

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL

ÉTUDE SPECTRALE DU MÉLANGE DOUBLEMENT ALÉATOIRE ET
D'AUTRES OPÉRATEURS DE MÉLANGE VIA LA THÉORIE DE LA
REPRÉSENTATION

MÉMOIRE

PRÉSENTÉ

COMME EXIGENCE PARTIELLE
DE LA MAÎTRISE EN MATHÉMATIQUES

PAR

STÉPHANIE SCHANCK

JANVIER 2019

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL
Service des bibliothèques

Avertissement

La diffusion de ce mémoire se fait dans le respect des droits de son auteur, qui a signé le formulaire *Autorisation de reproduire et de diffuser un travail de recherche de cycles supérieurs* (SDU-522 – Rév.10-2015). Cette autorisation stipule que «conformément à l'article 11 du Règlement no 8 des études de cycles supérieurs, [l'auteur] concède à l'Université du Québec à Montréal une licence non exclusive d'utilisation et de publication de la totalité ou d'une partie importante de [son] travail de recherche pour des fins pédagogiques et non commerciales. Plus précisément, [l'auteur] autorise l'Université du Québec à Montréal à reproduire, diffuser, prêter, distribuer ou vendre des copies de [son] travail de recherche à des fins non commerciales sur quelque support que ce soit, y compris l'Internet. Cette licence et cette autorisation n'entraînent pas une renonciation de [la] part [de l'auteur] à [ses] droits moraux ni à [ses] droits de propriété intellectuelle. Sauf entente contraire, [l'auteur] conserve la liberté de diffuser et de commercialiser ou non ce travail dont [il] possède un exemplaire.»

REMERCIEMENTS

Les fameux remerciements : la partie de mon mémoire qui me semblait la plus facile à rédiger... j'étais naïve. Si peu de mots pour faire état de toute ma gratitude. Mais allons-y.

Franco, tu es un fabricant de bonheur. À chaque fois que tu dis «excellent!», les sourires se multiplient. Tu m'as soutenue dans mes décisions, et je pense même que tu les as comprises. Tu as su voir les choses avec mon regard, et je t'en remercie. Je suis terriblement chanceuse de t'avoir eu comme directeur.

Un grand merci à Hugh Thomas et Christophe Reutenauer pour leur précieux commentaires suite à leur lecture de ce mémoire.

À mes chers amis du LaCIM, en plus de votre amitié, vous étiez toujours là pour me soutenir dans ma rédaction, merci ! J'ai un peu le cœur gros de penser que ce ne sera plus comme avant. Émile, notre complicité est chère à mes yeux. Ton départ m'attriste, mais j'ai hâte de voir ta chambre d'amis. Herman, nos petites marches matinales (ok, pas si matinales que ça) et nos cafés vont me manquer, mais j'ai bien hâte de voir ta chambre d'amis (voyez-vous une tendance ici ?). Nadia, merci d'avoir écrit ce mémoire à ma place (ceci est une blague). Plus sérieusement, que de plaisir à animer des balades, à écrire des chroniques et à faire de la recherche avec toi ! Francis, tu débordes d'une générosité, d'une pédagogie et d'une patience infinies. Pauline, tu es une amie en or (ton rire vaut de l'or aussi). Mélodie, ma technicienne Antidote, merci ! Et merci à toutes les personnes qui font du LaCIM un endroit si agréable. Mais surtout, merci d'avoir goûté à mon gâteau au jell-O.

Merci à mes collègues du cégep du Vieux Montréal. Vos encouragements me rassuraient. J'ai hâte de revenir avec toute mon énergie!

Merci aux petits cochons : Ro-Ro, d'être toujours là à me comprendre ; Re-Re, d'être une si bonne personne ; et Jo-Jo, d'être si divertissant (sans oublier sensible et délicat).

Et finalement, merci à Julien et à ma famille. Votre amour et vos encouragements constants m'ont aidé à sincèrement croire que j'en étais capable. Mention spéciale à ma maman qui a reçu de temps en temps des appels de panique.

TABLE DES MATIÈRES

LISTE DES FIGURES	vii
RÉSUMÉ	ix
INTRODUCTION	1
CHAPITRE I THÉORIE DE LA REPRÉSENTATION DES GROUPES	5
1.1 Outils combinatoires	5
1.1.1 Partages et diagrammes	6
1.1.2 Tableaux et promotion	9
1.2 Représentations d'un groupe	14
1.3 G -modules	17
1.3.1 Les \mathfrak{S}_n -modules et le module M^λ	18
1.4 Représentations irréductibles et modules simples	22
1.4.1 Modules de Specht	22
1.5 Morphismes de Modules	29
1.5.1 Lemme de Schur	30
1.6 Théorème de Maschke	31
1.6.1 Décomposition de M^λ	32
1.7 Produit tensoriel de modules	34
1.8 Représentations induites	35
1.8.1 La règle de branchement	36
CHAPITRE II LE MÉLANGE DOUBLEMENT ALÉATOIRE	39
2.1 Définition du mélange	39
2.1.1 La matrice de transition	41
2.1.2 Le mélange vu comme un élément de $\mathbb{C}\mathfrak{S}_n$	43

2.2	Les opérateurs sh, ∂ et $\Theta_{a,b}$ et leurs relations	44
2.3	Les opérateurs \mathcal{L} et la construction des espaces propres de $\text{R}2\text{R}_n$. . .	50
2.3.1	Un exemple du phénomène	51
2.4	La construction récursive des espaces propres	54
2.4.1	Les grandes lignes de la preuve	55
2.4.2	Une identité sur M^λ	55
2.4.3	La restriction à S^λ	57
2.4.4	Projection sur un module de Specht	57
2.4.5	Construire un vecteur propre de $\text{R}2\text{R}_{n+1}$ grâce à <code>projlift</code>	59
2.4.6	Expression des vecteurs propres de $\text{R}2\text{R}^\lambda$ à l'aide des opérateurs <code>projlift</code>	62
2.4.7	Construction des espaces propres à partir des noyaux de $\text{R}2\text{R}$.	65
2.4.8	Lien entre les opérateurs \mathcal{L} et <code>projlift</code>	73
2.5	Les valeurs propres	74
2.5.1	Les valeurs propres indexées par les bandes horizontales . . .	75
2.5.2	Les valeurs propres indexées par les mots	76
2.6	Utiliser la promotion pour construire les espaces propres	77
	CHAPITRE III L'ÉTUDE D'UNE AUTRE FAMILLE D'OPÉRATEURS	83
3.1	Les opérateurs $\nu_{(n-k,1^k)}$	83
3.2	Le cas $\nu_{(n-2,1,1)}$	87
3.3	Les vecteurs propres des opérateurs $\nu_{(n-k,1^k)}$	90
	CONCLUSION	93
	RÉFÉRENCES	97

LISTE DES FIGURES

Figure		Page
1.1	Diagramme de Ferrers associé au partage $(4, 3, 1, 1)$. Le point indique la case en position $(1,2)$	7
1.2	Relation d'inclusion des diagrammes de Ferrers (voir exemple 1) .	8
1.3	Exemple d'un tableau semi-standard (à gauche) et d'un tableau standard (à droite), chacun de forme $(4, 2)$	10
1.4	Tous les tableaux de désarrangement de taille 5	12
1.5	L'opération promotion appliquée sur un tableau de Young standard.	13

RÉSUMÉ

Ce mémoire s'intéresse principalement à l'opérateur doublement aléatoire, appelé *random-to-random* en anglais. Appliqué sur un paquet de cartes, cet opérateur consiste à retirer aléatoirement une carte pour la réinsérer aléatoirement.

On se penche sur cet opérateur sous un angle spectral, c'est-à-dire qu'on s'intéresse à la construction de ses espaces propres et à la caractérisation de ses valeurs propres. On explicitera la structure inductive liant les espaces propres de l'opérateur, structure découverte par Dieker et Saliola (Dieker et Saliola, 2018). La structure inductive vient de l'utilisation des opérateurs de levée, qui permettent notamment de construire toute base de vecteurs propres à partir des bases de noyaux. Cette structure émerge en introduisant des notions de la théorie de la représentation dans l'étude de l'opérateur. Ces notions sont donc également exposées préalablement.

Au final, on utilise la même méthode que Dieker et Saliola pour étudier le spectre d'opérateurs $\nu_{(n-k, 1^k)}$, définis par Reiner, Saliola et Welker (Reiner *et al.*, 2014). Ces opérateurs consistent à retirer aléatoirement k cartes du paquet et à les réinsérer aléatoirement. En utilisant la méthode de Dieker et Saliola, on réussit à dégager un début de structure inductive entre les espaces propres de ces nouveaux opérateurs.

Mots clés : combinatoire algébrique, représentation du groupe symétrique, marche aléatoire, opérateur de mélange aléatoire, mélange doublement aléatoire, valeur propre.

INTRODUCTION

Vous jouez aux cartes et c'est à votre tour de brasser le paquet. Au lieu d'utiliser les mélanges classiques, vous décidez de procéder en retirant une carte choisie aléatoirement et en la remplaçant à une position encore une fois choisie aléatoirement. Pourrez-vous vraiment obtenir un paquet bien mélangé à l'aide de cette technique? Combien de temps cela vous prendra-t-il? Pouvons-nous nous intéresser mathématiquement à ce mélange de cartes?

Le mélange utilisé se nomme le mélange doublement aléatoire (*random-to-random* en anglais), qu'on note $R2R_n$ pour n le nombre de cartes. C'est un mélange probabiliste, au sens où, à partir d'une même configuration initiale, l'application du mélange ne donne pas toujours le même résultat. On peut alors considérer le mélange comme une marche aléatoire.

Une marche aléatoire est une modélisation mathématique d'une situation dynamique discrète consistant en une suite de pas faits au hasard entre un certain nombre d'états possibles. Le passage d'un état à un autre se fait selon une probabilité qui ne dépend que de l'état actuel et non pas de tous les états passés. Pour un exposé plus détaillé sur les marches aléatoires, voir (Rudnick et Gaspari, 2004; Pinsky et Karlin, 2011). Dans le cas présent, les états sont toutes les configurations possibles du paquet de cartes. On voyage d'un état à l'autre en appliquant le mélange doublement aléatoire.

Les marches aléatoires proviennent de la théorie des probabilités, mais il peut se révéler intéressant d'utiliser la combinatoire algébrique pour modifier notre

approche du problème en y intégrant des applications de la théorie de la représentation du groupe symétrique (Saloff-Coste, 2001; Diaconis, 1988). L'étude de ces marches aléatoires par la théorie de la représentation est un domaine en plein essor (Bidigare *et al.*, 1999; Brown et Diaconis, 1998; Reyes, 2002). Récemment, Reiner, Saliola et Welker ont défini des familles d'opérateurs commutatifs ayant des connexions avec les chaînes de Markov définies sur des arrangements d'hyperplans (Reiner *et al.*, 2014). Ils ont émis la conjecture que les valeurs propres de ces opérateurs sont entières (après renormalisation). Un des objectifs est donc de comprendre pourquoi ces derniers présentent ces propriétés exceptionnelles.

L'étude de ces opérateurs peut faire progresser certains problèmes ouverts en théorie de la probabilité, en théorie de la représentation et en théorie des fonctions symétriques. Par exemple, il pourrait mener vers le calcul des valeurs propres du Laplacien sur le complexe des mots injectifs grâce aux travaux de Hanlon et de Hersh (Hanlon et Hersh, 2004) qui les lient aux valeurs propres de l'opérateur doublement aléatoire.

Ce mémoire porte sur l'étude de ces opérateurs de mélange, notamment l'opérateur doublement aléatoire. Nous nous intéresserons particulièrement au spectre de ces opérateurs. Nous nous trouverons à l'intersection entre la combinatoire et la théorie de la représentation.

J'ai voulu faire de ce mémoire un reflet du travail effectué depuis mon entrée à la maîtrise. Ainsi, le premier chapitre se veut un survol global de la théorie de la représentation des groupes, particulièrement du groupe symétrique \mathfrak{S}_n . Ce sont des notions qui ne sont généralement pas abordées au baccalauréat que j'ai donc dû intégrer au fil de mes recherches. Nous définirons les modules de Specht et nous verrons que n'importe quel \mathfrak{S}_n -module sur \mathbb{C} peut être décomposé en somme directe de modules de Specht, qui sont les modules irréductibles de \mathfrak{S}_n .

Nous verrons aussi la règle de branchement permettant de décrire les \mathfrak{S}_n -modules simples à partir des \mathfrak{S}_{n-1} -modules simples.

Pour tenter de comprendre la famille d'opérateurs définis par Reiner, Saliola et Welker (Reiner *et al.*, 2014), nous nous pencherons d'abord sur l'opérateur doublement aléatoire, pour lequel on comprend assez bien le comportement. Dieker et Saliola ont calculé explicitement ses valeurs propres et ont donné une méthode élégante pour en construire les espaces propres (Dieker et Saliola, 2018). L'élégance de la démarche vient de la découverte d'une structure inductive nous permettant de construire tous les vecteurs propres de $R2R_{n+1}$ (qui ne sont pas dans le noyau) à partir de certains vecteurs propres de $R2R_n$. De plus, on est en mesure de décrire explicitement la décomposition de S^λ en sous-espaces propres de $R2R$. Nous verrons en détail comment ils sont arrivés à de tels résultats.

L'approche combinatoire développée par Dieker et Saliola ouvre de nouvelles voies dans la compréhension des autres opérateurs définis dans (Reiner *et al.*, 2014). Ainsi, au chapitre 3 seront présentés les nouveaux résultats obtenus en tentant d'utiliser cette approche à l'étude des autres opérateurs définis par Reiner, Saliola et Welker. Ces opérateurs généralisent le mélange doublement aléatoire. L'opérateur noté par $\nu_{(n-k,1^k)}$ consiste à retirer aléatoirement k cartes du paquet pour les y réintégrer aléatoirement. Concrètement, nous montrerons qu'à partir d'un vecteur qui est un vecteur propre à la fois pour $\nu_{(n-k,1^k)}$ et $\nu_{(n-(k-1),1^{k-1})}$, on peut construire un vecteur propre pour $\nu_{((n+1)-k,1^k)}$. On peut également calculer la valeur propre du vecteur ainsi obtenu.

CHAPITRE I

THÉORIE DE LA REPRÉSENTATION DES GROUPES

Dans ce chapitre, les notions principales de la théorie de la représentation et de la théorie des modules seront exposées, avec une attention particulière portée aux \mathfrak{S}_n -modules. Ce sont des notions préalables à une bonne compréhension du comportement du mélange doublement aléatoire. Nous débuterons par la présentation d'outils combinatoires utilisés dans la théorie des \mathfrak{S}_n -modules, pour poursuivre avec certaines notions de base de la théorie de la représentation des groupes et de la théorie des modules.

1.1 Outils combinatoires

La théorie de la représentation du groupe symétrique fait appel à un certain nombre d'objets combinatoires. Ces outils ont généralement des propriétés intéressantes, voire même amusantes, ce qui fait en sorte que ce sont souvent les premiers contacts qu'ont les étudiants avec la combinatoire. Au fil des études de maîtrise, on saisit les liens plus profonds entre ces outils et la théorie de la représentation. On passe de la compréhension de ces objets en eux-mêmes vers une compréhension plus globale par rapport à la façon dont ces objets s'insèrent dans des théories fondamentales. Nous commençons donc par la présentation de ces objets et nous verrons par la suite leur lien avec la théorie de la représentation.

Nous définirons donc les outils les plus communs de la combinatoire : les partages, diagrammes, tableaux, etc. En ce qui concerne les diagrammes, la convention anglaise sera utilisée, puisque la principale référence utilisée à ce sujet est le livre de Sagan (Sagan, 2001). Pour ceux que ce choix incommoderait, Macdonald vous suggérerait probablement de lire ce mémoire en le renversant devant un miroir (Macdonald, 1995). Nous utiliserons également la notation $[n]$ pour désigner l'ensemble $\{1, 2, \dots, n\}$.

1.1.1 Partages et diagrammes

Un *partage* est une façon de «fractionner» un entier suivant certaines règles.

Définition 1. Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r)$ où $\lambda_i \in \mathbb{N}^*$ pour tout $i \in [r]$.

On dit que λ est un partage de n , noté $\lambda \vdash n$, si $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_r$ et si $\sum_{i=1}^r \lambda_i = n$.

Pour un i fixé, on appelle λ_i une part de λ . Nous utilisons la notation $|\lambda|$ pour désigner la taille du partage, c'est-à-dire la somme des parts de λ .

Une composition est un partage sans la condition de croissance sur les parts. Si λ est une composition de n , on le note par $\lambda \vDash n$.

Par exemple, $(1, 4, 3)$ est une composition de 8, mais pas un partage de 8. On peut toutefois réordonner les parts pour obtenir le partage $(4, 3, 1)$.

Un partage peut être représenté visuellement par ce que l'on appelle un *diagramme de Ferrers*.

Définition 2. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r) \vdash n$. Le diagramme de Ferrers associé à λ est obtenu en mettant côte à côte λ_i boîtes dans la ligne i , en alignant à gauche et en numérotant les lignes de haut en bas. Ainsi, pour désigner une boîte,

nous utiliserons les coordonnées (i, j) de la même façon que pour des matrices, i désignant la ligne et j la colonne.

La figure 1.1 illustre le diagramme de Ferrers associé à $\lambda = (4, 3, 1, 1)$, un partage de 9. Un point se trouve dans la boîte de coordonnée $(1, 2)$.

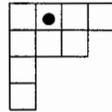


Figure 1.1 Diagramme de Ferrers associé au partage $(4, 3, 1, 1)$. Le point indique la case en position $(1, 2)$.

Nous ferons régulièrement l'abus de notation consistant à utiliser λ pour désigner le diagramme de Ferrers associé au partage λ .

On peut assigner une statistique à chaque boîte d'un diagramme, qu'on appelle l'*indice diagonal*.

Définition 3. *Étant donné un diagramme de Ferrers λ , l'indice diagonal de la case (i, j) est l'entier $j - i$. De plus, $\text{diag}(\lambda)$ consiste en la somme de tous les indices diagonaux des cases du diagramme λ .*

Par exemple, à partir du partage λ de la figure 1.1, on calcule $\text{diag}(\lambda) = 1$.

Une fois les objets définis, il semble naturel de vouloir leur assigner un ordre. Nous présenterons deux ordres sur les diagrammes : l'*inclusion* et l'*ordre de la dominance*.

Définition 4. *Soit $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r)$ et $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_\ell)$ deux partages. On dit que $\mu \subseteq \lambda$, c'est-à-dire que μ est inclus dans λ si $\mu_i \leq \lambda_i$ pour tout i tel que $1 \leq i \leq \max(r, \ell)$. Par convention, $\lambda_i = 0$ pour $i > r$ et $\mu_i = 0$ pour $i > \ell$. Au*

niveau des diagrammes, $\mu \subseteq \lambda$ revient à dire que les boîtes formant le diagramme de μ se retrouvent dans le diagramme de λ (voir figure 1.2).

Exemple 1. Posons $\mu = (4, 3, 1, 1)$ et $\lambda = (5, 4, 2, 1)$. On a $\mu \subseteq \lambda$. La figure 1.2 illustre le diagramme de μ , suivi de celui de λ et du diagramme de λ dans lequel les cases appartenant à μ sont marquées d'un point.

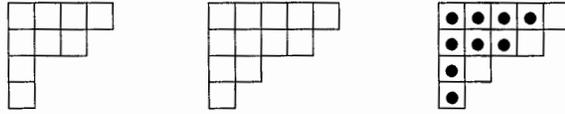


Figure 1.2 Relation d'inclusion des diagrammes de Ferrers (voir exemple 1)

Cette façon d'ordonner les partages est la plus naturelle, mais il arrive, dans certaines circonstances, qu'un autre ordre soit plus utile.

Définition 5. Soit $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r)$ et $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_\ell)$ deux partages. On dit que μ est plus petit que λ selon l'ordre de la dominance, noté $\mu \trianglelefteq \lambda$, si

$$\sum_{j=1}^i \mu_j \leq \sum_{j=1}^i \lambda_j$$

pour tout i , avec $1 \leq i \leq \max(r, \ell)$.

Exemple 2. Soit $\lambda = (4, 2, 2, 1)$, $\mu = (5, 3, 1)$ et $\nu = (3, 3, 3)$.

Alors, $\lambda \trianglelefteq \mu$, car :

- $\lambda_1 = 4 \leq \mu_1 = 5$;
- $\lambda_1 + \lambda_2 = 6 \leq \mu_1 + \mu_2 = 8$;
- $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 8 \leq \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 9$;
- $|\lambda| \leq |\mu|$.

De la même façon, $\nu \trianglelefteq \mu$. D'un autre côté, ν et λ sont incomparables pour l'ordre de la dominance.

À partir de deux diagrammes respectant certaines conditions, il nous est possible de créer un nouvel objet : une *forme gauche*.

Définition 6. Soit λ et μ deux partages tels que $\mu \subseteq \lambda$. La forme gauche λ/μ est le diagramme obtenu en enlevant à λ les cases appartenant à μ .

De plus, on dit que λ/μ est une bande horizontale si chaque colonne contient au plus une case. De la même manière, on dit que λ/μ est une bande verticale si chaque ligne contient au plus une case.

Exemple 3. La forme gauche λ/μ pour $\lambda = (5, 4, 2, 1)$ et $\mu = (4, 3, 1, 1)$ est composée des boîtes ne contenant pas de point dans la figure 1.2. De plus, λ/μ est une bande horizontale.

La définition des indices diagonaux s'applique également aux cases des formes gauches et il est donc tout à fait possible de calculer $\text{diag}(\lambda/\mu)$. Dans l'exemple précédent, $\text{diag}(\lambda/\mu) = 5$. Il n'est pas trop difficile de voir qu'en général,

$$\text{diag}(\lambda/\mu) = \text{diag}(\lambda) - \text{diag}(\mu).$$

Face à un diagramme de Ferrers, il semble naturel de vouloir en remplir les cases, nous menant ainsi dans le monde des tableaux.

1.1.2 Tableaux et promotion

Les tableaux sont des outils essentiels à la théorie de la représentation du groupe symétrique et ils seront au centre de notre étude du comportement du mélange doublement aléatoire.

Définition 7. Soit $\lambda \vdash n$. Un tableau de Young de forme λ , est un diagramme de Ferrers de forme λ où chaque case contient un entier.

1	3	3	4
2	5		

1	3	5	6
2	4		

Figure 1.3 Exemple d'un tableau semi-standard (à gauche) et d'un tableau standard (à droite), chacun de forme $(4, 2)$

Il est assez prévisible de penser que des mathématiciens vont se donner des contraintes pour remplir ces diagrammes.

Définition 8. *Un tableau semi-standard est un tableau de Young dont les entrées des colonnes sont strictement croissantes (de haut en bas) et celles des lignes sont croissantes (de gauche à droite). Pour désigner l'ensemble des tableaux semi-standards de taille n , on utilise la notation SSYT_n .*

La figure 1.3 illustre un exemple de tableau semi-standard de forme $(4, 2)$.

Maintenant, étant donné le nom donné à cet objet, la surprise n'est pas trop grande lorsqu'on rencontre des tableaux standards.

Définition 9. *Un tableau standard est un tableau de Young avec pour entrées tous les entiers de 1 à n . De plus, les entrées des colonnes sont strictement croissantes (de haut en bas) et les entrées des lignes sont strictement croissantes (de gauche à droite). L'ensemble des tableaux standards de taille n est noté par SYT_n .*

La figure 1.3 illustre un exemple de tableau standard de forme $(4, 2)$.

On peut également imposer le nombre d'occurrences de chaque entier à placer dans un tableau.

Définition 10. *Soit T un tableau de Young. On dit que T a un remplissage $\nu = (\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_\ell) \models n$ si T contient ν_i occurrences de i pour tout $i \in [\ell]$.*

On peut donc utiliser un partage et une composition pour apposer des contraintes sur un tableau, le partage pour en indiquer la forme, et la composition pour en indiquer le remplissage.

Finalement, un type particulier de tableaux sera utile dans notre étude de l'action du mélange doublement aléatoire : les *tableaux de désarrangement*. Leur définition utilise ce qu'on appelle une *montée* dans un tableau standard.

Définition 11. *Une entrée i d'un tableau standard de taille n est une montée si :*

- $i = n$ ou ;
- $i < n$ et l'entrée $i + 1$ se trouve au nord-est (faiblement) de la case contenant i . En termes de coordonnées, cela revient à dire que si les coordonnées de la case contenant l'entrée i sont (x, y) , alors les coordonnées de celle contenant $i + 1$ doivent être (x', y') avec $x' \leq x$ et $y' \geq y$.

Définition 12. *Un tableau de désarrangement est un tableau standard dont la plus petite montée est paire.*

Il est également utile de connaître quelques caractérisations des tableaux de désarrangement pour pouvoir mieux les identifier.

Un tableau est un tableau de désarrangement s'il existe $\ell \in \mathbb{N}$ tel que $1, 2, \dots, 2\ell$ sont dans la première colonne et où $2\ell + 1$ se trouve dans une autre colonne.

Ou encore, T est un tableau de désarrangement si l'entrée dans la case de coordonnées $(1, 2)$ est impaire ou si une telle case n'existe pas mais que n est pair.

Exemple 4.

Pour $n = 0$, il n'y a qu'un seul tableau de désarrangement, le tableau vide.

Pour $n = 1$, l'unique tableau n'est pas un tableau de désarrangement, car la plus petite montée est 1, qui est impair.

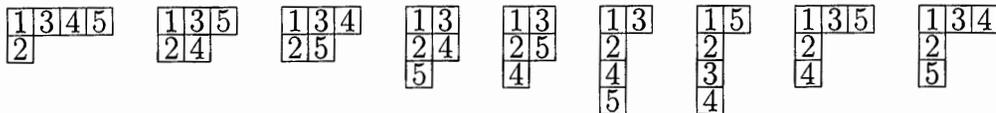


Figure 1.4 Tous les tableaux de désarrangement de taille 5

Pour $n = 2$, $\begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array}$ est un tableau de désarrangement, sa plus petite montée étant 2, mais $\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline \end{array}$ n'en est pas un.

La figure 1.4 liste les tableaux de désarrangement de taille 5.

Une fois les tableaux standards bien définis, on s'intéresse à une façon de les transformer par la *promotion*.

Définition 13. Soit T un tableau de Young standard. La promotion, définie par Schützenberger, est l'opération qui consiste à :

- Retirer le 1 de la case qui le contient ;
- À partir de cette case vide, comparer le contenu de la case adjacente à droite et celui de la case adjacente inférieurement. Déplacer le plus petit entier dans la case vide ;
- Répéter l'étape précédente jusqu'à ce que ce ne soit plus possible, c'est-à-dire lorsque la case vide arrive à une position où elle n'a ni voisine à droite ni voisine inférieure.
- Décrémenter de un chaque entier du tableau et mettre un \times dans la case vide.

Autrement dit, la promotion revient à enlever la case contenant un 1 à un tableau standard pour ensuite appliquer au tableau gauche obtenu le jeu de taquin. Voir (Sagan, 2001) pour une description du jeu de taquin.

Le tableau T' obtenu en appliquant la promotion sur un tableau de Young stan-

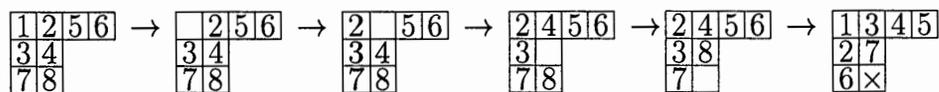


Figure 1.5 L'opération promotion appliquée sur un tableau de Young standard.

Le tableau T réfère au tableau obtenu sans considérer la case contenant un \times . Nous écrivons quelque chose dans cette case, car nous nous intéresserons éventuellement aux cases retirées lors d'applications successives de l'opération promotion.

Il est possible d'appliquer la promotion sur un tableau standard T à plusieurs reprises, jusqu'à ce que le résultat soit un tableau de désarrangement. Dans l'exemple de la figure 1.5, après une seule application de la promotion, le tableau résultant est un tableau de désarrangement de forme $(4, 2, 1)$.

Notons que la façon d'exécuter la promotion nous assure que le tableau obtenu sera lui aussi un tableau de Young standard.

Pour présenter comme il se doit les représentations irréductibles du groupe symétrique, il nous reste un dernier objet à définir : les polytabloïdes.

Soit t et t' , deux tableaux de forme λ . On dit que t et t' sont ligne-équivalents, noté $t \sim t'$, si les lignes correspondantes des deux tableaux contiennent les mêmes éléments. cela revient à dire qu'en changeant l'ordre des éléments dans les lignes de t , on peut obtenir t' .

Exemple 5. Posons $t = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 4 \\ \hline 2 & 5 & \\ \hline 6 & & \\ \hline \end{array}$ et $t' = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 4 & 3 & 1 \\ \hline 5 & 2 & \\ \hline 6 & & \\ \hline \end{array}$. Alors, $t \sim t'$.

Il est facile de se convaincre que cela mène à une relation d'équivalence sur l'ensemble des tableaux.

Définition 14. Un tabloïde de forme λ , ou encore un λ -tabloïde, est une classe d'équivalence de l'ensemble des tableaux de forme λ quotienté par la relation

d'équivalence définie plus haut. On note $\{t\}$, pour t un tableau, la classe d'équivalence suivante :

$$\{t\} = \{t' \mid t' \sim t\}.$$

Pour distinguer visuellement les tableaux des tabloïdes, on ne trace pas de traits verticaux à ces derniers.

Exemple 6. Les tableaux $\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 6 & 4 \\ \hline 2 & 3 & \\ \hline 5 & & \\ \hline \end{array}$ et $\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 4 & 6 \\ \hline 2 & 3 & \\ \hline 5 & & \\ \hline \end{array}$ font partie du tabloïde $\frac{1 \ 6 \ 4}{2 \ 3}{5}$.

Tel que mentionné précédemment, les outils présentés dans cette section seront utilisés lorsque viendra le moment d'étudier les représentations du groupe symétrique. Ce moment viendra, mais pour l'instant, définissons plutôt ce qu'est une représentation.

1.2 Représentations d'un groupe

Dans un cours de théorie des groupes, on se familiarise avec la structure de groupe pour ensuite voir comment un groupe peut agir sur un ensemble. On se rend compte que de comprendre comment un groupe donné agit sur un ensemble nous donne de l'information sur ce groupe. C'est cette idée que développe la théorie de la représentation : étudier les groupes à travers leurs actions.

On peut aborder une représentation d'un groupe de deux façons principales, chacune ayant ses forces et ses faiblesses. La première nous permet d'associer, par un morphisme de groupe, chaque élément du groupe à une matrice inversible.

Définition 15. Soit G un groupe. Une représentation linéaire de G sur un corps \mathbb{K} est un morphisme de groupe de G vers $GL(V)$, où V est un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie d et où $GL(V)$ est le groupe des automorphismes de V . La

dimension de la représentation est d .

En posant une base pour V , cela revient à avoir un morphisme de groupe qui associe à chaque élément de G la matrice codant un automorphisme de V .

Exemple 7. Soit G un groupe de cardinalité n . Présentons quelques représentations classiques de G .

1. La représentation triviale : pour V un \mathbb{K} -espace vectoriel, on peut toujours définir la représentation suivante.

$$\begin{aligned}\rho : G &\rightarrow \text{GL}(V) \\ g &\mapsto \text{Id}\end{aligned}$$

Clairement, $\text{Id} \in \text{GL}(V)$ et ρ est un morphisme de groupe.

2. La représentation régulière : On considère que V est le \mathbb{K} -espace vectoriel engendré par une base indexée par les éléments de G . Autrement dit, $V = \langle g_1, g_2, \dots, g_n \rangle$. On définit :

$$\begin{aligned}\psi : G &\rightarrow \text{GL}(V) \\ g &\mapsto \psi_g,\end{aligned}$$

avec ψ_g l'application linéaire ainsi définie sur la base de V : $\psi_g(g_i) = g \cdot g_i$, pour $1 \leq i \leq n$ et où \cdot représente la multiplication du groupe G .

On a que ψ est bien un morphisme de groupe. En effet, soit $g, h \in G$ et g_i un élément de la base de V .

$$\psi(gh)(g_i) = \psi_{gh}(g_i) = (gh)g_i = g(hg_i) = \psi_g(\psi_h(g_i)) = (\psi_g \circ \psi_h)(g_i)$$

Donc, $\psi(gh) = \psi_g \circ \psi_h$, tel que voulu. De plus, ψ_g est bien un élément de $\text{GL}(V)$.

Au sein de la théorie de la représentation des groupes finis s'est développée la théorie des *caractères*. Nous n'entrerons pas dans les détails de cette dernière,

mais nous définirons ce qu'est un caractère. Pour un exposé détaillé sur la théorie des caractères, voir (James et Liebeck, 2001).

Définition 16. Soit ρ une représentation de G sur un corps \mathbb{K} , avec $\rho(g)$ la matrice associée à g . Le caractère de la représentation, χ_ρ , est l'application suivante :

$$\begin{aligned}\chi_\rho : G &\rightarrow \mathbb{K} \\ g &\mapsto \text{trace}(\rho(g)).\end{aligned}$$

De par la définition du caractère d'une représentation, on peut voir qu'il est constant sur les classes de conjugaison de G .

En général, lorsqu'on définit un objet mathématique, on cherche à savoir si un objet peut contenir une autre instance de ce même objet. Dans le cas présent, est-ce qu'une représentation donnée peut contenir une «copie» d'une autre représentation ?

Définition 17. Soit ρ une représentation linéaire d'un groupe G . S'il existe U un sous-espace vectoriel de V qui est stable sous l'action de ρ , alors $\rho|_U$ est appelée une sous-représentation de G .

Exemple 8. Revenons à la représentation régulière de G présentée à l'exemple 7. 2. Posons $x = \sum_{i=1}^n g_i$ et soit $U = \langle x \rangle$. Montrons que U est stable sous l'action de ψ . On a :

$$\psi(g)(x) = \psi(g)(g_1 + g_2 + \cdots + g_n) = g \cdot (g_1 + g_2 + \cdots + g_n) = \sum_{i=1}^n g \cdot g_i.$$

Comme la somme se fait sur tous les éléments de G un groupe, on sait que le résultat sera égal à x . Donc, $\psi|_U$ est une sous-représentation de G . De plus, on sait que $\psi|_U$ est la représentation triviale, car elle envoie l'élément x sur lui-même. Donc, on peut penser à la représentation régulière comme contenant une «copie» de la représentation triviale.

1.3 G -modules

La théorie des modules nous permet de concevoir une représentation d'un groupe sous un autre angle.

Définition 18. *Soit G un groupe. Un G -module est un \mathbb{K} -espace vectoriel, muni d'une multiplication par les éléments de G . C'est-à-dire :*

- $g \cdot (h \cdot v) = (gh) \cdot v$ pour tout $g, h \in G$ et $v \in V$.
- $e_G \cdot v = v$ pour tout $v \in V$ et où e_G désigne l'élément neutre de G .
- $g \cdot (\alpha v + \beta w) = \alpha(g \cdot v) + \beta(g \cdot w)$ pour tout $g \in G$ et pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$.

Il n'est pas trop compliqué de se convaincre qu'une représentation d'un groupe G revient à décrire un G -module, et vice-versa.

Soit G un groupe de cardinalité n et ρ une représentation linéaire de G . Cette représentation définit ainsi une action de groupe de G sur V de la façon suivante :
 $g \cdot v = \rho(g)(v)$.

C'est bien une action de groupe. Soit $g, h \in G$.

$$\begin{aligned}
 g \cdot (h \cdot v) &= g \cdot (\rho(h)(v)) \\
 &= \rho(g)(\rho(h)(v)) \\
 &= (\rho(g) \circ \rho(h))(v) \\
 &= \rho(gh)(v) \\
 &= (gh) \cdot v
 \end{aligned}$$

De plus, $e_G \cdot v = \rho(e_G)(v) = \text{Id}(v) = v$ et

$$g \cdot (\alpha v + \beta w) = \rho(g)(\alpha v + \beta w) = \alpha \rho(g)(v) + \beta \rho(g)(w) = \alpha g \cdot v + \beta g \cdot w.$$

Maintenant, partons d'un G -module V sur \mathbb{K} . Soit $g \in G$. Alors, on définit le

morphisme suivant :

$$\begin{aligned}\rho : G &\rightarrow \text{GL}(V) \\ g &\mapsto \rho_g,\end{aligned}$$

où ρ_g est l'application linéaire :

$$\begin{aligned}\rho_g : V &\rightarrow V \\ v &\mapsto g \cdot v.\end{aligned}$$

Le lecteur peut se convaincre sans difficulté que ρ_g est effectivement linéaire et bijective.

Maintenant, au même titre qu'il existe des sous-représentations, il existe des *sous-modules*.

Définition 19. *Un sous-module d'un module M est un sous-espace vectoriel de M qui est stable pour la multiplication des éléments de G .*

Un groupe cyclique est un groupe avec un seul générateur. L'analogie existe dans le monde des modules.

Définition 20. *Un G -module M est dit cyclique s'il existe un élément $m \in M$ tel que M est généré par m , c'est-à-dire que $M = \mathbb{C}Gm$, avec $Gm = \{g \cdot m \mid g \in G\}$.*

Après avoir abordé les notions générales de la théorie des modules, nous concentrerons notre étude sur les \mathfrak{S}_n -modules.

1.3.1 Les \mathfrak{S}_n -modules et le module M^λ

Un \mathfrak{S}_n -module M est un espace vectoriel sur un corps \mathbb{K} pour lequel il existe une multiplication par les éléments du groupe symétrique. Pour la suite, nous allons considérer que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Les *modules de permutations* nous intéresseront particulièrement lorsque viendra le temps d'étudier le mélange doublement aléatoire. Nous les présenterons d'abord à l'aide des *tabloïdes*, tel que vu par Sagan (Sagan, 2001). Ensuite, nous verrons qu'il est possible d'interpréter ces modules à l'aide des mots. C'est cette dernière interprétation qui sera utilisée pour la suite.

Définition 21. Soit $\lambda \vdash n$. On définit le module de permutations correspondant à λ comme le module engendré par tous les λ -tabloïdes. Autrement dit :

$$N^\lambda = \mathbb{C} \{ \{t_1\}, \{t_2\}, \dots, \{t_k\} \}.$$

Une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ agit sur un λ -tabloïde $\{t\}$ de la façon suivante : pour $t_{i,j}$ l'entrée de la ligne i et de la colonne j de t , un représentant de $\{t\}$, $\sigma \cdot t_{i,j} = \sigma(t_{i,j})$. La permutation σ agit sur le tabloïde en appliquant cette transformation sur le contenu de chacune des cases de t . Notons que cette action est bien définie.

Interprétons maintenant ce module à l'aide des mots. Soit \mathcal{A} un alphabet, c'est-à-dire un ensemble fini et ordonné de lettres. Un mot $w = w_1 w_2 \dots w_k$ sur \mathcal{A} est une suite finie de lettres de \mathcal{A} . On dit que w a une valuation ν pour ν une composition si la i^{e} lettre apparaît ν_i fois. C'est l'équivalent du remplissage d'un tableau. Notons que dans ce texte, nous faisons l'hypothèse qu'il y a toujours assez de lettres dans \mathcal{A} pour réaliser une valuation donnée.

Étant donné $w = w_1 w_2 \dots w_n$ un mot et $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on peut définir l'action à droite suivante $w \cdot \sigma := w_{\sigma(1)} w_{\sigma(2)} \dots w_{\sigma(n)}$.

On remarque que cette action ne change pas la valuation du mot w . Pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ et pour tout mot w , $w \cdot \sigma$ a la même valuation que w , car l'action de \mathfrak{S}_n ne vient que modifier la position des lettres.

Définissons donc M^λ comme l'espace vectoriel sur \mathbb{C} engendré par les mots de valuation λ , pour un certain $\lambda \vdash n$. Par la remarque précédente sur la préservation

de la valuation d'un mot sous l'action de \mathfrak{S}_n , il est clair que M^λ est un \mathfrak{S}_n -module à droite.

Nous pouvons voir que N^λ et M^λ sont reliés : on peut associer à chaque tabloïde $\{t\}$ un mot, que l'on nomme $\text{word}(t)$. Si l'entrée i se trouve à la ligne k dans le tableau t , alors la i^e entrée du mot $\text{word}(t)$ sera la k^e lettre de \mathcal{A} .

Par exemple, pour $t = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 4 & 5 \\ \hline 2 & 6 & \\ \hline 3 & & \\ \hline \end{array}$, $\text{word}(t) = abcaab$.

De la façon dont $\text{word}(t)$ est défini, on voit bien que peu importe le représentant choisi pour le tabloïde, le mot obtenu sera le même puisque la ligne code la lettre à utiliser.

Pour $t' = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 5 & 1 & 4 \\ \hline 6 & 2 & \\ \hline 3 & & \\ \hline \end{array}$ un élément de la même classe que t , on obtient $\text{word}(t') = abcaab$.

La ligne 1 contient les indices du mot où on retrouvera un a . Ainsi, peu importe dans quel ordre on place les entiers, cela n'a aucune incidence sur $\text{word}(t)$.

De plus, cette association est bijective. En effet, si on se fixe deux tabloïdes distincts $\{t\}$ et $\{t'\}$, on sait qu'il existe une entrée i qui ne se trouve pas dans la même ligne dans $\{t\}$ et $\{t'\}$. Donc, la i^e lettre de $\text{word}(t)$ est distincte de la i^e lettre de $w_{t'}$. De plus, à partir d'un mot w , on peut construire un tabloïde $\{t\}$ tel que $\text{word}(t) = w$.

Exemple 9. Soit $w = dacaabb$. On a que $w = \text{word}(t)$ pour le tabloïde suivant :

$$\{t\} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 4 & 5 \\ \hline 6 & 7 & \\ \hline 3 & & \\ \hline 1 & & \\ \hline \end{array}.$$

L'action de \mathfrak{S}_n sur les tableaux est une action à gauche, car elle agit sur le contenu du tableau, alors que l'action de \mathfrak{S}_n sur les mots est une action à droite, car elle

agit sur la position des lettres. Le module N^λ étant un module à gauche, on ne peut pas dire qu'il est équivalent au module M^λ . Par contre, il est possible de donner à N^λ une structure de \mathfrak{S}_n -module à droite. Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ et $\{t\}$ un tabloïde, alors on peut définir l'action à droite suivante :

$$\{t\} \cdot \sigma := \sigma^{-1} \cdot \{t\}.$$

Posons alors \overline{N}^λ le module résultant de cette action.

On a que $\text{word}(t \cdot \sigma) = \text{word}(t) \cdot \sigma$ ce qui nous permet de conclure que M^λ est équivalent à \overline{N}^λ . Et par construction de \overline{N}^λ , cela revient à la relation suivante entre N^λ et M^λ :

$$\text{word}(\sigma \cdot t) = \text{word}(t) \cdot \sigma^{-1}.$$

Cette relation est illustrée à l'exemple 10.

Exemple 10. Soit $w = baacba$ et $\sigma = 645312$. Un tableau t tel que $\text{word}(t) = w$ peut être le suivant :

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 3 & 6 \\ \hline 1 & 5 & \\ \hline 4 & & \\ \hline \end{array}.$$

On a $\sigma \cdot t = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 4 & 5 & 2 \\ \hline 6 & 1 & \\ \hline 3 & & \\ \hline \end{array}$ et $w \cdot \sigma^{-1} = bacaab$. Cela respecte bel et bien la relation $\text{word}(\sigma \cdot t) = w \cdot \sigma^{-1}$.

Remarquons que nous avons défini M^λ pour des valuations λ qui sont des partages de n et non pas des compositions de n . On pourrait définir M^α pour $\alpha \vDash n$ en utilisant la version analogue de la définition utilisée, mais l'étude des M^λ pour $\lambda \vdash n$ est suffisante, puisque $M^\lambda \cong M^\alpha$ en tant que modules si et seulement si α est un réarrangement de λ . Il suffit en effet de renommer les lettres pour passer de l'un à l'autre.

1.4 Représentations irréductibles et modules simples

Le temps est maintenant venu de s'intéresser aux blocs de base des représentations et des modules. Après les définitions générales, nous nous pencherons plus particulièrement sur les \mathfrak{S}_n -modules *irréductibles*.

Définition 22. *Une représentation est irréductible si elle est non nulle et si ses seules sous-représentations sont elle-même ainsi que la représentation nulle.*

En traduisant cette définition en termes de modules, on obtient les *modules simples*.

Définition 23. *Un module V est simple s'il est non trivial et s'il ne contient pas de sous-module autre que $\{0\}$ et V .*

Il est légitime de se demander si tout module peut s'exprimer comme une somme directe de modules simples. Nous aborderons la question à la section 1.6 et nous verrons que dans certains cas, l'étude des modules simples nous donne toute l'information désirée. Nous allons utiliser cette stratégie de restreindre notre étude aux modules simples quand viendra le temps de déterminer les valeurs propres de R^2R sur le module M^λ .

1.4.1 Modules de Specht

Dans le cas particulier où \mathfrak{S}_n est le groupe qui nous intéresse, les modules simples sont bien connus et ont été étudiés en détail : ils se nomment les modules de Specht et sont indexés par les partages de n . Pour $\lambda \vdash n$, on note par S^λ le module de Specht associé à λ . Pour bien définir les modules de Specht et pouvoir montrer qu'ils sont bel et bien des modules irréductibles de \mathfrak{S}_n , il nous faudra introduire

quelques nouvelles notions et lemmes. L'exposé qui suit est basé principalement sur James (James, 1976; James, 1978) et Sagan (Sagan, 2001).

Définition 24. Soit $\lambda \vdash n$ et t un tableau de forme λ avec k colonnes et ℓ lignes. Notons l'ensemble des entrées de la ligne i par L_i et l'ensemble des entrées de la colonne j par C_j . Le stabilisateur de colonne de t , noté C_t , est le sous-groupe de \mathfrak{S}_n qui permute les éléments de t à l'intérieur des colonnes seulement. Autrement dit, $C_t = \mathfrak{S}_{C_1} \times \mathfrak{S}_{C_2} \times \cdots \times \mathfrak{S}_{C_k}$, où \mathfrak{S}_E est le groupe des permutations sur l'ensemble E .

De la même façon, le stabilisateur de ligne de t , noté L_t est le sous-groupe de \mathfrak{S}_n qui permute les éléments de t à l'intérieur des lignes seulement. Autrement dit, $L_t = \mathfrak{S}_{L_1} \times \mathfrak{S}_{L_2} \times \cdots \times \mathfrak{S}_{L_\ell}$.

Ces nouvelles définitions nous permettent de définir le tabloïde de façon plus succincte : soit t un tableau, on a $\{t\} = L_t \cdot t$.

Maintenant, nous aimerions construire un élément de l'algèbre du groupe symétrique à partir d'un sous-groupe donné de \mathfrak{S}_n .

Définition 25. Soit H un sous-groupe de \mathfrak{S}_n . On peut associer à H un élément de l'algèbre du groupe $\mathbb{C}\mathfrak{S}_n$:

$$H^- = \sum_{\pi \in H} \text{sgn}(\pi)\pi,$$

avec $\text{sgn}(\pi)$ le signe de la permutation.

Pour le sous-groupe C_t , nous allons noter C_t^- par κ_t . Ainsi $\kappa_t = \sum_{\pi \in C_t} \text{sgn}(\pi)\pi$. Il n'est pas trop difficile de voir que si le tableau t a pour colonne C_1, C_2, \dots, C_k , alors $\kappa_t = \kappa_{C_1} \kappa_{C_2} \cdots \kappa_{C_k}$.

À partir d'un tableau t , on va construire un élément de M^λ en associant à t l'élément $e_t = \kappa_t \cdot \{t\}$. Cet élément est appelé un *polytabloïde*.

Exemple 11. Soit $t = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 4 \\ \hline 3 & 5 & \\ \hline \end{array}$.

$$C_t = \mathfrak{S}_{\{1,3\}} \times \mathfrak{S}_{\{2,5\}} \times \mathfrak{S}_{\{4\}} = \{e, (1, 3), (2, 5), (1, 3)(2, 5)\}$$

Ainsi, $\kappa_t = e - (1, 3) - (2, 5) + (1, 3)(2, 5)$ et

$$e_t = \frac{\overline{1 \ 2 \ 4}}{\overline{3 \ 5}} - \frac{\overline{3 \ 2 \ 4}}{\overline{1 \ 5}} - \frac{\overline{1 \ 5 \ 4}}{\overline{3 \ 2}} + \frac{\overline{3 \ 5 \ 4}}{\overline{1 \ 2}}.$$

Les éléments e_t sont les éléments formant la base de S^λ .

Définition 26. Pour $\lambda \vdash n$, le module de Specht S^λ est le sous-module de M^λ engendré par les polytabloïdes e_t , avec t de forme λ .

On peut munir M^λ d'une forme bilinéaire invariante sous l'action de \mathfrak{S}_n : pour $\{t_1\}$ et $\{t_2\}$ deux tabloïdes, on définit

$$\langle \{t_1\}, \{t_2\} \rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } \{t_1\} = \{t_2\} \\ 0 & \text{sinon .} \end{cases} \quad (1.1)$$

Par «invariant sous l'action de \mathfrak{S}_n », on entend que pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$,

$$\langle \{t_1\}, \{t_2\} \rangle = \langle \sigma \cdot \{t_1\}, \sigma \cdot \{t_2\} \rangle.$$

Comme les modules de Specht sont des sous-modules de M^λ , ils héritent naturellement de cette forme bilinéaire.

Maintenant, montrons que les S^λ pour $\lambda \vdash n$ constituent une liste complète des \mathfrak{S}_n -modules irréductibles. Remarquons tout d'abord que S^λ est un module cyclique.

Lemme 1. Soit t un tableau de forme λ . Alors, e_t génère S^λ .

Démonstration. Il faut d'abord faire quelques observations préalables. Premièrement, on a que $C_{\pi t} = \pi C_t \pi^{-1}$.

En effet, si $\sigma \in C_{\pi t}$, l'action de $\pi^{-1}\sigma\pi$ sur t ne fait que réarranger les éléments des colonnes de t . L'action de $\pi^{-1}\sigma\pi$ revient à étiqueter différemment les entrées de t (à l'aide de π), pour ensuite changer l'ordre des éléments des colonnes du tableau obtenu, et à finalement réétiqueter les entrées comme elles l'étaient au départ. Au final, on n'a que changé l'ordre des éléments des colonnes de t , d'où $\pi^{-1}\sigma\pi \in C_t$. Comme $\sigma = \pi\pi^{-1}\sigma\pi\pi^{-1}$, $\sigma \in \pi C_t \pi^{-1}$.

À l'inverse, si $\sigma \in \pi C_t \pi^{-1}$, alors $\sigma = \pi\tau\pi^{-1}$ pour un certain $\tau \in C_t$. Donc, $\pi^{-1}\sigma\pi \in C_t$. Soit $t' = \pi \cdot t$. On a ainsi que $\pi^{-1}\sigma\pi \in C_{\pi^{-1}t'}$. Par l'inclusion montrée précédemment, on peut conclure que $\pi^{-1}\sigma\pi \in \pi^{-1}C_{t'}\pi$, d'où $\sigma \in C_{\pi t}$.

Deuxièmement, remarquons que $\kappa_{\pi t} = \pi\kappa_t\pi^{-1}$. En effet,

$$\begin{aligned} \kappa_{\pi t} &= \sum_{\sigma \in C_{\pi t}} \text{sgn}(\sigma)\sigma \\ &= \sum_{\sigma \in \pi C_t \pi^{-1}} \text{sgn}(\sigma)\sigma \\ &= \sum_{\sigma \in C_t} \text{sgn}(\pi\sigma\pi^{-1})\pi\sigma\pi^{-1} \\ &= \sum_{\sigma \in C_t} \text{sgn}(\sigma)\pi\sigma\pi^{-1} = \pi\kappa_t\pi^{-1}. \end{aligned}$$

Ainsi, on a $e_{\pi t} = \kappa_{\pi t}\{\pi t\} = \pi\kappa_t\pi^{-1}\{\pi t\} = \pi\kappa_t\{t\} = \pi e_t$. Ceci implique que e_t génère le module S^λ . \square

Les propriétés suivantes de H^- seront utiles pour montrer que les S^λ sont irréductibles. On les utilisera au cas particulier où H^- est en fait κ_t .

Lemme 2. *Soit H un sous-groupe de \mathfrak{S}_n .*

1. *si $\pi \in H$ alors $\pi H^- = H^- \pi = \text{sgn}(\pi)H^-$.*
2. *Si la transposition $(i, j) \in H$, alors on peut factoriser H^- de la façon*

suivante : $H^- = K(e - (i, j))$ où $K \in \mathbb{C}\mathfrak{S}_n$ et où e est la permutation identité.

3. Si t est un tableau dans lequel i et j se trouvent dans la même ligne, avec $(i, j) \in H$, alors $H^- \{t\} = 0$.

Démonstration. Pour 1, on a :

$$\begin{aligned}
\pi \left(\sum_{\sigma \in H} \text{sgn}(\sigma) \sigma \right) &= \sum_{\sigma \in H} \text{sgn}(\sigma) \pi \sigma \\
&= \sum_{\sigma \in H} \text{sgn}(\pi^{-1} \pi \sigma) \pi \sigma \\
&= \sum_{\tau \in H} \text{sgn}(\pi^{-1}) \text{sgn}(\tau) \tau, \quad \text{car } H \text{ est un sous-groupe contenant } \pi. \\
&= \text{sgn}(\pi) \sum_{\tau \in H} \text{sgn}(\tau) \tau, \quad \text{car le signe de } \pi \text{ est le même que } \pi^{-1}. \\
&= \text{sgn}(\pi) H^-.
\end{aligned}$$

Pour montrer que $H^- \pi = \text{sgn}(\pi) H^-$, on procède de la même façon.

Pour 2, soit N le sous-groupe de H engendré par e et (i, j) et nommons h_m les représentants de chaque classe à gauche de H modulo N . Ainsi, $H = \bigsqcup_{m=1}^{\ell} h_m N$.

Donc,

$$\begin{aligned}
H^- &= \sum_{\sigma \in \bigsqcup_m h_m N} \text{sgn}(\sigma) \sigma = \sum_{m=1}^{\ell} (\text{sgn}(h_m(i, j)) h_m(i, j) + \text{sgn}(h_m e) h_m e) \\
&= \left(\sum_{m=1}^{\ell} \text{sgn}(h_m) h_m \right) (e - (i, j)).
\end{aligned}$$

Comme le facteur de gauche est dans $\mathbb{C}\mathfrak{S}_n$, on arrive au résultat voulu.

Pour 3, on a que $(i, j) \{t\} = \{t\}$, car i et j sont dans la même ligne de t . En utilisant 2, on obtient : $H^- \{t\} = K(e - (i, j)) \{t\} = K(\{t\} - \{t\}) = 0$. \square

Après ces quelques propriétés sur H^- dans le cas général, il nous faut étudier κ_t en particulier.

Lemme 3. *Si on a deux tableaux t et t' de même forme λ , alors soit $\kappa_t\{t'\} = \pm e_t$ ou soit $\kappa_t\{t'\} = 0$.*

Démonstration. Le tabloïde $\{t'\}$ peut soit être un terme de e_t ou non.

Si $\{t'\}$ est un terme de e_t , on peut trouver une permutation $\tau \in C_t$ telle que $\tau\{t\} = \{t'\}$. Ainsi, $\kappa_t\{t'\} = \kappa_t\tau\{t\}$. Comme $\tau \in C_t$, le lemme 2 assure que $\kappa_t\tau = \text{sgn}(\tau)\kappa_t$. Ainsi, on obtient que $\kappa_t\{t'\} = \pm\kappa_t\{t\} = \pm e_t$.

Maintenant, si $\{t'\}$ n'est pas un terme de e_t , alors il y a nécessairement deux entrées de $\{t'\}$, disons i et j , qui sont dans la même colonne de t et dans la même ligne de t' . Si de tels éléments n'existaient pas, on pourrait utiliser une permutation de C_t pour échanger des éléments à même les colonnes de t , et comme l'ordre sur les lignes n'est pas importante pour les tabloïdes, on pourrait obtenir un tableau dans $\{t'\}$. À ce moment-là, $\{t'\}$ serait un terme de e_t .

Donc, en appliquant directement la partie 3 du lemme 2, on a que $\kappa_t\{t'\} = 0$. \square

Corollaire 1. *Soit $u \in M^\lambda$ et t un tableau de forme λ . On a que $\kappa_t u$ est un multiple de e_t .*

Démonstration. Comme $u \in M^\lambda$, on peut écrire $u = \sum_i a_i\{t_i\}$ pour t_i des tableaux de forme λ . On utilise le lemme 3 pour déterminer que $\kappa_t\{t_i\}$ donne soit $\pm e_t$ ou 0. Ainsi, $\kappa_t u$ est un multiple de e_t . \square

Nous sommes maintenant en mesure de prouver le théorème suivant, qui implique l'irréductibilité des modules de Specht.

Théorème 1. *Pour U un sous-module de S^λ , soit $U \supseteq S^\lambda$ ou soit $U \subseteq (S^\lambda)^\perp$. En particulier, si le corps sur lequel on travaille est \mathbb{C} , les S^λ sont irréductibles. On rappelle que la forme bilinéaire utilisée pour parler de l'espace orthogonal $(S^\lambda)^\perp$ est celle définie à la section 1.4.1.*

Démonstration. Soit $u \in U$ et t un tableau de forme λ . Par le corollaire 1, $\kappa_t u = ae_t$, avec $a \in \mathbb{K}$.

S'il existe un t et un u tel que $\kappa_t u = ae_t$ avec $a \neq 0$, alors $e_t \in U$. En effet, $u \in U$ et donc $\kappa_t u$ l'est aussi, car U est un sous-module et $\kappa_t \in \mathbb{C}\mathfrak{S}_n$. On peut alors exprimer e_t comme étant $a^{-1}\kappa_t u$, d'où $e_t \in U$. Comme S^λ est cyclique, cela suffit pour dire que $S^\lambda \subseteq U$.

Maintenant, si pour tout t et pour tout u , on a que $\kappa_t u = 0$, alors on obtient que $U \subseteq (S^\lambda)^\perp$.

En effet, il suffit de remarquer que

$$\langle u, \kappa_t \{t\} \rangle = \sum_{\pi \in C_t} \langle u, \text{sgn}(\pi)\pi \{t\} \rangle = \sum_{\pi \in C_t} \langle \text{sgn}(\pi)\pi^{-1}u, \{t\} \rangle = \langle \kappa_t u, \{t\} \rangle.$$

où l'avant-dernière égalité vient du fait que la forme bilinéaire est invariante sous l'action de \mathfrak{S}_n et où la dernière égalité vient du fait qu'on peut remplacer π par π^{-1} dans la sommation et que cela n'a aucun effet sur le signe.

Ainsi, on obtient que :

$$\langle u, e_t \rangle = \langle u, \kappa_t \{t\} \rangle = \langle \kappa_t u, \{t\} \rangle = \langle 0, \{t\} \rangle = 0.$$

Donc, comme les e_t engendrent S^λ , on a que $u \in (S^\lambda)^\perp$, tel que voulu.

En fait, le théorème 1 implique qu'il n'y a aucun sous-module entre S^λ et $S^\lambda \cap (S^\lambda)^\perp$. Comme on sait que dans \mathbb{C} , $S^\lambda \cap (S^\lambda)^\perp = 0$, alors on conclut que S^λ est irréductible. □

Nous sommes donc maintenant convaincus que les S^λ sont irréductibles. Mais forment-ils une liste complète des \mathfrak{S}_n -modules irréductibles ?

La théorie des caractères nous permet de montrer que le nombre de G -modules irréductibles est égal au nombre de classes de conjugaison de G , voir (Fulton et Harris, 1991). Dans le cas des \mathfrak{S}_n -modules, le nombre de classes de conjugaison est le nombre de partages de n . Ainsi, il suffit de montrer que les S^λ sont tous inéquivalents pour conclure qu'ils forment une liste complète des \mathfrak{S}_n -modules irréductibles. Pour une preuve de ce dernier fait, voir le théorème 2.4.6 de (Sagan, 2001).

Au final, les S^λ pour $\lambda \vdash n$ forment une liste complète et sans répétition de tous les modules irréductibles de \mathfrak{S}_n , à isomorphisme près. De plus, pour construire une base de S^λ , il est suffisant de ne considérer que les e_t où t est un tableau standard.

Théorème 2. S^λ a pour base $\{e_t : t \in SYT(\lambda)\}$.

De la même façon dont on a défini alternativement les modules M^λ , il est possible de définir les modules de Specht à l'aide des mots. Au lieu de parler en termes de e_t , nous utiliserons les w_t , où $w_t = \text{word}(t) \cdot \kappa_t$. Rappelons que $\text{word}(t)$ est défini à la section 1.3.1 et que l'action de \mathfrak{S}_n sur les mots est une action à droite, donc une action sur les positions.

1.5 Morphismes de Modules

Maintenant que l'on maîtrise bien ce qu'est un module et un module irréductible, intéressons-nous aux applications entre de tels objets.

Définition 27. Soit N et M deux G -modules. Une transformation linéaire $\Theta : M \rightarrow N$ est un morphisme de modules si $\Theta(g \cdot v) = g \cdot \Theta(v)$ pour tout $v \in M$ et $g \in G$.

À noter que l'action du côté gauche de l'égalité est l'action de G définie sur M , alors que celle à droite est l'action définie sur N .

De plus, on dit que Θ est un isomorphisme de modules si Θ est un homomorphisme bijectif. Dans une telle situation, on dit que M et N sont isomorphes, noté $M \cong N$.

Le noyau et l'image d'un morphisme de modules peuvent parfois nous intéresser. La proposition suivante est un résultat classique dont on laisse la preuve au lecteur, voir (James et Liebeck, 2001).

Proposition 1. *Soit $\Theta : M \rightarrow N$ un morphisme de G -modules. Alors, $\ker(\Theta)$ et $\text{Im}(\Theta)$ sont des sous-modules de M et N respectivement.*

1.5.1 Lemme de Schur

Il se trouve qu'un morphisme de modules a des propriétés particulières lorsqu'il va d'un module simple vers un autre.

Théorème 3 (Lemme de Schur). *Soit $\Theta : M \rightarrow N$ un morphisme de G -modules, avec M et N des modules simples. Alors, soit Θ est un isomorphisme ou Θ est la fonction nulle.*

Démonstration. Comme $\ker(\Theta)$ est un sous-module de M et que M est simple, alors soit $\ker(\Theta)$ est nul ou $\ker(\Theta) = M$. De même, comme $\text{Im}(\Theta)$ est un sous-module de N et que N est simple, soit $\text{Im}(\Theta)$ est nulle ou $\text{Im}(\Theta) = N$.

Si $\ker(\Theta)$ est nul, alors $\text{Im}(\Theta)$ est nécessairement N . Donc, Θ est un isomorphisme.

Si $\ker(\Theta) = M$, alors nécessairement $\text{Im}(\Theta)$ est nulle. On a alors que Θ est la fonction nulle. □

1.6 Théorème de Maschke

Maintenant que nous avons abordé les modules simples, il est pertinent de se demander s'ils suffisent vraiment à construire n'importe quel module. C'est là que le théorème de Maschke entre en scène.

Théorème 4. *Soit G un groupe fini et M un G -module non nul. Il faut de plus supposer que le corps sur lequel on travaille a une caractéristique qui ne divise pas l'ordre de G . Alors, $M = N_1 \oplus N_2 \oplus \cdots \oplus N_k$ où chaque N_i est un G -sous-module irréductible de M .*

Démonstration. Nous donnerons l'idée générale de la preuve, mais le lecteur trouvera une preuve complète de ce théorème dans (Sagan, 2001). Soit M un G -module qui n'est pas simple. Alors, il existe N un sous-module non trivial de M . On peut ainsi construire le sous-module N^\perp .

On introduit la forme bilinéaire suivante :

$$\langle v, w \rangle' = \sum_{g \in G} \langle g \cdot v, g \cdot w \rangle,$$

où $\langle u, v \rangle$ est l'unique forme bilinéaire qui satisfait $\langle v_i, v_j \rangle = \delta_{i,j}$ pour v_i, v_j des éléments d'une base fixée de M .

C'est une forme bilinéaire qui est invariante sous l'action de G et donc

$$N^\perp = \{v \in M \mid \langle v, w \rangle' = 0 \text{ pour tout } w \in N\}$$

est un G -sous-module de M tel que $M = N \oplus N^\perp$. Par induction sur la dimension du module, on arrive à une décomposition de M en modules simples.

□

1.6.1 Décomposition de M^λ

Comme M^λ est un \mathfrak{S}_n -module sur \mathbb{C} , le théorème de Maschke s'applique. On peut donc décomposer M^λ en somme directe de modules de Specht et on peut même décrire explicitement cette décomposition. Encore une fois, on réfère le lecteur à (Sagan, 2001) pour une preuve du résultat (voir le théorème 2.11.2).

Théorème 5. *Soit $\mu \vdash n$. Alors :*

$$M^\mu \cong \bigoplus_{\lambda \succeq \mu} K_{\lambda, \mu} S^\lambda,$$

où $K_{\lambda, \mu}$ est le nombre de tableaux semi-standards de forme λ et de remplissage μ .

Nous aborderons brièvement la *décomposition isotypique* de M^μ , qui nous sera utile au chapitre 2. Pour un exposé plus détaillé, voir (Fulton et Harris, 1991).

Définition 28. *Pour V un G -module et S un G -module simple, on dit que V est isotypique de type S s'il existe des sous-modules V_1, \dots, V_k tels que les V_i sont tous isomorphes à S avec $V = \bigoplus_{i=1}^k V_i$.*

Un résultat bien connu sur les modules nous dit que pour V un G -module, il existe une unique décomposition qu'on appelle isotypique. C'est-à-dire qu'on a

$$V = \bigoplus_{i=1}^k V_i,$$

avec V_i un module isotypique pour tout $i \in [k]$. De plus, si on note S_i le type isotypique de V_i , on a que $S_i \not\cong S_j$ si $i \neq j$. On dit aussi que c'est une décomposition de V en sous-modules isotypiques.

Dans le cas des \mathfrak{S}_n -modules, la composante isotypique de type S^λ est identifiée par le partage correspondant. Ainsi, la composante λ -isotypique d'un \mathfrak{S}_n -module

V est le sous-module de V consistant en la somme directe de tous les sous-modules de V qui sont isomorphes à S^λ .

Le théorème 5 nous indique donc que la composante μ -isotypique du module M^μ est S^μ . En effet, $K_{\mu,\mu} = 1$ car il y a une unique façon de remplir un tableau de forme μ avec un remplissage μ faisant en sorte que le tableau soit semi-standard.

Supposons que V se décompose de façon isotypique ainsi :

$$V = V^{[S_1]} \oplus \dots \oplus V^{[S_k]},$$

avec $V^{[S_i]}$ la composante isotypique de type S_i de V . Pour tout module simple S_i , on a un morphisme de G -modules ρ_i consistant à faire la projection d'un vecteur de V sur sa composante isotypique de type S_i , c'est-à-dire sur $V^{[S_i]}$.

Il se trouve que le morphisme ρ_i peut s'exprimer comme l'action d'un élément de $\mathbb{C}\mathfrak{S}_n$. De plus, cette description ne dépend que du groupe \mathfrak{S}_n , et non du module V .

Définition 29. Pour tout \mathfrak{S}_n -module simple à droite S^λ de caractère χ_λ , on définit le projecteur isotypique associé isoproj_λ ainsi :

$$\begin{aligned} \text{isoproj}_\lambda : V &\rightarrow V \\ v &\mapsto v \cdot \mathfrak{p}_\lambda, \end{aligned} \tag{1.2}$$

où \mathfrak{p}_λ est l'élément de l'algèbre du groupe symétrique suivant :

$$\mathfrak{p}_\lambda = \frac{\dim(V)}{|G|} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \overline{\chi_\lambda(\sigma)} \sigma.$$

Pour un \mathfrak{S}_n -module simple à gauche, on peut définir de façon analogue isoproj_λ en faisant agir \mathfrak{p}_λ à gauche dans (1.2).

Lemme 4. Soit V un \mathfrak{S}_n -module. isoproj_λ est un morphisme de modules qui commute avec tout endomorphisme de V .

Démonstration. Montrons d'abord que \mathfrak{p}_λ est dans le centre de $\mathbb{C}\mathfrak{S}_n$. Pour tout $\pi \in \mathfrak{S}_n$,

$$\begin{aligned} \mathfrak{p}_\lambda \pi &= \frac{\dim(V)}{|G|} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \overline{\chi_\lambda(\sigma)} \sigma \pi \\ &= \frac{\dim(V)}{|G|} \sum_{\pi \sigma' \pi^{-1} \in \mathfrak{S}_n} \overline{\chi_\lambda(\pi \sigma' \pi^{-1})} \pi \sigma' \\ &= \pi \mathfrak{p}_\lambda. \end{aligned}$$

La dernière égalité vient du fait qu'un caractère est constant sur une même classe de conjugaison. Ainsi, $\chi_\lambda(\pi \sigma' \pi^{-1}) = \chi_\lambda(\sigma')$.

Donc, pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ et $v \in V$, on a

$$\text{isoproj}_\lambda(v \cdot \sigma) = (v \cdot \sigma) \cdot \mathfrak{p}_\lambda = v \cdot (\sigma \mathfrak{p}_\lambda) = v \cdot (\mathfrak{p}_\lambda \sigma) = \text{isoproj}_\lambda(v) \cdot \sigma,$$

ce qui fait de isoproj_λ un morphisme de modules.

Soit maintenant ψ un endomorphisme de V . On a

$$\text{isoproj}_\lambda(\psi(v)) = \psi(v) \cdot \mathfrak{p}_\lambda = \psi(v \cdot \mathfrak{p}_\lambda) = \psi(\text{isoproj}_\lambda(v)),$$

où l'avant-dernière égalité vient du fait que ψ est un morphisme de \mathfrak{S}_n -modules et que \mathfrak{p}_λ est un élément de $\mathbb{C}\mathfrak{S}_n$. Ainsi, isoproj_λ commute avec tout \mathfrak{S}_n -endomorphisme de V . Une preuve analogue peut être faite pour les modules à gauche. \square

1.7 Produit tensoriel de modules

Si on a V et W deux espaces vectoriels sur \mathbb{K} avec pour bases respectives : $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ et $\{w_1, w_2, \dots, w_\ell\}$, on peut définir un nouvel espace vectoriel en faisant le *produit tensoriel* de V et W . Le produit tensoriel de V et W , noté $V \otimes W$, est l'espace vectoriel sur \mathbb{K} dont la base est $\{v_i \otimes w_j \mid i \in [k], j \in [\ell]\}$.

Le produit tensoriel de deux modules nous permet de construire un nouveau module.

Définition 30. Soit V et W deux G -modules. Le produit tensoriel de V et W est l'espace vectoriel $V \otimes W$ muni de la multiplication suivante :

$$g \cdot (v \otimes w) = (g \cdot v) \otimes (g \cdot w).$$

On laisse le soin au lecteur de se convaincre que cette construction résulte en un G -module.

1.8 Représentations induites

L'idée à la base d'une représentation induite est de pouvoir, à partir d'une représentation d'un sous-groupe, l'élargir en une représentation du groupe en entier. Pour en décrire le fonctionnement, il nous faut définir la *transversale* d'un sous-groupe.

Définition 31. Soit G un groupe fini et H un sous-groupe de G . Une transversale à gauche de H est un ensemble comportant un et un seul représentant de toutes les classes à gauche de G modulo H .

Supposons donc que nous avons une représentation de H , où H est un sous-groupe de G , avec G fini. Cela revient à dire que nous avons un espace vectoriel V sur lequel est définie une multiplication par les éléments du groupe H .

Soit $T = \{g_1, g_2, \dots, g_k\}$ une transversale à gauche de H . La représentation induite de H sur G agit sur l'espace suivant :

$$W = \bigoplus_{i=1}^k g_i V.$$

Remarquons qu'à isomorphisme près, cela revient à faire la somme directe de k copies de V , car $g_i V \cong V$ en tant que H -modules.

Pour tout $g \in G$ et tout g_i de la transversale, il existe un $h_i \in H$ et un $j(i)$ dans $[k]$ tels que $gg_i = g_{j(i)}h_i$. En effet, comme gg_i est un élément de G , il appartient forcément à une classe à gauche de G modulo H . Comme on a une transversale, on sait qu'un des représentants de cette classe se trouve dans l'ensemble T .

Définissons maintenant la multiplication de G sur l'espace W .

$$g \cdot \sum_{i=1}^k g_i v_i = \sum_{i=1}^k g_{j(i)} h_i \cdot v_i.$$

Une des copies de V est donc stable sous la multiplication par H alors que pour les autres copies de V , cette multiplication peut avoir pour effet de déplacer des éléments d'une copie vers une autre. Par contre, quand H est normal, les éléments de H n'agissent qu'à l'intérieur des copies de V et les éléments de $G \setminus H$ déplacent les éléments d'une copie de V vers une autre.

La définition de représentation induite semble dépendre de la transversale choisie pour H . Toutefois, il est possible, à l'aide de la théorie des caractères, de montrer que deux transversales distinctes vont mener à des représentations induites équivalentes, voir (Sagan, 2001). En fait, la représentation induite est indépendante du choix de transversale.

1.8.1 La règle de branchement

Dans le cas des représentations du groupe symétrique, il y a une façon de décrire les représentations induites à l'aide des tableaux.

On peut interpréter \mathfrak{S}_{n-1} comme un sous-groupe de \mathfrak{S}_n en le considérant comme

le sous-groupe des permutations fixant l'élément n . Ainsi, à partir d'une représentation de \mathfrak{S}_{n-1} , on peut l'induire pour en trouver une de \mathfrak{S}_n . Fixons d'abord une notation avant d'énoncer le résultat qui nous intéresse.

Définition 32. Soit $\lambda \vdash n$. On note λ^+ tout partage de $n+1$ obtenu à partir de λ en y ajoutant une case (de façon réglementaire).

Exemple 12. Si $\lambda = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & & & \\ \hline \end{array}$, alors $\lambda^+ = \left\{ \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & & & & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & & & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & & \\ \hline \end{array} \right\}$.

Nous utiliserons cette notation pour décrire la règle de branchement du groupe symétrique. Pour une preuve du résultat, voir (Sagan, 2001).

Théorème 6. Pour $\lambda \vdash n$, on note par $S^\lambda \uparrow^{\mathfrak{S}_{n+1}}$ le module S^λ induit à \mathfrak{S}_{n+1} , où S^λ est vu comme un $(\mathfrak{S}_n \otimes \mathfrak{S}_1)$ -module. On a :

$$S^\lambda \uparrow^{\mathfrak{S}_{n+1}} \cong \bigoplus_{\lambda^+} S^{\lambda^+}.$$

Exemple 13. Donc, par la règle de branchement appliquée à l'exemple 12, on a :

$$S^{(4,4,2)} \uparrow^{\mathfrak{S}_{11}} \cong S^{(5,4,2)} \oplus S^{(4,4,3)} \oplus S^{(4,4,2,1)}.$$

La règle donnée par le théorème 6 nous permet de décomposer en modules simples le module S^λ induit à \mathfrak{S}_{n+1} . Il arrive toutefois que l'on veuille faire le même exercice, mais cette fois en voulant induire un module sur \mathfrak{S}_{n-r} vers \mathfrak{S}_n . À ce moment, il nous faudra utiliser les règles de Pieri. En général, elle sont exposées sous la forme d'identités sur les produits des fonctions de Schur, comme dans (Macdonald, 1995), mais nous préférons traduire ces règles en termes de modules.

Notons que le théorème suivant traite de cas particuliers d'induction, mais ces cas particuliers seront suffisants pour la suite. Pour une règle plus générale, voir la règle de Littlewood-Richardson dans (Fulton et Harris, 1991).

Théorème 7. *Soit $\mu \vdash (n - r)$, alors*

$$1. \operatorname{Ind}_{\mathfrak{S}_{n-r} \times \mathfrak{S}_r}^{\mathfrak{S}_n} (S^\mu \otimes S^{(r)}) \cong \bigoplus_{\lambda \vdash n : \lambda/\mu \text{ est une bande horizontale}} S^\lambda$$

$$2. \operatorname{Ind}_{\mathfrak{S}_{n-r} \times \mathfrak{S}_r}^{\mathfrak{S}_n} (S^\mu \otimes S^{(1^r)}) \cong \bigoplus_{\lambda \vdash n : \lambda/\mu \text{ est une bande verticale}} S^\lambda$$

Nous avons maintenant le bagage nécessaire pour pouvoir s'intéresser plus en profondeur au mélange doublement aléatoire.

CHAPITRE II

LE MÉLANGE DOUBLEMENT ALÉATOIRE

L'heure est maintenant venue de s'intéresser au mélange doublement aléatoire. Ce chapitre exposera d'abord différentes façons de décrire ce mélange pour ensuite se concentrer sur la structure de ses espaces propres. Nous verrons que ces derniers peuvent être construits en utilisant une méthode récursive. Cette structure remarquable nous permet de décrire les valeurs propres de l'opérateur à l'aide de formes gauches particulières, mais aussi à l'aide des mots. Les résultats présentés dans ce chapitre proviennent des articles (Dieker et Saliola, 2018) et (Reiner *et al.*, 2014).

2.1 Définition du mélange

Le mélange qui nous intéresse principalement est le mélange doublement aléatoire, que l'on notera R2R (pour *random-to-random* en anglais). Appliqué sur une collection de n objets ordonnés, comme un paquet de cartes, il consiste à retirer un élément se trouvant à une position aléatoirement choisie et à le remettre à une position aléatoirement choisie.

Le mélange doublement aléatoire est une symétrisation d'un autre mélange : le mélange aléatoire-au-sommet, qu'on notera R2T (pour *random-to-top* en anglais). Comme son nom l'indique, R2T déplace une carte choisie aléatoirement vers le

dessus du paquet. Le mélange transposé, le sommet-à-aléatoire, noté T2R (pour *top-to-random* en anglais), déplace la carte du dessus vers une position choisie aléatoirement. On dit que R2R est une symétrisation de R2T, car

$$\text{R2R} = \text{T2R} \circ \text{R2T} = \text{R2T}^\top \circ \text{R2T},$$

où R2T^\top représente le mélange transposé de R2T, c'est-à-dire T2R.

Les travaux portant sur le mélange R2T, fait pour la plupart dans les années 1990, ont permis de comprendre le comportement de ce mélange, notamment en décrivant les valeurs propres de R2T, voir (Diaconis *et al.*, 1992; Fill, 1996; Bidigare *et al.*, 1999). Comme R2R est une symétrisation de ce dernier mélange, il est assez étonnant que le comportement de R2R n'ait été bien décrit que récemment, notamment par Dieker, Reiner, Saliola, Reyes et Welker dans (Reiner *et al.*, 2014; Dieker et Saliola, 2018; Reyes, 2002).

On peut voir le mélange doublement aléatoire comme une façon de mélanger les cartes d'un paquet. Chaque arrangement de ce paquet de cartes correspond à un mot. Par convention, la dernière position du mot correspond à la carte du dessus du paquet. Si le paquet contient des cartes toutes distinctes, alors le mot correspondant sera un mot injectif (c'est-à-dire un mot sans répétition de lettres). Nous coderons ce paquet de cartes par un élément de \mathfrak{S}_n . Sinon, le paquet correspondra à un mot de longueur n .

Définissons plus formellement les mélanges R2R, R2T et T2R.

Définition 33. Soit $w = w_1 w_2 \dots w_n$ un mot sur l'alphabet \mathcal{A} et utilisons la notation \widehat{w}_i pour indiquer que la lettre w_i a été retirée.

$$\begin{aligned} \text{R2R}_n(w) = n \cdot w + \sum_{1 \leq i < j \leq n} w_1 \dots \widehat{w}_i \dots w_{j-1} w_i w_j \dots w_n \\ + \sum_{1 \leq j < i \leq n} w_1 \dots w_{j-1} w_i w_j \dots \widehat{w}_i \dots w_n \end{aligned}$$

$$\text{R2T}_n(w) = \sum_{1 \leq i \leq n} w_1 w_2 \dots \widehat{w}_i \dots w_n w_i$$

$$\text{T2R}_n(w) = \sum_{1 \leq i \leq n} w_1 w_2 \dots w_{i-1} w_n w_i \dots w_{n-1}$$

Notons que lorsque n est clair par son contexte, R2R pourra être utilisé.

Faisons un exemple.

Exemple 14. Si on applique les trois mélanges sur le mot abc , on obtient :

$$\text{R2R}(abc) = 6abc + 3bac + 2abca + 2acb + baac + caab + acab$$

$$\text{R2T}(abc) = 2abca + acab + abc$$

$$\text{T2R}(abc) = caab + acab + aacb + abc$$

2.1.1 La matrice de transition

On peut penser à l'action de R2R sur une collection d'objets ordonnés comme formant une chaîne de Markov. L'ensemble des états est l'ensemble des configurations possibles des éléments à mélanger. En appliquant le mélange doublement aléatoire à un mot, on voyage d'état en état selon certaines probabilités.

Ainsi, à partir du mélange doublement aléatoire et de l'ensemble des mots d'une valuation donnée, on peut construire la matrice de transition du mélange.

Fixons $\nu \models n$ la valuation des mots sur lesquels on souhaite appliquer le mélange. La matrice de transition de R2R_n est la matrice dont les colonnes et les lignes sont indexées par tous les mots de valuation ν . L'entrée de la ligne (u, w) , avec u, w des mots est la probabilité d'obtenir w en appliquant une seule fois l'opérateur R2R_n à u .

L'étude des matrices de transition T nous donne un certain nombre d'informations sur le mélange. Par exemple, les entrées de T^m représentent les probabilités

d'obtenir un mot à partir d'un autre après avoir appliqué le mélange m fois. Aussi, le comportement à long terme du mélange est décrit par les vecteurs propres (de valeur propre 1) des matrices de transition. Finalement, face à un certain mélange, on s'intéresse entre autres à connaître son temps de mélange, c'est-à-dire le nombre d'itérations nécessaires pour que le mélange soit «bien» fait. Cette caractéristique est codée par les valeurs propres de la matrice de transition, d'où l'intérêt de pouvoir calculer ces dernières. Pour le lecteur intéressé au temps de mélange de R2R et à l'historique de son calcul, voir (Diaconis et Saloff-Coste, 1995; Saloff-Coste et Zúñiga, 2008; Subag, 2013; Qin et Morris, 2017).

Exemple 15. Pour $\nu = (3, 1)$, on a la matrice de transition suivante :

$$\frac{1}{16} \times \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} & baaa & abaa & aaba & aaab \\ baaa & \left(\begin{array}{cccc} 10 & 4 & 1 & 1 \\ 4 & 6 & 5 & 1 \\ 1 & 5 & 6 & 4 \\ 1 & 1 & 4 & 10 \end{array} \right) \\ abaa \\ aaba \\ aaab \end{array} \end{array}$$

Ainsi, si on applique le mélange doublement aléatoire au mot $baaa$, il y a une probabilité de $\frac{5}{8}$ qu'on obtienne $baaa$, une probabilité de $\frac{1}{4}$ qu'on obtienne $abaa$, et une probabilité de $\frac{1}{16}$ d'obtenir chacun des mots $aaba$ et $aaab$.

Remarquons que pour $\nu \models n$, il sera toujours possible d'écrire la matrice de transition T sous la forme $\frac{1}{n^2}T'$ où T' ne contient que des entiers. En effet, si on applique le mélange doublement aléatoire à un mot w de valuation ν , il y a n^2 résultats possibles (si on compte les résultats avec multiplicité). Il y a n choix de lettre à retirer et n choix de position où insérer la lettre retirée, ce qui fait un total de n^2 possibilités de transformation pour le mot w . Donc, toutes les probabilités de la matrice de transition peuvent s'écrire sous forme de fraction ayant pour dénominateur n^2 .

Ce sont les valeurs propres des matrices T' qui nous intéressent parce qu'en normalisant les matrices de transition par un facteur n^2 , on travaille avec des matrices à entrées entières.

2.1.2 Le mélange vu comme un élément de $\mathbb{C}\mathfrak{S}_n$

Il est aussi possible de décrire le mélange R2R_n comme un élément de l'algèbre du groupe symétrique $\mathbb{C}\mathfrak{S}_n$. La stratégie pour pouvoir calculer les espaces propres et les valeurs propres de l'opérateur est de voir ce dernier comme un élément de $\mathbb{C}\mathfrak{S}_n$ agissant sur le module M^λ pour λ une composition de n . Dans ce contexte, nous pourrons utiliser les outils de la théorie de la représentation présentés au chapitre 1. On rappelle qu'on y avait présenté une façon de décrire le module M^λ par des mots de valuation λ . C'est cette description que nous utiliserons pour la suite.

Définition 34. Soit w un mot de longueur n et soit les éléments de $\mathbb{C}\mathfrak{S}_n$ suivants :

$$\begin{aligned}\xi_n &= n \cdot e + \sum_{1 \leq u < v \leq n} (u, u+1, \dots, v-1, v) + \sum_{1 \leq v < u \leq n} (u, u-1, \dots, v+1, v); \\ \tau_n &= e + \sum_{1 \leq i < n} (i, i+1, \dots, n); \\ \rho_n &= e + \sum_{1 \leq i < n} (n, n-1, \dots, i).\end{aligned}$$

Alors, $\text{R2R}_n(w) := w \cdot \xi_n$, $\text{R2T}_n(w) := w \cdot \tau_n$ et $\text{T2R}_n(w) := w \cdot \rho_n$.

Rappelons que l'action de \mathfrak{S}_n sur un mot est celle définie à la section 1.3.1.

On souhaite étudier l'action de R2R_n sur $M^{(n)}$, le module engendré par l'ensemble des mots de longueur n sur l'alphabet \mathcal{A} .

En fait, $M^{(n)}$ peut être décomposé en sous-modules selon la valuation des mots. En effet, $M^{(n)} = \bigoplus_{\lambda \models n} M^\lambda$. Tel que mentionné à la section 1.3.1, $M^\lambda \cong M^\mu$ si et

seulement si λ est un réarrangement de μ . Donc, la somme directe précédente peut être indexée par les partages de n plutôt que par les compositions (en ajustant les coefficients des modules M^λ). Finalement, les modules M^λ se décomposent en somme directe de S^μ , et on sait exactement décrire cette décomposition (voir section 1.6.1).

Comme S^μ est un \mathfrak{S}_n -module et que le mélange doublement aléatoire s'exprime comme un élément de $\mathbb{C}\mathfrak{S}_n$, on sait que tout module de Specht est stable sous l'action de ce mélange. Donc, au lieu de s'attaquer au problème des vecteurs propres et des valeurs propres en considérant l'action de R2R sur $M^{(n)}$, nous allons nous concentrer sur les valeurs propres de R2R agissant sur S^μ , qu'on note $R2R^\mu$. À partir de ces informations sur les modules de Specht, on peut retrouver ce que l'on veut sur les M^λ et sur $M^{(n)}$.

2.2 Les opérateurs sh , ∂ et $\Theta_{a,b}$ et leurs relations

Nous aurons besoin de quelques autres transformations sur les mots pour pouvoir illustrer la structure récursive des espaces propres.

Définition 35. *Pour w un mot de longueur n sur \mathcal{A} , on note $\text{sh}_i^n(w)$ la somme des mots obtenus à partir de w en insérant la i^e lettre de \mathcal{A} à toutes les positions possibles :*

$$\text{sh}_i^n(w) = \sum_{0 \leq j \leq n} w_1 \dots w_j a_i w_{j+1} \dots w_n.$$

Nous utiliserons parfois la notation sh_a si la lettre à insérer est la lettre a . Quand le contexte est clair, nous simplifierons parfois la notation à $\text{sh}_i(w)$.

Notons que l'opérateur sh_i envoie les éléments de M^λ sur des éléments de $M^{\lambda + \vec{e}_i}$, où $\lambda + \vec{e}_i$ désigne la composition $(\lambda_1, \dots, \lambda_i + 1, \dots, \lambda_k)$. Nous verrons que restreint

à S^λ , l'image de sh_i possède une propriété qui nous sera utile, voir lemme 7. Mais avant de pouvoir la décrire, il nous faut quelques notions supplémentaires.

Nous définissons également une façon de retirer une certaine lettre à un mot.

Définition 36. *Pour w un mot sur \mathcal{A} , on note $\partial_i^n(w)$ la somme de tous les mots obtenus à partir de w en retirant une occurrence de la i^e lettre de \mathcal{A} :*

$$\partial_i^n(w) = \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ w_j = a_i}} w_1 \dots \hat{w}_j \dots w_n.$$

Nous utiliserons parfois la notation ∂_a si la lettre à retirer est la lettre a et si le contexte est clair concernant la valeur de n .

Cette fois, l'opérateur ∂_i envoie les mots de M^λ sur des mots de $M^{\lambda - \vec{e}_i}$, où $\lambda - \vec{e}_i$ désigne la composition $(\lambda_1, \dots, \lambda_i - 1, \dots, \lambda_k)$.

Comme le mélange doublement aléatoire consiste à retirer une lettre au hasard et à la replacer aléatoirement, il semble naturel de vouloir l'exprimer en termes des opérateurs sh_i et ∂_i .

Proposition 2. *On peut écrire R2R_n de la façon suivante :*

$$\text{R2R}_n = \sum_{a \in \mathcal{A}} \text{sh}_a^{n-1} \circ \partial_a^n.$$

Il peut donc s'avérer intéressant de comprendre les relations entre les deux opérateurs.

Les opérateurs sh_i commutent entre eux, tout comme les ∂_i . Par contre, les sh_i et ∂_j ne commutent pas, mais il est possible de décrire leur relation de commutation. Pour cela, il faut introduire un opérateur qui permet de remplacer une lettre par une autre.

Définition 37. Pour w un mot sur \mathcal{A} et $a, b \in \mathcal{A}$, on note $\Theta_{a,b}(w)$ la somme de tous les mots obtenus à partir de w en remplaçant une occurrence de a par un b :

$$\Theta_{a,b}(w) = \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ w_j = a}} w_1 \dots w_{j-1} b w_{j+1} \dots w_n.$$

Par cette définition, il est facile de voir que $\Theta_{a,a}(w) = |w|_a w$, où $|w|_a$ est le nombre d'occurrences de a dans le mot w .

Notons que $\Theta_{a,b}$ est un morphisme de \mathfrak{S}_n -modules. En effet, l'action de $\Theta_{a,b}$ sur un mot w en change le contenu, alors que l'action à droite de \mathfrak{S}_n sur w est une action sur les positions. Ainsi, peu importe l'ordre dans lequel on applique ces deux actions, le résultat sera le même. Le lemme de Schur nous indique donc que $\Theta_{a,b} |_{\mathfrak{S}^\lambda}$ est soit le morphisme nul ou un morphisme injectif.

Exemple 16. Soit le mot $w = abac$. Alors

$$\text{sh}_a(w) = 2aabc + 2abac + abaca ;$$

$$\partial_a(w) = bac + abc ;$$

$$\Theta_{a,b}(w) = bbac + abbc.$$

Nous avons maintenant tout ce qu'il faut pour décrire les relations de commutation entre les opérateurs sh_i , ∂_j et $\Theta_{a,b}$.

Lemme 5. Pour tout $a, b \in \mathcal{A}$, on a

$$\partial_b^{n+1} \circ \text{sh}_a^n - \text{sh}_a^{n-1} \circ \partial_b^n = \Theta_{b,a}^n + \delta_{a,b}(n+1) \text{Id} \quad (2.1)$$

$$\Theta_{a,b}^{n+1} \circ \text{sh}_a^n - \text{sh}_a^n \circ \Theta_{a,b}^n = \text{sh}_b^n \quad (2.2)$$

$$\partial_a^{n+1} \circ \Theta_{b,a}^{n+1} - \Theta_{b,a}^n \circ \partial_a^{n+1} = \partial_b^{n+1} \quad (2.3)$$

où $\delta_{a,b}$ est la fonction de Kronecker, c'est-à-dire qu'elle vaut 1 si $a = b$ et 0 sinon.

Le lecteur intéressé trouvera une preuve de ce lemme à la section 5.3 de (Dieker et Saliola, 2018). Nous nous contenterons d'illustrer l'identité (2.1) par un exemple.

Exemple 17. Posons $w = abba$. Appliquons d'abord sh_a et ensuite ∂_b . On obtient :

$$\begin{aligned}\partial_b \circ \text{sh}_a(abba) &= \partial_b(2aabba + ababa + 2abbaa) \\ &= 5aaba + 5abaa.\end{aligned}$$

Appliquons maintenant ∂_b puis sh_a . On obtient :

$$\begin{aligned}\text{sh}_a \circ \partial_b(abba) &= \text{sh}_a(2aba) \\ &= 4aaba + 4abaa.\end{aligned}$$

La différence entre ces deux résultats est : $aaba + abaa$. Selon l'identité, cette différence doit être la même chose que d'appliquer $\Theta_{b,a}$ à w (puisque ici on considère que les lettres a et b sont différentes). En effet, on trouve que :

$$\Theta_{b,a}(abba) = aaba + abaa,$$

tel que voulu.

Il nous reste à étudier quelques autres propriétés intéressantes de ces opérateurs.

Si on applique à répétition certains opérateurs sh_{a_i} sur un mot, on peut l'interpréter différemment à l'aide des opérateurs $\Theta_{a,b}$ et du produit de mélange sur les mots. Le produit de mélange appliqué sur deux mots u et v , noté $u \sqcup v$ est la somme de tous les mots obtenus en intercalant u et v , voir (Lothaire, 1997).

Lemme 6. Soit a, a_1, a_2, \dots, a_k des lettres telles que $a \neq a_i$ pour tout $i \in [k]$ et soit w un mot qui ne contient pas la lettre a . On a alors que :

$$\begin{aligned}(\text{sh}_{a_k} \circ \dots \circ \text{sh}_{a_2} \circ \text{sh}_{a_1})(w) &= w \sqcup a_1 \sqcup a_2 \sqcup \dots \sqcup a_k \\ &= \Theta_{a,a_k} \circ \dots \circ \Theta_{a,a_2} \circ \Theta_{a,a_1}(w \sqcup \underbrace{aaa \dots a}_k).\end{aligned}$$

Nous référons le lecteur au lemme 54 de (Dieker et Saliola, 2018) pour une preuve de ce résultat.

Intéressons-nous maintenant à l'étude du sous-espace $\text{sh}_a^n(S^\lambda)$.

Lemme 7. *Le sous-espace $\text{sh}_a^n(S^\lambda)$ est contenu dans un \mathfrak{S}_{n+1} -sous-module de $M^{\lambda+\bar{e}_a}$ qui est isomorphe à $\bigoplus_{\mu} S^\mu$, où μ parcourt l'ensemble des partages qu'il est possible d'obtenir à partir de λ en ajoutant une cellule dans la rangée r , $r \leq a$.*

Démonstration. Il faut d'abord remarquer que $\text{sh}_a(w) = w \sqcup a$, où w est un mot de longueur n .

De plus, pour b une lettre ne se retrouvant pas dans w , on peut dire que

$$\Theta_{b,a}(w \sqcup b) = \text{sh}_a(w).$$

L'idée derrière cela est de faire apparaître $\Theta_{b,a}$, un morphisme de modules. Le lemme de Schur se révélera bien utile.

Donc, fixons $b = \ell(\lambda) + 1$ pour s'assurer que b ne fasse partie d'aucun mot de S^λ .

Posons N , le sous-module de $M^{\lambda+\bar{e}_b}$ engendré par les mots de S^λ concaténés avec la lettre b , c'est-à-dire $N := \langle \{w \cdot b \mid w \in S^\lambda\} \rangle$.

On a que $S^\lambda \sqcup b = \{w \sqcup b : w \in S^\lambda\}$ est inclus dans N .

De plus, il se trouve que $N \cong \text{Ind}_{\mathfrak{S}_n \times \mathfrak{S}_1}^{\mathfrak{S}_{n+1}}(S^\lambda \otimes S^1)$. Pour voir cela, souvenons-nous que l'espace vectoriel sous-jacent de $\text{Ind}_{\mathfrak{S}_n \times \mathfrak{S}_1}^{\mathfrak{S}_{n+1}}(S^\lambda \otimes S^1)$ est la somme directe de $(n+1)$ copies de $(S^\lambda \otimes S^1)$, car il y a $(n+1)$ classes à droite de \mathfrak{S}_{n+1} modulo $\mathfrak{S}_n \times \mathfrak{S}_1$.

Un élément de la base de $(n+1)(S^\lambda \otimes S^1)$ peut s'écrire comme un vecteur $(0, 0, \dots, w \otimes a, 0, \dots, 0)$, où w est un élément de la base de S^λ , a est la première lettre de l'alphabet et où toutes les coordonnées sont nulles sauf pour la i^e , avec i de 1 à $(n+1)$.

L'isomorphisme entre le module induit et N envoie $(0, 0, \dots, w \otimes a, 0, \dots, 0)$ sur le mot w auquel on a inséré un a en i^e position. La lettre a encode dans quelle copie de $(S^\lambda \otimes S^1)$ on se trouve. Avec ce codage, l'action du groupe symétrique sur le module induit revient à l'action à droite définie sur les mots.

Maintenant que nous sommes convaincus de l'isomorphisme, appliquons la règle de branchement du groupe symétrique.

$$N \cong \bigoplus_{\substack{\lambda \subseteq \mu \\ \mu \vdash n+1}} S^\mu.$$

Ainsi, on se trouve avec les inclusions suivantes :

$$\text{sh}_a^n(S^\lambda) = \Theta_{b,a}(S^\lambda \sqcup b) \subseteq \Theta_{b,a}(N) \cong \bigoplus_{\substack{\lambda \subseteq \mu \\ \mu \vdash n+1}} \Theta_{b,a}(S^\mu).$$

Or, comme $\Theta_{b,a}$ est un morphisme de modules, on sait que les copies de $\Theta_{b,a}(S^\mu)$ de la somme directe sont soit nulles ou isomorphes à S^μ . De plus, $\Theta_{b,a}(S^\mu)$ est un \mathfrak{S}_{n+1} -sous-module de $M^{\lambda+\vec{e}_a}$.

Tel que vu à la section 1.6.1,

$$M^{\lambda+\vec{e}_a} = \bigoplus_{\nu \succeq \lambda+\vec{e}_a} K_{\nu, \lambda+\vec{e}_a} S^\nu.$$

Donc, pour que S^μ soit un sous-module de $M^{\lambda+\vec{e}_a}$, on doit avoir $\mu \succeq \lambda + \vec{e}_a$, ce qui implique que μ est obtenue à partir de λ en ajoutant une case à la ligne r , où $1 \leq r \leq a$. \square

Finalement, il nous reste à décrire le comportement de $\Theta_{b,a}$ lorsqu'appliqué au module simple S^λ .

Lemme 8. *Soit $\lambda \vdash n$ et $\alpha = \lambda - \vec{e}_b + \vec{e}_a$. Si $\Theta_{b,a}^n$ est non nul sur S^λ , alors λ domine le réarrangement décroissant de α . Ainsi, si $a < b$, alors $\Theta_{b,a}^n(S^\lambda) = 0$.*

Démonstration. Par le lemme de Schur, si $\Theta_{b,a}$ est non nul sur S^λ , alors

$$\Theta_{b,a}(S^\lambda) \cong S^\lambda.$$

Or, l'image de $\Theta_{b,a}$ appliqué sur S^λ est incluse dans M^α , parce qu'en remplaçant un b par un a , la valuation du mot devient $\lambda - \vec{e}_b + \vec{e}_a = \alpha$. En posant $r(\alpha)$ le réarrangement décroissant de α , on a :

$$S^\lambda \cong \Theta_{b,a}(S^\lambda) \subseteq M^\alpha \cong M^{r(\alpha)} \cong \bigoplus_{\mu \succeq r(\alpha)} K_{\mu, r(\alpha)} S^\mu.$$

Et donc, pour que S^λ soit «inclus» dans la somme directe, on doit avoir que $\lambda \succeq r(\alpha)$, tel que voulu.

Maintenant, si $a < b$, alors λ ne domine pas $r(\alpha)$. En effet, de la façon dont on construit α , on sait que $\alpha_a = \lambda_a + 1$. Ainsi,

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_a = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_{a-1} + \lambda_a + 1 > \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_a.$$

Ceci signifie que λ ne domine pas $r(\alpha)$, car de la première à la a^e ligne, le réarrangement de α contient le même nombre de cases que α . Donc, la contraposée nous permet de conclure que $\Theta_{b,a}^n(S^\lambda) = 0$. \square

2.3 Les opérateurs \mathcal{L} et la construction des espaces propres de $\mathbf{R2R}_n$

Nous verrons que le noyau de $\mathbf{R2R}$ agissant sur les modules de Specht est en quelque sorte un point de départ pour le calcul des valeurs propres et des vecteurs propres de l'opérateur.

Proposition 3. *Pour $\lambda \vdash n$, on a : $\dim(\ker \mathbf{R2R}^\lambda) = d^\lambda$, où d^λ est le nombre de tableaux de désarrangement de forme λ .*

Une preuve de cette proposition se trouve à la section 4.4 de (Dieker et Saliola, 2018). On peut maintenant expliquer l'idée générale.

Il se trouve qu'il existe des opérateurs de levée, qu'on note \mathcal{L}_i^λ , allant de S^λ vers $S^{\lambda+\vec{e}_i}$ et s'exprimant en termes des opérateurs sh et Θ qui ont des propriétés remarquables. Pour v un vecteur propre de R2R^λ de valeur propre ε , $\mathcal{L}_i^\lambda(v)$ est soit 0 ou un vecteur propre de $\text{R2R}^{\lambda+\vec{e}_i}$. De plus, $\mathcal{L}_i^\lambda(v)$ a pour valeur propre : $\varepsilon + (n + 1) + (\lambda_i + 1) - i$. Le théorème 9 prouve cette dernière propriété.

Nous verrons, à la section 2.4.8, que les opérateurs de levée peuvent s'exprimer ainsi :

$$\mathcal{L}_i^\lambda = \sum_{1 \leq b_1 < \dots < b_t < b_{t+1} = i} \left(\prod_{j=1}^t \frac{1}{(\lambda_i - i) - (\lambda_{b_j} - b_j)} \Theta_{b_j, b_{j+1}} \right) \text{sh}_{b_1}.$$

Exemple 18. Pour $i = 1$, on trouve que $\mathcal{L}_1^\lambda = \text{sh}_1$. Pour $i = 2$, on a

$$\mathcal{L}_2^\lambda = \text{sh}_2 + \frac{1}{(\lambda_2 - 2) - (\lambda_1 - 1)} \Theta_{1,2} \circ \text{sh}_1.$$

Dans leur article, Saliola et Dieker ont introduit une façon de construire ces opérateurs \mathcal{L}_i^λ à l'aide de graphes. Voir la section 4.2.2 de (Dieker et Saliola, 2018).

Les opérateurs de levée nous permettent donc, à partir des vecteurs propres de S^λ , de trouver des vecteurs propres de modules irréductibles formés de mots plus longs. Nous donnerons une description explicite de l'opérateur de levée à la section 2.4.8. Nous verrons également que tous les vecteurs propres d'un module de Specht, sauf ceux du noyau, peuvent être exprimés comme une certaine suite d'applications des opérateurs de levée sur un vecteur du noyau d'un autre module de Specht. Avant de prouver tout cela, nous croyons pertinent de développer un exemple.

2.3.1 Un exemple du phénomène

Calculons les vecteurs propres de quelques modules de Specht en commençant par les plus simples.

Considérons $S^{(1)}$. L'unique vecteur de sa base est a . C'est évidemment un vecteur propre de valeur propre 1.

Considérons maintenant $S^{(1,1)}$. L'unique vecteur de sa base est $w_t = ab - ba$, avec $t = \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array}$. Comme t est un tableau de désarrangement, on sait que le noyau de $R2R$ est de dimension 1. Donc, n'importe quel élément de $S^{(1,1)}$ est dans le noyau. Ainsi, $ab - ba$ est un vecteur propre de $R2R^{(1,1)}$ de valeur propre 0. Pour l'instant, nous n'avons pas utilisé les propriétés des opérateurs de levée.

Maintenant, si on se place dans $S^{(2,1)}$, il y a deux tableaux standards de forme $(2, 1)$ dont un seul est un tableau de désarrangement. On a donc un seul vecteur propre de valeur propre non nulle, et on va le trouver en utilisant les opérateurs de levée. Souvenons-nous qu'en appliquant \mathcal{L}_1 à un vecteur propre de $S^{(1,1)}$, on peut soit trouver un vecteur nul ou un vecteur propre appartenant à $S^{(2,1)}$ (car \mathcal{L}_1 correspond à l'ajout d'une case dans la ligne 1). Un vecteur propre appartenant à $S^{(1,1)}$ étant $ab - ba$, on calcule ainsi que :

$$\mathcal{L}_1(ab - ba) = sh_1(ab - ba) = 2aab - 2baa.$$

On rappelle que $\mathcal{L}_1 = sh_1$. On peut vérifier que ce résultat est un vecteur propre de $R2R^{(2,1)}$ de valeur propre 4. Comme il n'y a qu'un seul tableau de désarrangement de forme $(2, 1)$, on sait que l'autre vecteur propre sera un vecteur du noyau. Comme les espaces propres sont orthogonaux, on peut facilement trouver un vecteur orthogonal à $2aab - 2baa$. Par exemple, $2aba - baa - aab$. La forme bilinéaire employée pour parler d'orthogonalité est celle pour laquelle les mots forment une base orthonormale.

Continuons notre cheminement vers le module $S^{(2,2)}$. Il y a encore une fois deux tableaux standards de forme $(2, 2)$ dont un seul tableau de désarrangement. Donc, si on applique \mathcal{L}_2 à un vecteur propre de $S^{(2,1)}$, on peut obtenir soit un vec-

teur nul, ou un vecteur propre de $S^{(2,2)}$ (car \mathcal{L}_2 correspond à l'ajout d'une case dans la deuxième ligne du partage original). Un des vecteurs propres de $S^{(2,1)}$ est $2aba - baa - aab$. En lui appliquant \mathcal{L}_2 , on obtient :

$$\mathcal{L}_2(2aba - baa - aab) = baab + abba + baba - 2bbaa + abab - 2aabb.$$

Ce dernier est un vecteur propre de $R^2R^{(2,2)}$ de valeur propre 4. De la même façon que dans le cas précédent, on complète avec un vecteur du noyau en utilisant le complément orthogonal. Par contre, si on avait choisi d'appliquer \mathcal{L}_2 à l'autre vecteur propre de $S^{(2,1)}$, on aurait obtenu le vecteur nul, ce qui ne nous aurait pas avancés.

Il faut donc savoir à quel vecteur appliquer l'opérateur de levée pour obtenir des vecteurs propres.

L'idée naïve est de le voir un peu comme un jeu de blocs avec des règles spéciales. Si on s'intéresse aux vecteurs propres de S^λ , il faut identifier tous les partages à partir desquels, en ajoutant des cases, on peut retrouver le diagramme de λ , et ce, sans jamais ajouter plus d'une case par colonne. Pour chacune de ces formes μ , on doit identifier les vecteurs de la base du noyau de R^2R^μ et leur appliquer une suite d'opérateurs de levée. Pour chaque bloc ajouté à μ pour construire λ , on applique \mathcal{L}_i , où i est la ligne sur laquelle le bloc a été ajouté (dans l'ordre d'ajout des boîtes). Mis à part les vecteurs du noyau, on peut trouver tous les vecteurs propres de S^λ en utilisant l'opérateur de levée. Il faudra toujours compléter cette liste avec les vecteurs du noyau, en identifiant une base de l'espace orthogonal aux espaces propres déjà identifiés.

Revenons donc à l'exemple et appliquons ce que nous venons de voir. On aimerait identifier les vecteurs propres de $S^{(2,1,1)}$. Les trois seuls diagrammes à partir desquels on peut construire $\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \\ \hline \end{array}$ en ajoutant au plus une case par colonne sont les

suivants : $\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array}$, $\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array}$ et $\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array}$. Examinons les trois cas un après l'autre.

Traitons d'abord le cas où $\mu = (1, 1)$. Par le travail qu'on a fait précédemment, on sait que $w = ab - ba$ est un vecteur du noyau de R^2R^μ . Pour passer de $(1, 1)$ à $(2, 1, 1)$, on a ajouté une case dans la première ligne et une autre dans la troisième. Donc, $\mathcal{L}_3 \circ \mathcal{L}_1(w)$ est un vecteur propre de $S^{(2,1,1)}$. On a terminé pour $\mu = (1, 1)$, car son noyau est de dimension 1.

Maintenant, si $\mu = (2, 1)$, on a que $v = aab + baa - 2aba$ est dans le noyau de $R^2R^{(2,1)}$. Pour passer de μ à $(2, 1, 1)$, on ajoute une case à la ligne 3. Ainsi, $\mathcal{L}_3(v)$ est un vecteur propre de $S^{(2,1,1)}$. Encore une fois, le noyau de $S^{(2,1)}$ est de dimension 1, donc nous avons terminé notre travail.

Terminons avec le cas où $\mu = (1, 1, 1)$. Aucun vecteur de $S^{(1,1,1)}$ n'est un élément du noyau, car il n'existe aucun tableau de désarrangement de cette forme.

Bref, en utilisant les opérateurs de levée, on a trouvé deux vecteurs propres de $S^{(2,1,1)}$. Il nous manque un vecteur du noyau, car il existe un seul tableau de désarrangement de forme $(2, 1, 1)$. Il faut trouver un vecteur orthogonal aux deux vecteurs propres trouvés précédemment. De cette façon, on a tous les vecteurs propres de $R^2R^{(2,1,1)}$.

Décrivons maintenant rigoureusement le phénomène et voyons pourquoi il se présente.

2.4 La construction récursive des espaces propres

Pour réussir à expliquer ce phénomène récursif des vecteurs propres et ainsi donc des valeurs propres, le chemin est long. Notons que nous présenterons les résultats principaux et que certains lemmes seront admis. De plus, pour faciliter l'écriture,

nous utiliserons les entiers en tant qu'alphabet dans les résultats, alors que nous utiliserons des lettres dans les exemples (car cela facilite la distinction entre mots et coefficients).

2.4.1 Les grandes lignes de la preuve

Le point de départ est la découverte d'une identité sur M^λ , présentée à la section 2.4.2. Cette identité sera par la suite restreinte à S^λ (voir section 2.4.3). À la section 2.4.4, l'identité sera projetée sur un module de Specht en particulier. Une fois ces étapes faites, nous obtiendrons une identité nous permettant d'obtenir des vecteurs propres de $R2R_{n+1}$ à partir de vecteurs propres de $R2R_n$ et nous pourrons même décrire la valeur propre de ce premier à partir de celle du dernier, voir section 2.4.5.

Toutefois, il faudra faire un peu plus de travail pour montrer que tout vecteur propre peut s'exprimer à l'aide d'une application d'un opérateur de levée sur un vecteur propre d'un autre module de Specht. Ce travail sera fait à la section 2.4.6.

La section 2.4.7 explicite la construction des espaces propres de $R2R^\lambda$ à partir des vecteurs du noyau de certains autres modules de Specht.

Finalement, la section 2.4.8 confirme la description des opérateurs de levée en termes des sh_i et des $\Theta_{a,b}$ et la section 2.5 caractérise les valeurs propres de l'opérateur doublement aléatoire.

2.4.2 Une identité sur M^λ

Tout commence donc avec une identité sur la relation de commutation entre $R2R_n$ et sh_a .

Théorème 8. Sur M^λ , avec $\lambda \vdash n$, et pour tout $a \in [n]$,

$$\begin{aligned} \text{R2R}_{n+1} \circ \text{sh}_a^n - \text{sh}_a^n \circ \text{R2R}_n &= (n+1) \text{sh}_a^n + \sum_{1 \leq b \leq n} \text{sh}_b^n \circ \Theta_{b,a}^n \\ &= \text{sh}_a^n + \sum_{1 \leq b \leq n} \Theta_{b,a}^{n+1} \circ \text{sh}_b^n. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Démonstration. On sait que $\text{R2R}_{n+1} = \sum_{b \leq n+1} \text{sh}_b^n \circ \partial_b^{n+1}$. En utilisant cette expression pour R2R_{n+1} et celle équivalente pour R2R_n , on obtient :

$$\begin{aligned} \text{R2R}_{n+1} \circ \text{sh}_a^n - \text{sh}_a^n \circ \text{R2R}_n &= \left(\sum_{b \leq n+1} \text{sh}_b^n \circ \partial_b^{n+1} \right) \circ \text{sh}_a^n - \text{sh}_a^n \circ \left(\sum_{b \leq n} \text{sh}_b^{n-1} \circ \partial_b^n \right) \\ &= \text{sh}_{n+1}^n \circ \partial_{n+1}^{n+1} \circ \text{sh}_a^n + \sum_{b \leq n} (\text{sh}_b^n \circ \partial_b^{n+1} \circ \text{sh}_a^n) \\ &\quad - \sum_{b \leq n} (\text{sh}_a^n \circ \text{sh}_b^{n-1} \circ \partial_b^n). \end{aligned}$$

Or, le premier terme est nul, car il n'y a aucune occurrence de la lettre $n+1$ dans un mot de M^λ , pour $\lambda \vdash n$ et car $a \neq n+1$. Pour le deuxième terme, on utilise l'équation (2.1) du lemme 5. On obtient alors

$$\sum_{b \leq n} (\text{sh}_b \circ (\text{sh}_a \circ \partial_b + \Theta_{b,a} + \delta_{a,b}(n+1) \text{Id})) - \sum_{b \leq n} (\text{sh}_a \circ \text{sh}_b \circ \partial_b).$$

Après simplification, on parvient à $\sum_{b \leq n} \text{sh}_b \circ \Theta_{b,a} + (n+1) \text{sh}_a$, tel que voulu.

Pour la deuxième égalité, on utilise également le lemme 5, mais cette fois, l'équation (2.2). On a ainsi

$$\begin{aligned} (n+1) \text{sh}_a + \sum_{1 \leq b \leq n} \text{sh}_b \circ \Theta_{b,a} &= (n+1) \text{sh}_a + \sum_{1 \leq b \leq n} (\Theta_{b,a} \circ \text{sh}_b - \text{sh}_a) \\ &= \text{sh}_a + \sum_{1 \leq b \leq n} \Theta_{b,a} \circ \text{sh}_b, \end{aligned}$$

tel que voulu. □

On a donc une identité allant de M^λ vers $M^{\lambda+\bar{e}_a}$. Mais, comme on s'intéresse aux valeurs propres des modules de Specht, on voudrait restreindre cette identité à S^λ . Comme $\Theta_{b,a}$ est un morphisme de \mathfrak{S}_n -modules et que S^λ est un module simple, il est raisonnable de penser que la restriction de l'identité à S^λ nous donnera quelque chose d'intéressant.

2.4.3 La restriction à S^λ

Rappelons-nous que le lemme 8 s'intéressait à $\Theta_{b,a}(S^\lambda)$. La propriété qui y est énoncée nous permet d'obtenir l'identité suivante en restreignant l'identité (2.4) du théorème 8 au sous-module simple S^λ :

Corollaire 2. *Soit $\lambda \vdash n$ et $a \in [n]$. Alors,*

$$(\mathrm{R}2\mathrm{R}_{n+1} \circ \mathrm{sh}_a^n - \mathrm{sh}_a^n \circ \mathrm{R}2\mathrm{R}_n) \Big|_{S^\lambda} = (n+1) \mathrm{sh}_a^n \Big|_{S^\lambda} + \sum_{1 \leq b \leq a} (\mathrm{sh}_b^n \circ \Theta_{b,a}^n) \Big|_{S^\lambda}. \quad (2.5)$$

Démonstration. Il suffit de voir que $\Theta_{b,a}$ est nul pour $b > a$. Ainsi, $\mathrm{sh}_b \circ \Theta_{b,a}$ est également nul et ne contribue donc pas à la somme. \square

2.4.4 Projection sur un module de Specht

On a maintenant une identité allant de S^λ vers $M^{\lambda+\bar{e}_a}$. On se rapproche du but d'avoir une identité de S^λ vers $S^{\lambda+\bar{e}_a}$. Et pour y arriver, il faudra projeter ce qu'on obtient de l'identité du corollaire 2 sur le sous-module $S^{\lambda+\bar{e}_a}$. On utilisera les projecteurs isotypiques introduits au chapitre 1, à la section 1.6.1.

Définition 38. *Soit $a \in [n]$ et λ, μ deux partages de n . Notons par sh_a^λ la restriction de sh_a à S^λ . On définit*

$$\mathrm{projlift}_a^{\lambda,\mu} := \mathrm{isoproj}_\mu \circ \mathrm{sh}_a^\lambda.$$

L'idée est donc d'utiliser l'identité du corollaire 2 et de composer à gauche par isoproj_μ pour obtenir une identité en termes des opérateurs $\text{projlift}_a^{\lambda,\mu}$ et examiner si une propriété intéressante s'en dégage.

Lemme 9. *Pour $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k) \vdash n$, $a \in [k+1]$ et $\mu = \lambda + \vec{e}_r$ où $1 \leq r \leq a$,*

$$\begin{aligned} \text{R2R}_{n+1} \circ \text{projlift}_a^{\lambda,\mu} - \text{projlift}_a^{\lambda,\mu} \circ \text{R2R}_n &= ((n+1) + (\lambda_a + 1) - a) \text{projlift}_a^{\lambda,\mu} \\ &+ \sum_{1 \leq b < a} \Theta_{b,a} \circ \text{projlift}_b^{\lambda,\mu}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Démonstration. En composant à gauche par isoproj_μ chaque terme de l'identité (2.5) du corollaire 2, on a :

$$\begin{aligned} \text{isoproj}_\mu \circ \text{R2R}_{n+1} \circ \text{sh}_a \Big|_{S^\lambda} - \text{isoproj}_\mu \circ \text{sh}_a \circ \text{R2R}_n \Big|_{S^\lambda} &= (n+1) \text{isoproj}_\mu \circ \text{sh}_a \Big|_{S^\lambda} \\ &+ \sum_{1 \leq b < a} (\text{isoproj}_\mu \circ \text{sh}_b \circ \Theta_{b,a}) \Big|_{S^\lambda}. \end{aligned}$$

Tel que vu à la section 1.6.1, isoproj_μ est un morphisme de \mathfrak{S}_n -modules. Il commute donc avec les éléments de $\mathbb{C}\mathfrak{S}_n$. On peut alors commuter isoproj_μ et R2R_{n+1} dans le premier terme. De plus, $\text{R2R}_n(S^\lambda) \subseteq S^\lambda$, car S^λ est un \mathfrak{S}_n -module et R2R_n est un élément de $\mathbb{C}\mathfrak{S}_n$. Enfin, par définition de $\text{projlift}_a^{\lambda,\mu}$, on obtient :

$$\begin{aligned} \text{R2R}_{n+1} \circ \text{projlift}_a^{\lambda,\mu} - \text{projlift}_a^{\lambda,\mu} \circ \text{R2R}_n \Big|_{S^\lambda} &= (n+1) \text{projlift}_a^{\lambda,\mu} \\ &+ \sum_{1 \leq b < a} (\text{isoproj}_\mu \circ \text{sh}_b \circ \Theta_{b,a}) \Big|_{S^\lambda}. \end{aligned}$$

Nous allons terminer en utilisant le lemme 5 pour commuter sh_b et $\Theta_{b,a}$ dans la sommation. On a alors :

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq b < a} (\text{isoproj}_\mu \circ \text{sh}_b \circ \Theta_{b,a}) \Big|_{S^\lambda} &= \sum_{1 \leq b < a} (\text{isoproj}_\mu \circ (\Theta_{b,a} \circ \text{sh}_b - \text{sh}_a)) \Big|_{S^\lambda} \\ &= \sum_{1 \leq b < a} (\text{isoproj}_\mu \circ \Theta_{b,a} \circ \text{sh}_b - \text{projlift}_a^{\lambda,\mu}) \Big|_{S^\lambda} \end{aligned}$$

$$= \sum_{1 \leq b \leq a} (\Theta_{b,a} \circ \text{projlift}_b^{\lambda,\mu}) - a \text{projlift}_a^{\lambda,\mu},$$

où la dernière égalité vient du fait que isoproj_μ commute avec tout endomorphisme de modules.

Pour $a = b$, on obtient le terme $\Theta_{a,a} \circ \text{projlift}_a^{\lambda,\mu}$ qui revient à

$$\Theta_{a,a} \circ \text{isoproj}_\mu \circ \text{sh}_a \Big|_{S^\lambda} = \text{isoproj}_\mu \circ \Theta_{a,a} \circ \text{sh}_a \Big|_{S^\lambda}.$$

Or, pour w un mot, $\Theta_{a,a}(w) = |w|_a w$, et donc, pour $w \in S^\lambda$, on a

$$\begin{aligned} \text{isoproj}_\mu(\Theta_{a,a}(\text{sh}_a(w))) &= \text{isoproj}_\mu((\lambda_a + 1) \text{sh}_a(w)) \\ &= (\lambda_a + 1) \text{projlift}_a^{\lambda,\mu}(w). \end{aligned}$$

Donc, pour $a = b$, le terme de la somme est $(\lambda_a + 1) \text{projlift}_a^{\lambda,\mu}$.

En mettant tout cela ensemble, on a finalement que

$$\begin{aligned} \text{R2R}_{n+1} \circ \text{projlift}_a^{\lambda,\mu} - \text{projlift}_a^{\lambda,\mu} \circ \text{R2R}_n \Big|_{S^\lambda} &= ((n+1) + (\lambda_a + 1) - a) \text{projlift}_a^{\lambda,\mu} \\ &\quad + \sum_{1 \leq b < a} (\Theta_{b,a} \circ \text{projlift}_b^{\lambda,\mu}). \end{aligned}$$

Il reste à montrer qu'il est suffisant de faire la somme sur les b tels que $r \leq b < a$.

Supposons donc que $r > b$.

Par le lemme 7, on sait que $\text{sh}_b^n(S^\lambda) \cong S^{\lambda+\vec{e}_1} \oplus S^{\lambda+\vec{e}_2} \oplus \dots \oplus S^{\lambda+\vec{e}_b}$. Comme $\mu = \lambda + \vec{e}_r$ avec $r > b$, aucune copie de S^μ n'apparaît dans la décomposition de $\text{sh}_b(S^\lambda)$ et donc $\text{isoproj}_\mu \circ \text{sh}_b(S^\lambda) = 0$, tel que voulu. \square

2.4.5 Construire un vecteur propre de R2R_{n+1} grâce à projlift

À partir de l'identité du lemme 9, on arrive à une nouvelle (et dernière) identité qui est au centre de la compréhension des vecteurs et valeurs propres de R2R . En

effet, elle nous indique que l'application de l'opérateur $\text{projlift}_a^{\lambda, \lambda + \vec{e}_a}$ sur un vecteur propre de R2R^λ résulte soit en le vecteur nul ou en un vecteur propre de $\text{R2R}^{\lambda + \vec{e}_a}$. Elle nous permet également de trouver la valeur propre du vecteur ainsi construit.

Théorème 9. *Pour $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k) \vdash n$, $a \in [k + 1]$ et $\mu = \lambda + \vec{e}_r$ où $1 \leq r \leq a$, on a l'égalité suivante :*

$$\text{R2R}_{n+1} \circ \text{projlift}_a^{\lambda, \mu} - \text{projlift}_a^{\lambda, \mu} \circ \text{R2R}_n = ((n + 1) + (\lambda_r + 1) - r) \text{projlift}_a^{\lambda, \mu} .$$

Donc, pour v un vecteur propre de R2R_n^λ de valeur propre ε , soit $\text{projlift}_a^{\lambda, \mu}(v) = 0$ ou $\text{projlift}_a^{\lambda, \mu}(v)$ est un vecteur propre de R2R_{n+1} de valeur propre

$$\varepsilon + (n + 1) + (\lambda_r + 1) - r .$$

On ajoute donc à ε la taille de μ et l'indice diagonal de l'unique cellule de μ/λ .

Démonstration. Le lemme 9 nous donne le résultat voulu pour le cas $r = a$. En effet, si $r = a$, la sommation dans l'équation (2.6) sera une somme vide.

Soit donc maintenant $\mu = \lambda + \vec{e}_r$. Le cas $r = a$ nous assure que

$$\text{R2R}_{n+1} \circ \text{projlift}_r^{\lambda, \mu} - \text{projlift}_r^{\lambda, \mu} \circ \text{R2R}_n = ((n + 1) + (\lambda_r + 1) - r) \text{projlift}_r^{\lambda, \mu} . \quad (2.7)$$

En appliquant $\Theta_{r,a}$ à cette équation, et en se rappelant que $\Theta_{r,a}$ est un morphisme de \mathfrak{S}_{n+1} -modules qui commute donc avec R2R_{n+1} , on obtient :

$$\begin{aligned} \text{R2R}_{n+1} \circ \Theta_{r,a} \circ \text{projlift}_r^{\lambda, \mu} - \Theta_{r,a} \circ \text{projlift}_r^{\lambda, \mu} \circ \text{R2R}_n \\ = ((n + 1) + (\lambda_r + 1) - r) \Theta_{r,a} \circ \text{projlift}_r^{\lambda, \mu} . \end{aligned} \quad (2.8)$$

Comme $\text{projlift}_r^{\lambda, \mu} = \text{isoproj}_\mu \circ \text{sh}_r \mid_{S^\lambda}$ et que isoproj_μ commute avec les morphismes de \mathfrak{S}_{n+1} -modules, on peut transformer le côté gauche de l'équation (2.8) en :

$$\text{R2R}_{n+1} \circ \text{isoproj}_\mu \circ \Theta_{r,a} \circ \text{sh}_r \mid_{S^\lambda} - \text{isoproj}_\mu \circ \Theta_{r,a} \circ \text{sh}_r \circ \text{R2R}_n \mid_{S^\lambda} .$$

On utilise ensuite le fait que $\Theta_{r,a} \circ \text{sh}_r = \text{sh}_r \circ \Theta_{r,a} + \text{sh}_a$ (voir lemme 5) :

$$\begin{aligned} & \text{R2R}_{n+1} \circ \text{isoproj}_\mu \circ \text{sh}_r \circ \Theta_{r,a} |_{S^\lambda} + \text{R2R}_{n+1} \circ \text{isoproj}_\mu \circ \text{sh}_a |_{S^\lambda} \\ & - (\text{isoproj}_\mu \circ \text{sh}_r \circ \Theta_{r,a} \circ \text{R2R}_n |_{S^\lambda} + \text{isoproj}_\mu \circ \text{sh}_a \circ \text{R2R}_n |_{S^\lambda}). \end{aligned}$$

On utilise une autre fois que R2R_{n+1} et $\Theta_{r,a}$ commutent pour obtenir :

$$\begin{aligned} & \text{R2R}_{n+1} \circ \text{isoproj}_\mu \circ \text{sh}_r \circ \Theta_{r,a} |_{S^\lambda} + \text{R2R}_{n+1} \circ \text{isoproj}_\mu \circ \text{sh}_a |_{S^\lambda} \\ & - (\text{isoproj}_\mu \circ \text{sh}_r \circ \text{R2R}_n \circ \Theta_{r,a} |_{S^\lambda} + \text{isoproj}_\mu \circ \text{sh}_a \circ \text{R2R}_n |_{S^\lambda}). \end{aligned}$$

En regroupant les termes terminant avec $\Theta_{r,a}$, on arrive à :

$$\begin{aligned} & (\text{R2R}_{n+1} \circ \text{isoproj}_\mu \circ \text{sh}_r - \text{isoproj}_\mu \circ \text{sh}_r \circ \text{R2R}_n) \circ \Theta_{r,a} |_{S^\lambda} \\ & + \text{R2R}_{n+1} \circ \text{isoproj}_\mu \circ \text{sh}_a |_{S^\lambda} - \text{isoproj}_\mu \circ \text{sh}_a \circ \text{R2R}_n |_{S^\lambda}. \quad (2.9) \end{aligned}$$

Comme $\Theta_{r,a}(S^\lambda) \subseteq S^\lambda$, on peut utiliser le cas de base, c'est-à-dire l'équation (2.7), pour modifier le premier terme de l'équation (2.9). On obtient :

$$((n+1) + (\lambda_r + 1) - r) \text{projlift}_r^{\lambda,\mu} \circ \Theta_{r,a} + \text{R2R}_{n+1} \circ \text{projlift}_a^{\lambda,\mu} - \text{projlift}_a^{\lambda,\mu} \circ \text{R2R}_n.$$

Maintenant, étudions le côté droit de l'équation (2.8).

$$\begin{aligned} & ((n+1) + (\lambda_r + 1) - r) \Theta_{r,a} \circ \text{projlift}_r^{\lambda,\mu} \\ & = ((n+1) + (\lambda_r + 1) - r) \text{isoproj}_\mu \circ \Theta_{r,a} \circ \text{sh}_r |_{S^\lambda} \\ & = ((n+1) + (\lambda_r + 1) - r) \text{isoproj}_\mu \circ (\text{sh}_r \circ \Theta_{r,a} + \text{sh}_a) |_{S^\lambda} \\ & = ((n+1) + (\lambda_r + 1) - r) \text{isoproj}_\mu \circ \text{sh}_r \circ \Theta_{r,a} |_{S^\lambda} \\ & \quad + ((n+1) + (\lambda_r + 1) - r) \text{isoproj}_\mu \circ \text{sh}_a |_{S^\lambda} \\ & = ((n+1) + (\lambda_r + 1) - r) \text{projlift}_r^{\lambda,\mu} \circ \Theta_{r,a} \\ & \quad + ((n+1) + (\lambda_r + 1) - r) \text{projlift}_a^{\lambda,\mu} \end{aligned}$$

En enlevant les termes communs aux deux côtés, on obtient l'identité désirée. \square

2.4.6 Expression des vecteurs propres de $R2R^\lambda$ à l'aide des opérateurs projlift

Dans la section précédente, on a vu qu'on pouvait construire un vecteur propre de $R2R_{n+1}$ à partir d'un vecteur propre de $R2R_n$ à l'aide de `projlift`. Toutefois, on est en droit de se demander si tous les vecteurs propres de $R2R^\lambda$ sont obtenus en appliquant l'opérateur `projlift` à un vecteur propre de $R2R^{\lambda-\vec{e}_a}$ pour un certain a . Nous verrons que c'est bien le cas, sauf pour les vecteurs du noyau.

Proposition 4. *Pour tout $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k) \vdash n$,*

$$\text{Im}(R2R \mid_{S^\lambda}) \subseteq \text{Im}(T2R \mid_{S^\lambda}) \subseteq \sum_{1 \leq a \leq k} \text{Im}(\text{isoproj}_\lambda \circ \text{sh}_a \mid_{S^{\lambda-\vec{e}_a}}).$$

Démonstration. Montrons d'abord que $\text{Im}(R2R \mid_{S^\lambda}) \subseteq \text{Im}(T2R \mid_{S^\lambda})$. On sait que $R2R = T2R \circ R2T$ et donc $R2R(S^\lambda) = T2R(R2T(S^\lambda))$. Comme S^λ est un \mathfrak{S}_n -module et que $R2T$ s'écrit comme un élément de $\mathbb{C}\mathfrak{S}_n$ (voir définition 34), on sait que $R2T(S^\lambda) \subseteq S^\lambda$. On obtient ainsi que $\text{Im}(R2R \mid_{S^\lambda}) \subseteq \text{Im}(T2R \mid_{S^\lambda})$.

Maintenant, comme l'opérateur `T2R` retire la dernière lettre du mot pour l'insérer à n'importe quelle position, on peut, pour un mot $w = w_1 \dots w_n$, l'exprimer ainsi : $T2R(w) = \text{sh}_{w_n}(w_1 w_2 \dots w_{n-1})$.

Définissons proj_a l'opérateur qui envoie le mot $w = w_1 w_2 \dots w_n$ sur $w_1 w_2 \dots w_{n-1}$ si $w_n = a$ et sur 0 sinon. Alors,

$$T2R(w) = \sum_{1 \leq a \leq k} \text{sh}_a \circ \text{proj}_a(w).$$

Pour $w \in S^\lambda$, $T2R(w) \in S^\lambda$, et donc

$$T2R \mid_{S^\lambda} = \text{isoproj}_\lambda \circ T2R \mid_{S^\lambda} = \sum_{1 \leq a \leq k} \text{isoproj}_\lambda \circ \text{sh}_a \circ \text{proj}_a \mid_{S^\lambda}.$$

Il suffit de montrer que $\text{proj}_a \mid_{S^\lambda} \subseteq S^{\lambda-\vec{e}_a}$ pour conclure.

Tel que vu à la section 1.4.1, S^λ a pour base les w_t avec t un tableau standard de forme λ .

Soit donc w_t un élément de la base de S^λ . Sans perte de généralité, on peut considérer que l'entrée n se trouve dans la dernière case de la ligne a .

En effet, si ce n'est pas le cas, on sait qu'il existe une permutation τ telle que $\tau \cdot t$ possède l'entrée n à la fin de la ligne a .

De plus, la preuve du lemme 1 nous permet de dire que $w_{\tau \cdot t} = w_t \cdot \tau^{-1}$. Ainsi,

$$\begin{aligned} w_t \cdot \tau^{-1} &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \text{sgn}(\sigma) \text{word}(t) \cdot \sigma \cdot \tau^{-1} \\ &= \sum_{\gamma \in \mathfrak{S}_n} \text{sgn}(\gamma\tau) \text{word}(t) \cdot \gamma \quad (\text{en posant } \gamma = \sigma\tau^{-1}) \\ &= \sum_{\gamma \in \mathfrak{S}_n} \pm \text{sgn}(\gamma) \text{word}(t) \cdot \gamma \\ &= \pm w_t. \end{aligned}$$

Donc, on peut supposer que n se trouve à la fin de la ligne a dans t .

On note t' le tableau t duquel on retire la case contenant n . Ainsi,

$$\text{word}(t) = \text{word}(t')a.$$

Posons $m_1, m_2, \dots, m_\ell, n$ les entrées de la colonne de t où se trouve n .

On rappelle que C_t est le sous-groupe de \mathfrak{S}_n des permutations qui préservent les colonnes du tableau t . Ainsi, $\{e, (m_1, n), (m_2, n), \dots, (m_\ell, n)\}$ est une transversale de $C_t/C_{t'}$.

En effet, posons c_i le nombre de cases dans la colonne i de t , r le nombre de colonnes de t et s la colonne dans laquelle n se trouve. Le nombre de classes de

$C_t/C_{t'}$ est :

$$\frac{c_1!c_2!\cdots c_s!\cdots c_r!}{c_1!c_2!\cdots (c_s-1)!\cdots c_r!} = c_s.$$

Donc on a le bon nombre de représentants. Il reste à montrer qu'ils sont tous dans des classes distinctes. Si (m_i, n) et (m_j, n) sont dans la même classe, alors $(m_i, n)C_{t'} = (m_j, n)C_{t'}$ et donc $(m_i, n)(m_j, n) \in C_{t'}$. Pour cela, n doit être envoyé sur lui-même, ce qui force l'égalité entre i et j . On a donc bien une transversale.

On peut alors écrire

$$C_t = \left(\bigcup_{i=1}^{\ell} (m_i, n)C_{t'} \right) \cup C_{t'}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \kappa_t &= \sum_{\sigma \in C_t} \text{sgn}(\sigma)\sigma = \sum_{\sigma \in C_{t'}} \text{sgn}(\sigma)\sigma + \sum_{i=1}^{\ell} \sum_{\sigma \in C_{t'}} \text{sgn}((m_i, n)\sigma)(m_i, n)\sigma \\ &= \sum_{\sigma \in C_{t'}} \text{sgn}(\sigma)\sigma + \sum_{i=1}^{\ell} \sum_{\sigma \in C_{t'}} -\text{sgn}(\sigma)(m_i, n)\sigma \\ &= \left(e - \sum_{i=1}^{\ell} (m_i, n) \right) \kappa_{t'}. \end{aligned}$$

Grâce à cette factorisation de κ_t , on a que :

$$\begin{aligned} \text{proj}_a(w_t) &= \text{proj}_a(\text{word}(t) \cdot \kappa_t) = \text{proj}_a \left(\text{word}(t) \cdot \left(e - \sum_{i=1}^{\ell} (m_i, n) \right) \kappa_{t'} \right) \\ &= \text{proj}_a(\text{word}(t')a \cdot \kappa_{t'}) - \sum_{i=1}^{\ell} \text{proj}_a(\text{word}(t')a \cdot (m_i, n) \cdot \kappa_{t'}) \\ &= \text{word}(t') \cdot \kappa_{t'} \\ &= w_{t'}. \end{aligned}$$

L'avant-dernière égalité vient du fait que tous les mots de $\text{word}(t')a \cdot \kappa_{t'}$ finissent par a et donc, une fois le proj_a appliqué, ce a disparaît. De plus, tous les mots de

$\text{word}(t')a \cdot (m_i, n)$ ne terminent pas par a et donc les mots de $\text{word}(t')a \cdot (m_i, n) \cdot \kappa_{t'}$ non plus, puisque $\kappa_{t'}$ n'a aucun effet sur l'entrée n . Donc, une fois le proj_a appliqué, les éléments de cette somme disparaissent.

On a finalement que $\text{proj}_a(w_t) \in S^{\lambda - \vec{e}_a}$ pour tout tableau standard t de forme λ , tel que voulu. \square

2.4.7 Construction des espaces propres à partir des noyaux de $R2R$

Maintenant qu'on sait que tout vecteur propre qui n'est pas dans le noyau peut être obtenu en utilisant les opérateurs projlift , on aimerait expliciter une façon de construire les espaces propres. On va voir qu'avec une base des noyaux de $R2R^\mu$, pour certains modules de Specht S^μ , on peut construire les espaces propres de $R2R^\lambda$. Il nous faut d'abord examiner deux résultats sur isoproj_λ .

Proposition 5. *Si λ est un partage de n obtenu de $\mu \vdash n - k$ en ajoutant une case à chaque ligne d'indice r_1, r_2, \dots, r_k avec $r_1 \leq r_2 \leq \dots \leq r_k$, alors*

$$\begin{aligned} & \text{isoproj}_\lambda \circ \text{sh}_{r_k} \circ \dots \circ \text{sh}_{r_2} \circ \text{sh}_{r_1} \Big|_{S^\mu} \\ &= (\text{isoproj}_\lambda \circ \text{sh}_{r_k}) \circ \dots \circ (\text{isoproj}_{\mu + \vec{e}_{r_1} + \vec{e}_{r_2}} \circ \text{sh}_{r_2}) \circ (\text{isoproj}_{\mu + \vec{e}_{r_1}} \circ \text{sh}_{r_1}) \Big|_{S^\mu}. \end{aligned}$$

Démonstration. Pour alléger l'écriture, nous utiliserons les deux nouvelles notations suivantes :

$$\begin{aligned} \mu^{(j)} &= \mu + \vec{e}_{r_1} + \vec{e}_{r_2} + \dots + \vec{e}_{r_j} \\ \pi_j &= \text{isoproj}_{\mu^{(j)}}. \end{aligned}$$

Donc, l'identité à prouver revient à

$$\pi_k \circ \text{sh}_{r_k} \circ \dots \circ \text{sh}_{r_2} \circ \text{sh}_{r_1} \Big|_{S^\mu} = (\pi_k \circ \text{sh}_{r_k}) \circ \dots \circ (\pi_2 \circ \text{sh}_{r_2}) \circ (\pi_1 \circ \text{sh}_{r_1}) \Big|_{S^\mu}.$$

La première étape est de décomposer $\text{sh}_{r_1}(S^\mu)$ en ses composantes isotypiques à l'aide du lemme 7.

Grâce à ce lemme, on sait que $\text{sh}_{r_1}(S^\mu)$ est inclus dans un sous-module T de $M^{\mu+\vec{e}_{r_1}}$, où $T \cong S^{\mu+\vec{e}_1} \oplus S^{\mu+\vec{e}_2} \oplus \dots \oplus S^{\mu+\vec{e}_{r_1}}$.

On peut donc décomposer T en mettant en somme directe les projections de T sur ces différentes composantes : $T = T_1 \oplus T_2 \oplus \dots \oplus T_{r_1}$, où $T_i = \text{isoproj}_{\mu+\vec{e}_i}(T)$.

Comme $\text{sh}_{r_1}(S^\mu)$ est inclus dans T , on peut faire de même :

$$\text{sh}_{r_1}(S^\mu) = U_1 \oplus U_2 \oplus \dots \oplus U_{r_1},$$

où $U_i = \text{isoproj}_{\mu+\vec{e}_i}(\text{sh}_{r_1}(S^\mu))$, ou de manière équivalente, $U_i = \text{sh}_{r_1}(S^\mu) \cap T_i$.

Maintenant, remarquons que si l'on réussit à montrer que pour tout $j \geq 2$ et pour tout $i < r_1$

$$\pi_j \circ (\text{sh}_{r_j} \circ \dots \circ \text{sh}_{r_2}(U_i)) = 0, \quad (2.10)$$

alors on pourra conclure.

En effet, soit $v \in S^\mu$. On peut alors écrire $\text{sh}_{r_1}(v) = u_1 + u_2 + \dots + u_{r_1}$ selon la décomposition de cet espace en somme directe. Alors,

$$\begin{aligned} \pi_j \circ \text{sh}_{r_j} \circ \dots \circ \text{sh}_{r_2}(\text{sh}_{r_1}(v)) &= \pi_j \circ \text{sh}_{r_j} \circ \dots \circ \text{sh}_{r_2}(u_1 + u_2 + \dots + u_{r_1}) \\ &= \pi_j \circ \text{sh}_{r_j} \circ \dots \circ \text{sh}_{r_2}(u_{r_1}) \\ &= \pi_j \circ \text{sh}_{r_j} \circ \dots \circ \text{sh}_{r_2}(\pi_1(\text{sh}_{r_1}(v))), \end{aligned}$$

où l'avant-dernière égalité vient du fait que par l'identité (2.10), la projection π_j est nulle si appliquée sur des éléments de U_i , pour $i < r_1$.

Mais comme $\pi_1(\text{sh}_{r_1}(v)) \in S^{\mu+\vec{e}_{r_1}}$, on peut utiliser une autre fois le résultat (2.10).

Et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on arrive au résultat voulu.

Terminons donc en montrant le résultat (2.10).

Par le lemme 6, on sait que $\text{sh}_{r_j} \circ \cdots \circ \text{sh}_{r_2}(U_i) = \Theta_{a,r_j} \circ \cdots \circ \Theta_{a,r_2}(U_i \sqcup \underbrace{aa \cdots a}_{j-1})$.

Donc, on peut dire que

$$\text{sh}_{r_j} \circ \cdots \circ \text{sh}_{r_2}(U_i) \subseteq \Theta_{a,r_j} \circ \cdots \circ \Theta_{a,r_2}(N),$$

où N est le \mathfrak{S}_n -module généré par les $\{w \cdot \underbrace{aa \cdots a}_{j-1} : w \in S^{\mu + \vec{e}_i}\}$.

En fait, ceci est un abus de langage. Il serait plus rigoureux de dire que $\text{sh}_{r_j} \circ \cdots \circ \text{sh}_{r_2}(U_i)$ est inclus dans un \mathfrak{S}_n -module qui est isomorphe à $\Theta_{a,r_j} \circ \cdots \circ \Theta_{a,r_2}(N)$, mais le lecteur nous permettra cette petite incartade.

On montrera que N ne contient pas de sous-module isomorphe à $S^{\mu^{(j)}}$. Si N ne contient pas de sous-module isomorphe à $S^{\mu^{(j)}}$, alors $\Theta_{a,r_j} \circ \cdots \circ \Theta_{a,r_2}(N)$ non plus. En effet, les Θ_{a,r_i} sont des morphismes de modules, et sont donc soit nuls ou des isomorphismes sur les modules de Specht. Si $\Theta_{a,r_j} \circ \cdots \circ \Theta_{a,r_2}(N)$ contient un sous-module isomorphe à $S^{\mu^{(j)}}$, alors il provient d'un isomorphisme appliqué à une composante de N , ce qui impliquerait que N possède un sous-module isomorphe à $S^{\mu^{(j)}}$.

Et si $\Theta_{a,r_j} \circ \cdots \circ \Theta_{a,r_2}(N)$ ne contient pas de sous-module isomorphe à $S^{\mu^{(j)}}$, alors évidemment que $\text{sh}_{r_j} \circ \cdots \circ \text{sh}_{r_2}(U_i)$ non plus, d'où

$$\pi_j \circ (\text{sh}_{r_j} \circ \cdots \circ \text{sh}_{r_2}(U_i)) = 0.$$

De façon semblable à la preuve du lemme 7, on peut montrer que

$$N \cong \text{Ind}_{\mathfrak{S}_{n-j+1} \times \mathfrak{S}_{j-1}}^{\mathfrak{S}_n} (S^{\mu + \vec{e}_i} \otimes S^{(j-1)}).$$

Ainsi, si N contient un sous-module isomorphe à $S^{\mu^{(j)}}$, alors la règle de branchement nous permet de dire que $\mu^{(j)}$ est obtenu de $\mu + \vec{e}_i$ en ajoutant $(j-1)$ cases.

Autrement dit :

$$\mu + \vec{e}_{r_1} + \vec{e}_{r_2} + \cdots + \vec{e}_{r_j} = \mu + \vec{e}_i + \vec{e}_{k_1} + \vec{e}_{k_2} + \cdots + \vec{e}_{k_{j-1}}.$$

Ce qui revient à :

$$\vec{e}_{r_1} + \vec{e}_{r_2} + \cdots + \vec{e}_{r_j} = \vec{e}_i + \vec{e}_{k_1} + \vec{e}_{k_2} + \cdots + \vec{e}_{k_{j-1}}.$$

Comme $i < r_1$, on doit avoir que $i = r_\ell$ pour $2 \leq \ell \leq j$. Cela nous mène à : $r_\ell \geq r_1 > i = r_\ell$, qui est une contradiction. Donc N ne contient pas de sous-module isomorphe à $S^{\mu^{(j)}}$, concluant ainsi la preuve. \square

Proposition 6. *Si λ est un partage de n obtenu de $\nu \vdash n - k$ en ajoutant une case à chaque ligne d'indice r_1, r_2, \dots, r_k , alors*

$$(\text{sh}_{r_k} \circ \cdots \circ \text{sh}_{r_2} \circ \text{sh}_{r_1})(S^\nu)$$

est contenu dans un sous-module de M^λ qui est une image par homomorphisme du \mathfrak{S}_n -module $\text{Ind}_{\mathfrak{S}_{n-k} \times \mathfrak{S}_k}^{\mathfrak{S}_n}(S^\nu \otimes S^{(k)})$.

Ainsi, si deux cases sont ajoutées dans la même colonne r_i ,

$$S^\lambda \cap (\text{sh}_{r_k} \circ \cdots \circ \text{sh}_{r_2} \circ \text{sh}_{r_1})(S^\nu) = 0$$

et donc, $\text{isoproj}_\lambda \circ \text{sh}_{r_k} \circ \cdots \circ \text{sh}_{r_2} \circ \text{sh}_{r_1} \big|_{S^\nu} = 0$.

Démonstration. On utilise des éléments semblables à la preuve de la proposition 5.

Soit N le \mathfrak{S}_n -module engendré par les éléments :

$$\{w \cdot \underbrace{aa \cdots a}_k : w \in S^\nu\}.$$

Par le lemme 6, on a que

$$(\text{sh}_{r_k} \circ \cdots \circ \text{sh}_{r_2} \circ \text{sh}_{r_1})(S^\nu) \subseteq \Theta_{a,r_k} \circ \cdots \circ \Theta_{a,r_2} \circ \Theta_{a,r_1}(N).$$

De plus, de la même manière que dans la preuve de la proposition 5 et du lemme 7,

$$N \cong \text{Ind}_{\mathfrak{S}_{n-k} \times \mathfrak{S}_k}^{\mathfrak{S}_n} (S^\nu \otimes S^{(k)}).$$

On obtient ainsi la première partie de l'énoncé.

Maintenant, la règle de branchement nous indique que si N contient un sous-module isomorphe à S^λ , alors λ/ν est une bande horizontale. Donc, si on ajoute deux cases dans la même colonne, la forme gauche λ/ν n'est pas une bande horizontale et ainsi, N ne contient pas de sous-module isomorphe à S^λ . Par le même raisonnement que dans la preuve de la proposition 5, cela implique que $(\text{sh}_{r_k} \circ \dots \circ \text{sh}_{r_2} \circ \text{sh}_{r_1})(S^\nu)$ ne contient pas, lui non plus, de sous-module isomorphe à S^λ . Donc, on a bien :

$$S^\lambda \cap (\text{sh}_{r_k} \circ \text{sh}_{r_2} \circ \text{sh}_{r_1})(S^\nu) = 0 \quad \text{et} \quad \text{isoproj}_\lambda \circ \text{sh}_{r_k} \circ \text{sh}_{r_2} \circ \text{sh}_{r_1} \Big|_{S^\nu} = 0.$$

□

Soit λ et μ deux partages tels que λ est obtenu de μ en ajoutant une case dans les lignes $r_1 \leq r_2 \leq \dots \leq r_k$. On définit $\text{sh}^{\lambda/\mu} := \text{sh}_{r_k} \circ \dots \circ \text{sh}_{r_2} \circ \text{sh}_{r_1}$.

Soit v un vecteur propre de R2R^λ . Comme v est un vecteur propre, on a que $v \in \text{Im}(\text{R2R}^\lambda)$. On peut donc utiliser la proposition 4 pour déduire que v peut s'écrire comme la somme suivante :

$$v = \text{isoproj}_\lambda \circ \text{sh}_{a_1}(v^{(1)}) \circ \text{isoproj}_\lambda \circ \text{sh}_{a_2}(v^{(2)}) \circ \text{isoproj}_\lambda \circ \dots \circ \text{sh}_{a_\ell}(v^{(\ell)}), \quad (2.11)$$

où $v^{(i)}$ est un vecteur de $S^{\lambda - \vec{e}_{a_i}}$. En fait, sans perte de généralité, on peut supposer que $v^{(i)}$ est un vecteur propre de R2R_{n-1} restreint à $S^{\lambda - \vec{e}_{a_i}}$. En effet, si ce n'était pas le cas, on pourrait exprimer chacun des $v^{(i)}$ avec la base de vecteurs propres de $S^{\lambda - \vec{e}_{a_i}}$.

Maintenant, si $v^{(i)}$ n'est pas un vecteur du noyau de $R2R_{n-1}$, le même raisonnement s'applique et on peut le décomposer de la même forme qu'en (2.11). Et ainsi de suite jusqu'à ce que tous les vecteurs auxquels on applique les transformations $\text{isoproj}_\lambda \circ \text{sh}_{a_i}$ soient issus du noyau de $R2R$.

Au final, on aura que v peut s'exprimer comme une somme d'éléments de la forme :

$$(\text{isoproj}_\lambda \circ \text{sh}_{r_k}) \circ \cdots \circ (\text{isoproj}_{\nu + \vec{e}_{r_1} + \vec{e}_{r_2}} \circ \text{sh}_{r_2}) \circ (\text{isoproj}_{\nu + \vec{e}_{r_1}} \circ \text{sh}_{r_1})(v'),$$

où v' est un élément de $\ker(R2R'_{n-k})$ et où $\lambda = \nu + \vec{e}_{r_1} + \vec{e}_{r_2} + \cdots + \vec{e}_{r_k}$.

Mais, on a vu à la proposition 5 qu'en ré-étiquetant les r_i pour qu'ils satisfassent $r_1 \leq r_2 \leq \cdots \leq r_k$, ces éléments peuvent s'écrire comme

$$\text{isoproj}_\lambda \circ \text{sh}_{r_k} \circ \cdots \circ \text{sh}_{r_2} \circ \text{sh}_{r_1}(v'),$$

ce qui revient à $\text{isoproj}_\lambda \circ \text{sh}^{\lambda/\nu}(v')$. De plus, par la proposition 6, ces éléments sont nuls si λ/ν n'est pas une bande horizontale.

Bref, on peut affirmer que

$$S^\lambda = \sum_{\substack{\nu : \lambda/\nu \text{ est une} \\ \text{bande horizontale}}} (\text{isoproj}_\lambda \circ \text{sh}^{\lambda/\nu})(\ker(R2R')).$$

Nous sommes maintenant complètement outillés pour décrire les espaces propres de $R2R_n^\lambda$.

Théorème 10. *Soit $\lambda \vdash n$. Alors, en tant qu'espaces vectoriels,*

$$S^\lambda = \bigoplus_{\substack{\nu : \lambda/\nu \text{ est une} \\ \text{bande horizontale}}} (\text{isoproj}_\lambda \circ \text{sh}^{\lambda/\nu})(\ker(R2R')),$$

Et l'action de $R2R_n$ sur $(\text{isoproj}_\lambda \circ \text{sh}^{\lambda/\nu})(\ker(R2R'))$ est une multiplication par le scalaire

$$\text{eig}(\lambda/\nu) = \binom{|\lambda| + 1}{2} - \binom{|\nu| + 1}{2} + \text{diag}(\lambda/\nu).$$

Ainsi, l'espace propre associé à la valeur propre ε de $R2R^\lambda$ est

$$\bigoplus_{\substack{\nu : \lambda/\nu \text{ est une} \\ \text{bande horizontale avec} \\ \text{eig}(\lambda/\nu)=\varepsilon}} (\text{isoproj}_\lambda \circ \text{sh}^{\lambda/\nu})(\ker(R2R^\nu))$$

et cet espace est de dimension

$$\sum_{\substack{\nu : \lambda/\nu \text{ est une} \\ \text{bande horizontale avec} \\ \text{eig}(\lambda/\nu)=\varepsilon}} d^\nu,$$

où d^ν est le nombre de tableaux de désarrangement de forme ν .

Démonstration. On a déjà établi que S^λ était la somme des espaces vectoriels $\text{isoproj}_\lambda \circ \text{sh}^{\lambda/\nu}(\ker(R2R^\nu))$ pour λ/ν une bande horizontale. Il reste donc à montrer que cette somme est directe.

Nous avons vu que $\dim(S^\lambda) = f^\lambda$ où f^λ est le nombre de tableaux standards de forme λ . Donc,

$$f^\lambda \leq \sum_{\substack{\nu : \lambda/\nu \text{ est une} \\ \text{bande horizontale}}} \dim(\text{isoproj}_\lambda \circ \text{sh}^{\lambda/\nu}(\ker(R2R^\nu))) \leq \sum_{\substack{\nu : \lambda/\nu \text{ est une} \\ \text{bande horizontale}}} \dim(\ker(R2R^\nu)).$$

Or, on sait que $\dim(\ker R2R^\nu) = d^\nu$, c'est-à-dire le nombre de tableaux de désarrangement de forme ν (voir section 2.3).

L'entier qui borne la suite d'inégalités est la somme des tableaux Q qui sont des tableaux de désarrangement tels que $\lambda/\text{forme}(Q)$ soit une bande horizontale.

Or, il existe une bijection entre de tels tableaux et les tableaux standards de forme λ , voir la proposition VI.9.4 de (Reiner *et al.*, 2014).

Ainsi, les inégalités sont en fait des égalités. Donc, la somme est directe.

Maintenant, étudions l'action de $R2R$ sur ces sous-espaces. Soit $v \in \ker(R2R^\nu)$ avec $\lambda = \nu + \vec{e}_{r_1} + \vec{e}_{r_2} + \dots + \vec{e}_{r_k}$. On sait, par la proposition 5, que

$$\text{isoproj}_\lambda \circ \text{sh}^{\lambda/\nu}(v) = \text{projlift}_{r_k}^\lambda \circ \dots \circ \text{projlift}_{r_2}^{\nu + \vec{e}_{r_1} + \vec{e}_{r_2}} \circ \text{projlift}_{r_1}^{\nu + \vec{e}_{r_1}}(v).$$

On se servira du théorème 9 à répétition pour calculer la valeur propre de cet élément.

Débutons. Selon le théorème 9, $\text{projlift}_{r_1}^{\nu + \vec{e}_{r_1}}(v)$ est soit nul, soit un vecteur propre de valeur propre $0 + (n - k + 1) + (\nu_{r_1} + 1) - r_1$.

Or, $\text{projlift}_{r_1}^{\nu + \vec{e}_{r_1}}(v)$ ne peut pas être le vecteur nul, parce que l'on vient de montrer que

$$\sum_{\substack{\nu : \lambda/\nu \text{ est une} \\ \text{bande horizontale}}} \dim(\text{isoproj}_\lambda \circ \text{sh}^{\lambda/\nu}(\ker(R2R^\nu))) = \sum_{\substack{\nu : \lambda/\nu \text{ est une} \\ \text{bande horizontale}}} \dim(\ker(R2R^\nu)).$$

Donc, $\text{projlift}_{r_1}^{\nu + \vec{e}_{r_1}}(v)$ est un vecteur propre de valeur propre

$$0 + (n - k + 1) + (\nu_{r_1} + 1) - r_1,$$

c'est-à-dire qu'on ajoute à la valeur propre 0 les quantités suivantes : la taille du partage obtenu après l'ajout d'une case et l'indice diagonal de la case qui vient d'être ajoutée.

Maintenant, il nous faut appliquer $\text{projlift}_{r_2}^{\nu + \vec{e}_{r_1} + \vec{e}_{r_2}}$ à ce vecteur propre. On obtient que

$$\text{projlift}_{r_2}^{\nu + \vec{e}_{r_1} + \vec{e}_{r_2}} \circ \text{projlift}_{r_1}^{\nu + \vec{e}_{r_1}}(v)$$

est un vecteur propre de valeur propre

$$\underbrace{0 + (n - k + 1) + (\nu_{r_1} + 1) - r_1}_{\text{valeur propre de } \text{projlift}_{r_1}^{\nu + \vec{e}_{r_1}}(v)} + \underbrace{(n - k + 2) + ((\nu + \vec{e}_{r_1})_{r_2} + 1) - r_2}_{\text{taille de } \nu + \vec{e}_1 + \vec{e}_2 \text{ et diag de la case ajoutée}}.$$

En suivant la même logique, on a que

$$\text{projlift}_{r_k}^\lambda \circ \cdots \circ \text{projlift}_{r_2}^{\nu + \vec{e}_{r_1} + \vec{e}_{r_2}} \circ \text{projlift}_{r_1}^{\nu + \vec{e}_{r_1}}(v)$$

est un vecteur propre de valeur propre

$$(n-k+1) + (\nu_{r_1} + 1) - r_1 + (n-k+2) + ((\nu + \vec{e}_{r_1})_{r_2} + 1) - r_2 + \cdots + (n+1) + (\lambda_{r_k} + 1) - r_k.$$

Après simplification, on obtient :

$$\sum_{i=1}^k (n - k + i) + \text{diag}(\lambda/\nu) = \binom{|\lambda| + 1}{2} - \binom{|\nu| + 1}{2} + \text{diag}(\lambda/\nu),$$

tel que voulu. \square

2.4.8 Lien entre les opérateurs \mathcal{L} et projlift

Il nous reste maintenant à relier ce résultat avec les opérateurs \mathcal{L} dont on parlait en début de section 2.3.

En fait, il est possible d'exprimer les opérateurs $\text{projlift}_i^{\lambda, \lambda + \vec{e}_i}$ à l'aide des sh_i et des $\Theta_{a,b}$.

Notons sh_i^λ l'opérateur sh_i restreint à S^λ . Par le lemme 7, on sait que l'image de sh_i^λ est contenue dans un sous-module de $M^{\lambda + \vec{e}_i}$ isomorphe à $S^{\lambda + \vec{e}_1} \oplus S^{\lambda + \vec{e}_2} \oplus \cdots \oplus S^{\lambda + \vec{e}_i}$.

Considérons l'opérateur $\text{isoproj}_{\lambda + \vec{e}_1} + \text{isoproj}_{\lambda + \vec{e}_2} + \cdots + \text{isoproj}_{\lambda + \vec{e}_i}$. Cet opérateur agit trivialement sur le sous-module S^λ . Ainsi :

$$\text{sh}_i^\lambda = (\text{isoproj}_{\lambda + \vec{e}_1} + \text{isoproj}_{\lambda + \vec{e}_2} + \cdots + \text{isoproj}_{\lambda + \vec{e}_i}) \circ \text{sh}_i^\lambda \quad (2.12)$$

$$= \text{projlift}_i^{\lambda, \lambda + \vec{e}_1} + \text{projlift}_i^{\lambda, \lambda + \vec{e}_2} + \cdots + \text{projlift}_i^{\lambda, \lambda + \vec{e}_i}. \quad (2.13)$$

Pour arriver à l'expression désirée pour $\text{projlift}_i^{\lambda, \lambda + \vec{e}_i}$, il nous faut d'abord un lemme. Le lecteur est invité à consulter la preuve à la section 5.6 de (Dieker et Saliola, 2018).

Lemme 10. Soit $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k) \vdash n$, fixons a et r tels que $1 \leq r < a \leq k+1$ et posons $\gamma_{r,a} = (\lambda_r - r) - (\lambda_a - a)$. Alors,

$$\begin{aligned} \text{projlift}_a^{\lambda, \lambda + \vec{e}_r} &= \sum_{r \leq b < a} \frac{\Theta_{b,a}}{\gamma_{r,a}} \circ \text{projlift}_b^{\lambda, \lambda + \vec{e}_r} \\ &= \sum_{r=b_0 < b_1 < \dots < b_t < b_{t+1}=a} \frac{\Theta_{b_t, b_{t+1}}}{\gamma_{b_0, b_{t+1}}} \circ \frac{\Theta_{b_{t-1}, b_t}}{\gamma_{b_0, b_t}} \circ \dots \circ \frac{\Theta_{b_0, b_1}}{\gamma_{b_0, b_1}} \circ \text{projlift}_r^{\lambda, \lambda + \vec{e}_r}. \end{aligned}$$

Ce lemme nous permet d'arriver au résultat suivant.

Proposition 7. Soit $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k) \vdash n$, et soit i tel que $1 \leq i \leq k+1$. Alors,

$$\text{projlift}_i^{\lambda, \lambda + \vec{e}_i} = \sum_{1 \leq b_1 < \dots < b_t < b_{t+1}=i} \frac{\Theta_{b_t, b_{t+1}}}{\gamma_{i, b_t}} \circ \frac{\Theta_{b_{t-1}, b_t}}{\gamma_{i, b_{t-1}}} \circ \dots \circ \frac{\Theta_{b_1, b_2}}{\gamma_{i, b_1}} \circ \text{sh}_{b_1}^\lambda.$$

Encore une fois, la preuve se trouve à la section 5.6 de (Dieker et Saliola, 2018).

Ainsi, les opérateurs de levée \mathcal{L}_i définis plus tôt à la section 2.3 sont bel et bien les projlift utilisés dans la suite du chapitre pour décrire le comportement de R2R.

2.5 Les valeurs propres

L'étude des vecteurs propres de l'opérateur R2R agissant sur S^λ nous a mené à une décomposition explicite des modules de Specht en sous-espaces propres de R2R. Le processus nous menant à ces résultats nous informe également sur les valeurs propres de l'opérateur R2R. Ses valeurs propres sont entières et on peut même les calculer explicitement. Une formulation nous permet de les calculer à partir de bandes horizontales et une autre, à partir des mots.

2.5.1 Les valeurs propres indexées par les bandes horizontales

Les valeurs propres de $R2R$ agissant sur S^λ peuvent être indexées par les bandes horizontales λ/μ .

Théorème 11 (Dieker, Saliola, 2018). *Toute valeur propre de $R2R_n$ agissant sur les mots de valuation $\nu \vdash n$ est de la forme $\frac{1}{n^2} \text{eig}(\lambda/\mu)$ où :*

- λ/μ est une bande horizontale avec $\lambda \supseteq \nu$ et où μ n'est ni le partage (n) ni le partage $(1, 1, \dots, 1)$ avec un nombre impair de 1 ;
- et où

$$\begin{aligned} \text{eig}(\lambda/\mu) &= \left[\binom{|\lambda|+1}{2} + \text{diag}(\lambda) \right] - \left[\binom{|\mu|+1}{2} + \text{diag}(\mu) \right] \\ &= \binom{|\lambda|+1}{2} - \binom{|\mu|+1}{2} + \text{diag}(\lambda/\mu). \end{aligned}$$

La multiplicité de la valeur propre $\frac{1}{n^2} \varepsilon$ est :

$$\sum_{\substack{\lambda/\mu \text{ une b.h.} \\ \lambda \supseteq \nu, \text{eig}(\lambda/\mu)=\varepsilon}} K_{\lambda,\nu} d^\mu,$$

où $K_{\lambda,\nu}$ est le nombre de tableaux semi-standards de forme λ et de remplissage μ et où d^μ est le nombre de tableaux de désarrangement de forme μ .

Démonstration. En décomposant M^ν en \mathfrak{S}_n -modules irréductibles, on obtient

$$\bigoplus_{\lambda \supseteq \nu} K_{\lambda,\nu} S^\lambda.$$

La proposition 6 nous permet de décomposer S^λ en espaces propres. Donc,

$$\bigoplus_{\lambda \supseteq \nu} K_{\lambda,\nu} \left(\bigoplus_{\substack{\mu : \lambda/\mu \text{ est une} \\ \text{bande horizontale}}} (\text{isoproj}_\lambda \circ \text{sh}^{\lambda/\mu})(\ker R2R^\mu) \right).$$

De plus, la proposition 6 indique que l'action de $R2R_n$ sur $(\text{isoproj}_\lambda \circ \text{sh}^{\lambda/\mu})(\ker R2R^\mu)$ est une multiplication scalaire de $\binom{|\lambda|+1}{2} - \binom{|\mu|+1}{2} + \text{diag}(\lambda/\mu)$.

Par la preuve de la proposition 6, on sait que

$$\dim(\text{isoproj}_\lambda \circ \text{sh}^{\lambda/\mu})(\ker R2R^\mu) = \dim(\ker R2R^\mu)$$

et on sait que la dimension de ce noyau est d^μ . Donc, pour $\mu = (n)$ ou $\mu = (1, 1, \dots, 1)$ avec un nombre impair de 1, une telle dimension est nulle, d'où l'exclusion de ces cas dans l'énoncé.

Ainsi, la multiplicité d'une valeur propre $\frac{1}{n^2} \varepsilon$ est $\sum_{\substack{\lambda/\mu \text{ une b.h.} \\ \lambda \succeq \nu, \text{ eig}(\lambda/\mu) = \varepsilon}} K_{\lambda, \nu} d^\mu$.

□

2.5.2 Les valeurs propres indexées par les mots

Comme $R2R$ agit sur un espace vectoriel de dimension le nombre de mots, on a envie de pouvoir associer à chaque mot une valeur propre.

Avant d'énoncer le prochain théorème, il nous faut rappeler quelques notions sur les mots. Soit $w = w_1 \cdots w_n$ un mot. Un *suffixe* de w est un mot de la forme $w_i \cdots w_n$ où $i \in [n]$. On dit qu'une position $i \in [n]$ de w est une *montée* si $i = n$ ou si $i < n$ avec $w_i \leq w_{i+1}$.

Théorème 12 (Dieker, Saliola, 2018). *Le mélange $R2R_n$ agissant sur les mots de longueur n et de valuation $\nu \vdash n$ a une valeur propre $\frac{1}{n^2} \text{eig}(w)$ pour tout mot w de M^ν avec*

$$\text{eig}(w) = \left[\binom{\ell(w)+1}{2} + \text{diag}(Q(w)) \right] - \left[\binom{\ell(w')+1}{2} + \text{diag}(Q(w')) \right],$$

où w' est le plus long suffixe de w ayant une première montée paire, et où $Q(w)$

est le tableau d'enregistrement de w lorsqu'on lui applique la correspondance RSK. La multiplicité de $\frac{1}{n^2}\varepsilon$ est le nombre de mots dont $\text{eig}(w) = \varepsilon$.

Démonstration. L'idée de la preuve est d'utiliser la correspondance RSK, voir (Sagan, 2001) pour une description détaillée de cette correspondance. Cette dernière nous permet de relier les tableaux aux mots et vice versa. Les détails de la preuve se trouvent à la section 3.3 de (Dieker et Saliola, 2018). \square

Dans sa thèse, Reyes a énoncé plusieurs conjectures concernant des formules pour décrire les valeurs propres de $R2R$, voir la section 5.2 de (Reyes, 2002). Ce théorème permet de les prouver.

Pour un tableau des valeurs propres de $R2R^\lambda$, voir l'appendice A de (Dieker et Saliola, 2018).

2.6 Utiliser la promotion pour construire les espaces propres

Maintenant que nous connaissons bien le comportement du mélange $R2R$, il nous paraît utile de refaire un exemple de construction des espaces propres. Cette fois, nous intégrerons l'opération promotion, définie à la section 1.1.2. Commençons par décrire la méthode générale.

Soit S^λ pour $\lambda \vdash n$. Pour chaque élément w_t de la base de S^λ , on fait le processus suivant.

Pour tout t qui est un tableau de désarrangement, on sait qu'il existe un vecteur propre de valeur propre 0. En fait, on sait qu'on peut trouver d^λ vecteurs du noyau qui sont linéairement indépendants, car la dimension du noyau de $R2R^\lambda$ est le nombre de tableaux de désarrangement de forme λ . En général, on les identifie

en dernier, en travaillant avec les espaces orthogonaux aux espaces propres de valeur propre non nulle.

Si t n'est pas un tableau de désarrangement, on lui applique la promotion jusqu'à ce que l'on obtienne un tableau de désarrangement, qu'on nomme t' . Soit μ la forme de t' . Les cases retirées de λ pour obtenir μ sont exactement les cases de λ/μ . De plus, par la bijection de (Reiner *et al.*, 2014) énoncée dans la preuve du théorème 10, on sait que λ/μ sera toujours une bande horizontale.

Comme on obtient un tableau de désarrangement de forme μ , on peut trouver un vecteur non nul v dans le noyau de $R2R^\mu$. Pour obtenir un vecteur propre sur le module de Specht S^λ , il faut appliquer à v une suite de transformations qui dépend des cases enlevées par l'application de la promotion transformant λ en μ .

Soit $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_k$ les lignes des cases retirées de λ pour obtenir μ en ordre de retrait, c'est-à-dire que ℓ_1 est la case qu'on retire de λ lors de la première promotion, ainsi de suite. Alors, $\mathcal{L}_{\ell_1} \circ \dots \circ \mathcal{L}_{\ell_k}(v)$ est un vecteur propre de S^λ . De plus, sa valeur propre est égale à : $\binom{|\lambda|+1}{2} - \binom{|\mu|+1}{2} + \text{diag}(\lambda/\mu)$.

Soit t_1 et t_2 deux tableaux de forme λ et notons t'_1 et t'_2 les tableaux de désarrangement obtenus à partir de t_1 et t_2 respectivement en appliquant de façon répétée la promotion. Il est possible que t'_1 et t'_2 soient de même forme μ . Lorsque vient l'étape de choisir un vecteur du noyau de $R2R^\mu$, on peut en choisir un arbitrairement pour t'_1 , disons v_1 . Mais, au moment de faire le choix pour t'_2 , il faut s'assurer de prendre un vecteur du noyau de $R2R^\mu$ qui est linéairement indépendant par rapport à v_1 . Autrement dit, si on a une base \mathcal{B} du noyau de $R2R^\mu$, à chaque fois que notre tableau de désarrangement est de forme μ , il suffit de choisir un élément différent de \mathcal{B} .

En faisant cela, on construit une base de S^λ constituée de vecteurs propres pour $R2R_n$.

Attardons-nous sur un exemple.

Exemple 19. Soit $\lambda = (3, 1)$. On sait que S^λ a trois éléments dans sa base, car il y a trois tableaux standards de forme $(3, 1)$: $t_1 = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 4 \\ \hline 2 & & \\ \hline \end{array}$, $t_2 = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 4 \\ \hline 3 & & \\ \hline \end{array}$ et $t_3 = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & & \\ \hline \end{array}$.

Comme t_1 est un tableau de désarrangement, on peut trouver v_1 un élément du noyau de $R2R^{(3,1)}$. Comme c'est le seul tableau de désarrangement, on sait que l'espace propre associé à la valeur propre 0 est de dimension 1. Nous trouverons explicitement ce vecteur à la fin de l'exemple.

De son côté, t_2 n'est pas un tableau de désarrangement, nous allons donc lui appliquer la promotion :

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 4 \\ \hline 3 & & \\ \hline \end{array} \longrightarrow \begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 4 & \\ \hline 3 & & \\ \hline \end{array} \longrightarrow \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 3 & \times \\ \hline 2 & & \\ \hline \end{array}.$$

Après une application de la promotion, on obtient un tableau de désarrangement de forme $(2, 1)$. Il nous faut donc trouver v_2 un vecteur du noyau de $R2R^{(2,1)}$. Posons $v_2 = aab - 2aba + baa = w_{\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array}} - 2w_{\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array}}$. On laisse au lecteur le soin de vérifier que v_2 est bien dans $\ker(R2R^{(2,1)})$.

Comme la case retirée par la promotion se trouvait à la première ligne, il suffit d'appliquer à v_2 la transformation \mathcal{L}_1 .

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1(v_2) &= \text{sh}_a(aab - 2aba + baa) \\ &= 3aaab - 3aaba - 3abaa + 3baaa \\ &= 3w_{\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & & \\ \hline \end{array}} - 3w_{\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 4 \\ \hline 2 & & \\ \hline \end{array}} - 3w_{\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 4 \\ \hline 3 & & \\ \hline \end{array}} \end{aligned}$$

On obtient que $3aaab - 3aaba - 3abaa + 3baaa$ est un vecteur propre de $R2R^\lambda$. Par le théorème 9, sa valeur propre est

$$\underbrace{0}_{\text{valeur propre de } v_2} + \underbrace{4}_{\text{nombre de cases une fois } \mathcal{L}_1 \text{ appliqué}} + \underbrace{3-1}_{\text{indice diagonal de la case ajoutée}} = 6.$$

Pour obtenir le dernier vecteur propre, on applique la promotion à t_3 :

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & & \\ \hline \end{array} \longrightarrow \begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 3 & \\ \hline 4 & & \\ \hline \end{array} \longrightarrow \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & \times \\ \hline 3 & & \\ \hline \end{array}.$$

Le tableau obtenu n'est pas un tableau de désarrangement, on applique donc une nouvelle fois la promotion :

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & \times \\ \hline 3 & & \\ \hline \end{array} \longrightarrow \begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & \times & \times \\ \hline 3 & & \\ \hline \end{array} \longrightarrow \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & \times & \times \\ \hline 2 & & \\ \hline \end{array}.$$

Le tableau résultant, cette fois-ci, est un tableau de désarrangement. Donc, on doit trouver v_3 un vecteur dans le noyau de $R2R^{(1,1)}$. Choisissons $v_3 = ab - ba$. Lors des deux applications de la promotion, nous avons enlevé une case dans la ligne 1. Il faut donc appliquer $\mathcal{L}_1 \circ \mathcal{L}_1$ à v_3 pour obtenir un vecteur propre de S^λ .

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1 \circ \mathcal{L}_1(v_3) &= \mathcal{L}_1 \circ \mathcal{L}_1(ab - ba) \\ &= \text{sh}_a(\text{sh}_a(ab - ba)) \\ &= \text{sh}_a(2aab - 2baa) \\ &= 6aaaab + 2aaba - 2abaa - 6baaaa \\ &= 6w_{\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & & \\ \hline \end{array}} + 2w_{\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 4 \\ \hline 3 & & \\ \hline \end{array}} - 2w_{\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 4 \\ \hline 2 & & \\ \hline \end{array}} \end{aligned}$$

On obtient que $6aaaab + 2aaba - 2abaa - 6baaaa$ est un vecteur propre de $R2R^\lambda$. Il a une valeur propre de

$$\underbrace{(0 + 3 + 2 - 1)}_{\text{valeur propre de } \mathcal{L}_1(v_3)} + 4 + 3 - 1 = 10.$$

La partie du calcul entre parenthèses correspond au calcul de la valeur propre du vecteur $\mathcal{L}_1(v_3)$. Comme on applique une deuxième fois l'opérateur \mathcal{L}_1 , on doit utiliser ce calcul pour trouver la valeur propre de $\mathcal{L}_1 \circ \mathcal{L}_1(v_3)$. On pourrait aussi utiliser la formule du théorème 10.

Comme nous avons deux vecteurs propres et comme les espaces propres sont orthogonaux, on peut trouver le vecteur du noyau en identifiant un vecteur dans

l'espace orthogonal aux deux autres. Un calcul nous permet de trouver que

$$baaa - 3abaa + 3aaba - aaab = -3w_{\begin{smallmatrix} 134 \\ 2 \end{smallmatrix}} + 3w_{\begin{smallmatrix} 124 \\ 3 \end{smallmatrix}} - w_{\begin{smallmatrix} 123 \\ 4 \end{smallmatrix}}$$

est un élément du noyau.

Pour identifier les vecteurs du noyau de $R2R^\lambda$, il nous a fallu d'abord trouver les espaces propres de valeur propre non nulle pour ensuite trouver un vecteur orthogonal à ces espaces. Le problème d'identifier, de façon «naturelle», un vecteur propre de valeur propre 0 à partir d'un tableau de désarrangement reste un problème ouvert.

Problème ouvert. *Identifier, à partir d'un tableau de désarrangement t de forme λ , un vecteur v_t se trouvant dans le noyau de $R2R^\lambda$, et ce, de façon «naturelle».*

CHAPITRE III

L'ÉTUDE D'UNE AUTRE FAMILLE D'OPÉRATEURS

Tout l'arsenal développé pour étudier l'opérateur doublement aléatoire peut-il inspirer l'étude de nouveaux opérateurs? Nous tenterons d'adapter la démarche utilisée au chapitre 2 à l'étude d'opérateurs qui généralisent, en quelque sorte, le mélange doublement aléatoire.

3.1 Les opérateurs $\nu_{(n-k,1^k)}$

Vu comme agissant sur un paquet de cartes, le mélange R2R consiste à retirer une carte à une position aléatoire et à la remettre à une position aléatoire. La nouvelle famille d'opérateurs que nous allons étudier généralise cette façon de faire. Au lieu de retirer aléatoirement une seule carte, nous allons en retirer aléatoirement k et les remettre aléatoirement dans le paquet. De ce point de vue il est facile de voir que le cas $k = 1$ revient au mélange doublement aléatoire. Mais pour $k > 1$, pouvons-nous trouver des propriétés intéressantes? Cette famille d'opérateurs a été introduite par Reiner, Saliola et Welker, voir (Reiner *et al.*, 2014), mais la majorité des résultats présentés dans la section sont récents et non publiés. Ils sont issus de recherches faites par Franco Saliola, Nadia Lafrenière et moi-même.

Définissons d'abord plus rigoureusement cette famille de mélanges et intéressons-

nous à certaines de ses propriétés.

Définition 39. *Pour un n fixé et $0 \leq k \leq n$,*

$$\nu_{(n-k,1^k)} := \sum_{w \in \mathfrak{S}_n} \text{noninv}_{n-k}(w) \cdot w,$$

où $\text{noninv}_{n-k}(w)$ est le nombre de sous-suites croissantes à $n - k$ éléments dans la permutation w vue comme le mot $w_1 w_2 \dots w_n$ pour $w_i = w(i)$.

Exemple 20. *Pour $n = 3$, on a les opérateurs suivants :*

$$k = 0 : \nu_{(3)} = e$$

$$k = 1 : \nu_{(2,1)} = 3 e + 2(2, 3) + 2(1, 2) + (1, 2, 3) + (1, 3, 2) = \text{R2R}_3$$

$$k = 2 : \nu_{(1,1,1)} = 3 e + 3(2, 3) + 3(1, 2) + 3(1, 2, 3) + 3(1, 3, 2) + 3(1, 3)$$

$$k = 3 : \nu_{(0,1,1,1)} = e + (2, 3) + (1, 2) + (1, 2, 3) + (1, 3, 2) + (1, 3)$$

Notons qu'il est important que la première coordonnée de l'indice de ν indique la valeur de $n - k$. Sinon, le cas $k = n - 1$ et le cas $k = n$ auraient la même notation sans représenter les mêmes opérateurs.

Nous avons vu que l'opérateur doublement aléatoire est la symétrisation de l'opérateur R2T . Les opérateurs $\nu_{(n-k,1^k)}$ présentent une structure similaire. On peut les exprimer comme $\pi^\top \pi$, où π est la matrice de transition pour une marche aléatoire sur les chambres d'un arrangement d'hyperplans. Cette marche aléatoire a été bien étudiée, notamment par Bidigare, Hanlon et Rockmore, voir (Bidigare, 1997; Bidigare *et al.*, 1999). Pourtant, certains mystères persistent pour sa version symétrisée.

Tout comme pour R2R , il est possible d'exprimer les opérateurs $\nu_{(n-k,1^k)}$ à l'aide des opérateurs sh et ∂ . Une petite erreur s'est glissée dans (Dieker et Saliola, 2018) à la remarque 37, au moment de donner cette définition équivalente. Ils

n'ont considérer que le cas où les éléments sur lesquels le mélange est appliqué sont tous distincts. Mais si l'on considère le cas plus général où certains éléments sont identiques, il faut ajuster leur définition en divisant par un certain coefficient.

Lemme 11. *Pour k avec $0 \leq k \leq n$, on a :*

$$\nu_{(n-k, 1^k)} = \sum_{i_1 \leq \dots \leq i_k} \frac{\text{sh}_{i_1} \circ \dots \circ \text{sh}_{i_k} \circ \partial_{i_k} \circ \dots \circ \partial_{i_1}}{\prod_{1 \leq a \leq n} \#\{i_j = a \mid j \in [k]\}!}.$$

Notons que si les éléments à mélanger sont tous distincts, alors le coefficient au dénominateur peut être ignoré.

Démonstration. L'idée derrière l'équivalence entre la définition 39 et cette nouvelle expression vient du fait que si l'on retire k éléments aléatoirement pour les replacer aléatoirement, les $n - k$ éléments qui restent seront dans le même ordre relatif qu'avant le mélange.

Pour une permutation donnée $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, chaque sous-suite croissante de $n - k$ éléments de σ correspond à une façon de retirer aléatoirement k éléments et à les réinsérer aléatoirement. Réciproquement, chaque séquence de k éléments retirés et réinsérés aléatoirement peut être décrite à l'aide d'une permutation ayant une sous-suite croissante à $n - k$ éléments.

Maintenant, comme les sh_a commutent entre eux, de même que les ∂_b , on impose un ordre sur l'écriture de

$$\text{sh}_{i_1} \circ \dots \circ \text{sh}_{i_k} \circ \partial_{i_k} \circ \dots \circ \partial_{i_1}$$

pour ne pas les compter plusieurs fois. Si tous les éléments étaient distincts, il serait suffisant d'imposer la condition $i_1 < i_2 < \dots < i_k$, mais quand certains éléments sont les mêmes, il nous faut considérer la possibilité où l'on retire plusieurs copies d'un même élément. À ce moment, il faut assouplir la condition sur l'ordre en demandant plutôt que $i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_k$.

Toutefois, il faut ajuster nos coefficients pour chaque séquence, car on ne veut compter qu'une seule fois une séquence d'éléments à retirer et réinsérer. Ainsi, si ℓ_j éléments sont égaux à i_j , il y a $\ell_j!$ façons de les mettre en ordre. Pour ne compter une séquence donnée qu'une seule fois, il faut diviser par $\ell_j!$ pour tout $j \in [k]$, et c'est exactement ce que représente le coefficient au dénominateur. \square

On sait que les opérateurs $\nu_{(n-k, 1^k)}$ commutent entre eux par le théorème I.1.1 de (Reiner *et al.*, 2014). Dans leur article, Reiner, Saliola et Welker manifestent leur intérêt face à une preuve de cette propriété de commutativité qui serait plus éclairante. Peut-être est-il possible de passer par cette définition des opérateurs pour faire une preuve qui serait plus directe et non inductive. Cette piste n'a pas été explorée dans le cadre de cette recherche, mais mériterait qu'on s'y attarde.

On se souvient que le lemme 5 du chapitre 2 nous donnait quelques relations de commutation entre les différents opérateurs Θ , sh et ∂ . Pour la suite, nous aurons besoin de quelques autres relations.

Lemme 12. *Pour $a, b, c \in [n]$, nous avons les relations suivantes :*

$$\Theta_{b,c} \circ \text{sh}_a - \text{sh}_a \circ \Theta_{b,c} = \delta_{a,b} \text{sh}_c \quad (3.1)$$

$$\partial_a \circ \Theta_{b,c} - \Theta_{b,c} \circ \partial_a = \delta_{a,c} \partial_b \quad (3.2)$$

$$\Theta_{b,a} \circ \Theta_{c,b} - \Theta_{c,b} \circ \Theta_{b,a} = \Theta_{c,a} - \delta_{a,c} \Theta_{b,b} \quad (3.3)$$

Démonstration. Pour (3.1), si $a \neq b$, l'ordre dans lequel on fait les actions d'insérer a et de changer les b pour des c n'est pas important. Par contre, si $a = b$, on retombe sur l'identité (2.2) du lemme 5.

L'argument est similaire pour (3.2).

Pour l'identité (3.3), commençons d'abord par utiliser l'équation (2.1) du lemme 5.

Ainsi :

$$\begin{aligned}\Theta_{b,a} \circ \Theta_{c,b} &= \Theta_{b,a} \circ (\partial_c \circ \text{sh}_b - \text{sh}_b \circ \partial_c - \delta_{b,c}(n+1) \text{Id}) \\ &= \Theta_{b,a} \circ \partial_c \circ \text{sh}_b - \Theta_{b,a} \circ \text{sh}_b \circ \partial_c - (n+1)\delta_{b,c}\Theta_{b,a}.\end{aligned}$$

On utilise maintenant l'identité (3.1) pour commuter $\Theta_{b,a}$ et ∂_c et l'identité (3.2) pour commuter $\Theta_{b,a}$ et sh_b . Cela nous mène à :

$$\begin{aligned}\Theta_{b,a} \circ \Theta_{c,b} &= (\partial_c \circ \Theta_{b,a} - \delta_{a,c} \circ \partial_b) \circ \text{sh}_b - (\text{sh}_b \circ \Theta_{b,a} + \delta_{b,b} \circ \text{sh}_a) \circ \partial_c - (n+1)\Theta_{b,a}\delta_{b,c} \\ &= \partial_c \circ \Theta_{b,a} \circ \text{sh}_b - \delta_{a,c} \circ \partial_b \text{sh}_b - \text{sh}_b \circ \Theta_{b,a} \circ \partial_c - \text{sh}_a \circ \partial_c - (n+1)\Theta_{b,a}\delta_{b,c}.\end{aligned}$$

On utilise encore les identités (3.1) et (3.2) pour déplacer $\Theta_{b,a}$ dans le premier et le troisième terme.

$$\begin{aligned}\Theta_{b,a} \circ \Theta_{c,b} &= \partial_c \circ (\text{sh}_b \circ \Theta_{b,a} + \text{sh}_a) - \delta_{a,c} \circ \partial_b \text{sh}_b - \text{sh}_b \circ (\partial_c \circ \Theta_{b,a} - \delta_{a,c}\partial_b) - \text{sh}_a \circ \partial_c \\ &\quad - (n+1)\Theta_{b,a}\delta_{b,c} \\ &= \partial_c \circ \text{sh}_b \circ \Theta_{b,a} + \partial_c \circ \text{sh}_a - \delta_{a,c} \circ \partial_b \circ \text{sh}_b - \text{sh}_b \circ \partial_c \circ \Theta_{b,a} + \delta_{a,c} \text{sh}_b \circ \partial_b \\ &\quad - \text{sh}_a \circ \partial_c - (n+1)\delta_{b,c}\Theta_{b,a}\end{aligned}$$

Ensuite, l'utilisation répétée de l'équation (2.1) du lemme 5 nous permet de faire «apparaître» les $\Theta_{c,b}$, $\Theta_{c,a}$, et $\Theta_{b,b}$:

$$\begin{aligned}\Theta_{b,a} \circ \Theta_{c,b} &= \Theta_{c,b} \circ \Theta_{b,a} + \partial_c \circ \text{sh}_a - \text{sh}_a \circ \partial_c - \delta_{a,c} \circ \partial_b \circ \text{sh}_b + \delta_{a,c} \text{sh}_b \circ \partial_b \\ &= \Theta_{c,b} \circ \Theta_{b,a} + \Theta_{c,a} + \delta_{a,c}(n+1) \text{Id} - \delta_{a,c}(\Theta_{b,b} + (n+1) \text{Id}) \\ &= \Theta_{c,b} \circ \Theta_{b,a} + \Theta_{c,a} - \delta_{a,c} \circ \Theta_{b,b}.\end{aligned}$$

□

3.2 Le cas $\nu_{(n-2,1,1)}$

Commençons par étudier le cas particulier du mélange $\nu_{(n-2,1,1)}$. Tout comme pour R2R, nous débutons par une identité sur M^λ .

Lemme 13. Soit $\lambda \vdash n$ et $a \in [n]$. Sur M^λ , on a :

$$\begin{aligned} \nu_{(n-1,1,1)} \circ \text{sh}_a - \text{sh}_a \circ \nu_{(n-2,1,1)} &= n \text{sh}_a \circ \nu_{(n-1,1)} + \sum_{1 \leq b \leq n} \text{sh}_b \circ \Theta_{b,a} \circ \nu_{(n-1,1)} \quad (3.4) \\ &= \left(n \text{sh}_a + \sum_{1 \leq b \leq n} \text{sh}_b \circ \Theta_{b,a} \right) \circ \nu_{(n-1,1)}. \end{aligned}$$

Démonstration. Tout d'abord, par le lemme 11, on sait que

$$\nu_{(n-1,1,1)} = \sum_{1 \leq b < c \leq n+1} \text{sh}_b \circ \text{sh}_c \circ \partial_c \circ \partial_b + \frac{1}{2} \sum_{a \leq b \leq n+1} \text{sh}_b \circ \text{sh}_b \circ \partial_b \circ \partial_b.$$

Donc, le côté gauche de l'équation (3.4) peut être écrit de cette façon :

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq b < c \leq n+1} \text{sh}_b \circ \text{sh}_c \circ \partial_c \circ \partial_b \circ \text{sh}_a + \frac{1}{2} \sum_{a \leq b \leq n+1} \text{sh}_b \circ \text{sh}_b \circ \partial_b \circ \partial_b \circ \text{sh}_a \\ - \text{sh}_a \circ \sum_{1 \leq b < c \leq n} \text{sh}_b \circ \text{sh}_c \circ \partial_c \circ \partial_b - \frac{1}{2} \text{sh}_a \circ \sum_{a \leq b \leq n} \text{sh}_b \circ \text{sh}_b \circ \partial_b \circ \partial_b. \quad (3.5) \end{aligned}$$

Comme tout mot $w \in M^\lambda$ ne contient aucune occurrence de $(n+1)$ et que $a \neq n+1$, $\text{sh}_a(w)$ ne contient pas, lui non plus, d'occurrences de $(n+1)$. Donc, $\partial_{n+1} \circ \text{sh}_a(w) = 0$. Ainsi, la borne supérieure des deux premières sommes peut être remplacée par n .

Pour la suite, on applique à répétition le lemme 5 pour faire en sorte que le sh_a des deux premières sommes de (3.5) commute et prenne place au début de la suite de compositions. En faisant cela, des termes vont s'annuler avec les deux derniers termes de (3.5).

Ensuite, en faisant quelques manipulations algébriques et en utilisant le lemme 12, on réussit à montrer que les termes restants sont équivalents à

$$n \text{sh}_a \circ \nu_{(n-1,1)} + \sum_{1 \leq b \leq n} \text{sh}_b \circ \Theta_{b,a} \circ \nu_{(n-1,1)}.$$

□

Pour l'instant, nous avons une identité allant de M^λ vers $M^{\lambda+\vec{a}}$. En restreignant cette identité sur S^λ , on obtient le lemme suivant.

Lemme 14. *Soit $\lambda \vdash n$ et $a \in [n]$. On a :*

$$\begin{aligned} (\nu_{(n-1,1,1)} \circ \text{sh}_a - \text{sh}_a \circ \nu_{(n-2,1,1)}) \Big|_{S^\lambda} &= n \text{sh}_a \circ \nu_{(n-1,1)} \Big|_{S^\lambda} + \sum_{1 \leq b \leq a} (\text{sh}_b \circ \Theta_{b,a} \circ \nu_{(n-1,1)}) \Big|_{S^\lambda} \\ &= \left(n \text{sh}_a + \sum_{1 \leq b \leq a} \text{sh}_b \circ \Theta_{b,a} \right) \circ \nu_{(n-1,1)} \Big|_{S^\lambda}. \end{aligned}$$

Démonstration. En restreignant à S^λ l'identité du lemme 13, on obtient que

$$(\nu_{(n-1,1,1)} \circ \text{sh}_a - \text{sh}_a \circ \nu_{(n-2,1,1)}) \Big|_{S^\lambda} = n \text{sh}_a \circ \nu_{(n-1,1)} \Big|_{S^\lambda} + \sum_{1 \leq b \leq n} \text{sh}_b \circ \Theta_{b,a} \circ \nu_{(n-1,1)} \Big|_{S^\lambda}.$$

Or, comme $\nu_{(n-1,1)}$ est un élément de $\mathbb{C}\mathfrak{S}_n$, on sait que $\nu_{(n-1,1)}(S^\lambda) \subseteq S^\lambda$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq b \leq n} \text{sh}_b \circ \Theta_{b,a} \circ \nu_{(n-1,1)} \Big|_{S^\lambda} &= \sum_{1 \leq b \leq n} \text{sh}_b \circ \Theta_{b,a} \Big|_{S^\lambda} \circ \nu_{(n-1,1)} \Big|_{S^\lambda} \\ &= \sum_{1 \leq b \leq a} \text{sh}_b \circ \Theta_{b,a} \circ \nu_{(n-1,1)} \Big|_{S^\lambda}, \end{aligned}$$

où la dernière égalité vient du lemme 8. On arrive donc bien au résultat voulu. \square

Une fois restreinte au module de Specht, l'identité qui nous intéresse devient une transformation allant de S^λ vers $M^{\lambda+\vec{e}_a}$. Nous aimerions avoir une identité de S^λ vers $S^{\lambda+\vec{e}_a}$. Nous utiliserons donc une nouvelle fois les projecteurs isotypiques.

Lemme 15. *Soit $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\ell) \vdash n$, $a \in 1, 2, \dots, \lambda_\ell + 1$ et $\mu = \lambda + \vec{e}_r$ avec $1 \leq r \leq a$, on a l'identité suivante :*

$$\begin{aligned} \nu_{(n-1,1,1)} \circ \text{projlift}_a^{\lambda, \mu} - \text{projlift}_a^{\lambda, \mu} \circ \nu_{(n-2,1,1)} \Big|_{S^\lambda} \\ = (n - a + \lambda_a + 1) \text{projlift}_a^{\lambda, \mu} \circ \text{R2R}_n \Big|_{S^\lambda} + \sum_{r \leq b < a} \Theta_{b,a} \circ \text{projlift}_b^{\lambda, \mu} \circ \text{R2R}_n \Big|_{S^\lambda}. \end{aligned}$$

Démonstration. Il suffit de composer à gauche par isoproj_μ les deux côtés de l'égalité présentée au lemme 14 et de suivre ensuite le même raisonnement que dans la preuve du lemme 9. \square

Théorème 13 (Lafrenière, Schanck). *Soit $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\ell) \vdash n$, $a \in [\lambda_\ell + 1]$ et $\mu = \lambda + \vec{e}_r$ avec $1 \leq r \leq a$. On a l'identité suivante :*

$$\nu_{(n-1,1,1)} \circ \text{projlift}_a^{\lambda,\mu} - \text{projlift}_a^{\lambda,\mu} \circ \nu_{(n-2,1,1)} \Big|_{S^\lambda} = (n - r + \lambda_r + 1) \text{projlift}_a^{\lambda,\mu} \circ \text{R2R}_n \Big|_{S^\lambda}.$$

En particulier, cela implique que si $\omega \in S^\lambda$ est un vecteur propre de R2R_n de valeur propre ε et un vecteur propre de $\nu_{(n-2,1,1)}$ de valeur propre α , alors $\text{projlift}_a^{\lambda,\mu}(\omega)$ est soit nul, soit un vecteur propre de $\nu_{(n-1,1,1)}$ de valeur propre $(n - r + \lambda_r + 1)\varepsilon + \alpha$.

Démonstration. On procède de la même manière que dans la preuve du théorème 9. \square

Il y a donc un début de structure inductive qui se dessine. Dans le cas de R2R_n , on pouvait créer un nouveau vecteur propre en appliquant projlift à un vecteur propre de R2R_{n-1} . Dans le cas présent, pour créer un nouveau vecteur propre à l'aide de projlift , il faut appliquer ce dernier opérateur sur un vecteur qui est à la fois propre pour $\nu_{(n-1,1,1)}$ et pour R2R_n . Le calcul de la valeur propre de ce nouveau vecteur implique les deux valeurs propres du vecteur initial.

Rappelons que les résultats exposés dans cette section concernent seulement l'opérateur $\nu_{(n-k,1^k)}$ pour $k = 2$. Est-il possible de trouver une formulation plus générale peu importe la valeur de k ?

3.3 Les vecteurs propres des opérateurs $\nu_{(n-k,1^k)}$

Les résultats présentés ici n'ont pas été publiés, mais sont issus du travail de ma collègue Nadia Lafrenière dans le cadre de sa recherche de thèse. Ils représentent

la généralisation des résultats que nous avons obtenus pour le mélange $\nu_{(n-2,1,1)}$.
On a tout d'abord l'identité sur M^λ .

Lemme 16 (Lafrenière, 2018+). *Sur M^λ , avec $\lambda \vdash n$, on a :*

$$\begin{aligned} \nu_{(n+1-k,1^k)} \circ \text{sh}_a - \text{sh}_a \circ \nu_{(n-k,1^k)} &= (n+2-k) \text{sh}_a \circ \nu_{(n-(k-1),1^{k-1})} \\ &+ \sum_{1 \leq b \leq n} \text{sh}_b \circ \Theta_{b,a} \circ \nu_{(n-(k-1),1^{k-1})}. \end{aligned}$$

On restreint cette identité à S^λ .

Lemme 17 (Lafrenière, 2018+). *Soit $\lambda \vdash n$, on a :*

$$\begin{aligned} (\nu_{(n+1-k,1^k)} \circ \text{sh}_a - \text{sh}_a \circ \nu_{(n-k,1^k)}) |_{S^\lambda} &= (n+2-k) \text{sh}_a \circ \nu_{(n-(k-1),1^{k-1})} |_{S^\lambda} \\ &+ \sum_{1 \leq b \leq a} \text{sh}_b \circ \Theta_{b,a} \circ \nu_{(n-(k-1),1^{k-1})} |_{S^\lambda}. \end{aligned}$$

On projette finalement cette dernière identité sur S^λ .

Théorème 14 (Lafrenière, 2018+). *Soit $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_\ell) \vdash n$, $a \in [\ell+1]$ et $\mu = \lambda + \vec{e}_r$, où $1 \leq r \leq a$. Alors,*

$$\begin{aligned} \nu_{(n+1-k,1^k)} \circ \text{projlift}_a^{\lambda,\mu} - \text{projlift}_a^{\lambda,\mu} \circ \nu_{(n-k,1^k)} &= \\ ((n+2-k) + (\lambda_r + 1) - r) \text{projlift}_a^{\lambda,\mu} \circ \nu_{(n-(k-1),1^{k-1})}. \end{aligned}$$

En particulier, cela implique que si $\omega \in S^\lambda$ est un vecteur propre de $\nu_{(n-(k-1),1^{k-1})}$ de valeur propre ε et un vecteur propre de $\nu_{(n-k,1^k)}$ de valeur propre α , alors soit $\text{projlift}_a^{\lambda,\mu}(\omega)$ est le vecteur nul ou $\text{projlift}_a^{\lambda,\mu}(\omega)$ est un vecteur propre de $\nu_{(n+1-k,1^k)}$ de valeur propre

$$\alpha + ((n+2-k) + (\lambda_r + 1) - r) \varepsilon.$$

Donc, pour l'instant, on a une façon de construire de nouveaux vecteurs propres à l'aide de projlift et on a une formule décrivant la valeur propre du vecteur obtenu. Toutefois, le travail analogue à celui fait aux sections 2.4.6 à 2.4.7 reste

à faire. Il reste notamment à voir si tous les vecteurs propres de $\nu_{(n-k,1^k)}$ sont obtenus de cette façon et si on peut décomposer S^λ en somme directe d'espaces propres pour cet opérateur. Si cela s'avérait vrai, on aurait ainsi une preuve de la conjecture I.1.2 de (Reiner *et al.*, 2014) sur l'intégralité des valeurs propres des opérateurs $\nu_{(n-k,1^k)}$. Cette conjecture est une généralisation de la conjecture de Reyes (Reyes, 2002) qui s'est intéressé au cas $k = 1$, c'est-à-dire au cas de R2R, et dont la preuve a été exposée au chapitre 2. Pour l'instant, dans le cas plus général, on sait seulement que les vecteurs propres créés à partir des projlift ont des valeurs propres entières.

Pour consulter une liste des valeurs propres des opérateurs $\nu_{(n-k,1^k)}$, voir l'appendice de (Reiner *et al.*, 2014).

CONCLUSION

Le but ultime de ce mémoire était de présenter une façon d'étudier certains opérateurs de mélange, celle développée par Dieker et Saliola (Dieker et Saliola, 2018), et de l'appliquer aux autres opérateurs de mélange. En premier lieu, il était nécessaire de présenter les notions de base de la théorie de la représentation des groupes. Nous nous sommes particulièrement penchés sur le cas du groupe symétrique, puisque cela nous donnait les outils nécessaires à une bonne compréhension du comportement du mélange doublement aléatoire, qui allait être abordé par la suite. Nous avons entre autres défini les modules irréductibles de \mathfrak{S}_n et prouvé leur irréductibilité. Nous avons également introduit d'autres notions et résultats classiques de la théorie : lemme de Schur, théorème de Maschke, représentation induite, règle de branchement, etc. Ce chapitre représentait en quelque sorte le bagage à acquérir avant de tenter une compréhension en détail de l'opérateur doublement aléatoire.

Ensuite s'est présenté le cœur du problème qui nous intéressait : le mélange doublement aléatoire et son comportement. Nous avons d'abord réduit le problème à l'étude de $R2R^\lambda$, c'est-à-dire au comportement de $R2R$ sur un module de Specht S^λ . Ensuite, nous avons étudié la structure inductive liant entre eux les espaces propres des différents opérateurs $R2R^\lambda$. Cela nous a menés à une décomposition explicite de S^λ en sous-espaces propres pour $R2R$. Cette décomposition nous a permis de décrire les valeurs propres de $R2R$ en concluant notamment qu'elles étaient toutes entières (après normalisation). De plus, ces valeurs propres peuvent être indexées par les bandes horizontales ou par les mots. Ce chapitre représentait la

description d'une stratégie déjà existante pour étudier un opérateur en particulier, l'opérateur doublement aléatoire.

Finalement, dans le dernier chapitre, nous avons tenté d'utiliser cette structure pour en apprendre davantage sur une certaine famille d'opérateurs, les $\nu_{(n-k,1^k)}$. Nous avons ainsi été en mesure d'identifier un début de structure inductive reliant les espaces propres entre eux. Il reste par contre à faire une décomposition explicite des S^λ en sous-espaces propres de $\nu_{(n-k,1^k)}$. On aimerait également qu'une telle décomposition soit simultanée, c'est-à-dire que pour un n fixé, on soit en mesure de trouver une base de vecteurs propres qui fonctionnent pour tous les $\nu_{(n-k,1^k)}$. On sait qu'une telle base existe puisque les opérateurs sont diagonalisables et commutent entre eux.

Il serait également intéressant d'étudier de la même manière les opérateurs $\nu_{(2^k,1^{n-2k})}$, d'autres opérateurs définis par Reiner, Saliola et Welker dans (Reiner *et al.*, 2014). Cette nouvelle famille présente également des propriétés remarquables : les opérateurs commutent entre eux et leurs valeurs propres sont toutes entières. Analyser ces opérateurs de la même façon que pour R2R et les $\nu_{(n-k,1^k)}$ pourrait mener à l'identification d'une structure récursive nous permettant de construire les espaces propres et d'en calculer les valeurs propres, car même si on sait que ces dernières sont entières, il n'existe pas pour l'instant de formules les décrivant.

Les problèmes ouverts cités précédemment concernent les opérateurs définis au chapitre 3, mais une question reste à élucider dans le cas de R2R. On aimerait pouvoir identifier de façon naturelle un vecteur du noyau de $R2R^\mu$ à partir d'un tableau de désarrangement de taille μ . Pour l'instant, l'identification d'un tel vecteur se fait en utilisant l'orthogonalité des espaces propres.

Un autre problème ouvert réside dans le lien entre R2R et le complexe de mots

injectifs. Le théorème 3.3 de Hanlon et Hersh (Hanlon et Hersh, 2004) affirme que l'intégralité des valeurs propres de R^2R implique l'intégralité du spectre du Laplacien sur le complexe des mots injectifs. Par contre, il semble que certaines erreurs se soient glissées dans le raisonnement. Un premier problème ouvert serait donc de corriger ces erreurs et de voir si cette implication reste vraie malgré tout. Si on y arrivait, un deuxième problème ouvert consisterait à donner un lien explicite entre les valeurs propres de R^2R et du Laplacien. Pourrions-nous, à partir des valeurs propres de R^2R , trouver une formule qui nous donnerait les valeurs propres du Laplacien ?

RÉFÉRENCES

- Bidigare, P., Hanlon, P. et Rockmore, D. (1999). A combinatorial description of the spectrum for the Tsetlin library and its generalization to hyperplane arrangements. *Duke Mathematical Journal*, 99(1), 135–174.
<http://dx.doi.org/10.1215/S0012-7094-99-09906-4>
- Bidigare, T. P. (1997). *Hyperplane arrangement face algebras and their associated Markov chains*. (Thèse de doctorat). University of Michigan, Ann Arbor. Récupéré de http://gateway.proquest.com/openurl?url_ver=Z39.88-2004&rft_val_fmt=info:ofi/fmt:kev:mtx:dissertation&res_dat=xri:pqdiss&rft_dat=xri:pqdiss:9721946
- Brown, K. S. et Diaconis, P. (1998). Random walks and hyperplane arrangements. *The Annals of Probability*, 26(4), 1813–1854.
<http://dx.doi.org/10.1214/aop/1022855884>
- Diaconis, P. (1988). *Group representations in probability and statistics*, volume 11 de *Institute of Mathematical Statistics Lecture Notes : Monograph Series*. Hayward, CA : Institute of Mathematical Statistics. Récupéré de <https://projecteuclid.org/euclid.lnms/1215467416>
- Diaconis, P., Fill, J. A. et Pitman, J. (1992). Analysis of top to random shuffles. *Combinatorics, Probability and Computing*, 1(2), 135–155.
<http://dx.doi.org/10.1017/S0963548300000158>
- Diaconis, P. et Saloff-Coste, L. (1995). Random walks on finite groups : a survey of analytic techniques. In *Probability measures on groups and related structures, XI (Oberwolfach, 1994)* 44–75. World Sci. Publ., River Edge, NJ.
- Dieker, A. B. et Saliola, F. V. (2018). Spectral analysis of random-to-random Markov chains. *Advances in Mathematics*, 323, 427–485.
<http://dx.doi.org/10.1016/j.aim.2017.10.034>
- Fill, J. A. (1996). An exact formula for the move-to-front rule for self-organizing lists. *Journal of Theoretical Probability*, 9(1), 113–160.
<http://dx.doi.org/10.1007/BF02213737>

- Fulton, W. et Harris, J. (1991). *Representation theory : A first course*, volume 129 de *Graduate Texts in Mathematics*. New York : Springer-Verlag.
- Hanlon, P. et Hersh, P. (2004). A Hodge decomposition for the complex of injective words. *Pacific Journal of Mathematics*, 214(1), 109–125.
<http://dx.doi.org/10.2140/pjm.2004.214.109>
- James, G. et Liebeck, M. (2001). *Representations and characters of groups* (2^e éd.). New York : Cambridge University Press.
- James, G. D. (1976). The irreducible representations of the symmetric groups. *The Bulletin of the London Mathematical Society*, 8(3), 229–232.
<http://dx.doi.org/10.1112/blms/8.3.229>
- James, G. D. (1978). *The representation theory of the symmetric groups*, volume 682 de *Lecture Notes in Mathematics*. Berlin : Springer.
- Lothaire, M. (1997). *Combinatorics on words*. Cambridge Mathematical Library. Cambridge : Cambridge University Press.
- Macdonald, I. G. (1995). *Symmetric functions and Hall polynomials* (2^e éd.). Oxford Mathematical Monographs. New York : The Clarendon Press, Oxford University Press. With contributions by A. Zelevinsky, Oxford Science Publications.
- Pinsky, M. A. et Karlin, S. (2011). *An introduction to stochastic modeling* (4^e éd.). Amsterdam : Elsevier/Academic Press.
- Qin, C. et Morris, B. (2017). Improved bounds for the mixing time of the random-to-random shuffle. *Electronic Communications in Probability*, 22, Paper No. 22, 7. <http://dx.doi.org/10.1214/17-ECP3955>
- Reiner, V., Saliola, F. et Welker, V. (2014). Spectra of symmetrized shuffling operators. *Memoirs of the American Mathematical Society*, 228(1072), vi+109. <http://dx.doi.org/10.1090/memo/1072>
- Reyes, J.-C. U. (2002). *Random walk, semi-direct products, and card shuffling*. (Thèse de doctorat). Stanford University. Récupéré de http://gateway.proquest.com/openurl?url_ver=Z39.88-2004&rft_val_fmt=info:ofi/fmt:kev:mtx:dissertation&res_dat=xri:pqdiss&rft_dat=xri:pqdiss:3048601
- Rudnick, J. et Gaspari, G. (2004). *Elements of the random walk : An introduction for advanced students and researchers*. Cambridge : Cambridge University Press.

- Sagan, B. E. (2001). *The symmetric group ; Representations, combinatorial algorithms, and symmetric functions* (2^e éd.), volume 203 de *Graduate Texts in Mathematics*. New York : Springer-Verlag.
- Saloff-Coste, L. (2001). Probability on groups : random walks and invariant diffusions. *Notices of the American Mathematical Society*, 48(9), 968–977.
Récupéré de <http://www.ams.org/notices/200109/fea-saloff.pdf>
- Saloff-Coste, L. et Zúñiga, J. (2008). Refined estimates for some basic random walks on the symmetric and alternating groups. *ALEA. Latin American Journal of Probability and Mathematical Statistics*, 4, 359–392.
- Subag, E. (2013). A lower bound for the mixing time of the random-to-random insertions shuffle. *Electronic Journal of Probability*, 18, no. 20, 20.
<http://dx.doi.org/10.1214/EJP.v18-1950>