sont des systèmes de coordonnées locales sur chaque cercle S^1 respectivement, et ils induisent des coordonnées locales sur le tore. On dote $\mathbb{T}^2$ d'une structure symplectique par la forme symplectique ω qui, localement, s'exprime comme $\omega|_U = d\theta_1 \wedge d\theta_2$ dans une carte de Darboux U. Les champs $X_1 = \frac{\partial}{\partial\theta_1}$ et $X_2 = \frac{\partial}{\partial\theta_2}$ sont symplectiques sans être hamiltoniens, ce qui implique que $H^1_{dR}(\mathbb{T}^2) \neq 0$.

2.4.3 Crochet de Poisson

Définition 2.4.3.1. Soient $f,g \in \mathcal{C}^\infty(M)$. Leur crochet de Poisson est une fonction lisse à valeurs réelles, notée $\{f,g\}$, définie par :

$$\{f,g\} := dg(X_f) \ ,$$

où $X_f = -\omega^{-1}(df) \in \mathfrak{X}(M)$. On a ainsi les équivalences suivantes :

$$\{f,g\} = -\iota_{X_g}\omega(X_f) = -\omega(X_g,X_f) = \omega(X_f,X_g) = -df(X_g) \ .$$

On dit que deux fonctions hamiltoniennes f et g Poisson-commutent si $\{f,g\} = 0$.

Théorème 2.4.3.2. *Soient $f,g \in C^\infty(M)$. Le crochet de Poisson est lié au crochet de Lie de la manière suivante :*

$$X_{\{f,g\}} = [X_f,X_g] \ .$$

Démonstration. Soient $X,Y \in \mathfrak{X}(M)$ deux champs symplectiques. Par le théorème (2.1.1.5) (b), on a que

$$L_X(\iota_Y\omega) = \iota_{[X,Y]}\omega + \iota_Y L_X\omega \ .$$

Comme X et Y sont symplectiques, $L_X\omega = 0$ et $d(\iota_Y\omega) = 0$. Par le théorème (2.1.1.5) (a), on a que

$$\iota_{[X,Y]}\omega = L_X(\iota_Y\omega) = d(\iota_X\iota_Y\omega) + \iota_X d(\iota_Y\omega) = d(\iota_X\iota_Y\omega) = d(\omega(Y,X)) = -d(\omega(X,Y)) \ .$$

Alors $\omega(X,Y)$ est fonction hamiltonienne du champ $[X,Y]$, i.e. $[X,Y] = X_{\omega(X,Y)}$. Ainsi on a bien que

$$[X_f,X_g] = X_{\omega(X_f,X_g)} = X_{\{f,g\}} \ .$$

□

Proposition 2.4.3.3 (propriétés du crochet de Poisson).

I) $\{f,g\} = -\{g,f\}$ [*antisymétrie*]

II) $\{f+g,h\} = \{f,h\} + \{g,h\}$ [*distributivité*]

III) $\{fg,h\} = \{f,h\}g + f\{g,h\}$ [*Leibniz*]

IV) $\{f,\{g,h\}\} + \{g,\{h,f\}\} + \{h,\{f,g\}\} = 0$ [*Identité de Jacobi*]

Démonstration. I) découle directement de la définition, vu que

$$\{f,g\} = \omega(X_f,X_g) = -\omega(X_g,X_f) = -\{g,f\} \ .$$

II) et III) découlent aussi directement de la définition du crochet de Poisson. L'identité de Jacobi découle du théorème (2.4.3.2). En effet, on remarque que

$$X_{\{f,\{g,h\}\}} = [X_f, [X_g,X_h]] \ .$$

Mais comme le crochet de Lie $[\cdot,\cdot]$ satisfait l'identité de Jacobi, on a que

$$0 = X_{\{f,\{g,h\}\}} + X_{\{g,\{h,f\}\}} + X_{\{h,\{f,g\}\}} = X_{\{f,\{g,h\}\}+\{g,\{h,f\}\}+\{h,\{f,g\}\}} \ .$$

Ainsi IV) découle de la non-dégénérescence de ω. □

2.5 Topologie algébrique

Nous énonçons ici brièvement les notions de topologie algébrique dont nous aurons besoin. Pour un exposé plus complet incluant les preuves, voir (Hatcher, 2002).

2.5.1 Groupe fondamental

Soit M une variété lisse et connexe. Un lacet basé en un point $p \in M$ est une application continue $l : [0,1] \to M$ telle que $l(0) = l(1) = p$. On dit que deux lacets f,g basés en p sont homotopes s'il existe une application continue $H : [0,1]^2 \to M$ telle que $H(t,0) = H(t,1) = p, \forall t \in [0,1]; H(0,s) = f(s)$ et $H(1,s) = g(s)$. La relation d'homotopie est une relation d'équivalence, et l'ensemble des classes d'équivalences forme un groupe pour la concaténation de lacets. Ce groupe, appelé le groupe fondamental de M, ne dépend pas du point de base p, et on le note $\pi_1(M)$.

Exemple 2.5.1.1. $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$.

Proposition 2.5.1.2. *Soient M,N deux variétés lisses. Alors $\pi_1(M \times N)$ est isomorphe à $\pi_1(M) \times \pi_1(N)$.*

Exemple 2.5.1.3. Par la proposition précédente, on a que

$$\pi_1(\mathbb{T}^n) = \mathbb{Z}^n \ .$$

Définition 2.5.1.4. M est dite simplement connexe si son groupe fondamental est trivial.

2.5.2 Revêtements

Définition 2.5.2.1. Un revêtement de M est une variété lisse $\tilde{M}$ munie d'une application lisse $p : \tilde{M} \to M$ satisfaisant la condition suivante : il existe un recouvrement ouvert $\{U_i\}_{i \in I}$ de M tel que pour chaque $i \in I$, $p^{-1}(U_i)$ est une union disjointe d'ouverts, dont chacun est difféomorphe à U_i par p. On dit que deux revêtements $p_j : \tilde{M}_j \to M, j = 1{,}2$, sont isomorphes s'il existe un difféomorphisme $f : \tilde{M}_1 \to \tilde{M}_2$ tel que $p_1 = p_2 \circ f$.

Lemme 2.5.2.2 (ordre partiel sur les revêtements)**.** *La relation $M_1 \leq M_2$ définie par M_2 revêt M_1, où M_1, M_2 sont deux revêtements de M, est un ordre partiel sur les revêtements de M.*

Proposition 2.5.2.3. *Un revêtement simplement connexe de M revêt nécessairement tous les autres revêtements de M.*

Théorème 2.5.2.4 (classification des revêtements)**.** *Les sous-groupes de $\pi_1(M)$ sont en bijection avec les revêtements de M, à isomorphisme près.*

Définition 2.5.2.5. Le théorème de classification (2.5.2.4) nous assure qu'un revêtement simplement connexe de M existe (c'est le revêtement associé au sous-groupe trivial de $\pi_1(M)$) et qu'il est unique à isomorphisme près. De plus, la proposition (2.5.2.3) nous assure que celui-ci revêt tous les autres revêtements de M. Nous l'appelons le revêtement universel de M.

Définition 2.5.2.6. Le groupe de transformations du revêtement $(\tilde{M},p)$ de M est le groupe des difféomorphismes $\gamma : \tilde{M} \to \tilde{M}$ qui satisfont

$$p = p \circ \gamma \ .$$

On le note $G(\tilde{M})$.

Proposition 2.5.2.7. *Si $\tilde{M}$ est le revêtement universel de M, alors*

$$G(\tilde{M}) \cong \pi_1(M) \ .$$

Proposition 2.5.2.8. *Si le sous-groupe associé au revêtement $\tilde{M}$ par le théorème* (2.5.2.4) *est un sous-groupe normal de $\pi_1(M)$, alors*

$$\tilde{M}/_{G(\tilde{M})} \cong M \ .$$

Proposition 2.5.2.9. *Tout revêtement M_1 de M est de la forme $\tilde{M}/_{\pi_1(M_1)}$, où $\tilde{M}$ est le revêtement universel de M.*

Nous aurons besoin de la proposition suivante, qui est un corollaire de trois importants résultats de topologie algébrique : le théorème de deRham, le théorème des coefficients universels et le théorème de Hurewicz. Nous les mentionnons sans détails dans la preuve, tout en référant à (Hatcher, 2002) pour les détails de ces théorèmes.

Proposition 2.5.2.10. *Si M est simplement connexe, alors $H^1_{dR}(M) = 0$.*

Démonstration. Le théorème de deRham nous dit que $H^p_{dR}(M) \cong H^p(M,\mathbb{R})$. De son côté, le théorème des coefficients universels pour la cohomologie nous donne que $H^p(M,\mathbb{K}) \cong Hom(H_p(M,\mathbb{Z}),\mathbb{K})$, pour $\mathbb{K}$ un corps. En combinant ces deux résultats, on a $\forall p \in \mathbb{N}$ que

$$H^p_{dR}(M) \cong H^p(M,\mathbb{R}) \cong Hom(H_p(M,\mathbb{Z}),\mathbb{R}) \ .$$

Maintenant le théorème de Hurewicz nous dit que

$$H_1(M,\mathbb{Z}) \cong {}^{\pi_1(M)}\diagup_{[\pi_1(M),\pi_1(M)]}$$

Comme par hypothèse $\pi_1(M) = 0$, ceci nous livre que $H_1(M,\mathbb{Z}) = 0$. Ainsi, lorsque $p = 1$, on a que

$$H^1_{dR}(M) \cong Hom(H_1(M,\mathbb{Z}),\mathbb{R}) = Hom(0,\mathbb{R}) = 0 \ ,$$

tel que voulu. $\square$

CHAPITRE III

ACTIONS TORIQUES

3.1 Actions

Nous référons au livre (Warner, 2013) pour la base de la théorie des groupes et algèbres de Lie, et citons les résultats dont nous aurons besoin.

3.1.1 Préliminaires sur les groupes de Lie

Un groupe de Lie G est une variété lisse munie d'une structure de groupe compatible. Ceci veut dire que $(g,h) \mapsto gh^{-1}$ est une application lisse, $\forall g,h \in G$. Soit e l'élément neutre du groupe. Pour $\sigma \in G$, on nomme translation à gauche le difféomorphisme $l_\sigma : G \to G; g \mapsto \sigma g$. On dit qu'un champ de vecteurs $X \in \mathfrak{X}(G)$ est invariant à gauche si $\forall \sigma \in G, dl_\sigma(X) = X \circ l_\sigma$. Cette relation nous permet de déduire que $X(\sigma) = X(\sigma e) = dl_\sigma(X_e)$, c'est-à-dire que X est complètement déterminé par $X(e)$. L'espace des champs invariants à gauche $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie (le crochet de Lie est celui de $\mathfrak{X}(G)$) isomorphe à T_eG par l'isomorphisme $X \mapsto X(e)$. T_eG hérite donc de la structure d'algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$. Nous dénoterons alors sans ambigüité $Lie(G) := \mathfrak{g} \cong T_eG$ l'algèbre de Lie de G. On dit qu'une algèbre de Lie est abélienne si son crochet de Lie est trivial.

Proposition 3.1.1.1. *Tout groupe de Lie abélien a une algèbre de Lie abélienne.*

Exemple 3.1.1.2. $(gl(n,\mathbb{R}), [\cdot,\cdot])$ est l'algèbre de Lie des matrices carrées inversibles $Gl(n,\mathbb{R})$, où le crochet de Lie est $[A,B] := AB - BA$.

Exemple 3.1.1.3. $S^1 \subset \mathbb{C}$ est un groupe de Lie abélien et son algèbre de Lie

$$Lie(S^1) = T_{(1,0)}S^1 = i\mathbb{R} \cong \mathbb{R}$$

est abélienne. De même, le groupe de Lie $\mathbb{T}^n = S^1 \times \cdots \times S^1$ a une algèbre de Lie abélienne. Son algèbre de Lie est

$$\mathfrak{t}^n = Lie(\mathbb{T}^n) = i\mathbb{R} \times \cdots \times i\mathbb{R} \cong \mathbb{R}^n .$$

Soit G un groupe de Lie et $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie. Chaque vecteur tangent $\xi_e \in \mathfrak{g}$ donne lieu à un unique champ de vecteurs ξ par la relation

$$\xi_g := dl_g(\xi_e) ,$$

où $l_g : G \to G; h \mapsto gh$ est la multiplication à gauche du groupe. Ce champ de vecteurs est complet, et alors l'application exponentielle est bien définie :

$$\begin{aligned} \exp : \mathfrak{g} &\to G \\ \xi &\mapsto \phi_1^{\xi}(e) \end{aligned}$$

où ϕ_t^{ξ} est le flot de ξ. exp est un difféomorphisme local entre un voisinage de $0 \in \mathfrak{g}$ et $e \in G$. On peut voir que le flot de $\xi \in \mathfrak{g}$ est en fait $\exp(t\xi)$, c'est-à-dire que

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \exp(t\xi) = \xi ,$$

que $\exp((t+s)\xi) = \exp(t\xi)\exp(s\xi)$ et que $\exp(t\xi)^{-1} = \exp(-t\xi)$.

Proposition 3.1.1.4. *Soit $\varphi : G \to H$ un morphisme de groupes de Lie (c'est-à-dire un morphisme de groupes qui est lisse). Alors le diagramme suivant commute :*

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{g} \arrow[r, "\varphi_*"] \arrow[d, "\exp"'] & \mathfrak{h} \arrow[d, "\exp"] \\ G \arrow[r, "\varphi"] & H \end{tikzcd}$$

Proposition 3.1.1.5. *Si G est un groupe de Lie compact, alors l'application exponentielle est surjective.*

Proposition 3.1.1.6. *Soient $\xi,\eta \in \mathfrak{g}$. On a que*

$$[\xi,\eta] = 0 \implies \exp(\xi + \eta) = \exp(\xi)\exp(\eta) \ .$$

Proposition 3.1.1.7. *Soit*

$$0 \to G \xrightarrow{B} H \xrightarrow{C} K \to 0$$

une suite exacte courte de groupes de Lie, avec H compact et K abélien. Alors cette suite induit une suite exacte courte sur les algèbres de Lie

$$0 \to \mathfrak{g} \xrightarrow{B_*} \mathfrak{h} \xrightarrow{C_*} \mathfrak{k} \to 0$$

Démonstration. Voyons d'abord que B_* est injective. Procédons par l'absurde, supposons que $Ker(B_*) \neq \{0\}$. Alors $Ker(B_*)$ est un sous-espace vectoriel non-trivial de $\mathfrak{g}$. On a que

$$\exp \circ B_*(Ker(B_*)) = \exp(0_H) = e_H \ .$$

Par la proposition (3.1.1.4), ceci est équivalent à ce que

$$B \circ \exp(Ker(B_*)) = e_H \ .$$

Donc $\exp(Ker(B_*)) \subseteq Ker(B)$. Sauf que exp est un difféomorphisme local d'un voisinage de 0 dans un voisinage de e_G, alors $Ker(B)$ contient un élément non-trivial. C'est une contradiction et donc il faut que B_* soit injective. Voyons maintenant que C_* est surjective. Soit $x \in \mathfrak{k}$. Comme C est surjective, il existe $h \in H$ tel que $C(h) = \exp(x)$. Comme H est compacte, on a par (3.1.1.5) que $\exp : \mathfrak{h} \to H$ est surjective. Alors il existe $y \in \mathfrak{h}$ t.q. $\exp(y) = h$. Par (3.1.1.4), on a que $\exp \circ C_*(y) = \exp(x)$. Par la proposition (3.1.1.1), l'algèbre de Lie $\mathfrak{k} = Lie(K)$ est abélienne, vu que le groupe de Lie K est abélien par hypothèse. La proposition (3.1.1.6) implique que

$$\exp(x - C_*(y)) = \exp(x)\exp(-C_*(y)) = \exp(x)\exp(C_*(y))^{-1} = e\ .$$

Comme exp est un difféomorphisme local autour de e, alors $x = C_*(y)$. Donc C_* est bien surjective.

Il reste à montrer que

$$Im(B_*) = Ker(C_*)$$

$(\subseteq)$

Comme $Ker(C) = Im(B)$, on a alors que $C \circ B \equiv e_K$. Par la règle de dérivation en chaîne, la différentielle satisfait

$$0 \equiv d(C \circ B) = C_* \circ B_*$$

Donc il faut que $Im(B_*) \subseteq Ker(C_*)$.

$(\supseteq)$

Soit $\xi \in Ker(C_*)$. On considère le chemin $\exp(t\xi)$ dans H qui représente $\xi \in \mathfrak{h}$. Par (3.1.1.4), on a que

$$C \circ \exp(t\xi) = \exp \circ C_*(t\xi) = \exp \circ tC_*(\xi) = \exp(0) = e_K\ .$$

Alors $\exp(t\xi) \in Ker(C) = Im(B), \forall t \in \mathbb{R}$. Soit alors g_t un chemin préimage dans G (i.e. $B(g_t) = \exp(t\xi)$). On remarque que $B(g_0) = \exp(0) = e_H$, et alors comme B est injective, $g_0 = e_G$. Donc le chemin g_t passe par e_G et alors ce chemin représente un élément dans $\mathfrak{g}$, qu'on note $[g_t]$. Alors la différentielle B_*, par définition, est telle que

$$B_*([g_t]) = [B \circ g_t] = [\exp(t\xi)] = \xi \ .$$

Donc $\xi \in Im(B_*)$, tel que voulu. $\square$

Définition 3.1.1.8. $U \subset \mathbb{R}^n$ est un sous-ensemble discret si $\forall x \in U, \exists \epsilon > 0$ t.q. $B(x,\epsilon) \cap U = \{x\}$.

Définition 3.1.1.9. Un réseau $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ est un sous-groupe discret de $\mathbb{R}^n$ (avec opération l'addition), et tel que le sous-espace vectoriel engendré par Λ soit $\mathbb{R}^n$.

Proposition 3.1.1.10. *Soit $\mathbb{T}$ un n-tore, et $\mathfrak{t}$ son algèbre de Lie. Alors $\mathbb{R}^n$ possède un réseau $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ tel que*

$$\exp : \mathfrak{t}/_{2\pi\Lambda} \xrightarrow{\cong} \mathbb{T}$$

soit un isomorphisme.

Démonstration. La surjectivité est claire, par la proposition (3.1.1.5), vu que $\mathbb{T}$ est un groupe de Lie compact. Pour l'injectivité, il suffit de voir que si $\exp(\xi_1) = \exp(\xi_2) \in \mathbb{T}$, alors

$$\begin{aligned} \exp(\xi_1 - \xi_2) &= \exp(\xi_1)\exp(-\xi_2) \qquad [\text{ par } (3.1.1.6)\ ] \\ &= \exp(\xi_2)\exp(-\xi_2) \\ &= \exp(0) = e\ . \end{aligned}$$

C'est-à-dire que $\xi_1 - \xi_2 \in \exp^{-1}(e)$. On prend donc $\exp^{-1}(e) =: 2\pi\Lambda$, ce qui nous donne l'injectivité dans le quotient. $\square$

Le théorème suivant réduit le problème de classification des groupes de Lie connexes simplement connexes à la classification des algèbres de Lie réelles. Pour une preuve, voir les théorèmes 3.27 et 3.28 de (Warner, 2013) .

Théorème 3.1.1.11 (Correspondance de Lie). *À isomorphisme près, il existe une bijection entre les groupes de Lie connexes simplement connexes et les algèbres de Lie réelles.*

Exemple 3.1.1.12. Soit $\mathbb{T}$ un n-tore et $\mathfrak{t} \cong \mathbb{R}^n$ son algèbre de Lie. On considère sa complexification $\mathfrak{t}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{t} \underset{\mathbb{R}}{\otimes} \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^n \underset{\mathbb{R}}{\otimes} \mathbb{C} \cong \mathbb{C}^n$. La correspondance de Lie (3.1.1.11) nous assure qu'il existe un groupe de Lie $\mathbb{T}^{\mathbb{C}}$ tel que son algèbre de Lie est $\mathfrak{t}^{\mathbb{C}}$. Remarquons que $\mathbb{C}^*$ est un groupe de Lie dont l'algèbre de Lie est $\mathbb{C}$. Alors $Lie((\mathbb{C}^*)^n) = \mathbb{C}^n \cong \mathfrak{t}^{\mathbb{C}}$. Donc $\mathbb{T}^{\mathbb{C}} = (\mathbb{C}^*)^n$. De plus, on a un difféomorphisme

$$\begin{aligned} S^1 \times \mathbb{R}_{>0} &\to \mathbb{C}^* \\ (\theta, r) &\mapsto re^{i\theta} \end{aligned}$$

qui nous donne que

$$\mathbb{T}^{\mathbb{C}} = (\mathbb{C}^*)^n = (S^1 \times \mathbb{R}_{>0})^n = \mathbb{T} \times (\mathbb{R}_{>0})^n .$$

3.1.2 Actions de groupes de Lie sur des variétés

Définition 3.1.2.1. Une action d'un groupe de Lie G sur une variété M est un homomorphisme de groupes $\rho : G \to Diff(M)$, où $\rho(g)(p) = g \cdot p$. On dit alors que M est une G-variété. On définit l'application évaluation d'une action par

$$\begin{aligned} ev_\rho : G \times M &\to M \\ (g,p) &\mapsto \rho(g)(p) \end{aligned}$$

qui est une action de groupe de Lie à gauche. On dit que ρ est lisse si ev_ρ l'est. On passera librement d'un point de vue à l'autre pour une action de groupe de Lie.

Exemple 3.1.2.2. Soit $X \in \mathfrak{X}(M)$ un champ complet. Son flot nous donne une action lisse de $\mathbb{R}$ sur M :

$$\begin{aligned} \phi^X : \mathbb{R} &\to Diff(M) \\ t &\mapsto \phi_t^X \end{aligned}$$

Définition 3.1.2.3. Soit G un groupe de Lie agissant sur M. Soit $x \in M$. On note son orbite par

$$G \cdot x = \{g \cdot x \mid g \in G\} ,$$

son stabilisateur (ou groupe d'isotropie) par

$$G_x = \{g \in G \mid g \cdot x = x\} ,$$

et l'ensemble des points fixes de M par

$$M_G = \{y \in M \mid g \cdot y = y, \forall g \in G\} .$$

Définition 3.1.2.4. Une action $\varphi : G \to Diff(M)$ est dite fidèle si φ est injective. C'est-à-dire que

$$\forall g \in G \backslash \{e\}, \exists p \in M \text{ t.q. } g \cdot p \neq p .$$

Une autre manière de le formuler est

$$\bigcap_{x \in M} G_x = \{e\} .$$

Définition 3.1.2.5. Une action est dite transitive si $G \cdot x = M, \forall x \in M$, c'est-à-dire que l'action n'a qu'une seule orbite. Une variété homogène est une variété sur laquelle un groupe de Lie agit de manière transitive.

Définition 3.1.2.6. Une action est dite libre si

$$\forall x \in M, G_x = \{e\}$$

c'est-à-dire que tout élément différent du neutre agit sans point fixe.

Remarque 3.1.2.7. Il est clair que libre $\Longrightarrow$ fidèle.

Théorème 3.1.2.8. *Soit G un groupe de Lie compact agissant sur une variété M. Alors les orbites sont difféomorphes aux quotients par les stabilisateurs, c'est-à-dire que $\forall p \in M$, on a que*

$$G \cdot p \cong {}^{G}\!/_{G_p} \,.$$

Corollaire 3.1.2.9. $\dim(G \cdot p) \leq \dim(G)$.

Corollaire 3.1.2.10. *Si l'action est transitive, on a que $M \cong {}^{G}\!/_{G_p}$.*

Corollaire 3.1.2.11. *Si l'action est libre, les orbites sont difféomorphes au groupe de Lie G qui agit.*

Théorème 3.1.2.12. *Supposons qu'un groupe de Lie compact agisse de façon fidèle sur une variété M. Soit $r := \inf_{p \in M}(\dim(G_p))$. On appelle*

$$M_r := \{p \in M \mid \dim(G_p) = r\}$$

l'ensemble des orbites principales de l'action. Alors M_r est une sous-variété ouverte, dense et connexe de M et $M \backslash M_r$ est une union de sous-variétés de codimension ≥ 2. De plus, si G est abélien, alors $r = 0$.

Les deux résultats suivants viennent de (Bredon, 1972), p.34.

Proposition 3.1.2.13. *Si $\phi : G \times M \to M$ est une action d'un groupe de Lie G compact, alors ϕ est fermée.*

Corollaire 3.1.2.14. *Si G est compact agissant sur M, alors $\phi(G \times F)$ est fermé dans M, $\forall F \subseteq M$ fermé, et $\phi(G \times F)$ est compact si F est compact. En particulier, les orbites d'une action par un groupe de Lie compact sont compactes car $G \cdot p = \phi(G \times \{p\})$.*

Proposition 3.1.2.15. *Soit G un groupe de Lie compact agissant sur M. Il existe une métrique G-invariante sur M.*

Démonstration. Sur G on a une mesure de Haar $d\mu$ qui est une forme volume bi-invariante, et telle que $\forall \sigma \in G$, $Ad_\sigma^* \mu = \mu$. On cherche à construire une métrique $\hat{g}$ bi-invariante qui soit G-invariante (i.e. $\forall \eta \in G, \eta^* \hat{g} = \hat{g}$). Soit g une métrique riemannienne sur G. Posons

$$\hat{g} := \int_G \sigma^* g d\mu(\sigma) \ .$$

Alors on aura que

$$\eta^* \hat{g} = \int_G \eta^* \sigma^* g \eta^* d\mu(\sigma) = \int_G (\eta\sigma)^* d\eta^* \mu(\sigma) = \int_G \gamma^* g d\mu(\gamma) = \hat{g} \ .$$

Ainsi cette métrique descend au quotient ${}^{M}\!/_{G}$. □

Nous référons à (Kirillov, 2008) section 4.6, pour plus de détails sur la mesure de Haar.

3.1.3 Actions adjointe et coadjointe

Définition 3.1.3.1. Tout groupe de Lie G agit sur lui-même par conjugaison :

$$\begin{aligned} \psi : G &\to Diff(G) \\ g &\mapsto \quad \psi_g : \ G \to G \\ &\qquad\qquad h \mapsto ghg^{-1} \end{aligned}$$

Le difféomorphisme ψ_g a une dérivée en l'identité $e \in G$:

$$(d\psi_g)_e : T_eG \to T_eG$$

qu'on note $Ad_g := (d\psi_g)_e$ et qui est une application sur l'algèbre de Lie de G, $Ad_g : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$. Comme ψ_g est un difféomorphisme, alors Ad_g est un isomorphisme, donc $Ad_g \in Gl(\mathfrak{g})$. En laissant varier $g \in G$, on obtient l'action adjointe de G :

$$Ad : G \to Gl(\mathfrak{g}) .$$

C'est un morphisme de groupe. En effet, soient $\sigma, \tau, \gamma \in G$. On remarque d'abord que $\psi_\sigma \circ \psi_\tau = \psi_{\sigma\tau}$. En effet,

$$\begin{aligned}\psi_\sigma \circ \psi_\tau(\gamma) &= \psi_\sigma(\tau\gamma\tau^{-1}) = \sigma\tau\gamma\tau^{-1}\sigma^{-1} \\ &= (\sigma\tau)\gamma(\sigma\tau)^{-1} = \psi_{\sigma\tau}(\gamma) .\end{aligned}$$

Alors on a que

$$\begin{aligned}Ad(\sigma\tau) = (d\psi_{\sigma\tau})_e &= (d(\psi_\sigma \circ \psi_\tau))_e = (d\psi_\sigma)_{\psi_\tau(e)} \circ (d\psi_\tau)_e \\ &= (d\psi_\sigma)_e \circ (d\psi_\tau)_e = Ad(\sigma)Ad(\tau) .\end{aligned}$$

De plus, $Ad(e) = (d\psi_e)_e = Id_{T_eG} = Id_{\mathfrak{g}}$.

Définition 3.1.3.2. Soit $Ad : G \to Gl(\mathfrak{g})$ l'action adjointe de G. On définit l'action coadjointe de G par

$$\begin{aligned}Ad^* : G &\to Gl(\mathfrak{g}^*) \\ g &\mapsto Ad(g^{-1})^*\end{aligned}$$

où $Ad(g^{-1})^*$ est l'application duale de $Ad(g^{-1})$. Par définition de l'application duale, $Ad^*(g)$ satisfait que $\forall X \in \mathfrak{g}$ et $\forall Y^* \in \mathfrak{g}^*$, on a

$$(Ad^*(g)(Y^*), X) = (Y^*, Ad(g^{-1})(X))$$

où $(\cdot,\cdot)$ est le couplage naturel entre $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{g}^*$. L'action coadjointe est elle aussi un morphisme de groupes.

Définition 3.1.3.3. On note $ad := (Ad_*)_e : \mathfrak{g} \to gl(\mathfrak{g})$.

Lemme 3.1.3.4. *ad satisfait que*

i) $ad_X Y = [X,Y]$ *;*

ii) $ad_X Y = \frac{d}{dt}|_{t=0} Ad_{\exp(tX)} Y$.

Proposition 3.1.3.5. *Le diagramme suivant commute :*

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g} & \xrightarrow{ad} & gl(\mathfrak{g}) \\ {\scriptstyle \exp}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \exp} \\ G & \xrightarrow{Ad} & Gl(\mathfrak{g}) \end{array}$$

Démonstration. Découle directement de la définition de ad et de la proposition (3.1.1.4). □

3.1.4 Champs fondamentaux

Définition 3.1.4.1. Soit $\varphi : G \times M \to M$ une action de G sur M. Pour chaque $p \in M$, l'application lisse

$$\begin{aligned} O_p^\varphi : G &\to M \\ g &\mapsto \varphi(g,p) \end{aligned}$$

est appelée application orbite, car $O_p^\varphi(G) = G \cdot p$. Soit $e \in G$ l'élément neutre du groupe de Lie G. Pour $p \in M$, on considère la différentielle

$$(dO_p^\varphi)_e : \mathfrak{g} \to T_p M$$

Ainsi, $(dO_p^\varphi)_e$ associe à chaque élément $\xi \in \mathfrak{g}$ un vecteur tangent en p, qu'on note $(X_\xi)_p$. En variant $p \in M$ on obtient un champ de vecteurs X_ξ qu'on appelle le champ de vecteurs fondamental de ξ. Comme la courbe $\exp(t\xi) : \mathbb{R} \to G$ représente $\xi \in \mathfrak{g}$, on a par définition de la différentielle que $\exp(tX) \cdot p$ représente

$(X_\xi)_p$. En effet,

$$\begin{array}{rcl} (dO_p^\varphi)_e : & \mathfrak{g} & \to \quad T_pM \\ & [\exp(tX)] & \mapsto [O_p^\varphi \circ \exp(tX)] = [\exp(tX) \cdot p] \end{array}$$

On obtient alors la relation suivante $(X_\xi)_p = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \exp(tX) \cdot p$. L'application suivante est un morphisme d'algèbre de Lie

$$\sigma : \mathfrak{g} \to \mathfrak{X}(M) \ ,$$

c'est-à-dire que $\forall \xi, \eta \in \mathfrak{g}$, on a que

$$[X_\xi, X_\eta] = X_{[\xi,\eta]} \ . \tag{3.1}$$

En effet,

$$\begin{aligned} (X_{[\xi,\eta]})_p &= (X_{ad_\xi \eta})_p = \left(X_{\partial_t|_0 Ad_{\exp(t\xi)}(\eta)}\right)_p \qquad [\text{ par } (3.1.3.4)] \\ &= \partial_t\big|_0 \partial_\epsilon\big|_0 \exp(t\xi)\exp(\epsilon\eta)\exp(-t\xi)\cdot p = \partial_t\big|_0(\exp(t\xi)_* X_\eta)(p) = (L_{X_\xi} X_\eta)(p) = [X_\xi, X_\eta]_p \ . \end{aligned}$$

Lemme 3.1.4.2. *Supposons que G compact agisse sur M. Alors $\alpha \in \Omega^k(M)$ est G-invariante si et seulement si $L_{X_\xi}\alpha = 0, \forall \xi \in \mathfrak{g}$.*

Démonstration.

Soit $\rho : G \to Diff(M)$ l'action de G sur M.

$(\Longrightarrow)$

On suppose que $\rho(g)^*\alpha = \alpha, \forall g \in G$. On a directement que pour $\xi \in \mathfrak{g}$,

$$L_{X_\xi}\alpha = \partial_t\big|_0 \rho(\exp(t\xi))^*\alpha = \partial_t\big|_0 \alpha = 0 \ .$$

$(\Longleftarrow)$

On remarque que

$$\begin{aligned} \partial_t\big|_{t=s}\rho(\exp(t\xi))^*\alpha &= \partial_t\big|_0 \rho(\exp((t+s)\xi))^*\alpha \\ &= \partial_t\big|_0 (\rho(\exp(t\xi))\rho(\exp(s\xi)))^*\alpha \\ &= \rho(\exp(s\xi))^* L_{X_\xi}\alpha = 0 \ . \end{aligned}$$

On pose

$$Y_t := \rho(\exp(t\xi))^*\alpha - \alpha \ .$$

Alors on a que

$$\partial_t\big|_{t=s} Y_t = 0 \ .$$

Donc Y_t est constante. On remarque maintenant que

$$Y_0 = \rho(\exp(0))^*\alpha - \alpha = \rho(e)^*\alpha - \alpha = Id_M^*\alpha - \alpha = 0 \ .$$

Donc il faut que $Y_t = 0, \forall t$. Comme G est compact et connexe, (3.1.1.5) nous donne que exp est surjective. Donc on a bien que $\rho(g)^*\alpha = \alpha, \forall g \in G$, tel que voulu. □

Définition 3.1.4.3. Une action est dite holomorphe si les champs fondamentaux engendrés par l'action sont holomorphes. C'est-à-dire que $L_{X_\xi} J = 0, \forall \xi \in \mathfrak{g}$.

Lemme 3.1.4.4. *Soit G un groupe de Lie dont l'exponentielle est surjective. L'action par G sur M est fidèle si et seulement si* $\forall \xi \in \mathfrak{g}\backslash\{0\}, \exists p \in M \mid (X_\xi)_p \neq 0$.

Démonstration.

($\Longrightarrow$)

Supposons que l'action $\rho : G \to Diff(M)$ soit fidèle. Par l'absurde, soit $\xi \neq 0$ tel que $X_\xi \equiv 0$. Soit $p \in M$. D'abord, notons que

$$\begin{aligned} \partial_t\Big|_{t=s} \rho(\exp(t\xi))(p) &= \partial_t\Big|_{t=0} \rho(\exp((t+s)\xi))(p) = \partial_t\Big|_{t=0} \rho(\exp(s\xi))\rho(\exp(t\xi))(p) \\ &= \rho(\exp(s\xi))_*(X_\xi)_p = 0 \ . \end{aligned}$$

Alors $\rho(\exp(t\xi))(p)$ est constante. Mais $\rho(\exp(0))(p) = p$, donc $\rho(\exp(t\xi))(p) = p$. Comme p était quelconque, on a que $\rho(\exp(t\xi)) = id$. Comme ρ est injective, $\exp(t\xi) = e, \forall t \in \mathbb{R}$. Ceci est une contradiction au fait que exp est un difféomorphisme local entre un voisinage de 0 et un voisinage de e. Donc il faut qu'il existe un $p_0 \in M \mid (X_\xi)_{p_0} \neq 0$.

$(\Longleftarrow)$

Supposons que $\forall \xi \neq 0, \exists p \in M \mid (X_\xi)_p \neq 0$. Supposons que $\rho(g) = id$. On peut trouver t et ξ tels que $g = \exp(t\xi)$, vu que exp est surjective (3.1.1.5). Par l'absurde, supposons que $g \neq e$. Donc $t \neq 0$ et $\xi \neq 0$. Par hypothèse, il existe $p \in M$ tel que $(X_\xi)_p \neq 0$. Mais

$$(X_\xi)_p = \partial_t\Big|_{t=0} \rho(\exp(t\xi))(p) = \partial_t\Big|_{t=0} p = 0 \ .$$

C'est une contradiction, et donc il faut que $g = e$, comme voulu. $\square$

3.1.5 Action hamiltonienne et application moment

Définition 3.1.5.1. On dit qu'une action $\Psi : G \to Diff(M)$ d'un groupe de Lie G sur une variété symplectique (M,ω) est symplectique si $\Psi(G) \subseteq Symp(M)$, c'est-à-dire que $\forall g \in G$, Ψ_g est un symplectomorphisme.

Exemple 3.1.5.2. On poursuit l'exemple (2.4.2.6), avec le tore $(\mathbb{T}^2, \omega)$ muni de sa forme symplectique standard, qui est localement $d\theta_1 \wedge d\theta_2$. Comme $\mathbb{T}^2 \cong S^1 \times S^1$, on considère les groupes de difféomorphismes donné par rotation autour de chaque cercle S^1 :

$$\Psi_{1,t}(\theta_1,\theta_2) = (\theta_1 + t, \theta_2)$$
$$\Psi_{2,t}(\theta_1,\theta_2) = (\theta_1, \theta_2 + t)$$

qui sont des actions symplectiques de S^1 sur le tore.

Remarque 3.1.5.3. Reprenons le contexte du théorème (3.1.2.12) : un groupe de Lie compact G agit de façon fidèle sur M, avec M_r l'ensemble des orbites principales de l'action. Dans le cas où $G = \mathbb{T}$ est un tore, on a que $r = 0$, et donc que $\dim(\mathbb{T}_p) = 0$, si $p \in M_0$. Toutefois, rien ne nous assure que $\mathbb{T}_p$ soit connexe. Cependant, si l'action est symplectique (disons de forme symplectique ω) et telle que ses orbites soient ω-isotropes (c'est-à-dire que si O est une orbite de l'action, toute paire de vecteurs u_p, $v_p \in T_pO$, pour $p \in O$ quelconque, est telle que $\omega(u_p, v_p) = 0$), alors tous les stabilisateurs sont des tores connexes. Pour une preuve de ceci, voir ((Benoist, 1998), lemme 6.7). En particulier, on a dans ce cas que $\mathbb{T}$ agit sur M_0 de manière libre. C'est-à-dire $\forall p \in M_0$, $\mathbb{T}_p = \{e\}$.

Définition 3.1.5.4. Soit G un groupe de Lie agissant sur deux variétés M et N et soit $\varphi : M \xrightarrow{C^\infty} N$. On dit que φ est équivariante par rapport à l'action si $\forall p \in M, \forall g \in G$, on a que

$$\varphi(g \cdot p) = g \cdot \varphi(p) \ .$$

Définition 3.1.5.5. Une action $\varphi : G \to Symp(M)$ de G sur M est dite hamiltonienne s'il existe $\mu : M \to \mathfrak{g}^*$ lisse qu'on appelle application moment et qui satisfait ces deux conditions :

i) $\forall g \in G, \mu \circ \varphi_g = Ad_g^* \circ \mu$, (équivariance)

ii) Pour chaque $\xi \in \mathfrak{g}, X_\xi$ est hamiltonien, de fonction hamiltonienne

$$\mu_\xi : M \to \mathbb{R}, \text{ où } \mu_\xi(p) := \mu(p)(\xi) \ .$$

Ainsi, la condition *ii)* signifie qu'il faut que $d\mu_\xi = -\iota_{X_\xi}\omega$.

Exemple 3.1.5.6. On a (S^2,ω) variété symplectique, avec ω la forme symplectique standard sur la sphère, donnée dans l'exemple (2.4.1.11). Le champ $X = \frac{\partial}{\partial \theta}$ est hamiltonien, de fonction hamiltonienne la fonction hauteur $-h$. Soit $U := S^2 \backslash \{n,s\}$. Nous avons vu que $\omega|_U = d\theta \wedge dh$. De plus, $\{\frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{\partial}{\partial h}\}$ est base de $\mathfrak{X}(U)$. Voyons l'effet de $\omega|_U$ sur ces champs :

$$\iota_X(d\theta \wedge dh)(\frac{\partial}{\partial \theta}) = d\theta \wedge dh(\frac{\partial}{\partial \theta},\frac{\partial}{\partial \theta}) = 0$$
$$\iota_X(d\theta \wedge dh)(\frac{\partial}{\partial h}) = d\theta \wedge dh(\frac{\partial}{\partial \theta},\frac{\partial}{\partial h}) = 1$$

Alors on a que localement, $\iota_X\omega = dh = -d(-h)$. Nous avons déduit la fonction hamiltonienne du champ hamiltonien. Faisons l'inverse, déduisons le champ hamiltonien de la fonction hamiltonienne. On cherche le champ de vecteurs associé à h par la structure symplectique. On a que $\forall p \in S^2\backslash\{n,s\}, -\omega^{-1}(dh)_p \in T_pS^2$. Comme $E_p = \{\frac{\partial}{\partial\theta}|_p, \frac{\partial}{\partial h}|_p\}$ est base de T_pS^2, on peut écrire $-\omega^{-1}(dh)_p = (l_1,l_2)$ dans cette base. Comme $(dh)_p(\frac{\partial}{\partial\theta}|_p) = 0$, on obtient que

$$\begin{aligned} 0 = (dh)_p(\frac{\partial}{\partial\theta}|_p) &= \omega(\frac{\partial}{\partial\theta}|_p, -\omega^{-1}(dh)_p) = d\theta \wedge dh(\frac{\partial}{\partial\theta}|_p, -\omega^{-1}(dh)_p) \\ &= \begin{vmatrix} d\theta(\frac{\partial}{\partial\theta}|_p) & dh(\frac{\partial}{\partial\theta}|_p) \\ d\theta(-\omega^{-1}(dh)_p) & dh(-\omega^{-1}(dh)_p) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ l_1 & l_2 \end{vmatrix} = l_2 \end{aligned}$$

De la même manière, on obtient que $(dh)_p(\frac{\partial}{\partial h}|_p) = 1 = -l_1$. C'est-à-dire qu'on a que $(X_h)(p) = -\omega^{-1}(dh)_p = (l_1,l_2) = (-1,0) = -\frac{\partial}{\partial\theta}|_p$. Donc on a trouvé que le champ X_h est localement (partout sauf aux pôles nord et sud)

$$-\omega^{-1}(dh) = -\frac{\partial}{\partial\theta} .$$

Cherchons les courbes intégrales de ce champ. On a le système différentiel suivant à résoudre

$$(*) \begin{cases} y'(t) = (-\omega^{-1}(dh))(y(t)) = -\frac{\partial}{\partial\theta}|_{y(t)} \\ y(0) = p_0 = (\theta_0,z_0) \in S^2 \end{cases}$$

Une solution de $(*)$ est donnée par $y(t) = (\theta_0 - t, z_0)$. Alors le flot de ce champ est un sous-groupe à un paramètre

$$\begin{aligned} \phi^{X_h} : \mathbb{R} &\to Symp(S^2) \\ t &\mapsto \phi_t^{X_h} : S^2 \to S^2 \\ &\qquad p \mapsto y(t) \end{aligned}$$

où $y(t)$ est solution du système $(*)$, de donnée initiale p_0. De plus, comme la période des flots est de 2π, il s'agit bien d'une action circulaire de S^1 sur S^2.

Ainsi, h est une application moment dont l'action tourne la sphère sur son axe pôle nord-pôle sud, avec les pôles étant les points fixes de l'action. Voyons maintenant que le champ $-\frac{\partial}{\partial\theta}$ est en fait un champ fondamental. L'action (en coordonnées cylindriques sur S^2) est

$$\begin{aligned} \varphi : S^1 &\to Symp(S^2) \\ e^{it} &\mapsto \quad \varphi_{e^{it}} : \; S^2 \to S^2 \\ &\qquad\qquad (\theta, h) \mapsto (\theta - t, h) \end{aligned}$$

On sait que $Lie(S^1) = i\mathbb{R}$. Soit $-i \in Lie(S^1)$. Alors le chemin e^{-it} représente $-i$. On a que

$$X_{-i}(\theta, h) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} e^{-it} \cdot (\theta,h) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(\theta - t, h) = (-1,0) = -\frac{\partial}{\partial\theta}\Big|_{(\theta,h)} .$$

Remarque 3.1.5.7. L'application moment détermine l'action de G sur M. Inversement, l'action est déterminée par une application moment modulo translations.

Proposition 3.1.5.8. *L'équivariance de l'application moment est équivalente à ce que*

$$d\mu_\xi(X_\eta) = -\mu_{[\eta,\xi]}, \forall \xi,\eta \in \mathfrak{g} ,$$

où μ est l'application moment de l'action hamiltonienne.

Démonstration. Soit $(\cdot,\cdot)$ le couplage entre $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{g}^*$. Il suffit d'appliquer en un point

$p \in M$:

$$\begin{aligned}
d(\mu_\xi)_p(X_\eta) &= d(\mu_\xi)_p\left(\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\exp(t\eta)\cdot p\right) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\mu_\xi \circ \exp(t\eta)\cdot p \\
&= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(\mu(\exp(t\eta)\cdot p),\xi) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(\mu\circ\varphi_{\exp(t\eta)}(p),\xi) \\
&= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(Ad^*_{\exp(t\eta)}\circ\mu(p),\xi) \qquad [\text{ équivariance }] \\
&= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(\mu(p),Ad_{\exp(t\eta)^{-1}}(\xi)) \qquad [\text{ définition action coadjointe }] \\
&= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(\mu(p),Ad_{\exp(-t\eta)}(\xi)) = \left(\mu(p),\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}Ad_{\exp(-t\eta)}(\xi)\right) \\
&= (\mu(p),ad_{-\eta}\xi) = (\mu(p),[-\eta,\xi]) \qquad [\text{ par (3.1.3.4) }] \\
&= (\mu(p),-[\eta,\xi]) = -(\mu(p),[\eta,\xi]) = -\mu_{[\eta,\xi]}(p)\ .
\end{aligned}$$

□

Corollaire 3.1.5.9. *L'équivariance de l'application moment est équivalente à ce que*

$$\{\mu_\xi,\mu_\eta\} = -\mu_{[\xi,\eta]}, \forall\xi,\eta\in\mathfrak{g}$$

où $\{\cdot,\cdot\}$ est le crochet de Poisson.

Démonstration. En effet, on a que

$$\begin{aligned}
\{\mu_\xi,\mu_\eta\} &= \omega(X_{\mu_\xi},X_{\mu_\eta}) = \omega(X_\xi,X_{\mu_\eta}) \qquad [\text{ condition ii) application moment }] \\
&= d\mu_\eta(X_\xi) = -\mu_{[\xi,\eta]}\ . \qquad [\text{ par (3.1.5.8) }]
\end{aligned}$$

□

Proposition 3.1.5.10. *Soit $\varphi : G \to Diff(M)$ action de G sur M, avec $\mu : M \to \mathfrak{g}^*$ une application moment pour cette action. Soit $\rho : H \to G$ un homomorphisme de groupe de Lie, ce qui fait que H agit aussi sur M par $\varphi\circ\rho : H \to Diff(M)$. L'application $d\rho$ agit sur les algèbres de Lie $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{h}$ et $(d\rho)_e$ a une application duale $(d\rho)^*_e : \mathfrak{g}^* \to \mathfrak{h}^*$. Alors l'action de H est aussi hamiltonienne, d'application moment $(d\rho)^*_e \circ \phi : M \to \mathfrak{h}^*$.*

Remarque 3.1.5.11. Le cas qui nous intéressera de la proposition (3.1.5.10) sera lorsque $H \leq G$, avec ρ l'inclusion.

3.1.6 Réduction symplectique

Nous référons à l'ouvrage (Da Silva et Takens, 2001) (section 23) pour plus de détails sur la réduction symplectique, et aussi pour la preuve du théorème de Marsden-Weinstein (3.1.6.1).

Soit $\rho : G \to Symp(M)$ une action symplectique de groupe de Lie sur (M,ω) une variété symplectique.

Théorème 3.1.6.1 (Marsden-Weinstein). *Supposons que G soit compact, et que l'action soit hamiltonienne, d'application moment μ. Soit $i : \mu^{-1}(0) \hookrightarrow M$ l'inclusion et supposons que G agisse librement sur $\mu^{-1}(0)$. Alors*
I) l'espace orbite $M_{red} := \mu^{-1}(0)/G$ est une variété ;
II) $\exists \omega_{red} \in \Omega^2(M_{red})$ symplectique telle que $i^* w = \Pi^* \omega_{red}$.

Remarque 3.1.6.2. Ici, on suppose que $0 \in Im(\mu)$. Dans le cas d'une action de tore, si ce n'est pas le cas, par (3.2.1.3), on peut choisir une application moment de l'action telle que 0 soit dans son image, en ajoutant une constante.

Définition 3.1.6.3. La paire (M_{red}, ω_{red}) est appelée la réduction symplectique de (M,ω) par rapport à G et μ.

Exemple 3.1.6.4. Soit $\omega_0 = \sum_{k=1}^{n} r_k dr_k \wedge d\theta_k$ la forme symplectique standard sur $\mathbb{C}^n$. S^1 agit sur $\mathbb{C}^n$ par multiplication :

$$\psi_{e^{it}}(z_1, \ldots, z_n) := (e^{it} z_1, \ldots, e^{it} z_n) \ .$$

Vérifions qu'une application moment pour cette action est

$$\begin{aligned} \mu : \mathbb{C}^n \to \quad & \mathbb{R} \\ z \mapsto & \frac{|z|^2}{2} + c \end{aligned}$$

où $c \in \mathbb{R}$ est une constante quelconque. D'abord, il est clair que $d\mu = \sum_{k=1}^n r_k dr_k$. Ensuite, on a que $\frac{\partial}{\partial\theta}\Big|_{(1,0)} = i \in T_{(1,0)}S^1$ génère $Lie(S^1) = i\mathbb{R}$. Le champ correspondant est $\frac{\partial}{\partial\theta} \in \mathfrak{X}(S^1)$. Calculons le champ fondamental

$$\left(X_{\frac{\partial}{\partial\theta}}\right)_z = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} e^{it} \cdot z = iz = (iz_1, \ldots, iz_n) = \frac{\partial}{\partial\theta_1}\Big|_{z_1} + \cdots + \frac{\partial}{\partial\theta_n}\Big|_{z_n} .$$

Donc $X_{\frac{\partial}{\partial\theta}} = \frac{\partial}{\partial\theta_1} + \cdots + \frac{\partial}{\partial\theta_n}$. Ainsi on a bien que

$$\iota_{X_{\frac{\partial}{\partial\theta}}}\omega = -\sum r_k dr_k = -d\mu .$$

On remarque aussi que

$$\mu \circ \psi_{e^{it}}(z) = \mu \circ (e^{it}z_1, \ldots, e^{it}z_n) = -\frac{1}{2}(|e^{it}z_1|^2 + \cdots + |e^{it}z_n|^2) + c = \mu(z) ,$$

donc que μ est invariante par rapport à l'action de S^1. Ainsi μ est bien une application moment de l'action. Maintenant, notons qu'en choisissant $c = \frac{1}{2}$, on obtient que

$$\mu^{-1}(0) = \{z \in \mathbb{C}^n \mid \frac{1}{2} = \frac{|z|^2}{2}\} = S^{2n-1} ,$$

ce qui nous permet de voir que

$$\mu^{-1}(0)/_{S^1} = S^{2n-1}/_{S^1} = \mathbb{C}P^{n-1}$$

est une variété symplectique dont la forme symplectique ω_{FS} donnée par le théorème de Marsden-Weinstein (3.1.6.1) s'appelle la forme de Fubini-Study. Soit $\pi : \mu^{-1}(0) \to \mathbb{C}P^{n-1}$ l'application quotient, et $j : \mu^{-1}(0) \hookrightarrow \mathbb{C}^n$ l'inclusion. ω_{FS} satisfait donc que

$$\pi^*\omega_{FS} = j^*\omega_0 .$$

Lemme 3.1.6.5. *Soient G_1, G_2 deux groupes de Lie compacts et connexes. Soit $G := G_1 \times G_2$ leur produit. Soit (M,ω) une variété symplectique munie d'une action par G et qui est hamiltonienne, avec application moment*

$$\nu : M \to \mathfrak{g}^* = \mathfrak{g}_1^* \oplus \mathfrak{g}_2^* \ ,$$

et où on note $\nu = (\nu_1,\nu_2)$. Alors le fait que ν soit équivariante implique que ν_1 est invariant par l'action de G_2 et ν_2 est invariant par l'action de G_1.

Démonstration. Soient $\pi_i : \mathfrak{g}^* \to \mathfrak{g}_i^*$ les deux projections. On remarque que si $\psi : G \to Diff(G)$ est l'action de conjugaison sur G (i.e. $\psi_{(g_1,g_2)}(h_1,h_2) = (g_1 h_1 g_1^{-1}, g_2 h_2 g_2^{-1})$), alors $\psi_{(e_1,g_2)} = Id_{G_1} \times \psi_2$. Conséquemment, on aura que $Ad_{(e_1,g_2)} = Id_{\mathfrak{g}_1} \times (d\psi_2)_{e_2}$ et donc que

$$\pi_1 \circ Ad^*_{(e_1,g_2)} = \pi_1 \ .$$

L'équivariance de ν signifie que

$$\nu \circ \varphi_{(g_1,g_2)} = Ad^*_{(g_1,g_2)} \circ \nu$$

où l'action $\varphi : G \times M \to M$ étend naturellement les actions de G_1 et G_2 sur M. C'est-à-dire qu'on a que $\varphi_{(e_1,g_2)} = \varphi_{g_2}$ et $\varphi_{(g_1,e_2)} = \varphi_{g_1}$. Alors on a que

$$\begin{aligned} \nu_1 \circ \varphi_{g_2} &= \pi_1 \circ \nu \circ \varphi_{(e_1,g_2)} \\ &= \pi_1 \circ Ad^*_{(e_1,g_2)} \circ \nu \qquad [\text{ équivariance }] \\ &= \pi_1 \circ \nu = \nu_1 \ . \end{aligned}$$

Alors on a bien l'invariance de ν_1 par rapport à l'action de G_2. On obtient de la même façon l'invariance de ν_2 par rapport à l'action de G_1. $\square$

Proposition 3.1.6.6. *Dans les conditions du lemme* (3.1.6.5)*, soit $Z_1 := \nu_1^{-1}(0)$, et supposons que G_1 agisse librement sur Z_1. Par le théorème de Marsden-Weinstein* (3.1.6.1)*,*

$$M_1 := {}^{Z_1}\!/_{G_1}$$

est une variété symplectique. Soit ω_1 la forme symplectique donnée par le théorème. On a que G_2 agit symplectiquement sur (M_1, ω_1) et qu'il existe une application moment

$$\mu_2 : M_1 \to \mathfrak{g}_2^*$$

telle que

$$\mu_2 \circ p_1 = \nu_2 \circ \iota_1$$

où $p_1 : Z_1 \to M_1$ est la projection canonique, et $\iota_1 : Z_1 \hookrightarrow M$ est l'inclusion.

3.2 Variétés Toriques

On note $\mathbb{T}^n$ un tore n-dimensionnel, et $\mathfrak{t} \cong \mathbb{R}^n$ son algèbre de Lie.

3.2.1 Actions toriques et le théorème d'Atiyah-Guillemin-Sternberg

Remarque 3.2.1.1. Supposons qu'un tore $\mathbb{T}^n$ agisse sur une variété M de manière hamiltonienne. La définition d'application moment se simplifie alors. En effet, on a vu que l'algèbre de Lie du tore est abélienne (exemple (3.1.1.3)). En outre le tore est abélien et l'action de conjugaison est triviale, ce qui implique directement que les actions adjointe et coadjointe sont triviales. Ainsi la condition d'équivariance pour une application moment $H : M \to \mathbb{R}^n$ est simplement

$$H \circ \varphi_g = H \ ,$$

$\forall g \in \mathbb{T}^n$, avec $\varphi : \mathbb{T}^n \to Symp(M)$ l'action. Comme le couplage entre $\mathfrak{t} \cong \mathbb{R}^n$ et $\mathfrak{t}^* \cong (\mathbb{R}^n)^*$ est bilinéaire, le deuxième critère s'énonce comme suit : pour $\{e_i\}_{i=1}^n$ base de $\mathfrak{t}$, e_i induit un champ fondamental X_{e_i} sur M par la relation

$$(X_{e_i})_p := \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \exp(te_i) \cdot p \ .$$

Si on note $H_{e_i} : M \to \mathbb{R}$ la fonction $H_{e_i}(p) := H(p)(e_i)$, alors il suffit que $\forall e_i \in \mathbb{R}^n$ élément de la base choisie, on ait que

$$dH_{e_i} = -\iota_{X_{e_i}}\omega \ .$$

Remarque 3.2.1.2. Supposons qu'on ait n applications moments $f_1, \ldots, f_n \in \mathcal{C}^\infty(M)$ d'actions circulaires correspondantes $\varphi^{f_1}, \ldots, \varphi^{f_n}$ où

$$\varphi^{f_i} : \mathbb{R} \to Symp(M)$$

est périodique et tel que ces fonctions Poisson-commutent deux-à-deux et sont indépendantes. Alors

$$\begin{aligned} F : M &\to \mathbb{R}^n \\ p &\mapsto (f_1(p), \ldots, f_n(p)) \end{aligned}$$

est application moment de l'action torique hamiltonienne φ^F, définie par

$$\begin{aligned} \varphi^F : \quad \mathbb{T}^n &\to Symp(M) \\ (t_1, \ldots, t_n) &\mapsto \quad \varphi^F_{t_1,\ldots,t_n} : M \to M \\ &\qquad\qquad p \mapsto \varphi^{f_1}_{t_1} \circ \cdots \circ \varphi^{f_n}_{t_n}(p) \end{aligned}$$

Lemme 3.2.1.3. *Soit une action torique hamiltonienne φ sur (M,ω). Toutes les applications moment de cette action ne diffèrent que par une constante, et toute application $\mu' : M \to \mathbb{R}^n$ différant d'une application moment par une constante est aussi une application moment.*

Démonstration. D'abord, soit $\mu : M \to \mathbb{R}^n$ une application moment pour φ. Soit $c \in \mathbb{R}^n$. On considère alors l'application

$$\begin{aligned} \mu + c : M &\to \mathbb{R}^n \\ p &\mapsto \mu(p) + c \end{aligned}$$

On a que $(\mu + c)_i : M \to \mathbb{R}$ définie par $(\mu + c)_i(p) = \mu_i(p) + c_i$ est une fonction lisse sur M. Alors $d(\mu_i + c_i) = d\mu_i = -\iota_{X_{e_i}}\omega$, vu que μ est application moment. De plus, on a que

$$(\mu_i + c_i) \circ \varphi_p = \mu_i \circ \varphi_p + c_i \circ \varphi_p = \mu_i + c_i \ ,$$

et c'est pourquoi $\mu + c$ est application moment de l'action.
Réciproquement, soient $\mu, \nu : M \to \mathbb{R}^n$ deux applications moments pour Φ. Alors, par définition d'application moment on a

$$d\mu_i = -\iota_{X_{e_i}}\omega = d\nu_i \ ,$$

ce qui implique directement qu'elles ne diffèrent que par une constante. $\square$

Théorème 3.2.1.4. *Soit $\rho : \mathbb{T}^k \to Symp(M)$ une action symplectique sur (M,ω). Alors l'action est hamiltonienne si et seulement si $\forall \xi \in \mathfrak{t}, \exists f_\xi \in \mathcal{C}^\infty(M)$ tel que $\iota_{X_\xi}\omega = -df_\xi$.*

Démonstration.

$(\Longrightarrow)$

Supposons que l'action soit hamiltonienne. Alors l'application moment $\mu : M \to \mathfrak{t}^*$ satisfait que $\forall \xi \in \mathfrak{t}$, $X_\xi \in \mathfrak{X}(M)$ est hamiltonien, de fonction hamiltonienne $\mu_\xi \in \mathcal{C}^\infty(M)$, c'est-à-dire que

$$\iota_{X_\xi}\omega = -d\mu_\xi \ ,$$

comme voulu.

$(\Longleftarrow)$

Soit $\{\xi_1, \ldots, \xi_k\}$ une base de $\mathfrak{t}$, et par hypothèse, soient $f_1, \ldots, f_k \in \mathcal{C}^\infty(M)$ les fonctions hamiltoniennes correspondantes (i.e. $\iota_{X_{\xi_j}}\omega = -df_j$). Soit alors $\xi \in \mathfrak{t}$ quelconque, qui s'écrit dans notre base comme $\xi = \sum_{i=1}^k a_i\xi_i$. Posons

$$f_\xi := \sum_{i=1}^k a_i f_i$$

On veut montrer que f_ξ est fonction hamiltonienne de X_ξ. Comme $\mathbb{T}^k$ est abélien, son algèbre de Lie est abélienne, et par (3.1.1.6) on a que

$$\exp(t\xi) = \exp(t\sum_{i=1}^{k} a_i\xi_i) = \exp(ta_1\xi_1)\cdots\exp(ta_k\xi_k)\ .$$

Alors le champ fondamental induit est

$$(X_\xi)_p = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\exp(t\xi)\cdot p = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\exp(ta_1\xi_1)\cdots\exp(ta_k\xi_k)\cdot p$$

Maintenant, remarquons que

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} e^{ta_1\xi_1}\cdot(e^{ta_2\xi_2}\cdot p) = a_1(X_{\xi_1})_p + a_2(X_{\xi_2})_p\ .$$

Soit la fonction $f(x,y) := e^{xa_1\xi_1}\cdot e^{ya_2\xi_2}\cdot p$. Les variables x et y dépendent de t : $x(t), y(t)$, et alors on a que

$$\frac{d}{dt}f(x(t),y(t)) = x'(t)\partial_x f(x(t),y(t)) + y'(t)\partial_y f(x(t),y(t))\ .$$

Si $x(t) = y(t) = t$ (ce qui est notre cas), on a que $x'(t) = y'(t) = 1$, et alors

$$\frac{d}{dt}f(t,t) = \partial_x f(t,t) + \partial_y f(t,t)\ .$$

À travers le changement de variables $z = xa_1$, on a que $a_1\frac{d}{dz} = \frac{d}{dx}$ et alors

$$\partial_x f(x,y) = a_1\frac{d}{dz}e^{z\xi_1}(e^{ya_2\xi_2}\cdot p)$$

et comme $\mathbb{T}^k$ est abélien, on a aussi que $\partial_y f(x,y) = a_2\frac{\partial}{\partial w}e^{w\xi_2}\cdot(e^{xa_1\xi_1}\cdot p)$, où $w = ya_2$. Ceci nous permet de calculer

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f(t,t) = a_1X_{\xi_1}(e^{ta_2\xi_2}\cdot p)\Big|_{t=0} + a_2X_{\xi_2}(e^{ta_1\xi_1}\cdot p)\Big|_{t=0} = a_1X_{\xi_1}(p) + a_2X_{\xi_2}(p)$$

tel que voulu, vu que exp envoie $0 \in \mathfrak{t}$ sur l'élément neutre $e \in \mathbb{T}^k$. En itérant le procédé, on obtient que

$$\begin{aligned}(X_\xi)_p &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} e^{ta_1\xi_1}\cdots e^{ta_k\xi_k}\cdot p\\ &= \sum_{i=1}^{k} a_iX_{\xi_i}(p)\ .\end{aligned}$$

Alors on a réussi à montrer que pour $\xi = \sum_{i=1}^{k} a_i \xi_i \in \mathfrak{t}$, on a $X_\xi = \sum_{i=1}^{k} a_i X_{\xi_i} \in \mathfrak{X}(M)$.

Par hypothèse, on a que

$$\begin{aligned} -df_\xi &= -d(\sum a_i f_i) = -\sum a_i df_i = \sum a_i(-df_i) \\ &= \sum a_i \iota_{X_{\xi_i}} \omega = \sum a_i \omega(X_{\xi_i}, \cdot) = \omega(\sum a_i X_{\xi_i}, \cdot) = \iota_{X_\xi}\omega \ . \end{aligned}$$

Donc f_ξ tel que défini est fonction hamiltonienne de X_ξ. Il nous suffit maintenant de définir l'application moment

$$\mu : M \to \mathfrak{t}^*$$

par $\mu_\xi(p) = \mu(p)(\xi) := f_\xi(p)$, avec la construction précédente. Alors μ satisfait la deuxième condition pour être application moment par construction. Il reste à vérifier l'équivariance de l'action par rapport à l'application moment. On a vu (corollaire (3.1.5.9)) que l'équivariance de l'application moment est équivalente à ce que

$$\omega(X_\xi, X_\eta) = \{\mu_\xi, \mu_\eta\} = -\mu_{[\xi,\eta]}, \forall \xi, \eta \in \mathfrak{t} \ .$$

Mais comme $\mathfrak{t}$ est abélienne, $[\xi,\eta] = 0, \forall \xi,\eta \in \mathfrak{t}$. Comme $\mu_0 = f_0 = 0$ par construction, il nous reste à montrer que $\omega(X_\xi, X_\eta) = 0, \forall \xi, \eta \in \mathfrak{t}$. On a vu que chaque champ fondamental est hamiltonien (condition ii)), donc en particulier symplectique. On sait par la proposition (2.4.2.1) qu'alors

$$L_{X_\xi}\omega = 0, \forall \xi \in \mathfrak{t} \ .$$

Par la proposition (2.1.1.1), on a que

$$L_{X_\tau}(\omega(X_\xi, X_\eta)) = (L_{X_\tau}\omega)(X_\xi, X_\eta) + \omega(L_{X_\tau}X_\xi, X_\eta) + \omega(X_\xi, L_{X_\tau}X_\eta) = 0$$

vu que $L_{X_\tau}X_\xi = [X_\tau, X_\xi] = X_{[\tau,\xi]} = 0$, par (3.1). Alors on a que $\omega(X_\xi, X_\eta) =: f$ est une fonction constante sur chaque orbite $\mathcal{O} \subset M$ de l'action ρ. En effet,

$$0 = L_{X_\tau} f = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f \circ \phi_t^{X_\tau} \ ,$$

puis, comme $\mathbb{T}^k$ est connexe et compact, on a que $\exp : \mathfrak{t} \to \mathbb{T}^k$ est surjective par (3.1.1.5). Alors

$$Orb_{\mathbb{T}^k}(p) = \{g \cdot p \mid g \in \mathbb{T}^k\} = \{\exp(\xi) \cdot p \mid \xi \in \mathfrak{t}\} = \{\exp(t\xi) \cdot p \mid t \in \mathbb{R}, \xi \in \mathfrak{t}\} \ .$$

Il s'ensuit que chaque orbite est l'image du flot d'un champ fondamental, donc que f est constante sur les orbites de l'action. Maintenant, on sait par (3.1.2.8) que les orbites sont des variétés homogènes :

$$Orb_{\mathbb{T}^k}(p) \cong {}^{\mathbb{T}^k}\!\big/_{Stab_{\mathbb{T}^k}(p)}$$

Soit π la surjection canonique du quotient. Comme $\mathbb{T}^k$ est compact, $\pi(\mathbb{T}^k) \cong Orb_{\mathbb{T}^k}(p)$ est compact. Alors si on prend $\mu_\xi : M \to \mathbb{R}$ restreinte à $\mathcal{O}$ compact, μ_ξ a un point critique, i.e. $d(\mu_\xi)$ s'annule en un point $q \in \mathcal{O}$. En ce point, on a

$$0 = -(d\mu_\xi)((X_\eta)_q) = \iota_{X_\xi}\omega_q((X_\eta)_q) = \omega_q((X_\xi)_q, (X_\eta)_q)$$

Mais on a vu que la fonction f était constante sur $\mathcal{O}$. Donc elle est identiquement nulle sur $\mathcal{O}$. Comme on a pris une orbite quelconque, $\omega(X_\xi,X_\eta) = 0$ sur M, comme voulu. Alors $\mu : M \to \mathfrak{t}^*$ est application moment de l'action hamiltonienne de $\mathbb{T}^k$ sur M. □

Exemple 3.2.1.5. Considérons la variété symplectique $(\mathbb{C}^n, \omega_0 = \frac{i}{2}\sum_{k=1}^n dz_k \wedge d\overline{z}_k)$. On généralise l'exemple (3.1.6.4) en faisant agir $\mathbb{T}^n$ sur $\mathbb{C}^n$ par $\psi_{t_1,\ldots,t_n}(z_1, \ldots ,z_n) := (t_1^{k_1}z_1, \ldots ,t_n^{k_n}z_n)$, où $t_j \in S^1$. Montrons que l'application moment de cette action est

$$\begin{aligned} \mu : \quad \mathbb{C}^n \quad &\to \quad \mathbb{R}^n \\ (z_1, \ldots ,z_n) &\mapsto \frac{1}{2}(k_1|z_1|^2, \ldots , k_n|z_n|^2) \end{aligned}$$

L'invariance est simple à montrer :

$$\begin{aligned} \mu \circ \psi_{t_1,\ldots,t_n}(z_1, \ldots ,z_n) = \mu(t_1^{k_1}z_1, \ldots , t_n^{k_n}z_n) &= \frac{1}{2}(k_1|t_1^{k_1}z_1|^2, \ldots , k_n|t_n^{k_n}z_n|^2) \\ &= \frac{1}{2}(k_1|z_1|^2, \ldots , k_n|z_n|^2) = \mu(z_1, \ldots ,z_n) \ . \end{aligned}$$

On se place sur l'ouvert dense

$$(\mathbb{C}^n)^0 := \{(z_1,\dots,z_n) \mid \forall i \in \{1,\dots,n\}, z_i \neq 0\}$$

pour pouvoir écrire ω_0 en coordonnées polaires

$$x_k = r_k \cos(\theta_k) \ ,$$
$$y_k = r_k \sin(\theta_k) \ .$$

Avec ce changement de variables, on obtient que

$$\omega_0 = \sum_{k=1}^{n} r_k dr_k \wedge d\theta_k \ .$$

De plus, $\mu_j(r_1 e^{i\theta_1},\dots,r_n e^{i\theta_n}) = \frac{1}{2}k_j r_j^2$. Alors $d\mu_j = k_j r_j dr_j$. Comme $\mathfrak{t} \cong i\mathbb{R} \times \cdots \times i\mathbb{R}$, on prend $ie_j \in \mathfrak{t}$, où e_j est $j^{\text{ème}}$ élément d'une base de $\mathbb{R}^n$. Alors $\exp(tie_j) = (1,\dots,1,e^{it},1,\dots,1)$ est une courbe représentant ie_j. Son champ fondamental $(X_{ie_j})_z \in T_z\mathbb{C}^n$ est représenté par la courbe

$$\exp(ite_j)\cdot z = \psi_{1,\dots,1,e^{it},1,\dots,1}(z_1,\dots,z_n) = (z_1,\dots,e^{itk_j}z_j,\dots,z_n) \ .$$

Alors on a que

$$\begin{aligned}(X_{ie_j})_z &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\psi_{1,\dots,1,e^{it},1,\dots,1}(z_1,\dots,z_n) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(z_1,\dots,e^{itk_j}z_j,\dots,z_n) \\ &= (0,\dots,ik_j z_j,\dots,0) = k_j(0,\dots,iz_j,\dots,0) = k_j\Big(\frac{\partial}{\partial\theta_j}\Big)_z \ .\end{aligned}$$

On peut ainsi calculer

$$\begin{aligned}\iota_{X_{ie_j}}\omega_0 &= \sum_{k=1}^{n} r_k dr_k \wedge d\theta_k(k_j\frac{\partial}{\partial\theta_j},\cdot) = r_j dr_j \wedge d\theta_j(k_j\frac{\partial}{\partial\theta_j},\cdot) \\ &= -r_j k_j dr_j = -d\mu_j \ .\end{aligned}$$

Alors μ est application moment sur $(\mathbb{C}^m)^0$ et donc sur $\mathbb{C}^m$ par continuité. On remarque que si $k_j = 1, \forall j \in \{1,\dots,n\}$, alors

$$Im(\mu) = \{(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_i \geq 0\}$$

donc que l'image de l'application moment μ est le premier quadrant.

Théorème 3.2.1.6 (Atiyah-Guillemin-Sternberg). *Soit* (M,ω) *une variété symplectique compacte et connexe. Soit* $\psi : \mathbb{T}^k \to Symp(M)$ *une action hamiltonienne torique d'application moment* $\mu : M \to \mathbb{R}^k$*. Alors on a que*

1) *les courbes de niveau de* μ *sont connexes*
2) *l'image de* μ *est l'enveloppe convexe des images des points fixes de l'action*

.

Démonstration. Voir (McDuff et Salamon, 2017), p.173. □

Définition 3.2.1.7. L'image $\mu(M) = Im(\mu)$ est appelée le polytope moment de l'action hamiltonienne de tore.

Remarque 3.2.1.8. La condition que M soit compacte dans le théorème (3.2.1.6) peut être remplacée par une condition sur l'application moment (qu'elle soit propre).

Exemple 3.2.1.9. À la lumière du théorème (3.2.1.6), on réinspecte l'exemple (3.1.5.6). On a que l'application moment de l'action est la fonction hauteur $h : S^2 \to \mathbb{R}$. Comme S^2 est une variété symplectique compacte connexe sur laquelle le cercle agit, le théorème s'applique. On remarque que
1) le théorème (3.2.1.6) nous dit que les courbes de niveau de h sont connexes. C'est bien le cas, vu que les courbes de niveau $h^{-1}(c), c \in (-1,1)$ sont des coupures de S^2 parallèles à l'équateur et homéomorphes à S^1, alors que $h^{-1}(-1) = s$ et $h^{-1}(1) = n$, les pôles nord et sud, connexes en tant que singletons.
2) l'image de h est $[-1,1]$, qui est convexe. Les points fixes de l'action sont les pôles nord n et sud s. On a $h(n) = 1$ et $h(s) = -1$. Donc l'enveloppe convexe de l'image des points fixes de l'action est $[-1,1] = h(S^2)$.

3.2.2 Action fidèle de tore

Soit (M,ω) une variété symplectique, avec $\rho : \mathbb{T}^k \to Diff(M)$ une action de tore hamiltonienne, d'application moment μ.

Théorème 3.2.2.1. *Si l'action de tore est fidèle, alors* $\dim(M) \geq 2k$.

Démonstration. Soit $M_0 \subseteq M$ l'ouvert dense dont les points ont tous des orbites principales (donné par le lemme (3.1.2.12)). Soit $\mathcal{O}$ une orbite principale de l'action de tore, i.e. $\dim(\mathcal{O}) = k$. Soit $p \in \mathcal{O}$. Alors $T_p\mathcal{O}$ est de dimension k. Montrons que $T_p\mathcal{O} \subseteq T_pM$ est un sous-espace ω_p-isotrope. Nous reprenons une partie des arguments dans la preuve du théorème (3.2.1.4). Comme $\mathbb{T}^k$ agit sur M de façon symplectique, on a que $L_{X_\xi}\omega = 0, \forall \xi \in \mathfrak{t}$. On a vu qu'alors la proposition (2.1.1.1) nous permettait de déduire que $L_{X_\tau}(\omega(X_\xi, X_\eta)) = 0, \forall \xi,\eta,\tau \in \mathfrak{t}$. Ceci implique que $f := \omega(X_\xi, X_\eta)$ est une fonction constante sur $\mathcal{O}$. Comme $\mathbb{T}^k$ est compact, $\mathcal{O}$ est compact, par le corollaire (3.1.2.14). Alors $\mu_\xi : M \to \mathbb{R}$ restreinte à $\mathcal{O}$ a un point critique. En ce point, disons p, on a $(d\mu_\xi)_p = 0$. Alors

$$\omega_p(X_p, Y_p) = 0, \forall X_p, Y_p \in T_p\mathcal{O} \ .$$

C'est-à-dire que $T_p\mathcal{O} \subseteq T_pM$ est un sous-espace isotrope. Alors il existe une base dans laquelle ω_p s'écrit comme $\omega_p = \begin{pmatrix} 0 & I_m \\ -I_m & 0 \end{pmatrix}$. Le plus grand sous-espace isotrope est de dimension $\frac{\dim(M)}{2}$. Alors

$$k = \dim(\mathcal{O}) = \dim(T_p\mathcal{O}) \leq \frac{\dim(M)}{2} \ .$$

□

Définition 3.2.2.2. Une variété torique symplectique est une variété symplectique (M,ω) compacte et connexe munie d'une action hamiltonienne de tore $\mathbb{T}^n$ fidèle et maximale (i.e. $n = \frac{\dim(M)}{2}$), avec un choix d'application moment μ pour l'action de tore.

Remarque 3.2.2.3. Étant donné une variété torique $(M,\omega,\mathbb{T}^n,\mu)$, on a par le théorème d'Atiyah (3.2.1.6) que $\triangle := \mu(M)$ est un polytope convexe compact dans $\mathbb{R}^n$.

Définition 3.2.2.4. Deux variétés toriques $(M_i,\omega_i,\mathbb{T}_i,\mu_i)$, $i \in \{1,2\}$, sont équivalentes s'il existe
i) $\lambda : \mathbb{T}_1 \to \mathbb{T}_2$ un isomorphisme de groupes de Lie ;
ii) $\varphi : M_1 \to M_2$ un symplectomorphisme λ-équivariant, c'est-à-dire que $\forall p \in M_1, \forall g \in \mathbb{T}_1, \varphi(g \cdot p) = \lambda(g) \cdot \varphi(p)$.

3.2.3 Théorème de Delzant version symplectique

Définition 3.2.3.1. On dit que $\triangle \subset (\mathbb{R}^n)^* = \mathfrak{t}^*$ est un polytope de Delzant si
i) $\triangle$ est simple : chaque sommet est point de rencontre de n arêtes ;
ii) $\triangle$ est rationnel : toutes les arêtes se rencontrant en un sommet p sont rationnelles, c'est-à-dire que chaque arête est de la forme $p + tu_i$, avec $u_i \in \mathbb{Z}^n$;
iii) $\triangle$ est lisse : pour chaque sommet p, les arêtes sont $p + tu_i$ et les u_i constituent une $\mathbb{Z}$-base de $\mathbb{Z}^n$.

Définition 3.2.3.2. Un élément $v \in \mathbb{Z}^n$ est dit primitif s'il ne peut être écrit comme $v = ku$ avec $u \in \mathbb{Z}^n$ et $k \in \mathbb{Z}_{>1}$. Par exemple, (2,2) et (4,6) $\in (\mathbb{R}^2)^*$ ne sont pas primitifs, alors que (1,1), (4,3) et (1,0) le sont.

Remarque 3.2.3.3. Un polytope de Delzant $\triangle \subset (\mathbb{R}^n)^*$ peut être décrit de façon unique comme intersection d'hyperplans. En effet, un hyperplan est complètement déterminé par un vecteur normal. Soit d le nombre de faces de $\triangle$. Soient $v_i \in (\mathbb{R}^n)^*$ les d vecteurs normaux primitifs pointant vers l'intérieur des d faces de $\triangle$. Chaque hyperplan H_{v_i} déterminé par v_i est décrit algébriquement par

$$H_{v_i} = \{x \in (\mathbb{R}^n)^* \mid x(v_i) \geq \lambda_i\}$$

pour un $\lambda_i \in \mathbb{R}$ donné. Alors

$$\triangle = \bigcap_{i=1}^{d} H_{v_i} = \{x \in (\mathbb{R}^n)^* \mid x(v_i) \geq \lambda_i, i \in \{1, \ldots, d\}\} .$$

Théorème 3.2.3.4 (Delzant). *Les variétés toriques sont classifiées par leurs polytopes de Delzant et la bijection est donnée par l'application moment :*

$$\begin{array}{ccc} \{\textit{variété toriques équivalentes}\} & \xrightarrow{1-1} & \{\textit{polytopes de Delzant modulo transformation affine}\} \\ (M^{2n}, \omega, \mathbb{T}^n, \mu) & \longmapsto & \mu(M) \end{array}$$

Démonstration. Nous ne montrerons que la surjectivité de la correspondance, c'est-à-dire qu'à un polytope de Delzant donné, nous associerons une variété torique symplectique $(M_\triangle, \omega_\triangle, \mathbb{T}^n, \mu_\triangle)$ telle que $\mu_\triangle(M_\triangle) = \triangle$. Pour l'injectivité, voir l'article de Delzant (Delzant, 1988).

Soit $E = \{e_1, \ldots, e_d\}$ la base standard de $\mathbb{R}^d$, où d est le nombre de faces de $\triangle \subset (\mathbb{R}^n)^*$. On considère l'application

$$\pi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n$$
$$e_i \mapsto v_i$$

étendue par linéarité, où v_i est un vecteur primitif et normal à la i-ème face de $\triangle$ et pointant vers l'extérieur du polytope moment.

Lemme 3.2.3.5. *π est surjective et envoie $\mathbb{Z}^d$ sur $\mathbb{Z}^n$.*

Démonstration. E est base de $\mathbb{R}^d$ mais aussi $\mathbb{Z}$-base de $\mathbb{Z}^d$. On remarque que $\{v_1, \ldots, v_d\}$ engendre $\mathbb{Z}^n$. En effet, à un sommet $p \in \triangle$, comme $\triangle$ est simple, il y a n vecteurs $u_1, \ldots, u_n \in (\mathbb{Z}^n)^*$ correspondant aux n arêtes se joignant en p. Comme $\triangle$ est lisse, $\{u_1, \ldots, u_n\}$ forme une $\mathbb{Z}$-base de $\mathbb{Z}^n$. Comme on considère les polytopes de Delzant modulo transformation affine, on suppose sans perte de généralité que $\{u_1, \ldots, u_n\}$ est en fait la base standard $\mathbb{R}^n$. Alors les vecteurs primitifs normaux extérieurs aux faces adjointes à p sont $-u_1, \dots, -u_n$ et donc $\{v_1, \dots, v_d\}$ contient ces vecteurs et forme bien une base de $\mathbb{Z}^n$. Alors π est surjective et $\pi(\mathbb{Z}^d) = \mathbb{Z}^n$. $\square$

Ainsi π induit une application surjective entre tores

$$\tilde{\pi} : \mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d \to \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$$

et dont le noyau est $N := Ker(\tilde{\pi})$. N est un sous-groupe de Lie de $\mathbb{T}^d$, vu que N est fermé (car $N = \tilde{\pi}^{-1}(1, \dots, 1)$). Comme N est un fermé dans un compact, il est compact. De plus, $\mathbb{T}^d$ est abélien, donc N est abélien. Voyons que N est connexe. Nous aurons besoin du lemme suivant :

Lemme 3.2.3.6.

$$Ker(\tilde{\pi}) = Ker(\pi)/\mathbb{Z}^d \; .$$

Démonstration. On utilisera la commutativité du diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^d & \xrightarrow{\pi} & \mathbb{R}^n \\ {\scriptstyle \alpha_d}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_n} \\ \mathbb{T}^d & \xrightarrow{\tilde{\pi}} & \mathbb{T}^n \end{array}$$

($\supseteq$)

Soit $y + \mathbb{Z}^d \in Ker(\pi)/\mathbb{Z}^d$. On a directement que

$$\tilde{\pi}([y]_d) = [\pi(y)]_n = [0]_n \; .$$

Donc $[y]_d \in Ker(\tilde{\pi})$.

($\subseteq$)

Soit $x + \mathbb{Z}^d \in Ker(\tilde{\pi})$. On remarque que

$$Ker(\tilde{\pi}) = \{[x]_d \in \mathbb{T}^d \mid \tilde{\pi}[x]_d = [0]_n\} = \{[x]_d \in \mathbb{T}^d \mid [\pi(x)]_n = [0]_n\} = \{[x]_d \in \mathbb{T}^d \mid \pi(x) \in \mathbb{Z}^n\} \; .$$

Alors on a que $\pi(x) \in \mathbb{Z}^n$, avec π surjective envoyant $\mathbb{Z}^d$ sur $\mathbb{Z}^n$. Alors soit $y \in \mathbb{Z}^d$ tel que $\pi(y) = \pi(x)$. On a donc que

$$[x]_d = x + \mathbb{Z}^d = (x-y) + \mathbb{Z}^d = [x-y]_d \ ,$$

mais $\pi(x-y) = \pi(x) - \pi(y) = 0$, donc $x - y \in Ker(\pi)$, et ainsi

$$x + \mathbb{Z}^d = (x-y) + \mathbb{Z}^d \in {Ker(\pi)}/{\mathbb{Z}^d} \ ,$$

comme voulu. $\square$

Comme $Ker(\pi)$ est un espace vectoriel, il est connexe et alors le quotient N est connexe (vu qu'il est l'image d'un connexe par une application continue : l'application quotient). Ainsi, N est un sous-groupe de Lie compact, abélien et connexe. Donc N est un sous-tore de $\mathbb{T}^d$ de dimension $(d-n)$, par le théorème du rang (vu que π est surjective). Soient $j : N \hookrightarrow \mathbb{T}^d$ l'inclusion et $\mathfrak{n} = Lie(N)$. Considérons la suite exacte courte suivante :

$$[0]_d \hookrightarrow N \overset{j}{\hookrightarrow} \mathbb{T}^d \xrightarrow{\tilde{\pi}} \mathbb{T}^n \to [0]_n \tag{3.2}$$

qui est bien exacte, car

· j est injective ;

· $Ker(\tilde{\pi}) = Im(j) = N$;

· $\tilde{\pi}$ est surjective. La proposition (3.1.1.7) implique que la suite d'algèbres de Lie induite

$$0 \to \mathfrak{n} \xrightarrow{j_*} \mathbb{R}^d \xrightarrow{\pi_*} \mathbb{R}^n \to 0$$

est exacte. De plus, celle-ci induit une suite exacte duale :

$$0 \to (\mathbb{R}^n)^* \xrightarrow{\pi^*} (\mathbb{R}^d)^* \xrightarrow{j^*} \mathfrak{n}^* \to 0 \ . \tag{3.3}$$

Remarque 3.2.3.7. Par abus de langage, nous avons noté $\tilde{\pi}_*$ par π_* et $(\tilde{\pi}_*)^*$ par π^*. De même, j^* est en fait $(j_*)^*$.

Considérons maintenant $(\mathbb{C}^d, \omega_0)$ munie de l'action de tore hamiltonienne standard (donnée dans l'exemple (3.2.1.5)) :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{T}^d \times \mathbb{C}^d & \to & \mathbb{C}^d \\ ((e^{it_1}, \dots, e^{it_d}),(z_1, \dots ,z_d)) & \mapsto & (e^{it_1}z_1, \dots , e^{it_n}z_d) \end{array}$$

On a vu qu'une application moment de cette action est

$$\begin{array}{rccc} \phi : & \mathbb{C}^d & \to & (\mathbb{R}^d)^* \\ & (z_1, \dots ,z_d) & \mapsto & \frac{1}{2}(|z_1|^2, \dots , |z_d|^2) + \lambda \end{array}$$

On pose $\lambda := (\lambda_1, \dots ,\lambda_d) \in (\mathbb{R}^d)^*$, où les λ_i sont donnés par

$$\triangle = \{x \in (\mathbb{R}^n)^* \mid x(v_i) \leq \lambda_i, i \in \{1, \dots ,d\}\} .$$

Par la proposition (3.1.5.10), on a que $N \subseteq \mathbb{T}^d$ agit sur $\mathbb{C}^d$ de manière hamiltonienne, avec application moment

$$j^* \circ \phi : \mathbb{C}^d \to \mathfrak{n}^* .$$

Lemme 3.2.3.8.

$$(j^* \circ \phi)^{-1}(0) = \phi^{-1}(\pi^*(\triangle)) .$$

Démonstration. On remarque que

$$\begin{aligned} Im(\phi) &= \{(x_1, \dots ,x_d) \in (\mathbb{R}^d)^* \mid \exists (z_1, \dots ,z_d) \in \mathbb{C}^d \text{ t.q. } \lambda + \frac{1}{2}|z|^2 = (x_1, \dots ,x_d)\} \\ &= \{(x_1, \dots ,x_d) \in (\mathbb{R}^d)^* \mid \exists (z_1, \dots ,z_d) \in \mathbb{C}^d \text{ t.q. } x_i = \lambda_i + \frac{1}{2}|z_i|^2, \forall i \in \{1, \dots ,d\}\} \\ &= \{(x_1, \dots ,x_d) \in (\mathbb{R}^d)^* \mid x_i \geq \lambda_i, \forall i \in \{1, \dots , d\}\} . \end{aligned}$$

D'un autre côté, on remarque que

$$\begin{aligned} \pi^*(x)(y) &= x(\pi_*(y)) \\ &= x(\pi(y_1, \dots ,y_d)) \qquad [\text{ car } \pi \text{ est linéaire }] \\ &= x(\sum_{i=1}^{d} y_i v_i) = \sum_{i=1}^{d} y_i x(v_i) . \end{aligned}$$

Et donc $\pi^*(x) = (x(v_1), \ldots, x(v_d)) \in (\mathbb{R}^d)^*$. Conséquemment,

$$\begin{aligned} Im(\pi^*) &= \{(y_1, \ldots, y_d) \in (\mathbb{R}^d)^* \mid \exists x \in (\mathbb{R}^n)^* \text{ t.q. } y_i = x(v_i), \forall i \in \{1, \ldots, d\}\} \\ &= \{(x(v_1), \ldots, x(v_d) \in (\mathbb{R}^d)^* \mid x \in (\mathbb{R}^n)^*\} \ . \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} \pi^*(\triangle) &= \{(x(v_1), \ldots, x(v_d)) \in (\mathbb{R}^d)^* \text{ t.q. } x \in \triangle\} \\ &= \{(x(v_1), \ldots, x(v_d)) \in (\mathbb{R}^d)^* \text{ t.q. } x(v_i) \leq \lambda_i, \forall i \in \{1 \ldots, d\}\} \\ &= Im(\pi^*) \bigcap \cap_{i=1}^d \{y_i \leq \lambda_i\} \\ &= Im(\pi^*) \bigcap Im(\phi) \ . \end{aligned}$$

Maintenant, on a que

$$\begin{aligned} (j^* \circ \phi)^{-1}(0) &= \{z \in \mathbb{C}^d \mid j^* \circ \phi(z) = 0\} = \{z \in \mathbb{C}^d \mid \phi(z) \in Ker(j^*)\} \\ &= \{z \in \mathbb{C}^d \mid \phi(z) \in Im(\pi^*)\} \ , \end{aligned}$$

et aussi que

$$\begin{aligned} \phi^{-1}(\pi^*(\triangle)) &= \{z \in \mathbb{C}^d \mid \phi(z) \in \pi^*(\triangle)\} = \{z \in \mathbb{C}^d \mid \phi(z) \in Im(\pi^*) \cap Im(\phi)\} \\ &= \{z \in \mathbb{C}^d \mid \phi(z) \in Im(\pi^*)\} \ . \end{aligned}$$

Alors on a bien l'égalité voulue. □

Comme $\triangle \neq \emptyset$, alors $\pi^*(\triangle) = Im(\pi^*) \cap Im(\phi) \neq \emptyset$ et on a que $\phi^{-1}(\pi^*(\triangle)) = (j^* \circ \phi)^{-1}(0) \neq \emptyset$. On peut donc définir

$$Z := (j^* \circ \phi)^{-1}(0) = \phi^{-1}(\pi^*(\triangle)) \subseteq \mathbb{C}^d$$

qui a la propriété que

$$\phi(Z) = \pi^*(\triangle) \ . \tag{3.4}$$

En effet, $\phi(Z) = \phi \circ \phi^{-1}(\pi^*(\triangle)) \subseteq \pi^*(\triangle)$. De plus, comme $\pi^*(\triangle) = Im(\phi) \cap Im(\pi^*)$, pour $\pi^*(p) \in \pi^*(\triangle), \exists z \in \mathbb{C}^d$ t.q. $\phi(z) = p$, et $z \in Z = \phi^{-1}(\pi^*(\triangle))$ vu que $\phi(z) \in \pi^*(\triangle)$.

La suite exacte (3.3) nous dit que j^* est linéaire surjective. Alors 0 est valeur régulière de $j^* \circ \phi$ (en voyant la définition de ϕ), et ainsi, par le théorème de la préimage, Z est une sous-variété lisse de $\mathbb{C}^d$ de dimension réelle

$$2d - \dim(\mathfrak{n}^*) = 2d - \dim(N) = 2d - (d-n) = d+n \ .$$

Lemme 3.2.3.9. *Z est compacte et N agit librement sur Z.*

Démonstration.

compacité : La compacité de Z découle du fait que ϕ est propre. Alors, comme on a vu que $Z = \phi^{-1}(\pi^*(\triangle))$ et que $\pi^*(\triangle)$ est compact, Z est compacte.

action libre : il nous faut montrer que $\forall z \in Z, N_z = \{(1,\dots,1) = e_N\}$. Soit $z \in Z$. Par (3.4), il existe $p \in \triangle$ t.q. $\pi^*(p) = \phi(z)$. Supposons que $z_i = 0$, pour un certain $i \in \{1,\dots,d\}$. Donc $|z_i|^2 = 0$ et on a alors que

$$\begin{aligned} \lambda_i = \lambda_i + \frac{1}{2}|z_i|^2 &= <\phi(z), e_i> = <\pi^*(p), e_i> \\ &= <p,\pi_*(e_i)> = <p,\pi(e_i)> = <p,v_i> = p(v_i) \ . \end{aligned}$$

Ceci signifie que $p \in \triangle$ associé à $z \in Z$ est sur le bord du $i^{\text{ème}}$ hyperplan H_{v_i}. Alors un point intérieur de $\triangle$ a que son point associé dans Z n'a aucune composante nulle, donc l'action de N sur un tel élément est libre. Soit $p \in \triangle$ un sommet, et z son point associé dans Z. Alors, par simplicité de $\triangle$, p est à la jonction de n arêtes, et alors n composantes de z sont nulles. Sans perte de généralité, disons que $z = (0,\dots,0,z_{n+1},\dots,z_d)$. Alors

$$\mathbb{T}^d_z = \{(t_1,\dots,t_n,1,\dots,1) \in \mathbb{T}^d\} \ .$$

Comme notre polytope est de Delzant, on peut choisir des vecteurs normaux $v_1,\dots,v_n$ qui forment une $\mathbb{Z}$-base de $\mathbb{Z}^n$. Alors l'application $\tilde{\pi}$ restreinte à $\mathbb{T}^d_z$ est bijective. Vu que $N = Ker(\tilde{\pi})$, on a alors que

$$N_z = N \cap \mathbb{T}^d_z = Ker(\tilde{\pi}) \cap \mathbb{T}^d_z$$

et on a donc $N_z = \{e_N\}$, car $\mathbb{T}^d_z$ est en bijection avec $\mathbb{T}^n$. Alors pour tous les sommets ainsi que pour tous les points intérieurs, les stabilisateurs sont triviaux. Soit $p \in \triangle$ sur une face. On a que $z \in Z$ correspond à r coordonnées nulles. Sans perte de généralité, disons que ce sont les r premières. Soit $\alpha \in \triangle$ un sommet à l'intersection des r hyperplans donnés par les coordonnées nulles. Soit $z_\alpha \in Z$ le point lui correspondant selon la relation (3.4). Soit $g \in N_z$. Sans perte de généralité, on suppose que $g = (t_1, \ldots, t_r, 1, \ldots, 1)$. On remarque que

$$g \cdot z_\alpha = (t_1, \ldots, t_r, 1, \ldots, 1) \cdot z_\alpha = z_\alpha \ ,$$

puisque $z_\alpha = (0, \ldots, 0, 1, \ldots, 1)$ et il y a $n > r$ zéros. Ainsi, on a que

$$N_{z_\alpha} \supseteq N_z \ ,$$

mais on a vu que N_{z_α} est trivial. Alors le stabilisateur de z est aussi trivial, et on a couvert tous les cas, établissant que l'action est libre. $\square$

On considère la réduction symplectique

$$M_\triangle := {}^{Z}\!/_{N} \ .$$

Comme N agit librement sur Z, le théorème de Marsden-Weinstein (3.1.6.1) nous dit que $M_\triangle$ est une variété symplectique de dimension

$$\dim(M_\triangle) = \dim(Z) - \dim(N) = d + n - (d - n) = 2n \ .$$

Soit $k : Z \hookrightarrow \mathbb{C}^d$ l'inclusion, et $p : Z \to M_\triangle$ la projection canonique. Alors la forme symplectique $\omega_\triangle$ de $M_\triangle$ satisfait la relation

$$p^*\omega_\triangle = j^*\omega_0 \ .$$

On note aussi que comme Z est courbe de niveau de l'application moment $j^* \circ \phi$ d'une action torique hamiltonienne, le théorème d'Atiyah (3.2.1.6) nous dit que

Z est connexe, puisque $j^* \circ \phi$ est propre. De plus, comme $Z/_N$ est munie de la topologie quotient, avec application quotient p, alors p est continue, $p(Z) = M_\triangle$, et donc $M_\triangle$ est compacte et connexe. Nous allons maintenant doter $M_\triangle$ d'une structure de variété torique, avec application moment $\mu_\triangle$, telle que $\mu_\triangle(M_\triangle) = \triangle$. Soit $p \in \triangle \subset (\mathbb{R}^n)^*$ un sommet de notre polytope, et soit $z \in Z$ t.q. $\pi^*(p) = \phi(z)$. On a vu que l'application restreinte

$$\tilde{\pi} : \mathbb{T}^d_z \to \mathbb{T}^n$$

est une bijection, car p est un sommet. Soit alors $\sigma : \mathbb{T}^n \to \mathbb{T}^d_z$ son inverse. Vu que nous avons trouvé un inverse à droite de $\tilde{\pi}$, le lemme de scindage nous dit que la suite exacte courte (3.2) est en fait scindée, et que donc

$$\mathbb{T}^d \cong N \times \mathbb{T}^n \cong N \times \mathbb{T}^d_z \,. \tag{3.5}$$

Laissons agir $\mathbb{T} := \mathbb{T}^n \cong \mathbb{T}^d_z \subset \mathbb{T}^d$ (sous-tore n-dimensionnel) sur $Z \subset \mathbb{C}^d$. Soit $\varphi : \mathbb{T} \times Z \to Z$ cette action. Cette action est la restriction de celle de $\mathbb{T}^d$ sur $\mathbb{C}^d$. Il faut voir qu'elle est bien définie. Soit $v \in Z$ et $g \in \mathbb{T}$. Par invariance de l'application moment ϕ, on a que

$$\phi \circ \varphi_g(v) = \phi(v) \;.$$

Donc $\phi(\varphi_g(v)) \in \phi(Z) = \pi^*(\triangle)$. Alors $\varphi_g(v) \in \phi^{-1}(\pi^*(\triangle)) = Z$ et l'action est bien définie.

On veut faire descendre cette action au quotient $Z/_N$. On définit l'action

$$\tilde{\varphi} : \mathbb{T} \times Z/_N \to Z/_N$$

par $\tilde{\varphi}_g([z]) := [\varphi_g(z)]$. Voyons que ceci est bien défini. Soient $z_1, z_2 \in Z$ tels que $[z_1] = [z_2]$. Alors $\exists n \in N$ tel que $n \cdot z_2 = z_1$. Comme $n, g \in \mathbb{T}^d$, ils commutent. Maintenant, il suffit de remarquer que $n \cdot \varphi_g(z_2) = \varphi_g \circ n \cdot z_2 = \varphi_g(z_1)$, et alors $\tilde{\varphi}_g[z_1] = \tilde{\varphi}_g[z_2]$, comme voulu.

Alors $\tilde{\varphi}$ est une action sur $M_\triangle$. On considère maintenant le diagramme

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, hook, "k"] \arrow[d, "p"] & \mathbb{C}^d \arrow[r, "\phi"] & (\mathbb{R}^d)^* \cong \mathfrak{n}^* \oplus (\mathbb{R}^n)^* \arrow[r, "\sigma^*"] & (\mathbb{R}^n)^* \\ M_\triangle \end{tikzcd}$$

où σ^* est la projection sur le deuxième facteur. On pose $K := \sigma^* \circ \phi \circ k : Z \to (\mathbb{R}^n)^*$. On remarque que pour $n \in N$,

$$\begin{aligned} K(n \cdot z) &= \sigma^* \circ \phi \circ k(n \cdot z) = \sigma^* \circ \phi(n \cdot z) \\ &= \sigma^* \circ \phi(z) \qquad [\text{ invariance }] \\ &= \sigma^* \circ \phi \circ k(z) = K(z) \ , \end{aligned}$$

avec $\cdot$ l'action de N sur Z. Ainsi la propriété universelle des quotients nous livre le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[d, "p"'] \arrow[dr, "K"] & \\ M_\triangle \arrow[r, dotted, "\mu_\triangle"'] & (\mathbb{R}^n)^* \end{tikzcd}$$

Par la proposition (3.1.6.6), on a que $\mu_\triangle$ est application moment pour $\tilde{\varphi}$. De plus, on a que

$$\begin{aligned} \mu_\triangle(M_\triangle) &= \mu_\triangle \circ p(Z) = K(Z) = \sigma^* \circ \phi \circ k(Z) = \sigma^* \circ \phi(Z) \\ &= \sigma^* \circ \pi^*(\triangle) = (\pi \circ \sigma)^*(\triangle) = \triangle \ , \end{aligned}$$

tel que voulu. On a donc construit une variété torique symplectique $(M_\triangle, \omega_\triangle, \mathbb{T}^n, \mu_\triangle)$ à partir de $\triangle \in (\mathbb{R}^n)^*$ qui est telle que $\mu_\triangle(M_\triangle) = \triangle$. $\square$

3.3 Géométrie kählérienne

Soit (M,ω) une variété symplectique.

Définition 3.3.0.1. Soit J une structure presque-complexe sur M. Si
i) $\forall p \in M$, on a que $\omega(\xi_p, J\xi_p) > 0, \forall \xi_p \in T_pM \backslash \{0\}$, alors on dit que J est dominée par ω.
ii) $\forall p \in M, \omega(\xi_p, \eta_p) = \omega(J\xi_p, J\eta_p), \forall \xi_p, \eta_p \in T_pM$, alors J est transformation symplectique de ω.
Si on a i) et ii), on dit que J est compatible avec ω.

Proposition 3.3.0.2. *Si J et ω sont compatibles, alors on a que*

$$g_{\omega,J}(\xi_p,\eta_p) := \omega(\xi_p, J\eta_p)$$

est une métrique riemannienne sur M.

Définition 3.3.0.3. Une métrique riemannienne g sur M est dite ω-compatible si elle est telle que $J : TM \to TM$ définie par

$$g_p(J_p(u),v) := \omega_p(u,v), \forall p \in M, \forall u,v \in T_pM$$

est une structure presque-complexe sur M. Cette équation définit bien J de façon unique vu que g et ω sont non-dégénérées. Alors on dit que (g,J) est une structure presque kählérienne sur M qui est ω-compatible.

Définition 3.3.0.4. Une structure kählérienne ω-compatible est une structure presque-kählérienne ω-compatible telle que sa structure presque-complexe J est intégrable (i.e. $N_J = 0$, voir (2.2.1.5)). Alors (g,J) est une structure kählérienne compatible sur (M,ω).

Exemple 3.3.0.5. Pour $\mathbb{C}^{m+1}$, on a la métrique standard plate

$$g_0 = \sum_{j=0}^{m} dx_j^{\otimes 2} + dy_j^{\otimes 2} = \sum_{j=0}^{m} dr_j^{\otimes 2} + r_j^2 d\phi_j^{\otimes 2} = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{m} dz_j \otimes d\overline{z}_j + d\overline{z}_j \otimes dz_j$$

qui est ω_0-compatible ($\omega_0 = \sum_{j=0}^{m} dx_j \wedge dy_j = \frac{i}{2} \sum_{j=0}^{m} dz_j \wedge d\overline{z}_j$). La structure complexe correspondante J_0 est la structure complexe standard sur $\mathbb{C}^{m+1}$:

$$(J_0)_z = iId_{T_z\mathbb{C}^{m+1}} .$$

Vérifions que g_0,ω_0 et J_0 sont compatibles. Commençons par J_0 et ω_0 (selon la définition (3.3.0.1)) :

$$i)\ \omega_0(\xi,J_0(\xi)) = \frac{i}{2}\sum_{j=0}^{m} dz_j \wedge d\overline{z}_j(\xi,i\xi) = \frac{i}{2}\sum_j dz_j(\xi)d\overline{z}_j(i\xi) - d\overline{z}_j(\xi)dz_j(i\xi)$$
$$= \frac{i}{2}\sum_j -i\big(dz_j(\xi_j)d\overline{z}_j(\xi_j) + d\overline{z}_j(\xi_j)dz_j(\xi_j)\big) = \frac{i}{2}\sum_j -2idz_j(\xi_j)d\overline{z}_j(\xi_j)$$
$$= \sum_j dz_j(\xi_j)d\overline{z}_j(\xi_j) = \sum_j (dx_j + idy_j)(((\xi_j)_x + i(\xi_j)_y)(dx_j - idy_j)(((\xi_j)_x + i(\xi_j)_y)$$
$$= \sum_j ((\xi_j)_x + i(\xi_j)_y)((\xi_j)_x - i(\xi_j)_y) = \sum_j (\xi_j)_x^2 + (\xi_j)_y^2 = \sum_j |\xi_j|^2 > 0$$

car $\xi \neq 0$.

$$ii)\ \omega_0(J_0(\xi),J_0(\eta)) = \frac{i}{2}\sum_j dz_j \wedge d\overline{z}_j(i\xi,i\eta) = \frac{i}{2}\sum_j dz_j(i\xi)d\overline{z}_j(i\eta) - dz_j(i\eta)d\overline{z}_j(i\xi)$$
$$= \frac{i}{2}\sum_j dz_j(\xi)d\overline{z}_j(\eta) - dz_j(\eta)d\overline{z}_j(\xi) = \omega_0(\xi,\eta)\ .$$

Comme on a $i)$ et $ii)$, alors ω_0 et J_0 sont compatibles. Voyons que g_0 est bien la structure kählérienne déterminée par ω_0 et J_0 :

$$g_0(J_0(\xi),\eta) = \frac{1}{2}\sum_j dz_j \otimes d\overline{z}_j(i\xi,\eta) + d\overline{z}_j \otimes dz_j(i\xi,\eta) = \frac{1}{2}\sum_j dz_j(i\xi)d\overline{z_j}(\eta) + d\overline{z}_j(i\xi)dz_j(\eta)$$
$$= \frac{i}{2}\sum_j dz_j(\xi)d\overline{z}_j(\eta) - d\overline{z}_j(\xi)dz_j(\eta) = \omega_0(\xi,\eta)\ .$$

Alors (g_0,J_0,ω_0) est une structure kählérienne compatible sur $\mathbb{C}^{m+1}$.

Considérons l'action torique de $\mathbb{T}^{m+1}$ sur $\mathbb{C}^{m+1}$ donnée par

$$\begin{array}{rccccc} \rho: & \mathbb{T}^{m+1} & \times & \mathbb{C}^{m+1} & \to & \mathbb{C}^{m+1} \\ & ((t_0,\ldots,t_m), & & (z_0,\ldots,z_m)) & \mapsto & (t_0z_0,\ldots,t_mz_m) \end{array}$$

On a vu (3.2.1.5) que cette action est hamiltonienne d'application moment

$$\begin{array}{rccc} \mu: & \mathbb{C}^{m+1} & \to & \mathbb{R}^{m+1} \\ & (z_0,\ldots,z_m) & \mapsto & \frac{1}{2}(|z_0|^2,\ldots,|z_m|^2) \end{array}$$

Comme l'action est hamiltonienne, elle est en particulier symplectique, c'est-à-dire qu'on a que $\rho_t^*\omega_0 = \omega_0$, où $t \in \mathbb{T}^{m+1}$. Voyons que $\rho_t^* g_0 = g_0$, i.e. que ρ_t est une isométrie. On remarque que

$$\begin{aligned} r_j \circ \rho_t(z_0, \dots, z_m) &= r_j(t_0 z_0, \dots, t_m z_m) = r_j(t_j z_j) \\ &= r_j(z_j) \,. \qquad [\text{ car } t_j \in S^1 \,] \end{aligned}$$

De plus, on a que

$$\begin{aligned} \phi_j \circ \rho_t(z_0, \dots, z_m) &= \phi_j(t_0 z_0, \dots, t_m z_m) = \phi_j(t_j z_j) = \phi_j(e^{i\theta_j'} \cdot r_j e^{i\theta_j}) \\ &= \phi_j(r_j e^{i(\theta_j + \theta_j')}) = \theta_j + \theta_j' = \phi_j(z_0, \dots, z_m) + \theta_j' \,, \end{aligned}$$

où θ_j' est une constante. Alors $d(\phi_j \circ \rho_t) = d(\phi_j + \theta_j') = d\phi_j$. Par conséquent,

$$\begin{aligned} \rho_t^* g_0 &= \sum_{j=0}^{m} d(r_j \circ \rho_t)^{\otimes 2} + (r_j \circ \rho_t)^2 d(\phi_j \circ \rho_t)^{\otimes 2} \\ &= \sum_{j=0}^{m} dr_j^{\otimes 2} + r_j^2 d\phi_j^{\otimes 2} = g_0 \,. \end{aligned}$$

Donc l'action ρ préserve ω_0 et g_0. On a donc sur $\mathbb{C}^{m+1}$ une structure kählérienne plate (car g_0 est plate) qui est $\mathbb{T}^{m+1}$-invariante. La métrique canonique sur $\mathbb{C}^m$ donne la métrique canonique ronde sur S^{2m+1} : $g^{S^{2m+1}} := g_0\Big|_{S^{2m+1}} = i^* g_0$, où $i : S^{2m+1} \hookrightarrow \mathbb{C}^m$ est l'inclusion.

Soit $\pi : S^{2m+1} \to {S^{2m+1}}\big/{S^1} = \mathbb{C}P^m$ la fibration de Hopf. $\mathbb{T}^{m+1}$ agit sur S^{2m+1} par restriction. Cette action descend au quotient : en effet,

$$(t_0, \dots, t_m) \cdot e^{i\theta} z = e^{i\theta}(t_0, \dots, t_m) \cdot z$$

où $e^{i\theta} z$ est un élément dans la classe $[z] \in \mathbb{C}P^m$. Alors ceci montre que $t \cdot [z] = [t \cdot z]$, donc que l'action est bien définie sur $\mathbb{C}P^m$. De plus, le sous-groupe diagonal $S^1 \cong N := (e^{i\theta}, \dots, e^{i\theta}) \subset \mathbb{T}^{m+1}$ agit sur S^{2m+1} par restriction. Donc on a que le quotient ${\mathbb{T}^{m+1}}\big/{N} \cong \mathbb{T}^m$ agit sur $\mathbb{C}P^m \cong {S^{2m+1}}\big/{S^1} = {S^{2m+1}}\big/{N}$ et que

$(\mathbb{C}P^m, \omega^{FS}, \mathbb{T}^m)$ est une variété torique symplectique sous cette action. On remarque que N agit sur $\mathbb{C}^{m+1}$ par restriction, avec application moment

$$\mu_N(z) = \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{m} |z_j|^2 \, .$$

Ainsi, $S^{2m+1} = \mu_N^{-1}(\frac{1}{2})$ et N agit sur S^{2m+1} de manière libre. C'est un cas de réduction kählérienne.

CHAPITRE IV

GÉOMÉTRIE LOCALEMENT CONFORMÉMENT SYMPLECTIQUE

Les références pour ce chapitre sont principalement les trois articles suivants : (Istrati, 2016) ; (Madani *et al.*, 2017) ; (Chantraine et Murphy, 2016). On donne les détails de la preuve du résultat de Nicolina Istrati dans (Istrati, 2016) qui montre que toute variété LCK torique compacte est de Vaisman.

Remarque 4.0.0.1. Nous supposerons dans tout le chapitre que M est une variété lisse connexe.

4.1 Définitions et préliminaires

Soit M une variété lisse de dimension paire $2n \geq 4$.

Définition 4.1.0.1. Une forme différentielle $\Omega \in \Omega^2(M)$ non-dégénérée est dite localement conformément symplectique (LCS) s'il existe $\theta \in \Omega^1(M)$ fermée et non-exacte (autrement dit, $[\theta] \neq 0 \in H^1_{dR}(M)$) qui satisfait

$$d\Omega = \theta \wedge \Omega \, . \tag{4.1}$$

On appelle θ la forme de Lee de Ω. Notons que si $2n \geq 4$, la relation (4.1) définit θ de manière unique, par le lemme (1.1.3.2).

Définition 4.1.0.2. Si Ω est LCS et s'il existe une structure complexe J sur M

telle que

$$g(\cdot,\cdot) := \Omega(\cdot, J\cdot)$$

pour une métrique riemannienne J-invariante ($g = J^*g$), alors Ω est dite localement conformément kählérienne (LCK).

Lemme 4.1.0.3. *Si Ω est LCS (resp. LCK), alors $\forall u \in \mathcal{C}^\infty(M), \Omega_u := e^u\Omega$ est aussi LCS (resp. LCK), avec forme de Lee correspondante $\theta_u := \theta + du$.*

Démonstration. D'abord, comme e^u est une fonction positive, Ω_u est aussi non-dégénérée. On remarque que

$$\begin{aligned} d\Omega_u = d(e^u\Omega) = d(e^u) \wedge \Omega + e^u d\Omega &= e^u du \wedge \Omega + e^u\theta \wedge \Omega \\ &= (\theta + du) \wedge \Omega_u = \theta_u \wedge \Omega_u \ . \end{aligned}$$

De plus, θ_u est fermée, car

$$d(\theta + du) = d\theta + d^2u = 0 \ .$$

On remarque que comme du est une 1-forme exacte, alors

$$[\theta_u] = [\theta + du] = [\theta] \neq 0 \in H^1_{dR}(M) \ .$$

Ainsi nous avons notre résultat pour le cas LCS. Dans le cas LCK, $\hat{g}(\cdot,\cdot) := \Omega_u(\cdot, J\cdot) = e^u g(\cdot,\cdot)$ est une métrique J-invariante, vu que g l'est (on garde la même structure complexe). $\square$

Remarque 4.1.0.4. Ce lemme implique que les notions LCS et LCK sont conformément invariantes. Ainsi, vu que la conformalité est une relation d'équivalence, on peut définir la classe conforme d'une forme LCS (ou LCK) Ω par

$$[\Omega] := \{e^u\Omega \mid u \in \mathcal{C}^\infty(M)\} \ .$$

Proposition 4.1.0.5. *Ω est LCS (LCK resp.) si et seulement s'il existe un recouvrement ouvert $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ de M tel que $\Omega\Big|_{U_\alpha} = e^{\varphi_\alpha}\Omega_\alpha$, avec Ω_α une forme symplectique (resp. kählérienne) sur U_α et tel que la forme de Lee associée $\theta\Big|_{U_\alpha} = d\varphi_\alpha$ ne soit pas globalement exacte.*

Remarque 4.1.0.6. Si θ était globalement exacte, on aurait $\theta = df$ et alors

$$d(e^{-f}\Omega) = -e^{-f}df \wedge \Omega + e^{-f}d\Omega = 0$$

et donc Ω serait conforme à une forme symplectique. On traiterait alors de la théorie des variétés (globalement) conformément symplectiques.

Remarque 4.1.0.7. Si $\dim(M) = 2$, toute 2-forme est fermée. Dans ce cas une forme LCS est nécessairement symplectique. La théorie devient donc intéressante à compter de $\dim(M) = 4$, car alors il peut a priori y avoir des formes LCS non symplectiques.

Définition 4.1.0.8. Une variété M avec un choix de classe conforme LCS $[\Omega]$ est appelée une variété LCS. Une variété complexe avec un choix de classe conforme compatible LCK $[\Omega]$ est appelée une variété LCK.

Théorème 4.1.0.9 (Vaisman). *Une forme LCK sur une variété complexe (M,J) compacte est globalement conformément kählérienne si et seulement si la variété admet une métrique kählérienne.*

Démonstration. Voir l'article (Vaisman, 1980). □

Remarque 4.1.0.10. Une forme LCS (resp. LCK) telle que définie est parfois appelée LCS (resp. LCK) stricte. Dans la définition classique, on permet que notre forme soit globalement conformément symplectique (resp. kählérienne), correspondant à ce que la forme de Lee soit exacte. Le dernier théorème nous dit que la classe des variétés LCK est différente de celle des variétés CK (conformément kählériennes).

4.1.1 Revêtements d'une variété LCS ou LCK

Soit $(M,[\Omega])$ une variété LCS, avec θ la forme de Lee de Ω. Soit $\tilde{M}$ son revêtement universel, avec $\pi_{\tilde{M}} : \tilde{M} \to M$ sa projection.

Lemme 4.1.1.1. *Le relèvement de la forme de Lee est exacte. C'est-à-dire, il existe $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\tilde{M})$ t.q. $\pi_{\tilde{M}}^*\theta = d\varphi \in \Omega^1(\tilde{M})$.*

Démonstration. D'abord, comme θ est fermée, on a que

$$d(\pi_{\tilde{M}}\theta) = \pi_{\tilde{M}}(d\theta) = 0 \ .$$

De plus, $\pi_{\tilde{M}}^*\theta$ est exacte vu que $H^1_{dR}(\tilde{M}) = 0$, par la proposition (2.5.2.10). □

Corollaire 4.1.1.2. *La forme $\Omega_0 := e^{-\varphi}\pi_{\tilde{M}}^*\Omega \in \Omega^2(\tilde{M})$ est symplectique.*

Démonstration. Voyons que Ω_0 est fermée :

$$d\Omega_0 = -e^{-\varphi}d\varphi \wedge \pi_{\tilde{M}}^*\Omega + e^{-\varphi}\pi_{\tilde{M}}^*d\Omega = -e^{-\varphi}\pi_{\tilde{M}}^*\theta \wedge \pi_{\tilde{M}}^*\Omega + e^{-\varphi}\pi_{\tilde{M}}^*(\theta \wedge \Omega) = 0 \ .$$

Pour voir que Ω_0 est non-dégénérée, on remarque que $\pi_{\tilde{M}}$ est un difféomorphisme local surjectif, par définition de revêtement. Soit $\tilde{p} \in \tilde{M}$, avec $p := \pi_{\tilde{M}}(\tilde{p})$. Soit $\xi \in \left(T_{\tilde{p}}\tilde{M}\right)\backslash\{0\}$. Alors

$$\Omega_0(\xi, \cdot) = e^{-\varphi(\tilde{p})}\pi_{\tilde{M}}^*\Omega(\xi, \cdot) = e^{-\varphi(\tilde{p})}\Omega((\pi_{\tilde{M}})_*\xi, (\pi_{\tilde{M}})_*\cdot) \ .$$

Comme $(\pi_{\tilde{M}})_*$ est un isomorphisme, on a que $(\pi_{\tilde{M}})_*\xi \neq 0$. Comme Ω est non-dégénérée, on a qu'il existe $\eta \in T_pM$ t.q. $\Omega((\pi_{\tilde{M}})_*\xi, \eta) \neq 0$. Mais $(\pi_{\tilde{M}})_*\Big|_{\tilde{p}}$ est surjective, donc il existe $\tilde{\eta} \in T_{\tilde{p}}\tilde{M}$ t.q. $(\pi_{\tilde{M}})_*\tilde{\eta} = \eta$. De plus, $\tilde{\eta} \neq 0$, vu que $\Omega((\pi_{\tilde{M}})_*\xi,\eta) \neq 0$ et $(\pi_{\tilde{M}})_*\Big|_{\tilde{p}}$ est injective. Ainsi, on a bien que

$$\Omega_0(\xi, \tilde{\eta}) = e^{-\varphi(\tilde{p})}\Omega((\pi_{\tilde{M}})_*\xi, (\pi_{\tilde{M}})_*\tilde{\eta}) \neq 0$$

Alors Ω_0 est non-dégénérée. □

Remarque 4.1.1.3. Dans le cas LCK, si Ω est LCK relativement à une structure complexe $J \in End(TM)$, alors Ω_0 est kählérienne relativement à $\tilde{J} := (\pi_{\tilde{M}})_*^{-1} J (\pi_{\tilde{M}})_*$. En effet, il suffit de définir

$$\tilde{g}(\cdot,\cdot) := \Omega_0(\cdot, \tilde{J}\cdot)$$

Puis on remarque que $\tilde{g}$ est $\tilde{J}$-invariante :

$$\tilde{g}(\tilde{J}\xi,\tilde{J}\eta) = -\Omega_0(\tilde{J}\xi,\eta) = \Omega_0(\eta,\tilde{J}\xi) = \tilde{g}(\eta,\xi) = \tilde{g}(\xi,\eta) \ .$$

Remarque 4.1.1.4. Ainsi, le revêtement universel d'une variété LCS est une variété symplectique, et celui d'une variété LCK est une variété kählérienne.

Soit $\Gamma \subseteq Diff(\tilde{M})$ le groupe de transformations du revêtement $\tilde{M}$ (en anglais, "deck transformations").

Lemme 4.1.1.5. *Tout tiré en arrière $\pi_{\tilde{M}}^* \alpha$, avec $\alpha \in \Omega^k(M)$, est Γ-invariant.*

Démonstration. Pour $\gamma \in \Gamma$, on a que

$$\gamma^* \pi_{\tilde{M}}^* \alpha = (\pi_{\tilde{M}} \circ \gamma) * \alpha = \pi_{\tilde{M}}^* \alpha \ .$$

□

Corollaire 4.1.1.6. *$\pi_{\tilde{M}}^* \theta$ est Γ-invariante.*

Lemme 4.1.1.7. *$\forall \gamma \in \Gamma, \gamma^*\varphi - \varphi$ est constante.*

Démonstration. On a que $\pi_{\tilde{M}}^* \theta = d\varphi$, par le lemme (4.1.1.1). Par le corollaire précédent (4.1.1.6), on remarque que

$$d\varphi = \pi_{\tilde{M}}^* \theta = \gamma^* \pi_{\tilde{M}}^* \theta = \gamma^* d\varphi \ .$$

Ainsi,

$$d(\gamma^*\varphi - \varphi) = d(\gamma^*\varphi) - d\varphi = \gamma^* d\varphi - d\varphi = 0 \ .$$

□

Proposition 4.1.1.8. *L'application*

$$\rho : (\Gamma, \circ) \to (\mathbb{R}, +)$$
$$\gamma \mapsto \gamma^*\varphi - \varphi$$

est un morphisme de groupes.

Démonstration. On a que

$$\begin{aligned}
\rho(\gamma \circ \eta) &= (\gamma \circ \eta)^*\varphi - \varphi = \eta^*(\gamma^*\varphi) - \varphi \\
&= \eta^*(\rho(\gamma) + \varphi) - \varphi = \eta^*(\rho(\gamma)) + \eta^*\varphi - \varphi \\
&= \rho(\gamma) \circ \eta + \rho(\eta) \\
&= \rho(\gamma) + \rho(\eta) \qquad [\text{ car } \rho(\gamma) \text{ est constante }]
\end{aligned}$$

et il est clair que $\rho(Id_{\tilde{M}}) = 0$. □

Proposition 4.1.1.9. Γ *agit sur* $(\tilde{M}, \Omega_0)$ *par homothéties.*

Démonstration.

$$\begin{aligned}
\gamma^*\Omega_0 &= \gamma^*(e^{-\varphi}\pi_{\tilde{M}}^*\Omega) = e^{-\gamma^*\varphi}\gamma^*\pi_{\tilde{M}}^*\Omega \\
&= e^{-\rho(\gamma)-\varphi}\pi_{\tilde{M}}^*\Omega = e^{-\rho(\gamma)}\Omega_0 \ .
\end{aligned}$$

□

Proposition 4.1.1.10. *Les données* $(\tilde{M}, \Gamma, \rho, \Omega_0)$ *déterminent complètement la variété LCS* $(M,[\Omega])$.

Démonstration. Comme par le corollaire (2.5.2.8), on a $M = {}^{\tilde{M}}\!/_{\Gamma}$, le problème est de récuperer la classe conforme de la forme LCS. Soit U ouvert de trivialisation locale de M, i.e. $(\pi_{\tilde{M}})^{-1}(U) = \sqcup_{\gamma\in\Gamma} U_\gamma$, avec $U_\gamma \cong U, \forall\gamma \in \Gamma$. La forme symplectique Ω_0 est définie sur U_γ, donc sur $U \subset M$. Pour un autre ouvert difféomorphe à U, on a

$$\begin{aligned} &U_\gamma \xrightarrow{\eta} U_{\eta\gamma} \\ &\Omega_0 \mapsto \eta^*\Omega_0 = e^{-\rho(\eta)}\Omega_0 \ . \end{aligned}$$

Alors Ω_0 est définie sur U modulo facteur conforme, c'est-à-dire que Ω_0 définit une classe conforme à une forme symplectique sur U. Par (4.1.0.5), cela définit une forme LCS Ω sur M. □

Remarque 4.1.1.11. Le revêtement universel $\tilde{M}$ de M est tel que la forme LCS se relève à une forme symplectique. Toutefois, il n'était pas nécessaire de considérer le revêtement universel. Il suffit de considérer le revêtement minimal (selon l'ordre défini en (2.5.2.2)) de notre variété tel que sa forme de Lee θ se relève à une forme exacte. Par la proposition (2.5.2.9), tout revêtement $p_1 : M_1 \to M$ a la forme

$$M_1 \cong {}^{\tilde{M}}\!/_{\pi_1(M_1)} \ .$$

Si $\tilde{\pi} : \tilde{M} \to M_1$ est la projection au quotient, alors p_1 satisfait la relation

$$p_1 \circ \tilde{\pi} = \pi_{\tilde{M}} : \tilde{M} \to M_1 \to M \ .$$

$(p_1)^*\theta$ est fermée, vu que θ l'est. On remarque que

$$d\varphi = \pi_{\tilde{M}}^*\theta = \tilde{\pi}^*(p_1)^*\theta \ .$$

Alors pour que $(p_1)^*\theta$ soit exacte, il suffit que $d\varphi$ descende au quotient par $\tilde{\pi}$, c'est-à-dire que

$$\gamma^*\varphi = \varphi, \forall\gamma \in \pi_1(M_1) \ ,$$

pour que $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(M_1)$. Mais alors $\gamma \in Ker(\rho)$, c'est-à-dire qu'il faut que

$$\pi_1(M_1) \leq Ker(\rho) \ .$$

La bijection entre les revêtements de M et les sous-groupes de $\pi_1(M)$ (2.5.2.4) est telle que l'ordre partiel de l'un et l'autre des ensembles ordonnés est inversé. Donc le revêtement minimal que l'on cherche est associé au plus grand sous-groupe de $\pi_1(M)$ tel que notre construction fonctionne. C'est donc le revêtement associé au sous-groupe $Ker(\rho)$. Ainsi, le revêtement minimal est défini par

$$\hat{M} := {}^{\tilde{M}}\!/_{Ker(\rho)}$$

qui a pour groupe de transformations $\hat{\Gamma} = {}^{\pi_1(M)}\!/_{Ker(\rho)} \cong Im(\rho)$. Alors $\hat{\Gamma}$ est un sous-groupe abélien de $(\mathbb{R},+)$. Lorsque M est compacte, $\pi_1(M)$ est finiment engendré, et alors il existe un $k \in \mathbb{N}$ tel que $\hat{\Gamma} \cong \mathbb{Z}^k$. Comme φ descend à $\mathcal{C}^\infty(\hat{M})$, alors la forme symplectique Ω_0 descend au quotient $\hat{M}$ qui, tel que voulu, est une variété symplectique qui revêt notre variété LCS M. Tous les résultats précédents s'appliquent sur ce revêtement minimal.

4.1.2 Différentielle tordue

Soit $(M,[\Omega])$ une variété LCS, et θ la forme de Lee de Ω.

Définition 4.1.2.1. La différentielle tordue $d^\theta : \Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}(M)$ est définie de la manière suivante

$$d^\theta := d - \theta \wedge \cdot$$

Lemme 4.1.2.2. *La différentielle tordue vérifie*

$$d^\theta \Omega = 0 \qquad et \qquad (d^\theta)^2 = 0 \ .$$

Démonstration. En effet, on a d'abord que

$$d^\theta \Omega = d\Omega - \theta \wedge \Omega = 0 \ ,$$

par définition. De plus, pour $\alpha \in \Omega^k(M)$, on a que

$$\begin{aligned} d^\theta \circ d^\theta(\alpha) &= d^\theta(d\alpha - \theta \wedge \alpha) = d^2\alpha - d(\theta \wedge \alpha) - \theta \wedge d\alpha + \theta \wedge (\theta \wedge \alpha) \\ &= -d(\theta \wedge \alpha) - \theta \wedge d\alpha = -(d\theta \wedge \alpha - \theta \wedge d\alpha) - \theta \wedge d\alpha = 0 \ . \end{aligned}$$

□

Lemme 4.1.2.3. *Si $\Omega_u = e^u\Omega \in [\Omega]$ est un autre représentant, la différentielle tordue s'exprime par*

$$d^{\theta_u} = d^\theta - du \wedge \cdot \ ,$$

où $\theta_u = \theta + du$ est la forme de Lee de Ω_u.

Démonstration.

$$d^{\theta_u} = d - \theta_u \wedge \cdot = d - (\theta + du) \wedge \cdot = d - \theta \wedge \cdot - du \wedge \cdot = d^\theta - du \wedge \cdot \ .$$

□

Pour la proposition suivante, nous aurons besoin d'un lemme analytique :

Lemme 4.1.2.4. *Soit $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un ouvert contenant 0, et $f(x_1, \ldots, x_n) \in C^\infty(U)$ tel que $df - f\theta = 0$, où $\theta \in \Omega^1(U)$. Si nous avons que $f(0) = 0$, alors $f \equiv 0$.*

Démonstration. Procédons par induction. Dans le cas où $n = 1$, on a l'équation $f'(x) = f(x)\theta(x)$, dont la solution est $f(x) = ce^{g(x)}$, avec $g(x) = \int_0^x \theta(y)dy$. Ainsi, si $f(0) = 0$, comme $e^{g(x)} > 0$, il faut que $c = 0$. Donc $f \equiv 0$.
Maintenant supposons que ce soit vrai pour $n-1$. Par hypothèse, f vérifie les équations $\frac{\partial f}{\partial x_k} = f\theta_k$, $\forall k = 1, \ldots, n$. Posons $h_1(x_1) := f(x_1, 0, \ldots, 0)$. h_1 vérifie que $\partial_{x_1} h_1(x_1) = h(x_1)\theta_1$, et $h_1(0) = f(0) = 0$, par hypothèse. Donc l'hypothèse d'induction nous donne que $h_1 \equiv 0$. Ainsi $f(x_1, 0, \ldots, 0) = 0, \forall x_1 \in \mathbb{R}$. De même, pour x_j quelconque, on a que

$$f(0, \ldots, 0, x_j, 0, \ldots, 0) \equiv 0 \ .$$

Posons $g_j(x_1, \ldots, \hat{x}_j, \ldots, x_n) := f(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_n)$, pour un x_j fixé. Alors g_j vérifie les $n-1$ équations $\frac{\partial g_j}{\partial x_k} = g_j \theta_k$, avec $k \neq j$. De plus, on a que $g_j(0) = f(0, \ldots, 0, x_j, 0, \ldots, 0) = 0$. Par hypothèse d'induction, on a que $g_j \equiv 0$, et cela $\forall j$ en itérant. Ainsi on a bien que $f \equiv 0$, ce qui conclut l'induction. □

Proposition 4.1.2.5. *Comme* $[\theta]_{dR} \neq 0$, *on a que*

$$d^\theta : \mathcal{C}^\infty(M) \hookrightarrow \Omega^1(M)$$

est injective.

Démonstration. Soit $f \in Ker(d^\theta)$. Alors f satisfait l'équation différentielle linéaire d'ordre un suivante :

$$df - f\theta = 0 \ .$$

Supposons que f ne s'annule en aucun point de M. Alors on pourrait écrire

$$\theta = \frac{df}{f} = d \log |f| \ .$$

Ceci est une contradiction car θ n'est pas exacte par hypothèse. Ainsi f doit s'annuler en au moins un point, disons $x_0 \in M$. En utilisant une carte autour de x_0, le lemme (4.1.2.4) nous donne que $f \equiv 0$ dans un voisinage de x_0. On peut écrire M comme réunion de cartes : $M = \cup_{j \in J} U_j$. Comme M est connexe, on ne peut l'écrire comme union d'ouverts disjoints. Soit U_k une carte telle que $U \cap U_k \neq \emptyset$, où $k \in J$. Comme $f \equiv 0$ sur $U \cap U_k$, l'argument précédent nous amène à conclure que $f \equiv 0$ sur U_k. Donc $f \equiv 0$ sur $U \cup U_k$. En itérant ce procédé, on peut annexer toutes les cartes et voir que $f \equiv 0$ sur $U_j, \forall j \in J$. Ainsi on a que $f \equiv 0$ sur M. □

Définition 4.1.2.6. Soit $(M,J,[\Omega])$ une variété LCK avec métrique correspondante g et forme de Lee θ. On dit que g est de Vaisman si θ est parallèle par rapport à la connection de Lévi-Civita ($\nabla^g \theta = 0$). En d'autres mots, si on a que

$$d(\theta(Y))(X) = \theta(\nabla^g_X Y), \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M) \ .$$

4.1.3 Automorphismes

Avant d'introduire les automorphismes d'une variété LCS, introduisons les automorphismes conformes d'une variété symplectique.

Définition 4.1.3.1 (automorphismes conformément symplectiques).

$$Aut(M,[\omega]) := \{\varphi \in Diff(M) \mid \varphi^*\omega = f\omega, \text{ où } f \in \mathcal{C}^\infty(M)\backslash\{0\}\}$$

est l'ensemble des automorphismes conformes de la variété symplectique (M,ω). Soit $aut(M,[\omega]) := Lie(Aut(M,[\omega]))$. Si $X \in aut(M,[\omega])$, on a par définition que $\phi_t^X \in Aut(M,[\omega]), \forall t$. Ainsi, on obtient que

$$L_X\omega = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(\phi_t^X)^*\omega = \partial_t\big|_0 f_t\omega = f\omega \ ,$$

avec $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$. Donc on a que

$$aut(M,[\omega]) = \{X \in \mathfrak{X}(M) \mid L_X\omega = f_X\omega, \text{ avec } f_X \in \mathcal{C}^\infty(M)\} \ .$$

La preuve du théorème suivant provient de (Kobayashi, 2012), I.6 :

Théorème 4.1.3.2. *Soit (M,ω) une variété symplectique. Si $f \in Aut(M,[\omega])$ et* $\dim(M) \geq 4$, *on a alors que*

$$f^*\omega = c\omega$$

avec $c \neq 0$ une constante.

Démonstration. Comme $f \in Aut(M,[\omega])$, on a que $\exists \varphi \in \mathcal{C}^\infty(M)\backslash\{0\}$ t.q. $f^*\omega = \varphi\omega$. Comme le tiré en arrière et la différentielle commutent, $f^*\omega$ est fermée. Ainsi

$$0 = d(f^*\omega) = d(\varphi\omega) = d\varphi \wedge \omega + \varphi d\omega = d\varphi \wedge \omega \ .$$

Par le lemme (1.1.3.2), $d\varphi = 0$. Donc φ est une fonction constante non-nulle sur M. $\square$

Définition 4.1.3.3. Pour une variété LCS $(M,[\Omega])$, on note $Aut(M,[\Omega])$ l'ensemble des difféomorphismes conformes. C'est-à-dire l'ensemble des $\varphi \in Diff(M)$ tel que $\varphi^*\Omega \in [\Omega]$. Pour une variété LCK $(M,J,[\Omega])$, $Aut(M,J,[\Omega])$ est l'ensemble des biholomorphismes conformes.

Lemme 4.1.3.4.

$$Lie(Aut(M,[\Omega])) =: aut(M,[\Omega]) = \{X \in \mathfrak{X}(M) \mid L_X\Omega = f_X\Omega \}$$

où $f_X \in \mathcal{C}^\infty(M)$.

Démonstration.

$(\subseteq)$

On suppose que $X \in aut(M,[\Omega])$. Alors $(\phi_t^X)^*\Omega \in [\Omega]$. Donc on a que

$$L_X\Omega = \partial_t\big|_0 (\phi_t^X)^*\Omega = \partial_t\big|_0 e^{f_t^X}\Omega = f_X\Omega$$

où $f_X := \partial_t\big|_0 e^{f_t^X}$.

$(\supseteq)$

On a $X \in \mathfrak{X}(M)$ tel que $L_X\Omega = f_X\Omega$. On remarque que $\tilde{\Omega}_t := (\phi_t^X)^*\Omega$ vérifie

$$\partial_t\big|_{t=s}\tilde{\Omega}_t = \partial_t\big|_{t=0}(\phi_{t+s}^X)^*\Omega = (\phi_s^X)^*(L_X\Omega) = (\phi_s^X)^*(f_X\Omega) = (f_X \circ \phi_s^X)\tilde{\Omega}_s \ .$$

Donc $\frac{d}{dt}\tilde{\Omega}_t = (f_X \circ \phi_t^X)\tilde{\Omega}_t$. De plus, $\tilde{\Omega}_0 = \Omega$. Ceci forme un système d'EDO et admet donc une unique solution. Cherchons une solution de la forme $\tilde{\Omega}_t = h_t\Omega$, où $h_t \in \mathcal{C}^\infty(M)$ tel que $h_0 = 1$. Il faut donc que h_t satisfasse $\frac{d}{dt}h_t = (f_X \circ \phi_t^X)h_t$. On obtient que

$$h_t := \exp\left(\int_0^t f_X \circ \phi_\tau^X d\tau\right)$$

résout l'EDO. Ainsi on a bien que $(\phi_t^X)^*\Omega = h_t\Omega$, avec $h_t > 0$. □

Lemme 4.1.3.5. *On a*

$$(f_X - \theta(X))\Omega = d^\theta(\iota_X\Omega) \ .$$

Démonstration. En effet, il suffit d'utiliser les propriétés de base du produit intérieur :

$$\begin{aligned}
d^\theta(\iota_X\Omega) &= d(\iota_X\Omega) - \theta\wedge\iota_X\Omega = L_X\Omega - \iota_X(d\Omega) - \theta\wedge\iota_X\Omega \qquad (2.1.1.5)\\
&= f_X\Omega - \iota_X(\theta\wedge\Omega) - \theta\wedge\iota_X\Omega\\
&= f_X\Omega - [(\iota_X\theta)\wedge\Omega - \theta\wedge\iota_X\Omega] - \theta\wedge\iota_X\Omega \qquad (2.1.1.4)\\
&= (f_X - \theta(X))\Omega\,.
\end{aligned}$$

□

Lemme 4.1.3.6. *Les identités suivantes sont satisfaites :*

$$1)\ d^\theta((f_X - \theta(X))\Omega) = 0\ ,$$
$$2)\ (df_X - d(\theta(X)))\wedge\Omega = 0\ .$$

Démonstration. 1) découle directement du lemme précédent et de (4.1.2.2), car

$$d^\theta((f_X - \theta(X))\Omega) = (d^\theta)^2(\iota_X\Omega) = 0\ .$$

En développant l'expression 1), on obtient que

$$\begin{aligned}
0 &= d(f_X\Omega - \theta(X)\Omega) - \theta\wedge(f_X\Omega - \theta(X)\Omega) = d(f_X\Omega) - d(\theta(X)\Omega) - f_X(\theta\wedge\Omega) + \theta(X)(\theta\wedge\Omega)\\
&= (df_X)\wedge\Omega + f_Xd\Omega - (d(\theta(X)))\wedge\Omega - \theta(X)d\Omega - f_Xd\Omega + \theta(X)d\Omega\\
&= (df_X)\wedge\Omega - (d(\theta(X)))\wedge\Omega = (df_X - d(\theta(X)))\wedge\Omega\,.
\end{aligned}$$

□

Remarque 4.1.3.7. Comme on suppose que $\dim(M) \geq 4$ (voir la remarque (4.1.0.7)), on a que $0 = (df_X - d(\theta(X)))\wedge\Omega \in \Omega^3(M)$, mais que $\Omega^3(M) \neq 0$. Par le lemme (1.1.3.2), il faut alors que $df_X - d(\theta(X)) = d(f_X - \theta(X)) = 0$. Ainsi on a que la fonction $\theta(X) - f_X$ est constante. On note c_X cette constante. Vérifions que cette constante ne dépend que de X, et non du choix du représentant Ω de la classe conforme $[\Omega]$. Soit $\Omega_g = e^g\Omega$ un autre représentant de la classe. On a d'abord que

$$\begin{aligned} g_X\Omega_g = L_X\Omega_g = L_X(e^g\Omega) &= L_X(e^g)\wedge\Omega + e^g\wedge(L_X\Omega) \\ &= d(e^g)(X)\wedge\Omega + e^g(f_X\Omega) \\ &= e^g dg(X)\wedge\Omega + f_X\Omega_g \\ &= (f_X + dg(X))\Omega_g \end{aligned}$$

Ce calcul nous livre donc la relation $g_X = f_X + dg(X)$, par laquelle on obtient que

$$g_X - \theta_g(X) = f_X + dg(X) - \theta(X) - dg(X) = f_X - \theta(X) ,$$

comme voulu.

4.1.4 Homomorphisme de Lee

Définition 4.1.4.1. La remarque précédente nous permet de définir sans ambiguïté l'homomorphisme de Lee :

$$\begin{aligned} l : aut(M,[\Omega]) &\to \mathbb{R} \\ X \quad &\mapsto c_X := \theta(X) - f_X \end{aligned}$$

Lemme 4.1.4.2. *l est un morphisme d'algèbres de Lie.*

Démonstration. Montrons d'abord que l est $\mathbb{R}$-linéaire. Soient $a,b \in \mathbb{R}$ et $X,Y \in \mathfrak{X}(M)$. On remarque que

$$\begin{aligned} f_{aX+bY}\Omega = L_{aX+bY}\Omega &= aL_X\Omega + bL_Y\Omega \\ &= af_X + bf_Y . \end{aligned}$$

On a alors que

$$\begin{aligned} l(aX+bY) = c_{aX+bY} &= \theta(aX+bY) - f_{aX+bY} \\ &= a\theta(X) + b\theta(Y) - af_X - bf_Y = al(X) + bl(Y) . \end{aligned}$$

Ainsi l est $\mathbb{R}$-linéaire et comme $\mathbb{R}$ est une algèbre de Lie abélienne il faut, pour que l soit un morphisme d'algèbres de Lie, que $l([X,Y]) = c_{[X,Y]} = 0, \forall X,Y \in \mathfrak{X}(M)$. Remarquons que comme θ est fermée, le corollaire (2.1.1.7) donne

$$\theta([X,Y]) = X(\theta(Y)) - Y(\theta(X)) \ .$$

Trouvons maintenant une expression plus explicite pour $f_{[X,Y]}$:

$$\begin{aligned} f_{[X,Y]}\Omega = L_{[X,Y]}\Omega &= L_X L_Y \Omega - L_Y L_X \Omega = L_X(f_Y \Omega) - L_Y(f_X \Omega) \\ &= L_X(f_Y)\Omega + f_Y L_X \Omega - L_Y(f_X)\Omega - f_X L_Y \Omega \qquad (2.1.1.2) \\ &= X(f_Y)\Omega + f_Y f_X \Omega - Y(f_X)\Omega - f_X f_Y \Omega \\ &= (X(f_Y) - Y(f_X))\Omega \ . \end{aligned}$$

Ainsi nous avons l'égalité $f_{[X,Y]} = X(f_Y) - Y(f_X)$. Par définition, comme $\theta(X) = f_X + c_X$, alors $d(\theta(X)) = df_X$, donc

$$Y(\theta(X)) = d(\theta(X))(Y) = df_X(Y) = Y(f_X) \ .$$

De même, on a que $X(\theta(Y)) = X(f_Y)$. Ainsi, on obtient

$$\begin{aligned} c_{[X,Y]} = \theta([X,Y]) - f_{[X,Y]} &= X(\theta(Y)) - Y(\theta(X)) - \big(X(f_Y) - Y(f_X)\big) \\ &= X(\theta(Y)) - Y(\theta(X)) - \big(X(\theta(Y)) - Y(\theta(X))\big) = 0 \end{aligned}$$

tel que voulu. □

Définition 4.1.4.3. On définit la sous-algèbre des champs horizontaux comme le noyau de l :

$$\begin{aligned} aut'(M,[\Omega]) := Ker(l) &= \{X \in aut(M,[\Omega]) \mid f_X = \theta(X)\} \\ &= \{X \in aut(M,[\Omega]) \mid L_X\Omega = \theta(X)\Omega\} \end{aligned}$$

Vérifions que $aut'(M,[\Omega])$ bien défini, c'est-à-dire que ce noyau est bien conformément invariant. On a $\Omega_g := e^g\Omega$ un autre représentant de la classe conforme. On suppose que $L_X\Omega = \theta(X)\Omega$. Alors

$$\begin{aligned} L_X\Omega_g = L_X(e^g\Omega) &= L_X(e^g)\Omega + e^g(L_X\Omega) = d(e^g)(X)\Omega + e^g\theta(X)\Omega \\ &= e^g dg(X)\Omega + e^g\theta(X)\Omega = (\theta + dg)(X)\Omega_g = \theta_g(X)\Omega_g \ . \end{aligned}$$

Ainsi $aut'(M,[\Omega])$ est bien défini.

Soit $\pi : (\hat{M},\Omega_0) \to (M,[\Omega])$ la projection du revêtement minimal de M (qui est une variété symplectique, tel que vu précédemment). Pour $X \in \mathfrak{X}(M)$, soit $\hat{X} := (\pi_*)^{-1} \circ X \circ \pi \in \mathfrak{X}(\hat{M})$ son relèvement.

Lemme 4.1.4.4. *On a*

$$L_{\hat{X}}\Omega_0 = e^{-\varphi}\pi^*(L_X\Omega - \theta(X)\Omega)$$

En particulier, si $X \in aut(M,[\Omega])$, on a que

$$L_{\hat{X}}\Omega_0 = -l(X)\Omega_0 \ .$$

Démonstration. On remarque qu'à priori, le push-forward par π d'un champ quelconque $Y \in \mathfrak{X}(\hat{M})$ n'est pas nécessairement défini. Mais comme $\hat{X} = (\pi_*)^{-1} \circ X \circ \pi$, on a que

$$\pi_*\hat{X} = \pi_* \circ \hat{X} \circ \pi^{-1} = X$$

est bien défini. Alors on calcule

$$\begin{aligned} L_{\hat{X}}\Omega_0 &= L_{\hat{X}}(e^{-\varphi}\pi^*\Omega) = L_{\hat{X}}(e^{-\varphi})\pi^*\Omega + e^{-\varphi}L_{\hat{X}}(\pi^*\Omega) \\ &= d(e^{-\varphi})(\hat{X})\pi^*\Omega + e^{-\varphi}\pi^*L_{\pi_*\hat{X}}\Omega = -e^{-\varphi}d\varphi(\hat{X})\pi^*\Omega + e^{-\varphi}\pi^*L_X\Omega \\ &= -e^{-\varphi}\pi^*\theta((\pi_*)^{-1} \circ X \circ \pi)\pi^*\Omega + e^{-\varphi}\pi^*L_X\Omega \\ &= e^{-\varphi}\pi^*(-\theta(X)\Omega) + e^{-\varphi}\pi^*L_X\Omega = e^{-\varphi}\pi^*(L_X\Omega - \theta(X)\Omega) \ . \end{aligned}$$

En particulier, supposons que $X \in aut(M,[\Omega])$. On a alors que

$$\begin{aligned} L_{\hat{X}}\Omega_0 &= e^{-\varphi}\pi^*(f_X\Omega - \theta(X)\Omega) \\ &= e^{-\varphi}\pi^*(-l(X)\Omega) = -l(X)e^{-\varphi}\pi^*\Omega \\ &= -l(X)\Omega_0 \ . \end{aligned}$$

□

Proposition 4.1.4.5. *On a un isomorphisme*

$$aut(M,[\Omega]) \xrightarrow{\psi} aut(\hat{M},[\Omega_0])^\Gamma$$

où $aut(\hat{M},[\Omega_0])^\Gamma$ est l'algèbre de Lie des automorphismes conformes infinitésimaux de $(\hat{M},\Omega_0)$ qui sont Γ-invariants, et Γ est le groupe de transformations du revêtement minimal. Cet isomorphisme se restreint en une bijection

$$aut'(M,[\Omega]) \overset{1-1}{\longleftrightarrow} aut(\hat{M},\Omega_0)^\Gamma$$

où $aut(\hat{M},\Omega_0)^\Gamma$ est l'algèbre de Lie des symplectomorphismes infinitésimaux de Ω_0 qui sont Γ-invariants.

Démonstration. Soit $X \in aut(M,[\Omega])$. Par le lemme (4.1.4.4), on a que

$$\psi(X) := \hat{X} \in aut(\hat{M},[\Omega_0]) \ .$$

Pour $\eta \in \Gamma$, on a que

$$\eta_*\hat{X} = \eta_*\pi_*^{-1} \circ X \circ \pi = \pi_*^{-1} \circ X \circ \pi = \hat{X} \ .$$

Ainsi $\hat{X}$ est Γ-invariant, donc $\hat{X} \in aut(\hat{M},[\Omega_0])^\Gamma$, et l'application est bien un morphisme, par linéarité de $(\pi_*)^{-1}$. Voyons que c'est une bijection :
injectivité : Supposons que $\hat{X} = \hat{Y}$, pour $X,Y \in aut(M,[\Omega])$ et $\hat{X},\hat{Y}$ leur relèvement respectif. Soit $\hat{p} \in \hat{M}$. Comme π_* est un isomorphisme en chaque fibre, on a que

$$X(\pi(\hat{p})) = (\pi_*)_{\hat{p}} \circ \hat{X}(\hat{p}) = (\pi_*)_{\hat{p}} \circ \hat{Y}(\hat{p}) = Y(\pi(\hat{p}))$$

Comme π est surjective, on a bien que $X = Y$.

surjectivité : Soit $\hat{X} \in aut(\hat{M}, [\Omega_0])^\Gamma$. Comme $\hat{X}$ est Γ-invariante, on peut définir le push-forward $\pi_* \hat{X} := \pi_* \circ \hat{X} \circ \pi^{-1} \in \mathfrak{X}(M)$ sans ambiguïté. Vérifions que $\pi_* \hat{X} \in aut(M,[\Omega])$:

$$\begin{aligned} L_{\pi_*\hat{X}}\Omega &= \partial_t\big|_0 (\phi_t^{\pi_*\hat{X}})^*\Omega = \partial_t\big|_0 (\pi \circ \phi_t^{\hat{X}} \circ \pi^{-1})^*\Omega \\ &= \partial_t\big|_0 (\pi^{-1})^*(\phi_t^{\hat{X}})^*\pi^*\Omega = (\pi^{-1})^*\partial_t\big|_0 (\phi_t^{\hat{X}})^*(e^{\varphi}\Omega_0) \\ &= (\pi^{-1})^* L_{\hat{X}}(e^{\varphi}\Omega_0) = (\pi^{-1})^*((L_{\hat{X}}e^{\varphi})\Omega_0 + e^{\varphi}L_{\hat{X}}\Omega_0) \\ &= (\pi^{-1})^*(d\varphi(\hat{X})\pi^*\Omega + g_{\hat{X}}\pi^*\Omega) = (\pi^{-1})^*(d\varphi(\hat{X}) + g_{\hat{X}})\Omega \\ &= f_{\pi_*\hat{X}}\Omega \ . \end{aligned}$$

où $f_{\pi_*\hat{X}} := (\pi^{-1})^*(d\varphi(\hat{X}) + g_{\hat{X}})$. Donc on a bien que $\pi_*\hat{X} \in aut(M,[\Omega])$, tel que voulu.

Ainsi, ψ est un isomorphisme. Si $X \in aut'(M,[\Omega])$, alors le lemme (4.1.4.4) nous dit que $L_{\hat{X}}\Omega_0 = -l(X)\Omega_0 = 0$. Donc $\hat{X} \in aut(\hat{M},\Omega_0)$. Ainsi

$$\psi(aut'(M,[\Omega])) \subseteq aut(\hat{M},\Omega_0)^\Gamma \ .$$

On sait que ψ est injective. Soit $Y \in aut(\hat{M},\Omega_0)^\Gamma$. Par Γ-invariance, on peut définir $X := \pi_* Y$. Par le lemme (4.1.4.4), on a que

$$0 = L_Y\Omega_0 = e^{-\varphi}\pi^*(L_X\Omega - \theta(X)\Omega) \ .$$

Donc $L_X\Omega = \theta(X)\Omega$, et alors $X \in aut'(M,[\Omega])$ est par construction tel que $\psi(X) = \pi_*^{-1} \circ X \circ \pi = Y$. Donc ψ est une bijection entre $aut'(M,[\Omega])$ et $aut(\hat{M}, \Omega_0)^\Gamma$. □

Définition 4.1.4.6. Une forme LCS (Ω,θ) est dite exacte si Ω est d^θ-exacte, c'est-à-dire s'il existe $\eta \in \Omega^1(M)$ tel que

$$d^\theta\eta = \Omega \ .$$

Remarque 4.1.4.7. Supposons que (Ω,θ) soit exacte. Prenons une forme LCS de la même classe conforme : $(e^u\Omega, \theta + du) = (\Omega_u, \theta_u)$. Alors on a que

$$\begin{aligned} d^{\theta_u}(e^u\eta) &= d^{\theta}(e^u\eta) - du \wedge (e^u\eta) \qquad (4.1.2.3) \\ &= d(e^u\eta) - \theta \wedge (e^u\eta) - e^u du \wedge \eta \\ &= e^u du \wedge \eta + e^u d\eta - e^u\theta \wedge \eta - e^u du \wedge \eta \\ &= e^u(d\eta - \theta \wedge \eta) = e^u d^{\theta}\eta = e^u\Omega = \Omega_u \ . \end{aligned}$$

D'où que (Ω_u,θ_u) est aussi exacte. Ainsi l'exactitude est une notion conformément invariante.

Définition 4.1.4.8. On dit qu'une variété LCS $(M,[\Omega])$ est exacte si un représentant de la classe est exact. Ceci est bien défini par la remarque précédente.

Proposition 4.1.4.9. *L'homomorphisme de Lee l est surjectif si et seulement si $(M,[\Omega])$ est exacte.*

Démonstration. Soit $(\Omega,\theta) \in [\Omega]$.

$(\Longrightarrow)$

Supposons que l soit surjectif. Soit $B \in aut(M,[\Omega])$ tel que $l(B) = 1$. On a que

$$\begin{aligned} \theta(B)\Omega - \Omega &= (\theta(B) - l(B))\Omega = (\theta(B) - (\theta(B) - f_B))\Omega \\ &= f_B\Omega = L_B\Omega = \iota_B d\Omega + d(\iota_B\Omega) \\ &= (\iota_B\theta) \wedge \Omega - \theta \wedge \iota_B\Omega + d(\iota_B\Omega) \\ &= \theta(B)\Omega + d^{\theta}(\iota_B\Omega) \ . \end{aligned}$$

Ainsi on a bien que

$$d^{\theta}(-\iota_B\Omega) = \Omega \ .$$

$(\Longleftarrow)$

Supposons que $(M,[\Omega])$ soit exacte. Alors il existe $\eta \in \Omega^1(M)$ tel que $d^\theta\eta = \Omega$. Comme Ω est non-dégénérée, on peut trouver un $B \in \mathfrak{X}(M)$ tel que $\iota_B\Omega = -\eta$. Ainsi

$$\begin{aligned} L_B\Omega &= \iota_B(\theta \wedge \Omega) + d(\iota_B\Omega) \\ &= \theta(B)\Omega - \theta \wedge (\iota_B\Omega) + d(\iota_B\Omega) \\ &= \theta(B)\Omega + \theta \wedge \eta - d\eta = \theta(B)\Omega - d^\theta\eta \\ &= (\theta(B) - 1)\Omega = f_B\Omega \ . \end{aligned}$$

Ainsi on a que $B \in aut(M,[\Omega])$. Donc

$$l(B) = \theta(B) - f_B = 1 \ .$$

Comme l est linéaire, pour $c \in \mathbb{R}$ on aura que

$$l(cB) = cl(B) = c \ .$$

Conséquemment, l est bien surjectif. □

4.2 Actions sur des variétés LCS ou LCK

Soit $(M,[\Omega])$ une variété LCS avec θ la forme de Lee de Ω.

4.2.1 Champs hamiltoniens tordus

Définition 4.2.1.1. On dit que $X \in \mathfrak{X}(M)$ est un champ hamiltonien tordu s'il existe une fonction $f \in C^\infty(M)$ telle que

$$\iota_X\Omega = d^\theta f \ .$$

On peut alors noter X_f le champ hamiltonien tordu de fonction hamiltonienne f.

Remarque 4.2.1.2. Voyons que cette notion est conformément invariante. Soit $X_f \in \mathfrak{X}(M)$ un champ hamiltonien tordu, de fonction hamiltonienne correspondante f. Soit $\Omega_u = e^u\Omega \in [\Omega]$, avec forme de Lee $\theta_u = \theta + du$. Alors

$$\begin{aligned}
\iota_{X_f}\Omega_u &= \iota_{X_f}(e^u\Omega) = e^u\iota_{X_f}\Omega \\
&= e^u d^\theta f = e^u(df - f\theta) \\
&= e^u df - e^u f\theta + e^u f du - e^u f du \\
&= d(e^u f) - (\theta + du)e^u f = d^{\theta_u}(e^u f) \ .
\end{aligned}$$

Ainsi X_f est également hamiltonien tordu pour (Ω_u, θ_u), mais cette fois-ci de fonction hamiltonienne $e^u f$.

Définition 4.2.1.3. Par la remarque précédente, la notion de champ hamiltonien tordu est conformément invariante. On peut donc définir

$$\mathfrak{ham}(M,[\Omega]) := \{X \in \mathfrak{X}(M) \mid \exists f \in \mathcal{C}^\infty(M) \text{ tel que } \iota_X\Omega = d^\theta f\} \ .$$

Lemme 4.2.1.4. *Pour un champ hamiltonien tordu X_f, avec fonction hamiltonienne f lui correspondant par Ω, on a que*

$$L_{X_f}\Omega = \theta(X_f)\Omega \ .$$

Démonstration. On a en effet

$$\begin{aligned}
L_{X_f}\Omega &= \iota_{X_f}d\Omega + d(\iota_{X_f}\Omega) = \iota_{X_f}(\theta \wedge \Omega) + d(d^\theta f) \\
&= (\iota_{X_f}\theta) \wedge \Omega - \theta \wedge (\iota_{X_f}\Omega) + d^2 f - d(f\theta) \\
&= \theta(X_f)\Omega - \theta \wedge (d^\theta f) - df \wedge \theta - f d\theta \\
&= \theta(X_f)\Omega \ .
\end{aligned}$$

□

Corollaire 4.2.1.5.

$$\mathfrak{ham}(M,[\Omega]) \subseteq aut'(M,[\Omega]) \ .$$

Définition 4.2.1.6. Une forme LCS Ω définit un crochet de Poisson

$$\{f,g\} := \Omega(X_g,X_f)$$

où $f,g \in \mathcal{C}^\infty(M)$.

Proposition 4.2.1.7.

$$X_{\{f,g\}} = [X_f,X_g] \ .$$

Démonstration. On remarque d'abord que

$$d^\theta\{f,g\} = d\{f,g\} - X_f(g)\theta + g\theta(X_f)\theta \ . \tag{4.2}$$

En effet, il suffit de remarquer que

$$\begin{aligned}
\theta \wedge \{f,g\} &= \theta \wedge (\iota_{X_f}\iota_{X_g}\Omega) = \theta \wedge (\iota_{X_f}d^\theta g) \\
&= \theta \wedge (\iota_{X_f}dg) - g\theta \wedge (\iota_{X_f}\theta) \\
&= X_f(g)\theta - g\theta(X_f)\theta \ .
\end{aligned}$$

On peut maintenant calculer

$$\begin{aligned}
\iota_{[X_f,X_g]}\Omega &= L_{X_f}(\iota_{X_g}\Omega) - \iota_{X_g}(L_{X_f}\Omega) && (2.1.1.5) \\
&= \iota_{X_f}(d\iota_{X_g}\Omega) + d(\iota_{X_f}\iota_{X_g}\Omega) - \iota_{X_g}(\theta(X_f)\Omega) \\
&= \iota_{X_f}dd^\theta g + d\{f,g\} - \theta(X_f)d^\theta g \\
&= -\iota_{X_f}d(g\theta) + d\{f,g\} - \theta(X_f)dg + g\theta(X_f)\theta \\
&= -\iota_{X_f}(dg \wedge \theta) + d\{f,g\} - \theta(X_f)dg + g\theta(X_f)\theta \\
&= -X_f(g)\theta + \theta(X_f)dg + d\{f,g\} - \theta(X_f)dg + g\theta(X_f)\theta \\
&= d\{f,g\} - X_f(g)\theta + g\theta(X_f)\theta = d^\theta\{f,g\} && (4.2) \\
&= \iota_{X_{\{f,g\}}}\Omega \ . && [\text{ par définition }]
\end{aligned}$$

Puisque Ω est non-dégénérée, on a alors que $[X_f,X_g] = X_{\{f,g\}}$, tel que voulu. $\square$

Corollaire 4.2.1.8. *L'espace* $\mathfrak{ham}(M,[\Omega])$ *est une sous-algèbre de Lie de* $aut'(M,[\Omega])$.

Proposition 4.2.1.9. *Le morphisme* ψ *défini en* (4.1.4.5) *se restreint en une injection*

$$\mathfrak{ham}(M,[\Omega]) \hookrightarrow \mathfrak{ham}(\hat{M},\Omega_0) .$$

Démonstration. Par le corollaire (4.2.1.5), nous avons que $\mathfrak{ham}(M,[\Omega]) \subseteq aut'(M,[\Omega])$, et alors ψ peut se restreindre à $\mathfrak{ham}(M,[\Omega])$ et cette application est aussi nécessairement injective. Il suffit de voir que $\psi(\mathfrak{ham}(M,[\Omega])) \subseteq \mathfrak{ham}(\hat{M},\Omega_0)$. Soit donc $X_f \in \mathfrak{ham}(M,[\Omega])$. On a $\psi(X_f) = \hat{X}_f = (\pi_*)^{-1} \circ X_f \circ \pi$. Par construction on a que $\pi_*\hat{X}_f = X_f$, et il s'ensuit que

$$\begin{aligned}
\iota_{\hat{X}_f}\Omega_0 &= e^{-\varphi}(\iota_{\hat{X}_f}\pi^*\Omega) = e^{-\varphi}\pi^*(\iota_{\pi_*\hat{X}_f}\Omega) \\
&= e^{-\varphi}\pi^*(\iota_{X_f}\Omega) = e^{-\varphi}\pi^*(df - f\theta) \\
&= e^{-\varphi}(d\pi^*f - (\pi^*f)d\varphi) = d(e^{-\varphi}\pi^*f) .
\end{aligned}$$

Ainsi $\psi(\mathfrak{ham}(M,[\Omega])) \subseteq \mathfrak{ham}(\hat{M},\Omega_0)$, puisque le champ $\hat{X}_f$ est hamiltonien de fonction hamiltonienne $-e^{-\varphi}\pi^*f$. □

Définition 4.2.1.10. Soit $\Omega \in [\Omega]$. On définit l'application

$$\begin{aligned}
A^\Omega : \mathcal{C}^\infty(M) &\to \mathfrak{ham}(M,[\Omega]) \\
f &\mapsto X_f
\end{aligned}$$

Proposition 4.2.1.11. A^Ω *est un isomorphisme d'algèbres de Lie.*

Démonstration. Par la proposition (4.2.1.7), A^Ω est un morphisme d'algèbre de Lie. En effet,

$$A^\Omega(\{f,g\}) = X_{\{f,g\}} = [X_f,X_g] = [A^\Omega f, A^\Omega g] .$$

La proposition (4.1.2.5) nous donne que $d^\theta : \mathcal{C}^\infty(M) \to \Omega^1(M)$ est injective. En prenant en compte que $d^\theta f = \iota_{X_f}\Omega$ et que Ω est non-dégénérée, nous déduisons que A^{Ω} est aussi injective.

De plus, A^{Ω} est surjective, car si $X_f \in \mathfrak{ham}(M,[\Omega])$, alors $A^{\Omega}(f) = X_f$. $\square$

Remarque 4.2.1.12. Par la remarque (4.2.1.2), si $A^{\Omega}(f) = X_f$, alors $A^{\Omega_u}(e^u f) = X_f$. Il s'ensuit que

$$A^{\Omega_u}(f) = A^{\Omega}(e^{-u} f) .$$

4.2.2 Actions hamiltoniennes tordues

Définition 4.2.2.1. Soit G un groupe de Lie agissant sur une variété LCS $(M,[\Omega])$. On dit que l'action est hamiltonienne tordue si

$$\mathfrak{g} := Lie(G) \subseteq \mathfrak{ham}(M,[\Omega]) .$$

Toutefois, comme $\mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{X}(G)$ et $\mathfrak{ham}(M,[\Omega]) \subseteq \mathfrak{X}(M)$, il est sous-entendu qu'on prend les champs fondamentaux $X_\xi \in \mathfrak{X}(M)$ associés aux champs $\xi \in \mathfrak{g}$. C'est-à-dire que l'action est hamiltonienne tordue si $\forall \xi \in \mathfrak{g}, \exists f_\xi \in \mathcal{C}^\infty(M)$ tel que $\iota_{X_\xi}\Omega = d^\theta f_\xi$.

Définition 4.2.2.2. On définit une application moment pour une action hamiltonienne tordue. Pour un choix $\Omega \in [\Omega]$, vu que $\mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{ham}(M,[\Omega])$, on décrète que

$$\mu^{\Omega} := (A^{\Omega})^{-1}\Big|_{\mathfrak{g}} : \mathfrak{g} \to \mathcal{C}^\infty(M)$$

est une application moment pour l'action (et qui peut aussi être vue comme une application $M \to \mathfrak{g}^*$). Par construction, pour $\xi \in \mathfrak{g}$, on a que

$$\iota_{X_\xi}\Omega = d^\theta \mu^{\Omega}_\xi, \text{ où } \mu^{\Omega}_\xi := \mu^{\Omega}(\xi)$$

et que μ^{Ω} est un morphisme injectif d'algèbres de Lie.

Remarque 4.2.2.3. Soit X_f le champ hamiltonien tordu associé à f par Ω. Par la remarque (4.2.1.12) on a que $A^{\Omega_u}(e^u f) = X_f$, alors

$$\mu^{\Omega_u}(X_f) = (A^{\Omega_u})^{-1}\Big|_{\mathfrak{g}}(X_f) = e^u f = e^u \mu^{\Omega}(X_f) ,$$

d'où que $\mu^{\Omega_u} = e^u \mu^{\Omega}$.

Lemme 4.2.2.4. *Si G est compact et agit conformément sur $[\Omega]$, on peut trouver un représentant G-invariant $\Omega^G \in [\Omega]$. De plus, la forme de Lee correspondante θ^G est aussi G-invariante.*

Démonstration. L'action $\rho : G \to Diff(M)$ de G est conforme sur $[\Omega]$ si $\forall g \in G, \exists f_g \in \mathcal{C}^\infty(M)$ tel que $\rho(g)^*\Omega = e^{f_g}\Omega$. Soit dv une mesure de Haar normalisée sur G. Posons

$$h := \int_G f_g dv(g)$$

et

$$\Omega^G := \int_G \rho(g)^*\Omega dv(g) \ .$$

On a alors que

$$\Omega^G = \int_G e^{f_g}\Omega dv(g) = e^h\Omega \ .$$

Donc $\Omega^G \in [\Omega]$ est un représentant de la classe. Soit $j \in G$.

$$\begin{aligned}
\rho(j)^*\Omega^G = \rho(j)^* \int_G \rho(g)^*\Omega dv(g) &= \int_G \rho(gj)^*\Omega\rho(j)^* dv(g) \\
= \int_G \rho(\lambda)^*\Omega\rho(j)^* dv(g) & \qquad [\lambda := gj] \\
= \int_G \rho(\lambda)^*\Omega dv(\lambda) = \Omega^G \ .&
\end{aligned}$$

Donc Ω^G est G-invariante. La forme de Lee de Ω^G est $\theta^G := \theta + dh$. Il suffit de calculer

$$\begin{aligned}
d\Omega^G &= d(e^h\Omega) = e^h dh \wedge \Omega + e^h\theta \wedge \Omega \\
&= dh \wedge \Omega^G + \theta \wedge \Omega^G = (dh + \theta) \wedge \Omega^G \ .
\end{aligned}$$

De plus, cette forme de Lee est elle aussi G-invariante. En effet, on a que

$$\begin{aligned}
\theta^G \wedge \Omega^G &= d\Omega^G = d(\rho(g)^*\Omega^G) = \rho(g)^* d\Omega^G \\
&= \rho(g)^*(\theta^G \wedge \Omega^G) = (\rho(g)^*\theta^G) \wedge \Omega^G \ .
\end{aligned}$$

En utilisant le lemme (1.1.3.2) et comme $\dim(M) \geq 4$, on a que $\theta^G = \rho(g)^*\theta^G, \forall g \in G$. □

Lemme 4.2.2.5. *Si G est abélien et agit de façon hamiltonienne tordue sur $(M,[\Omega])$, alors*

$$\Omega(X_\xi,X_\eta) = 0, \forall \xi,\eta \in \mathfrak{g} .$$

Démonstration. Remarquons d'abord que $d^\theta(\Omega(X_\xi,X_\eta)) = 0, \forall \xi,\eta \in \mathfrak{g}$. En effet,

$$\begin{aligned} d^\theta(\Omega(X_\xi, X_\eta)) &= d^\theta(\{f_\eta, f_\xi\}) = \iota_{X_{\{f_\eta,f_\xi\}}}\Omega \\ &= \iota_{[X_\eta,X_\xi]}\Omega \qquad [(4.2.1.7)] \\ &= \iota_{X_{[\eta,\xi]}}\Omega \qquad [(3.1)] \\ &= 0 . \qquad [\ G \text{ est abélien }] \end{aligned}$$

Posons maintenant $f := \Omega(X_\xi,X_\eta)$. On vient de démontrer que

$$0 = d^\theta f = df - f\theta .$$

Comme d^θ est injective (4.1.2.5), $f \equiv 0$, tel que voulu. □

Corollaire 4.2.2.6. *Dans le cadre du lemme précédent, nous avons que*

$$d\mu_\xi^\Omega(X_\eta) = \mu_\xi^\Omega \cdot \theta(X_\eta), \forall \xi,\eta \in \mathfrak{g} .$$

Démonstration. On a

$$\begin{aligned} 0 = \Omega(X_\xi,X_\eta) &= \iota_{X_\eta}\iota_{X_\xi}\Omega \\ &= \iota_{X_\eta}d^\theta\mu_\xi^\Omega = d\mu_\xi^\Omega(X_\eta) - \mu_\xi^\Omega \cdot \theta(X_\eta) . \end{aligned}$$

□

Proposition 4.2.2.7. *Supposons que G agit de façon hamiltonienne tordue et fidèle sur $(M,[\Omega])$. Si G est abélien, compact et connexe, les énoncés suivants sont* *équivalents :*

(1) Ω *est* G*-invariante ;*

(2) $\mathfrak{g} \subseteq \ker(\theta)$ *;*

(3) μ^{Ω} *est* G*-invariante.*

Démonstration.

Soit $\rho : G \to Diff(M)$ une action lisse de G.

(1) $\implies$ (2) :

On suppose que $\rho(g)^*\Omega = \Omega, \forall g \in G$. Soit $\xi \in \mathfrak{g}$. On a que

$$L_{X_\xi}\Omega = \partial_t\big|_0 \rho(\exp(t\xi))^*\Omega = \partial_t\big|_0 \Omega = 0 \ .$$

Ainsi on obtient que

$$\begin{aligned} 0 = L_{X_\xi}\Omega = d\iota_{X_\xi}\Omega + \iota_{X_\xi}(\theta \wedge \Omega) &= d(d^\theta f_\xi) + (\iota_{X_\xi}\theta) \wedge \Omega - \theta \wedge d^\theta f_\xi \\ &= (d^\theta)^2(f_\xi) + \theta(X_\xi)\Omega = \theta(X_\xi)\Omega \ . \end{aligned}$$

Il en résulte que $\theta(X_\xi) = 0$, tel que voulu.

(2) $\implies$ (1) :

Supposons que $\theta(X_\xi) = 0, \forall \xi \in \mathfrak{g}$. Par le lemme (4.2.1.4), on a que

$$0 = \theta(X_\xi)\Omega = L_{X_\xi}\Omega \ .$$

Par le lemme (3.1.4.2), on déduit directement que Ω est G-invariante.

(2) $\implies$ (3) :

On suppose que $\theta(X_\xi) = 0, \forall \xi \in \mathfrak{g}$. Par le corollaire (4.2.2.6), on a donc que

$$0 = d\mu_\xi^\Omega(X_\eta) = L_{X_\eta}(\mu_\xi^\Omega), \forall \xi, \eta \in \mathfrak{g} \ .$$

Par le lemme (3.1.4.2), μ_ξ^Ω est G-invariante.

(3) $\implies$ (2) :

Supposons que μ^Ω soit G-invariante. Par le lemme (3.1.4.2), on a que $L_{X_\eta}(\mu_\xi^\Omega) =$

$d\mu_\xi^\Omega(X_\eta) = 0, \forall \xi,\eta \in \mathfrak{g}$. Par le corollaire (4.2.2.6), on a alors que $\mu_\xi^\Omega \cdot \theta(X_\eta) = 0$. Soit $\eta \in \mathfrak{g}$. Par l'absurde, supposons que $\theta(X_\eta) \neq 0$. Alors il existe un voisinage ouvert U pour lequel $\theta(X_\eta)\Big|_U \neq 0$. Il faut donc que

$$\mu_\xi^\Omega\Big|_U = 0, \forall \xi \in \mathfrak{g} \ .$$

Comme l'action est hamiltonienne tordue, sur U on a que

$$0 = d^\theta \mu_\xi^\Omega = \iota_{X_\xi}\Omega \ .$$

En utilisant que Ω est non-dégénérée, ceci implique que $X_\xi\Big|_U = 0, \forall \xi \in \mathfrak{g}$. Ainsi, sur U l'action est triviale. C'est-à-dire que

$$Orb_G(p) = \{p\}, \forall p \in U.$$

Le théorème (3.1.2.12) nous dit que les orbites principales sont denses dans M. Donc U intersecte nécessairement une orbite principale. Ainsi, on a que $\dim(Orb_G(p)) = 0$ est la dimension des orbites principales. Mais par définition, cette dimension est celle de G, dont $\dim(G) \geq 1$. Ceci est une contradiction, alors $\theta(X_\eta) \equiv 0, \forall \eta \in \mathfrak{g}$, car on a choisi η arbitrairement dans notre raisonnement. □

Proposition 4.2.2.8. *Si $(M,[\Omega])$ est LCS exacte, avec G compact agissant conformément sur M et $\mathfrak{g} \subseteq aut'(M,[\Omega])$, alors l'action est hamiltonienne tordue.*

Démonstration. Par le lemme (4.2.2.4), on peut prendre (Ω,θ) une forme LCS avec sa forme de Lee correspondante, toutes deux G-invariantes. Comme l'exactitude est conformément invariante, on a que $\exists \eta \in \Omega^1(M)$ tel que $\Omega = d^\theta \eta$. Posons maintenant

$$\eta^G := \int_G \rho(g)^* \eta dv(g) \ ,$$

qui est G-invariant par construction, où dv est une mesure de Haar normalisée.

Alors on a que

$$\begin{aligned} d^{\theta}\eta^G = d\eta^G - \theta \wedge \eta^G &= \int_G \rho(g)^*(d\eta)dv(g) - \int_G \rho(g)^*\theta \wedge \rho(g)^*\eta dv(g) \\ &= \int_G \rho(g)^*(d^{\theta}\eta)dv(g) = \int_G \rho(g)^*\Omega dv(g) = \int_G \Omega dv(g) = \Omega \ . \end{aligned}$$

Soit $\xi \in \mathfrak{g}$. Puisque Ω est G-invariante, la proposition (4.2.2.7) nous donne que $\theta(X_\xi) = 0, \forall \xi \in \mathfrak{g}$. Alors on a que

$$\begin{aligned} \iota_{X_\xi}\Omega = \iota_{X_\xi}d^{\theta}\eta^G &= \iota_{X_\xi}d\eta^G - (\iota_{X_\xi}\theta) \wedge \eta^G + \theta \wedge (\iota_{X_\xi}\eta^G) \\ &= \iota_{X_\xi}d\eta^G + \eta^G(X_\xi)\theta = L_{X_\xi}\eta^G - d\iota_{X_\xi}\eta^G + \eta^G(X_\xi)\theta \\ &= -d(\eta^G(X_\xi)) + \theta \wedge \eta^G(X_\xi)) = d^{\theta}(-\eta^G(X_\xi)) \ . \end{aligned}$$

Donc $-\eta^G$ est application moment de l'action, et ainsi $\mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{ham}(M,[\Omega])$, tel que voulu. $\square$

4.2.3 Action torique tordue

Proposition 4.2.3.1. *Soit* $(M,[\Omega])$ *une variété LCS, et* $\mathbb{T}$ *un tore agissant sur* M *par automorphismes conformes. Alors l'action se relève à* $\hat{M}$ *si et seulement si* $Lie(\mathbb{T}) \subseteq aut'(M,[\Omega])$.

Démonstration. Sans perte de généralité, on réduit le problème au cas où $\mathbb{T} = S^1$. En effet, si $\mathbb{T} = \mathbb{T}^k$, alors chaque sous-ensemble $\{e\} \times \cdots \times \{e\} \times S^1 \times \{e\} \times \cdots \times \{e\}$ engendre une action du cercle sur M par restriction de l'action de tore. Si nous réussissons à relever les k-actions circulaires, alors nous obtiendrons une action de $\mathbb{T}^k$ sur $\hat{M}$.

Fixons $\Omega \in [\Omega]$. Soit $\rho : S^1 \to Diff(M)$ une action circulaire par automorphismes conformes. Soit $\xi \in Lie(S^1)$ un générateur de l'algèbre de Lie, et X_ξ son champ fondamental, vu comme le générateur de l'action infinitésimale. Soit ϕ_t le flot de X_ξ. Comme l'action est circulaire, ce flot est périodique. Sans perte de généralité, supposons que la période de ϕ_t soit 1 (i.e. $\phi_t = \phi_{t+1}, \forall t \in \mathbb{R}$). Soit $\hat{X}_\xi$ le relèvement de X_ξ au revêtement minimal, et $\hat{\phi}_t$ son flot. Par définition, $\hat{\phi} : \mathbb{R} \to Diff(\hat{M})$ relève l'action de ρ à $\hat{M}$. Toutefois, on veut que S^1 agisse sur $\hat{M}$. Ce sera le cas si et seulement si $\hat{\phi}_t$ est périodique, par définition d'action circulaire. Pour obtenir notre résultat, il nous suffit donc de montrer que $\hat{\phi}_t$ est périodique si et seulement si $Lie(S^1) \subseteq aut'(M,[\Omega])$.

$(\Longleftarrow)$

On suppose que $Lie(S^1) \subseteq aut'(M,[\Omega])$. On a donc que $X_\xi \in aut'(M,[\Omega])$. Par la proposition (4.1.4.5), $\hat{X}_\xi \in aut(\hat{M},\Omega_0)^\Gamma$. Comme $\hat{X}_\xi$ relève X_ξ, leurs flots respectifs satisfont la relation

$$\pi \circ \hat{\phi}_t = \phi_t \circ \pi, \forall t \in \mathbb{R} \ . \tag{4.3}$$

En particulier, $\pi \circ \hat{\phi}_1 = \phi_1 \circ \pi = \pi$. Donc $\hat{\phi}_1 \in \Gamma$. De plus, comme $\hat{\phi}_t$ est un symplectomorphisme, on a que

$$e^{-\varphi}\pi^*\Omega = \Omega_0 = \hat{\phi}_1^*\Omega_0 = \hat{\phi}_1^*(e^{-\varphi}\pi^*\Omega) = e^{-\varphi\circ\hat{\phi}_1}\hat{\phi}_1^*\pi^*\Omega = e^{-\hat{\phi}_1^*\varphi}\pi^*\Omega \ .$$

Il en résulte que $\hat{\phi}_1^*\varphi = \varphi$, c'est-à-dire que $\hat{\phi}_1 \in Ker(\rho)$. Comme $\Gamma = G(\hat{M}) = {}^{\pi_1(M)}\!/_{Ker(\rho)}$, $\hat{\phi}_1 = Id_{\hat{M}}$, et $\hat{\phi}_t$ est bien périodique.

$(\Longrightarrow)$

Supposons maintenant que $\hat{\phi}_t$ soit périodique. Comme par hypothèse $X_\xi \in aut(M,[\Omega])$, le lemme (4.1.4.4) nous donne que $L_{\hat{X}_\xi}\Omega_0 = -l(X)\Omega_0$. Cette équation nous dit qu'il existe une fonction périodique lisse $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tel que $\hat{\phi}_t^*\Omega_0 = c(t)\Omega_0$. De plus, on a $\forall t_1,t_2 \in \mathbb{R}$ que

$$c(t_1+t_2)\Omega_0 = \hat{\phi}_{t_1}^*(\hat{\phi}_{t_2}^*\Omega_0) = \hat{\phi}_{t_1}^*(c(t_2)\Omega) = c(t_2)c(t_1)\Omega_0 \ .$$

Donc $c(t_1+t_2) = c(t_1)c(t_2)$. Ainsi on obtient $\forall t \in \mathbb{R}$ que

$$\frac{d}{dr}\Big|_{r=t} c(r) = \lim_{h\to 0}\frac{c(t+h)-c(t)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{c(h)c(t)-c(t)}{h} = c(t)\lim_{h\to 0}\frac{c(h)-1}{h} = c(t)\frac{d}{dr}\Big|_{r=0} c(r) \ .$$

Comme c est périodique, elle doit avoir un point critique $s \in \mathbb{R}$. C'est-à-dire que $0 = \frac{d}{dr}\Big|_{r=s} c(r) = c(s)\frac{d}{dr}\Big|_{r=0} c(r)$. Nous n'avons que deux choix possibles : soit

$c(s) = 0$, soit $\frac{d}{dr}\Big|_{r=0} c(r) = 0$. Supposons que $c(s) = 0$. Alors $\hat{\phi}_s^*\Omega_0 = c(s)\Omega_0 = 0$, ce qui implique que $(\hat{\phi}_s)_* = 0$. Mais $\hat{\phi}_s \in Diff(\hat{M})$, et alors $(\hat{\phi}_s)_* \neq 0$. C'est une contradiction et alors nous en déduisons que $\frac{d}{dr}\Big|_{r=0} c(r) = 0$, et donc

$$L_{\hat{X}_\xi}\Omega_0 = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \hat{\phi}_t^*\Omega_0 = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} c(t)\Omega_0 = 0 \ .$$

Nous avons ainsi démontré que $\hat{X}_\xi \in aut(\hat{M}, \Omega_0)^\Gamma$. Par la proposition (4.1.4.5), on a que $X_\xi \in aut'(M,[\Omega])$ et donc que $Lie(S^1) \subseteq aut'(M,[\Omega])$, comme voulu. □

Remarque 4.2.3.2. En général, une action d'un groupe G sur $\hat{M}$ descend à une action de G sur M si et seulement si G commute avec Γ.

Corollaire 4.2.3.3. *Toute action de tore $\mathbb{T}$ hamiltonienne tordue sur une variété LCS $(M,[\Omega])$ se relève à une action hamiltonienne de tore sur le revêtement symplectique minimal $(\hat{M},\Omega_0)$.*

Démonstration. Comme l'action de tore est hamiltonienne tordue, alors $Lie(\mathbb{T}) \subseteq \mathfrak{ham}(M,[\Omega]) \subseteq aut(M,[\Omega])$. Alors le tore agit par automorphismes conformes sur $(M,[\Omega])$. Le corollaire (4.2.1.5) nous dit aussi que $\mathfrak{ham}(M,[\Omega]) \subseteq aut'(M,[\Omega])$, d'où que $Lie(\mathbb{T}) \subseteq aut'(M,[\Omega])$. Par la proposition précédente, l'action de tore se relève à $\hat{M}$. Posons $\hat{\mu} := -e^{-\varphi}\pi^*\mu^\Omega$. Voyons que $\hat{\mu}$ ne dépend pas du choix de $\Omega \in [\Omega]$. Soit $\Omega_u = e^u\Omega \in [\Omega]$. On a vu que $\theta_u = \theta + du$. Alors

$$\pi^*\theta_u = \pi^*(\theta + du) = d\varphi + d\pi^*u = d(\varphi + u \circ \pi) \ .$$

Donc $\varphi_u = \varphi + u \circ \pi \in \mathcal{C}^\infty(\hat{M})$ est une fonction telle que $\pi^*\theta_u = d\varphi_u$. Maintenant on remarque que

$$\begin{aligned} -e^{-\varphi_u}\pi^*\mu^{\Omega_u} &= -e^{-\varphi - u\circ\pi}\pi^*(e^u\mu^\Omega) \qquad (4.2.2.3) \\ &= -e^{-\varphi}e^{-u\circ\pi}e^{u\circ\pi}\pi^*\mu^\Omega \\ &= -e^{-\varphi}\pi^*\mu^\Omega = \hat{\mu} \ , \end{aligned}$$

c'est-à-dire que $\hat{\mu}$ est conformément invariante. On prétend que $\hat{\mu}$ est une application moment de l'action relevée. En premier lieu, pour $\xi \in Lie(\mathbb{T})$,

$$\begin{aligned}
-d\hat{\mu}_\xi &= -d(-e^{-\varphi}\pi^*\mu_\xi^\Omega) = d(e^{-\varphi}\pi^*\mu_\xi^\Omega) = -e^{-\varphi}d\varphi \wedge \pi^*\mu_\xi^\Omega + e^{-\varphi}\pi^*d\mu_\xi^\Omega \\
&= e^{-\varphi}(-\pi^*\theta \wedge \pi^*\mu_\xi^\Omega + \pi^*d\mu_\xi^\Omega) = e^{-\varphi}\pi^*(d\mu_\xi^\Omega - \theta \wedge \mu_\xi^\Omega) = e^{-\varphi}\pi^*(d^\theta\mu_\xi^\Omega) \\
&= e^{-\varphi}\pi^*(\iota_{X_\xi}\Omega) = e^{-\varphi}\pi^*(\iota_{\pi_*\hat{X}_\xi}\Omega) = e^{-\varphi}\iota_{\hat{X}_\xi}\pi^*\Omega = \iota_{\hat{X}_\xi}\Omega_0 \ .
\end{aligned}$$

Il nous reste à vérifier l'équivariance de $\hat{\mu}$. Comme A^Ω est un isomorphisme, alors $\mu_0^\Omega = (A^\Omega)^{-1}\Big|_{Lie(\mathbb{T})}(0) = 0 \in \mathcal{C}^\infty(M)$. D'où que $\hat{\mu}_0 = 0 \in \mathcal{C}^\infty(\hat{M})$. Par la proposition (3.1.5.8), l'équivariance est équivalente à ce que

$$d\hat{\mu}_\xi(\hat{X}_\eta) = -\hat{\mu}_{[\eta,\xi]} = -\hat{\mu}_0 = 0, \forall \xi,\eta \in Lie(\mathbb{T}) \ .$$

Vérifions donc :

$$\begin{aligned}
d\hat{\mu}_\xi(\hat{X}_\eta) &= -\iota_{\hat{X}_\xi}\Omega_0(\hat{X}_\eta) = -\Omega_0(\hat{X}_\xi,\hat{X}_\eta) = -e^{-\varphi}\pi^*\Omega(\hat{X}_\xi,\hat{X}_\eta) \\
&= -e^{-\varphi}\Omega_{\pi(\cdot)}(X_\xi,X_\eta) = 0 \qquad (4.2.2.5) \ .
\end{aligned}$$

Ainsi l'action de tore sur $(\hat{M},\Omega_0)$ est hamiltonienne, et $\hat{\mu}$ est l'application moment.

□

Proposition 4.2.3.4. *Supposons qu'un tore réel $\mathbb{T}^m$ agisse conformément et fidèlement sur une variété LCS $(M^{2n},[\Omega])$. Alors on a que*

$$m \leq n+1 \ .$$

De plus, si $Lie(\mathbb{T}^m) \subseteq aut'(M,[\Omega])$, alors $m \leq n$ et les orbites de l'action sont isotropes par rapport à n'importe quel représentant de $[\Omega]$.

Démonstration. Soit $T \subseteq TM$ la distribution générée par $\mathbb{T}^m$ sur M. C'est-à-dire que pour chaque $p \in M$, $T(p) := \{(X_\xi)_p \mid \xi \in \mathfrak{t}\} \subseteq T_pM$. Supposons d'abord que $\mathfrak{t} \subseteq aut'(M,[\Omega])$. Par la proposition (4.2.3.1), l'action se relève au revêtement minimal $\hat{M}$. Alors on a la distribution $\hat{T}$ générée par l'action relevée, i.e. $\hat{T}(\hat{p}) = \{(\hat{X}_\xi)_{\hat{p}} \mid \xi \in \mathfrak{t}\}$. Par la proposition (4.1.4.5), $\forall \xi \in \mathfrak{t}, \hat{X}_\xi \in aut(\hat{M}, \Omega_0)^\Gamma$, donc $L_{\hat{X}_\xi}\Omega_0 = 0, \forall \xi \in \mathfrak{t}$. Par (2.1.1.5)(a) et le fait que Ω_0 est fermée, nous avons que

$$0 = L_{\hat{X}_\xi}\Omega_0 = d\iota_{\hat{X}_\xi}\Omega_0 + \iota_{\hat{X}_\xi}d\Omega_0 = d\iota_{\hat{X}_\xi}\Omega_0 \ .$$

Pour $\xi,\eta \in \mathfrak{t}$, on a aussi que

$$[\hat{X}_\xi, \hat{X}_\eta] = \hat{X}_{[\xi,\eta]} = 0 \ ,$$

vu que $\mathfrak{t}$ est abélienne. Alors

$$\begin{aligned} 0 = \iota_{[\hat{X}_\xi,\hat{X}_\eta]}\Omega_0 &= L_{\hat{X}_\xi}\iota_{\hat{X}_\eta}\Omega_0 - \iota_{\hat{X}_\eta}L_{\hat{X}_\xi}\Omega_0 && (2.1.1.5)(b) \\ &= L_{\hat{X}_\xi}\iota_{\hat{X}_\eta}\Omega_0 = \iota_{\hat{X}_\xi}d\iota_{\hat{X}_\eta}\Omega_0 + d\iota_{\hat{X}_\xi}\iota_{\hat{X}_\eta}\Omega_0 && (2.1.1.5)(a) \\ &= d(\Omega_0(\hat{X}_\eta, \hat{X}_\xi)) \ . \end{aligned}$$

Ainsi $\Omega_0(\hat{X}_\eta, \hat{X}_\xi) = c \in \mathbb{R}$ et

$$e^\varphi c = (\pi^*\Omega)(\hat{X}_\eta, \hat{X}_\xi) = \Omega_{\pi(\cdot)}(X_\eta, X_\xi) \ .$$

Par construction du revêtement minimal, φ n'est pas Γ-invariante (voir (4.1.1.11)), mais comme $\Omega_{\pi(\cdot)}(X_\eta, X_\xi)$ l'est, il faut que $c = 0$. Alors $\Omega(X_\eta, X_\xi) = 0 = \Omega_0(\hat{X}_\eta, \hat{X}_\xi), \forall \xi,\eta \in \mathfrak{t}$ et donc les orbites de l'action sont isotropes par rapport à n'importe quel représentant de $[\Omega]$. Comme les champs fondamentaux génèrent les distributions T et $\hat{T}$ et elles sont Ω et Ω_0 isotropes respectivement, on en déduit que pour $\hat{p} \in \hat{M}$, $\dim(\hat{T}(\hat{p})) \leq n$ et $\dim(T(\pi(\hat{p}))) \leq n$. Maintenant, considérons $M_0 \subseteq M$ l'ensemble des orbites principales, dont les orbites sont de dimension m. Pour $p \in M_0$, on a que si $\{\xi_1, \ldots, \xi_m\}$ est base de $\mathfrak{t}$, alors $\dim(Span_{\mathbb{R}}\{(X_{\xi_1})_p, \ldots, (X_{\xi_m})_p\}) = m$, c'est-à-dire que

$$\begin{aligned} \sigma : M_0 \times \mathfrak{t} &\to T\Big|_{M_0} \\ (p, \xi) &\mapsto (X_\xi)_p \end{aligned}$$

est injective. Comme $\dim(\{p\} \times \mathfrak{t}) = m$ et σ est injective, nous en déduisons que $m \leq \dim(T(p)) \leq n$.

Maintenant, supposons que $\mathfrak{t} \not\subset aut'(M,[\Omega])$. Alors $\exists \xi \in \mathfrak{t}$ tel que $c := l(X_\xi) \neq 0$. Considérons $\eta := \frac{\xi}{c} \in \mathfrak{t}$. Ceci nous donne

$$l(X_\eta) = l(\frac{1}{c}X_\xi) = \frac{1}{c}l(X_\xi) = 1 \ .$$

Comme l est linéaire, nous avons une décomposition $\mathfrak{t} = \mathbb{R}X_\eta \oplus \mathfrak{t}'$, où $\mathfrak{t}' \subseteq aut'(M,[\Omega])$. Par le théorème du rang, et comme $\dim(\mathfrak{t}') \leq n$ par ce qui a été fait précédemment, nous obtenons que

$$m = \dim(\mathfrak{t}) = \dim(Im(l)) + \dim(Ker(l)) = 1 + \dim(aut'(M,[\Omega])) \leq 1 + n \ ,$$

comme voulu. □

Définition 4.2.3.5. Une variété LCS $(M^{2n}, [\Omega])$ est dite LCS torique si elle admet une action hamiltonienne tordue fidèle par un tore de dimension maximale $\mathbb{T}^n$. Une variété LCK $(M^{2n}, J,[\Omega])$ est LCK torique si $(M^{2n},[\Omega])$ est torique LCS pour une action de tore $\mathbb{T}^n$ holomorphe.

Théorème 4.2.3.6. *(Istrati, 2016) Soit $(M^{2n},J,[\Omega], \mathbb{T})$ une variété LCK torique, compacte et connexe. Alors il existe $\Omega' \in [\Omega]$ une forme LCK pour laquelle l'action de $\mathbb{T}$ est hamiltonienne tordue, et telle que la métrique correspondante $g' = \Omega'(\cdot, J\cdot)$ soit de Vaisman.*

Démonstration. Soit $\rho : \mathbb{T} \to Aut(M,J,[\Omega])$ l'action de tore fidèle, holomorphe et hamiltonienne tordue. Soit $\Omega \in [\Omega]$ une forme LCK $\mathbb{T}$-invariante, de forme de Lee θ aussi $\mathbb{T}$-invariante, dont l'existence nous est assurée par le lemme (4.2.2.4). Cette action s'étend à une action fidèle holomorphe du tore complexifié $\mathbb{T}^{\mathbb{C}} = (\mathbb{C}^*)^n = \mathbb{T} \times (\mathbb{R}_{>0})^n$ (voir l'exemple (3.1.1.12)). En effet, on a que $\mathfrak{t} \subseteq aut(M,J)$ vu que l'action est holomorphe. Notons $\tau : \mathfrak{t} \to aut(M,J)$ l'homomorphisme induit par cette inclusion. On veut étendre τ à $\mathfrak{t}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{t} \underset{\mathbb{R}}{\otimes} \mathbb{C}$ en posant

$$\begin{aligned} \tau : \quad \mathfrak{t}^{\mathbb{C}} \quad &\to aut(M,J) \\ \xi_1 + i\xi_2 &\mapsto X_{\xi_1} + J(X_{\xi_2}) \end{aligned}$$

Voyons d'abord que τ est bien défini :

$$L_{X_{\xi_1}+JX_{\xi_2}}J = L_{X_{\xi_1}}J + L_{JX_{\xi_2}}J = 0 \ ,$$

car X_{ξ_1} et X_{ξ_2} sont holomorphes, et que $J(X_{\xi_2})$ est aussi holomorphe, par le lemme (2.2.1.7). Vérifions que τ est un morphisme d'algèbres de Lie abéliennes :

$$\begin{aligned} [X_{\xi_1} + JX_{\xi_2}, X_{\eta_1} + JX_{\eta_2}] &= [X_{\xi_1}, X_{\eta_1}] + [X_{\xi_1}, JX_{\eta_2}] + [JX_{\xi_2}, X_{\eta_1}] + [JX_{\xi_2}, JX_{\eta_2}] \\ &= [X_{\xi_1}, X_{\eta_1}] + J[X_{\xi_1}, X_{\eta_2}] + J[X_{\xi_2}, X_{\eta_1}] - [X_{\xi_2}, X_{\eta_2}] \qquad (2.2.1.3) \\ &= X_{[\xi_1,\eta_1]} + JX_{[\xi_1,\eta_2]} + JX_{[\xi_2,\eta_1]} - X_{[\xi_2,\eta_2]} \qquad (3.1) \\ &= 0 \ . \end{aligned}$$

Il existe un unique sous-groupe de Lie $G \subseteq Aut(M,J)$ tel que $Lie(G) = \mathfrak{t}^{\mathbb{C}}$. Comme l'action du tore $\mathbb{T}$ est générée par $\mathfrak{t} \subset \mathfrak{t}^{\mathbb{C}}$, alors $\mathbb{T} \subset G$. De plus, $i\mathfrak{t} \subset \mathfrak{t}^{\mathbb{C}}$ est isomorphe à $(\mathbb{R}_{>0})^n$ par l'exponentielle. L'action de $(\mathbb{R}_{>0})^n$ sur M est générée par les champs fondamentaux JX_ξ, et l'action est holomorphe vu que ceux-ci le sont. Ainsi l'action de $\mathbb{T}^{\mathbb{C}} = \mathbb{T} \times (\mathbb{R}_{>0})^n$ sur M est déterminée par τ. De plus, on a directement par le lemme (3.1.4.4) que l'action induite de $(\mathbb{R}_{>0})^n$ sur M est fidèle. Soit $(\hat{M}, \hat{J}, \Omega_0)$ le revêtement minimal kählérien de $(M, J, [\Omega])$. Par le corollaire (4.2.3.3), l'action de tore hamiltonienne tordue de $\mathbb{T}$ sur $(M,[\Omega])$ se relève à une action $\hat{\rho}$ de tore hamiltonienne sur $(\hat{M}, \Omega_0)$. Voyons que $\hat{\rho}$ est une action holomorphe. Soit $\hat{X}_\xi$ un champ fondamental de cette action, avec $\hat{\phi}_t$ son flot, et ϕ_t le flot de $X_\xi = \pi_* \hat{X}_\xi$. Alors

$$\begin{aligned} L_{\hat{X}_\xi} \hat{J} &= \partial_t \Big|_0 (\hat{\phi}_t)_*^{-1} \circ \pi_*^{-1} \circ J \circ \pi_* \circ (\hat{\phi}_t)_* \\ &= \partial_t \Big|_0 ((\phi_t)_* \circ \pi_*)^{-1} \circ J \circ (\phi_t)_* \circ \pi_* \qquad (4.3) \\ &= \pi_*^{-1} L_{X_\xi} J \circ \pi_* = 0 \ . \end{aligned}$$

Alors $\hat{\rho}$ est une action holomorphe. Par le lemme (3.1.4.4), $\hat{\rho}$ est fidèle. En effet, pour $\xi \in \mathfrak{t}\backslash\{0\}, \exists p \in M$ tel que $(X_\xi)_p \neq 0$. Soit $\hat{p} \in \pi^{-1}(p)$. Alors $(\hat{X}_\xi)_{\hat{p}} = (\pi_*)^{-1} \circ X_\xi(\pi(\hat{p})) \neq 0$. Donc l'action de tore relevée est effective. Comme précédemment, le morphisme $\hat{\tau} : \mathfrak{t}^{\mathbb{C}} \to aut(\hat{M}, \hat{J})$ induit une action holomorphe effective du tore complexe $\mathbb{T}^{\mathbb{C}}$ sur $(\hat{M}, \hat{J})$, dont la restriction à $\mathbb{T} \subset \mathbb{T}^{\mathbb{C}}$ est l'action hamiltonienne que nous avons obtenu. Soit $\hat{\mu} : \hat{M} \to \mathbb{R}^n$ l'application moment de cette action hamiltonienne $\alpha := \hat{\rho}\big|_{\mathbb{T}}$. Soit $\hat{M}_0 \subseteq \hat{M}$ l'ensemble dense, connexe et ouvert des orbites principales de l'action α. Comme $\mathfrak{t} \subseteq \mathfrak{ham}(M, [\Omega]) \subseteq aut'(M,[\Omega])$, nous avons vu dans la preuve de la proposition (4.2.3.4) que les orbites de l'action α sont isotropes par rapport à Ω_0. Par la remarque (3.1.5.3), $\mathbb{T}$ agit sur $\hat{M}_0$ de façon libre. En fait, vu que $\mathbb{T} \cdot p = {}^{\mathbb{T}}\!/_{\mathbb{T}_p}$, $\hat{M}_0$ est exactement l'ensemble des points de $\hat{M}$ sur lesquels $\mathbb{T}$ agit de façon libre.

Voyons que $\mathbb{T}^{\mathbb{C}}$ préserve $\hat{M}_0$. Ce sera le cas si $\forall \hat{p} \in \hat{M}_0, tu \cdot \hat{p} \in \hat{M}_0, \forall t \in \mathbb{T}, \forall u \in (\mathbb{R}_{>0})^n$. Mais $tu \cdot \hat{p} \in \hat{M}_0$ si $\mathbb{T}$ agit librement sur $tu \cdot \hat{p}$, i.e. si pour $r \in \mathbb{T}\backslash\{e\}$, $r \cdot (tu \cdot \hat{p}) \neq tu \cdot \hat{p}$. Il suffit donc que $ru \cdot \hat{p} \neq u \cdot \hat{p}$, vu que r,t et u commutent. Supposons que $ru \cdot \hat{p} = u \cdot \hat{p}$. Alors $r \cdot \hat{p} = \hat{p}$. Ainsi $r \in \mathbb{T}_{\hat{p}} = \{e\}$ vu que l'action de $\mathbb{T}$ sur $\hat{M}_0$ est libre. C'est une contradiction, et donc $\mathbb{T}^{\mathbb{C}}$ préserve $\hat{M}_0$.

Montrons maintenant que $\mathbb{T}^{\mathbb{C}}$ agit librement sur $\hat{M}_0$. Soit donc $g \in \mathbb{T}^{\mathbb{C}}$ et $\hat{x} \in \hat{M}_0$ tels que $g \cdot \hat{x} = \hat{x}$. On peut décomposer $g = tu$, avec $t \in \mathbb{T}$ et $u \in (\mathbb{R}_{>0})^n$. Écrivons à l'aide de l'exponentielle $u = \exp(i\xi), \xi \in \mathfrak{t}$. Posons $\hat{y} := t \cdot \hat{x}$. Alors $u \cdot \hat{y} = \hat{x}$. On définit maintenant une courbe $c : \mathbb{R} \to \hat{M}_0$ dans la $(\mathbb{R}_{>0})^n$-orbite :

$$c(s) := \exp(is\xi) \cdot \hat{y}, s \in \mathbb{R} \ .$$

Cette courbe relie les deux points $\hat{x}$ et $\hat{y}$, qui sont aussi situés dans la même $\mathbb{T}$-orbite. Par invariance de l'application moment, la fonction $\hat{\mu}_\xi$ est constante le long des $\mathbb{T}$-orbites, donc

$$\hat{\mu}_\xi(\hat{x}) = \hat{\mu}_\xi(\hat{y}) \ . \tag{4.4}$$

Ainsi, les orbites de $\mathbb{T}$ sont les courbes de niveau de $\hat{\mu}_\xi$. Remarquons maintenant que $c(s)$ est le flot du champ $\hat{J}(\hat{X}_\xi) = \hat{\tau}(i\xi)$, par définition :

$$c(s) = \phi_s^{\hat{J}(\hat{X}_\xi)}(\hat{y}) \ .$$

Supposons que $\xi \neq 0$. Comme $i\xi \perp \xi$, alors $\hat{J}(\hat{X}_\xi)$ est en chaque point perpendiculaire à $\hat{X}_\xi$. En d'autres mots, $\hat{J}(\hat{X}_\xi)$ est le champ gradient de $\hat{\mu}_\xi$. Soit $f := \hat{\mu}_\xi \circ c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Voyons que f doit être strictement croissante ou décroissante. Par l'absurde, soit $z \in \mathbb{R}$ tel que $(df)_z = 0$. Soit $\hat{p} := c(z)$. Ainsi, comme $\hat{\mu}_\xi$ est constante dans la direction de $\hat{X}_\xi \neq 0$ ($\hat{X}_\xi$ est non-nul étant donné que $\hat{x} \in \hat{M}_0$) et de son champ gradient, on a $(d\hat{\mu}_\xi)_{\hat{p}} = 0$. C'est une contradiction vu que $d\hat{\mu}_\xi = -\iota_{\hat{X}_\xi}\Omega_0$ ne peut être identiquement nulle, par non-dégénérescence de Ω_0. Ainsi, comme df ne s'annule pas, $\hat{\mu}_\xi$ est strictement croissante ou décroissante le long de c. Ceci est une contradiction avec l'équation (4.4), vu que c relie $\hat{x}$ et $\hat{y}$. Alors il faut que $\xi = 0$. Donc $u = 1 \in (\mathbb{R}_{>0})^n$. Ainsi on a que $\hat{x} = g \cdot \hat{x} = t \cdot \hat{x}$. Comme $\mathbb{T}$ agit librement sur $\hat{M}_0$, alors $t = e$. Donc $\mathbb{T}^{\mathbb{C}}$ agit sur $\hat{M}_0$ librement.

Montrons que $\mathbb{T}^{\mathbb{C}}$ agit sur $\hat{M}_0$ de manière transitive. Soit $\hat{x} \in \hat{M}_0$. On considère l'application orbite

$$\begin{aligned} F_{\hat{x}} : \mathbb{T}^{\mathbb{C}} &\to \hat{M}_0 \\ g &\mapsto g \cdot \hat{x} \end{aligned}$$

qui est clairement holomorphe vu que $\hat{\rho}$ l'est. De plus, $F_{\hat{x}}$ est injective. En effet, supposons que $g \cdot \hat{x} = h \cdot \hat{x}$, avec $g,h \in \mathbb{T}^{\mathbb{C}}$. Comme $\mathbb{T}^{\mathbb{C}}$ agit librement sur $\hat{M}_0$, on a que $g^{-1}h \in \mathbb{T}^{\mathbb{C}}_{\hat{x}} = \{e\}$. Donc $g = h$, comme voulu. Comme $\mathbb{T}^{\mathbb{C}}$ et $\hat{M}_0$ ont la même dimension, le théorème d'invariance du domaine nous donne que comme $F_{\hat{x}}$ est continue et injective, elle est une application ouverte. De plus, toute application injective, continue et ouverte est un plongement. Donc $F_{\hat{x}}$ est un plongement ouvert holomorphe. Alors $F_{\hat{x}}(\mathbb{T}^{\mathbb{C}}) = \mathbb{T}^{\mathbb{C}} \cdot \hat{x} \subseteq \hat{M}_0$ est une orbite ouverte. Supposons que l'action ne soit pas transitive. Considérons le cas où il n'y a que 2 orbites. Comme les orbites sont disjointes,

$$\hat{M}_0 = \mathbb{T}^{\mathbb{C}} \cdot \hat{x} \sqcup \mathbb{T}^{\mathbb{C}} \cdot \hat{y}$$

et alors on a réussi à écrire $\hat{M}_0$ comme l'union de deux ouverts disjoints. Ceci constitue une contradiction car $\hat{M}_0$ est connexe. L'idée est la même s'il y a plus que 2 orbites. Donc il n'y a qu'une seule orbite et l'action est transitive. Ainsi, $F_{\hat{x}}$ est un biholomorphisme $\mathbb{T}^{\mathbb{C}}$-équivariant ($(\mathbb{C}^*)^n$ agit sur lui-même par multiplication), et $\mathbb{T}^{\mathbb{C}} \cong \hat{M}_0$.

Montrons maintenant que Γ préserve $\hat{M}_0$. Par la remarque (4.2.3.2), $\mathbb{T}^{\mathbb{C}}$ commute avec Γ. Soit $t \in \mathbb{T}$ et $\gamma \in \Gamma$. Supposons que $t \cdot \gamma(\hat{x}) = \gamma(\hat{x})$. Alors $\gamma(\hat{x}) = t \cdot \gamma(\hat{x}) = \gamma(t \cdot \hat{x})$. Donc $t \cdot \hat{x} = \hat{x}$. Mais comme $\mathbb{T}$ agit sur $\hat{M}_0$ librement, $t = e$. Ainsi, $\gamma(\hat{x}) \in \hat{M}_0$, vu que $\hat{M}_0$ est exactement l'ensemble des points sur lesquels $\mathbb{T}$ agit librement. De plus, Γ agit librement sur $\hat{M}$, par définition du groupe d'automorphismes du revêtement minimal. Ainsi, on peut voir Γ comme sous-groupe des biholomorphismes de $(\mathbb{C}^*)^n$ agissant librement sur $\hat{M}_0 \cong (\mathbb{C}^*)^n$.

Montrons que $\Gamma \subseteq \mathbb{T}^{\mathbb{C}}$. Soit $\hat{y} \in \hat{M}_0$. Comme $F_{\hat{x}}$ est un biholomorphisme, on peut écrire $\hat{y} = F_{\hat{x}}(g)$, pour un certain $g \in \mathbb{T}^{\mathbb{C}}$. Soit $\gamma \in \Gamma$. De la même façon, $\gamma(\hat{x}) = F_{\hat{x}}(g_\gamma)$, pour un certain $g_\gamma \in \mathbb{T}^{\mathbb{C}}$. Comme Γ et $\mathbb{T}^{\mathbb{C}}$ commutent, on a que

$$\gamma(\hat{y}) = \gamma(g \cdot \hat{x}) = g \cdot \gamma(\hat{x}) = g \cdot g_\gamma \cdot \hat{x} = g_\gamma \cdot \hat{y} \ .$$

Ainsi, chaque élément $h \in \mathbb{T}^{\mathbb{C}}$ est un biholomorphisme de $\hat{M}_0 \cong (\mathbb{C}^*)^n$ par l'action libre de $\mathbb{T}^{\mathbb{C}}$ sur $\hat{M}_0$, et Γ est un biholomorphisme de $(\mathbb{C}^*)^n$ agissant librement. La dernière équation nous donne que $\gamma = \hat{\rho}(g_\gamma)$, tel que voulu.

Soit $\gamma \in \Gamma \cong \mathbb{Z}^k$ un générateur. Notons $\Gamma' \cong \mathbb{Z}$ le sous-groupe généré par γ. Ainsi, comme sous-groupe de Γ, Γ' agit sur $\hat{M}_0$. On peut étendre cette action à une action de $\mathbb{R}$. En effet, comme γ est un automorphisme de $\hat{M}_0 \cong (\mathbb{C}^*)^n$, on peut écrire

$$\begin{aligned} \gamma: \quad & (\mathbb{C}^*)^n \to (\mathbb{C}^*)^n \\ & (z_1, \ldots, z_n) \mapsto (\alpha_1 z_1, \ldots, \alpha_n z_n) \end{aligned}$$

où $\alpha_j \in \mathbb{C}^*$ s'écrit $\alpha_j = \rho_j e^{i\theta_j}$ en coordonnées polaires. On définit alors l'action de $\mathbb{R}$ par

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{R} &\to Aut((\mathbb{C}^*)^n) \\ t &\mapsto \quad \Phi_t : \begin{array}[t]{ccc} (\mathbb{C}^*)^n & \to & (\mathbb{C}^*)^n \\ (z_1, \ldots, z_n) & \mapsto & (\rho_1^t e^{it\theta_1} z_1, \ldots, \rho_n^t e^{it\theta_n} z_n) \end{array} \end{aligned}$$

Pour $t \in \mathbb{R}$, Φ_t s'identifie donc à $(\rho_1^t e^{it\theta_1}, \ldots, \rho_n^t e^{it\theta_n}) \in \mathbb{T}^{\mathbb{C}} \subset Aut((\mathbb{C}^*)^n)$, car $\Phi_1 = \gamma = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{T}^{\mathbb{C}}$. Toutefois, tout élément de $\mathbb{T}^{\mathbb{C}}$ agit sur $\hat{M}$ (et pas seulement $\hat{M}_0$), et donc l'action de $\mathbb{R}$ sur $\hat{M}_0$ s'étend à une action sur $\hat{M}$. Comme $\mathbb{T}^{\mathbb{C}}$ commute avec Γ, alors $\mathbb{R} \subset \mathbb{T}^{\mathbb{C}}$ commute avec Γ et alors, par la remarque (4.2.3.2), la $\mathbb{R}$-action Φ descend à une action η de $\mathbb{R} \subset \mathbb{T}^{\mathbb{C}}$ sur M. C'est-à-dire que pour $t \in \mathbb{R}$, on a la relation suivante : $\pi \circ \Phi_t = \eta_t \circ \pi$. Ainsi, on obtient que

$$\pi = \pi \circ \gamma = \pi \circ \Phi_1 = \eta_1 \circ \pi \ .$$

Comme π est surjective, $\eta_1 = Id_M$. Donc $\eta : \mathbb{R} \to Diff(M)$ n'est pas injective. Elle le devient à travers le quotient $\mathbb{R}/\Gamma' \cong S^1$, ce qui nous donne une action fidèle de $S^1 \subset \mathbb{T}^{\mathbb{C}}$ sur M (qu'on note aussi η). Cette action est holomorphe car $\eta = \rho\Big|_{\mathbb{R}/\Gamma'}$. Soit $C \in \mathfrak{X}(M)$ un générateur infinitésimal de cette action circulaire holomorphe.

Lemme 4.2.3.7. *Il existe sur M une forme LCK Ω^C compatible avec J, de forme* *de Lee θ^C, telle que C préserve Ω^C et θ^C. De plus, l'action de tore est hamiltonienne tordue par rapport à Ω^C.*

Démonstration. D'abord, si $S^1 \subset \mathbb{T}$, le résultat est trivial puisque Ω et θ sont $\mathbb{T}$-invariantes et que l'action est hamiltonienne tordue par hypothèse. Supposons alors que $S^1 \not\subset \mathbb{T}$. Soit $t \in \mathbb{R}$. Posons $f_t := \Phi_t^*\varphi - \varphi \in \mathcal{C}^\infty(\hat{M})$ et $h := \int_0^1 f_t dt \in \mathcal{C}^\infty(\hat{M})$. Remarquons d'abord que les fonctions f_t sont Γ-invariantes. Soit $\delta \in \Gamma$, on a

$$\begin{aligned} \delta^* f_t &= \delta^*\Phi_t^*\varphi - \delta^*\varphi = \Phi_t^*\delta^*\varphi - \delta^*\varphi \qquad [\text{ car } \Gamma \text{ commute avec } \mathbb{R}\ ] \\ &= \Phi_t^*(\rho(\delta) + \varphi) - (\rho(\delta) + \varphi) = \Phi_t^*\varphi - \varphi = f_t \ . \end{aligned}$$

Alors h est aussi Γ-invariante. Ainsi les fonctions $\{f_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ et h descendent à M. Nommons $\overline{h} \in \mathcal{C}^\infty(M)$ la fonction h "descendue", qui satisfait $\overline{h} \circ \pi = h$.
Comme $\mathbb{T}$ agit sur $(M,[\Omega])$ de manière hamiltonienne tordue et fidèle, la proposition (4.2.2.7) nous donne que $\mathfrak{t} \subseteq \ker(\theta)$. Alors φ est $\mathbb{T}$-invariante. En effet, il suffit que pour $\xi \in \mathfrak{t}$, on ait que $L_{\hat{X}_\xi}\varphi = 0$. Mais

$$L_{\hat{X}_\xi}\varphi = d\varphi(\hat{X}_\xi) = \pi^*\theta(\hat{X}_\xi) = \theta(\pi_*\hat{X}_\xi) = \theta(X_\xi) = 0 \ ,$$

tel que voulu. Comme $\{\Phi_t\}_{t\in\mathbb{R}} \subseteq \mathbb{T}^{\mathbb{C}}$, Φ_t commute avec $\mathbb{T}$, donc les fonctions f_t aussi. En effet, pour $g \in \mathbb{T}$, $\hat{\rho}(g)^* f_t = \Phi_t^*\hat{\rho}(g)^*\varphi - \hat{\rho}(g)^*\varphi = f_t$, vu que φ est $\mathbb{T}$-invariante. Alors h est aussi $\mathbb{T}$-invariante.
On définit maintenant la forme de Lee

$$\begin{aligned} \theta^C &:= \int_{S^1} \eta_t^*\theta dt = \int_0^1 (\pi^{-1})^*\Phi_t^*\pi^*\theta dt = \int_0^1 (\pi^{-1})^*\Phi_t^* d\varphi dt = (\pi^{-1})^* d\int_0^1 \Phi_t^*\varphi dt \\ &= (\pi^{-1})^* d(\varphi + h) = (\pi^{-1})^* d\varphi + (\pi^{-1})^* dh = \theta + d\overline{h} \ . \end{aligned}$$

Cette 1-forme est C-invariante par construction. En effet,

$$\eta_s^*\theta^C = \int_{S^1} (\eta_{t+s})^*\theta dt = \int_{S^1} \eta_\alpha^*\theta d\alpha = \theta^C \ ,$$

où $\alpha := t + s$. De plus, elle est $\mathbb{T}$-invariante, car pour $\xi \in \mathfrak{t}$,

$$L_{X_\xi}\theta^C = L_{X_\xi}(\theta + d\overline{h}) = dL_{X_\xi}\overline{h} = d \circ d\overline{h}(X_\xi) = 0 \ .$$

Posons $\Omega_{\overline{h}} := e^{\overline{h}}\Omega \in [\Omega]$, et aussi $\Omega^C := \int_{S^1} \eta_t^* \Omega_{\overline{h}} dt$. Comme l'action η est holomorphe et que $\Omega_{\overline{h}}$ est J-compatible, alors Ω^C l'est aussi. On a que

$$d\Omega_{\overline{h}} = d\overline{h} \wedge \Omega_{\overline{h}} + \theta \wedge \Omega_{\overline{h}} = (\theta + d\overline{h}) \wedge \Omega_{\overline{h}} = \theta^C \wedge \Omega_{\overline{h}} \ ,$$

ce qui indique que θ^C est forme de Lee de $\Omega_{\overline{h}}$. De ceci, on obtient que

$$d\Omega^C = \int_{S^1} \eta_t^* d\Omega_{\overline{h}} dt = \int_{S^1} \eta_t^* \theta^C \wedge \eta_t^* \Omega_{\overline{h}} dt = \theta^C \wedge \int_{S^1} \eta_t^* \Omega_{\overline{h}} dt = \theta^C \wedge \Omega^C \ .$$

En outre, θ^C est aussi la forme de Lee de Ω^C, qui est bien une forme LCK, vu que $[\theta^C] = [\theta] \neq 0 \in H^1_{dR}(M)$. De la même façon que pour montrer que θ^C est C-invariante, on obtient que Ω^C est C-invariante. Maintenant, vérifions que Ω^C est $\mathbb{T}$-invariante. Soit $g \in \mathbb{T}$. Comme Φ_t commute avec $\mathbb{T}$, alors η_t aussi. Ainsi on a que

$$\begin{aligned} \rho(g)^*\Omega^C &= \int_{S^1} \rho(g)^* \eta_t^* \Omega_{\overline{h}} dt = \int_{S^1} \eta_t^* \rho(g)^* \Omega_{\overline{h}} dt \\ &= \int_{S^1} \eta_t^* \Omega_{\overline{h}} dt = \Omega^C \ . \qquad [\ \Omega_{\overline{h}} \text{ est } \mathbb{T}\text{-invariante}\ ] \end{aligned}$$

Comme θ^C est C-invariante, on a que

$$0 = L_C\theta^C = \iota_C d\theta^C + d\iota_C\theta^C = d(\theta^C(C)) \ ,$$

ce qui implique que $\theta^C(C)$ est constante. Nous reportons à plus tard la preuve du fait suivant : le revêtement minimal correspondant à $(M, [\Omega^C])$ est $\hat{M}$. Remarquons que

$$\pi^*\theta^C = \pi^*\theta + \pi^* d\overline{h} = d(\varphi + h) \ ,$$

d'où que $\varphi^C := \varphi + h$. Ainsi on a que

$$\theta^C(C) = \theta(C) + d\overline{h}(C) = \pi^*\theta(\hat{C}) + \pi^* d\overline{h}(\hat{C}) = d(\varphi + h)(\hat{C}) = d\varphi^C(\hat{C}) = L_{\hat{C}}\varphi^C \ .$$

Si on avait que $\theta^C(C) = 0$, alors $L_{\hat{C}}\varphi^C = 0$ et donc φ^C serait Γ'-invariante et descendrait donc au quotient $\hat{M}/_{\Gamma'}$. Mais ceci contreviendrait à la minimalité de $\hat{M}$. Il faut donc que $\theta^C(C) =: \lambda \neq 0$. On veut voir que $l : aut(M,[\Omega]) \to \mathbb{R}$ est surjective. Comme $0 = L_C\Omega^C = f_C\Omega^C$, alors $f_C = 0$. Donc

$$l(C) = \theta^C(C) - f_C = \theta^C(C) = \lambda \neq 0 ,$$

ce qui fait que $l((\frac{C}{\lambda}) = 1$, par linéarité de l, et alors l est bien surjective. Par la proposition (4.1.4.9), $(M,[\Omega^C])$ est exacte. En posant $\eta := -\frac{1}{\lambda}\iota_C\Omega^C \in \Omega^1(M)$, on a que $\Omega^C = d^{\theta^C}\eta$. Comme C et Ω^C sont $\mathbb{T}$-invariantes, η l'est aussi. On a donc que le tore $\mathbb{T}$ agit conformément sur $(M,[\Omega^C])$. De plus, pour $\xi \in \mathfrak{t}$, $0 = L_{X_\xi}\Omega^C$ et

$$\theta^C(X_\xi) = d\varphi^C(\hat{X}_\xi) = L_{\hat{X}_\xi}\varphi + L_{\hat{X}_\xi}h = 0 ,$$

car φ et h sont $\mathbb{T}$-invariantes. Donc

$$\mathfrak{t} \subseteq aut'(M,[\Omega^C]) .$$

Par la proposition (4.2.2.8), l'action est hamiltonienne tordue, d'application moment $\mu^C := -\eta$, vu que η est $\mathbb{T}$-invariante. $\square$

Pour conclure, nous devons montrer le lemme suivant :

Lemme 4.2.3.8. *Le revêtement minimal de $(M,[\Omega^C])$ est le même que celui de $(M,[\Omega])$, c'est-à-dire $\hat{M}$.*

Démonstration. Soit $\hat{M}_C$ le revêtement minimal kählérien de $(M,[\Omega^C])$, avec $\pi_C : \hat{M}_C \to M$ la projection de ce revêtement, et Γ_C son groupe de transformations. De la même façon, $\hat{M}$ est le revêtement minimal de $(M,[\Omega])$, de projection π et de groupe de transformations Γ. D'abord, remarquons que

$$\pi^*\theta^C = \pi^*\theta + dh = d(\varphi + h) = d\varphi^C .$$

Mais $\hat{M}_C$ est le revêtement minimal de $(M, [\Omega^C])$ tel que $\pi_C^*\theta^C$ est exacte. Par le calcul précédent, il faut donc que $\hat{M}$ revêt $\hat{M}_C$. Par construction de $\hat{M}_C$, $\pi_C^*\theta^C =:$ $d\hat{\varphi}$ est exacte. Donc $d\hat{\varphi} = \pi_C^*\theta^C = \pi_C^*\theta + d\pi_C^*\overline{h}$, d'où que

$$\pi_C^*\theta = d(\hat{\varphi} - \pi_C^*\overline{h})$$

est exacte. Ainsi, comme $\hat{M}$ est par construction le revêtement minimal tel que $\pi^*\theta$ est exacte, il faut que $\hat{M}_C$ revêt $\hat{M}$. Comme $\hat{M}_C \geq \hat{M}$ et $\hat{M} \geq \hat{M}_C$, on a que $\hat{M}_C = \hat{M}$, tel que voulu. $\square$

À la lumière du lemme (4.2.3.7), nous avons une forme LCK J-compatible que nous noterons Ω, de forme de Lee θ, telles que $L_C\Omega = 0 = L_C\theta$, avec l'action du tore $\mathbb{T}$ hamiltonienne tordue par rapport à Ω. Soient $\pi_{i\mathfrak{t}} : \mathfrak{t}^{\mathbb{C}} \to i\mathfrak{t}$ et $\pi_{\mathfrak{t}} : \mathfrak{t}^{\mathbb{C}} \to \mathfrak{t}$ les projections naturelles de $\mathfrak{t}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{t} \oplus i\mathfrak{t}$. Considérons le champ de vecteurs $B' := \pi_{i\mathfrak{t}}(C) \in i\mathfrak{t}$. Comme Ω est $\mathbb{T}$-invariante, la proposition (4.2.2.7) nous donne que $\mathfrak{t} \subseteq \ker(\theta)$. Par conséquent, nous avons que

$$\theta(B') = \theta(B' + \pi_{\mathfrak{t}}(C)) = \theta(C) = \lambda \neq 0 \ .$$

Ainsi, pour $B := -\frac{1}{\lambda}B'$, on a que $\theta(B) = -1$. Par notre construction de $\mathfrak{t}^{\mathbb{C}} \subset$ $aut(M,J)$, nous avons l'égalité

$$J \circ \pi_{i\mathfrak{t}} = \pi_{\mathfrak{t}} \circ J$$

qui nous permet de voir que $J(B) \in \mathfrak{t}$:

$$J(B) = -\frac{1}{\lambda}J(\pi_{i\mathfrak{t}}(C)) = -\frac{1}{\lambda}\pi_{\mathfrak{t}}(J(C)) \ .$$

Alors $J(B)$ préserve Ω, vu que Ω est $\mathbb{T}$-invariante. Comme C préserve Ω par construction, $-\frac{C}{\lambda}$ aussi. Comme $B = \pi_{i\mathfrak{t}}(-\frac{C}{\lambda})$, on peut exprimer

$$-\frac{C}{\lambda} = D + B \ ,$$

pour un certain $D \in \mathfrak{t}$. Donc B est la différence de deux champs préservant Ω, et ainsi B préserve Ω.

Considérons maintenant sur le revêtement minimal kählérien $(\hat{M}, \Omega_0, \hat{J})$ la métrique correspondante $g_0 = \Omega_0(\cdot, \hat{J}\cdot)$. Comme $L_B\Omega = 0$, alors $f_B = 0$. Ainsi nous avons par le lemme (4.1.4.4) que

$$L_{\hat{B}}\Omega_0 = -l(B)\Omega_0 = -\theta(B)\Omega_0 = \Omega_0 \ .$$

Par construction, on a que $\widehat{J(B)} = \hat{J}(\hat{B})$. Alors

$$\begin{aligned} L_{\widehat{JB}}\Omega_0 &= L_{\widehat{JB}}(e^{-\varphi})\pi^*\Omega + e^{-\varphi}L_{\widehat{JB}}(\pi^*\Omega) = -e^{-\varphi}\pi^*\theta(\widehat{JB})\pi^*\Omega + e^{-\varphi}\pi^*L_{JB}\Omega \\ &= -e^{-\varphi}\theta(JB)\pi^*\Omega = 0 \ , \end{aligned}$$

car $J(B) \in \mathfrak{t} \subseteq \ker(\theta)$. Posons $\eta_0 := \iota_{\hat{B}}\Omega_0$ et $f_0 := \|\hat{B}\|^2_{g_0} = \Omega_0(\hat{B}, \hat{J}\hat{B}) = \eta_0(\widehat{JB})$. Ainsi, nous voyons que Ω_0 est exacte :

$$d\eta_0 = d\iota_{\hat{B}}\Omega_0 + \iota_{\hat{B}}d\Omega_0 = L_{\hat{B}}\Omega_0 = \Omega_0 \ .$$

Souvenons-nous que $\tau : \mathfrak{t}^{\mathbb{C}} \to aut(M,J)$ est un morphisme d'algèbres de Lie abéliennes, donc JB commute avec B. Comme $[\hat{B}, \widehat{JB}] = \pi_*^{-1}[B, JB]$, alors $\hat{B}$ commute avec $\widehat{JB}$. Ainsi nous obtenons que $\widehat{JB}$ préserve η_0 :

$$L_{\widehat{JB}}\eta_0 = L_{\widehat{JB}}(\iota_{\hat{B}}\Omega_0) = \iota_{[\widehat{JB},\hat{B}]}\Omega_0 + \iota_{\hat{B}}L_{\widehat{JB}}\Omega_0 = 0 \ . \qquad (2.1.1.5)$$

Comme $\hat{J}\eta_0 = \Omega_0(\hat{B}, \hat{J}\cdot) = -\Omega_0(\widehat{JB}, \cdot)$, nous obtenons que

$$0 = L_{\widehat{JB}}\eta_0 = d\iota_{\widehat{JB}}\eta_0 + \iota_{\widehat{JB}}d\eta_0 = df_0 + \iota_{\widehat{JB}}\Omega_0 = df_0 - \hat{J}\eta_0 \ ,$$

c'est-à-dire que $\eta_0 = -\hat{J}df_0$. Ainsi, on peut exprimer Ω_0 comme

$$\Omega_0 = d\eta_0 = -d\hat{J}df_0 = -d(d^c - d\hat{J})f_0 = -dd^cf_0 \ ,$$

où $d^c := \hat{J}d + d\hat{J}$. Comme $\theta(B) = -1$, B ne peut s'annuler nulle part, et alors $\hat{B}$ non plus. Il s'ensuit que $f_0 = \|\hat{B}\|^2$ est strictement positive. Remarquons maintenant que

$$\overline{\Omega} := \frac{\Omega_0}{f_0} = \frac{e^{-\varphi}\pi^*\Omega}{e^{-\varphi}\Omega_{\pi^\cdot}(B,JB)} = \frac{\pi^*\Omega}{\Omega_{\pi^\cdot}(B,JB)}$$

est Γ-invariante, et descend donc à $\Omega' := \frac{\Omega}{\Omega(B,JB)} \in \Omega^2(M)$. Posons $f := \Omega(B,JB) \in \mathcal{C}^\infty(M)$. Comme $f_0 > 0$, alors

$$e^{\varphi} f_0 = f \circ \pi > 0 \ ,$$

et comme π est surjective, $f > 0$. Alors $\Omega' = \frac{\Omega}{f} = e^{-\ln f}\Omega \in [\Omega]$. C'est donc une forme LCK de forme de Lee $\theta' = \theta - d(\ln f)$. Remarquons que

$$\pi^*\theta' = d\varphi - d\pi^* \ln f = d\varphi - d\ln e^{\varphi} f_0 = d\varphi - \frac{d(e^{\varphi} f_0)}{e^{\varphi} f_0} = -\frac{df_0}{f_0} = -d\ln f_0 \ .$$

Alors

$$\begin{aligned}\pi^*\iota_{JB}\Omega' &= \pi^*(\frac{1}{f}\iota_{JB}\Omega) = \frac{1}{f\circ\pi}\pi^*\iota_{\pi_*\widehat{JB}}\Omega = \frac{e^{-\varphi}}{f_0}\iota_{\widehat{JB}}\pi^*\Omega \\ &= \frac{1}{f_0}\iota_{\widehat{JB}}\Omega_0 = -\frac{1}{f_0}\hat{J}\eta_0 = -\frac{df_0}{f_0} = -d\ln f_0 = \pi^*\theta' \ .\end{aligned}$$

Comme π_* est un isomorphisme en chaque fibre, on a que

$$\iota_{JB}\Omega' = \theta' \ .$$

Soit g' la métrique riemannienne associée à (Ω', J). On a alors que

$$\theta' = \Omega'(JB,\cdot) = g'(-B,\cdot) \ ,$$

donc que $(\theta')^\sharp = -B$. Maintenant, comme C est holomorphe, B l'est aussi. Remarquons que

$$df(B) = \pi^*df(\hat{B}) = d(e^{\varphi} f_0)(\hat{B}) = e^{\varphi} f_0\theta(B) + e^{\varphi}df_0(\hat{B}) = -e^{\varphi} f_0 + e^{\varphi} f_0 = 0 \ .$$

En outre, comme $L_B\Omega = 0$, on a que

$$L_B\Omega' = d(\frac{1}{f})(B)\Omega + \frac{1}{f}L_B\Omega = -\frac{1}{f^2}df(B)\Omega = 0 \ .$$

Puisque B est holomorphe, la proposition (2.1.1.1) ainsi que le corollaire (2.2.1.3) nous donnent que

$$\begin{aligned}L_B(g'(X,Y)) = L_B(\Omega'(X,JY)) &= (L_B\Omega')(X,JY) + \Omega'(L_BX, JY) + \Omega'(X,L_BJY) \\ &= (L_B\Omega')(X,JY) + \Omega'(L_BX, JY) + \Omega'(X,JL_BY) \\ &= (L_B\Omega')(X,JY) + g'(L_BX,Y) + g'(X,L_BY) \ .\end{aligned}$$

Donc $L_B g' = L_B \Omega'(\cdot, J\cdot) = 0$, vu que B préserve Ω'. C'est-à-dire que B est un champ de Killing. Par la proposition (2.3.2.7), la 1-forme $\theta' = (-B)^\flat$ vérifie

$$\nabla^{g'}\theta' = d\theta' = 0 \ ,$$

et ainsi (Ω', θ') est Vaisman, tel que voulu. $\square$

Ainsi, le théorème précédent nous montre qu'une variété compacte LCK torique possède toujours une métrique de Vaisman.

CONCLUSION

La géométrie LCK est à l'intersection de plusieurs grands domaines de la géométrie : géométrie symplectique, géométrie riemannienne, géométrie complexe, géométrie kählérienne. Dans l'argument de Nicolina Istrati exposé dans le théorème (4.2.3.6), il est crucial de se placer dans le contexte de la géométrie LCK, au lieu de celui plus large de la géométrie LCS. Le théorème d'Istrati mis en commun avec les résultats contenus dans les articles (Lerman *et al.*, 2002) et (Pilca, 2016) mène à une classification des variétés LCK toriques compactes. Il convient maintenant de se demander si une autre sous-classe des variétés LCS est susceptible d'être classifiée, en vue d'éventuellement obtenir une classification complète de la classe des variétés LCS.

BIBLIOGRAPHIE

Benoist, Y. (1998). Actions symplectiques de groupes compacts. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences-Series I-Mathematics*, *327*(4), 373–376.

Bredon, G. E. (1972). *Introduction to compact transformation groups*, volume 46. Academic press.

Chantraine, B. et Murphy, E. (2016). Conformal symplectic geometry of cotangent bundles. *arXiv preprint arXiv :1606.00861.*

Da Silva, A. C. et Takens, F. (2001). *Lectures on symplectic geometry*, volume 3575. Springer.

Delzant, T. (1988). Hamiltoniens périodiques et images convexes de l'application moment. *Bull. Soc. Math. France*, *116*(3), 315–339.

Gallot, S., Hulin, D. et Lafontaine, J. (1990). *Riemannian geometry*, volume 3. Springer.

Hatcher, A. (2002). *Algebraic Topology.* Cambridge University Press.

Huybrechts, D. (2006). *Complex geometry : an introduction.* Springer Science & Business Media.

Istrati, N. (2016). A characterisation of toric lck manifolds. *arXiv preprint arXiv :1612.03832.*

Kirillov, A. A. (2008). *An introduction to Lie groups and Lie algebras*, volume 113. Cambridge University Press.

Kobayashi, S. (2012). *Transformation groups in differential geometry.* Springer Science & Business Media.

Kobayashi, S. et Nomizu, K. (1963). *Foundations of differential geometry*, volume 1. Interscience publishers New York.

Kostrikin, A. I. et Manin, Y. I. (1997). *Linear algebra and geometry* (english éd.), volume 1 de *Algebra, Logic and Applications.* Gordon and Breach Science Publishers, Amsterdam. Translated from the second Russian (1986) edition by M. E. Alferieff.

Lerman, E. *et al.* (2002). Contact toric manifolds. *Journal of Symplectic Geometry*, *1*(4), 785–828.

Madani, F., Moroianu, A. et Pilca, M. (2017). On toric locally conformally kähler manifolds. *Annals of Global Analysis and Geometry*, *51*(4), 401–417.

McDuff, D. et Salamon, D. (2017). *Introduction to symplectic topology.* Oxford University Press.

Pilca, M. (2016). Toric vaisman manifolds. *Journal of Geometry and Physics*, *107*, 149–161.

Vaisman, I. (1980). On locally and globally conformal kähler manifolds. *Transactions of the American Mathematical Society*, *262*(2), 533–542.

Warner, F. W. (2013). *Foundations of differentiable manifolds and Lie groups*, volume 94. Springer Science & Business Media.