

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL

ESTIMATION ET PRÉVISION DE LA VOLATILITÉ
DE L'INDICE S&P 500

MÉMOIRE
PRÉSENTÉ
COMME EXIGENCE PARTIELLE
DE LA MAÎTRISE EN ADMINISTRATION DES AFFAIRES
PROFIL RECHERCHE

PAR
CAROLE FARES

MAI 2008

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL
Service des bibliothèques

Avertissement

La diffusion de ce mémoire se fait dans le respect des droits de son auteur, qui a signé le formulaire *Autorisation de reproduire et de diffuser un travail de recherche de cycles supérieurs* (SDU-522 – Rév.01-2006). Cette autorisation stipule que «conformément à l'article 11 du Règlement no 8 des études de cycles supérieurs, [l'auteur] concède à l'Université du Québec à Montréal une licence non exclusive d'utilisation et de publication de la totalité ou d'une partie importante de [son] travail de recherche pour des fins pédagogiques et non commerciales. Plus précisément, [l'auteur] autorise l'Université du Québec à Montréal à reproduire, diffuser, prêter, distribuer ou vendre des copies de [son] travail de recherche à des fins non commerciales sur quelque support que ce soit, y compris l'Internet. Cette licence et cette autorisation n'entraînent pas une renonciation de [la] part [de l'auteur] à [ses] droits moraux ni à [ses] droits de propriété intellectuelle. Sauf entente contraire, [l'auteur] conserve la liberté de diffuser et de commercialiser ou non ce travail dont [il] possède un exemplaire.»

REMERCIEMENTS

Je voudrais exprimer ma gratitude à mon directeur, Dr Raymond Théoret, dont la compréhension la patience et l'expertise, ont ajouté considérablement à mon expérience de diplômée. J'apprécie sa vaste connaissance qui m'a été très utile et je lui suis reconnaissante de m'avoir donné l'opportunité de mener à bien cette recherche.

Je voudrais aussi remercier ma famille pour le soutien qu'elle m'a procuré et particulièrement pour leurs encouragements, car sans eux, je n'aurais pas fini ce mémoire.

Enfin, je reconnais que cette recherche n'aurait pas été possible sans l'encadrement de l'Université du Québec à Montréal et du programme MBA-recherche à qui j'exprime aussi ma gratitude.

TABLE DES MATIÈRES

LISTE DES FIGURES	v
LISTE DES TABLEAUX	vi
RÉSUMÉ	vii
INTRODUCTION	1
REVUE DE LITTÉRATURE	2
CHAPITRE I	
LES MODÈLES D'ÉVALUATION DE LA VOLATILITÉ	3
1.1 Modèle de la volatilité implicite	3
1.2 Calculs de la volatilité implicite non basés sur des modèles	6
1.3 Modèle de Heston	9
1.4 Modèle de volatilité stochastique avec retour à la moyenne	12
1.5 Modèle du VIX	13
MÉTHODOLOGIE	18
CHAPITRE II	
LE MODÈLE DE GARCH	19
2.1 Le modèle de GARCH (1,1)	19
2.2 L'implémentation du modèle GARCH de Heston et Nandi(2000)	22
2.3 Estimation des paramètres	25
2.4 Implémentation dans VBA	27
2.5 Optimisation par le modèle EWMA	34
RÉSULTATS	36
CHAPITRE III	
ESTIMATION DE LA VOLATILITÉ DU S&P 500	37
3.1 La volatilité générée par EWMA	37
3.2 La volatilité réalisée	38
3.3 Comparaison des modèles	41

3.4 Prévision de la volatilité à long terme	43
CONCLUSION	45
ANNEXES	46
APPENDICE A	
ESTIMATION DES PARAMÈTRES DE GARCH	47
APPENDICE B	
ESTIMATION DES PARAMÈTRES DE HESTON ET NANDI	55
APPENDICE C	
ESTIMATION DE LA VOLATILITÉ À TERME	58
APPENDICE D	
ESTIMATION DE LA VOLATILITÉ DE HESTON ET NANDI	60
APPENDICE E	
ESTIMATION DE LA VOLATILITÉ DE EWMA	63
APPENDICE F	
LA VOLATILITÉ RÉALISÉE DU S&P 500	65
APPENDICE G	
PRÉVISION DE LA VOLATILITÉ DU S&P 500	67
BIBLIOGRAPHIE	68

LISTE DES FIGURES

Figure		Page
1.1	Les valeurs de fermeture du VIX (du 2 janvier 1990 au 20 août 2007)	15
2.1	Corrélogramme des carrés des rendements de l'indice S&P500	21
2.2	Corrélogramme des rendements standardisés de l'indice S&P500	22
2.3	La volatilité de l'indice S&P500 selon GARCH(1,1)	29
2.4	La structure à terme de la volatilité selon le modèle GARCH(1,1)	32
2.5	La volatilité journalière de l'indice S&P500 selon le modèle GARCH de Heston et Nandi(2000)	33
2.6	La volatilité annuelle du S&P500 selon le modèle GARCH de Heston et Nandi(2000)	33
2.7	Les facteurs pondérés de la moyenne mobile exponentielle pondérée EWMA	35
3.1	Volatilité de l'indice S&P500 générée par le modèle EWMA	38
3.2	Volatilité réalisée annuelle du S&P500	41
3.3	Volatilité du S&P500 générée par les quatre méthodes	42
3.4	La volatilité du S&P500 jusqu'à l'année 2008	44

LISTE DES TABLEAUX

Tableau		Page
2.1	Les paramètres estimés du modèle GARCH(1,1) selon le MLE	27
2.2	Les paramètres estimés de H&N (2000)	28
2.3	La volatilité à long terme du S&P500 par GARCH(1,1)	29
3.1	La différence entre la volatilité réalisée et celle résultant des modèles étudiés	42

RÉSUMÉ

La prévision de la volatilité future constitue l'un des principaux enjeux actuels dans la finance contemporaine. De ce fait, une estimation précise de la volatilité, seul paramètre inobservable sur le marché, est cruciale pour la prise de décision en allocation d'actifs et en gestion des risques. Les modèles GARCH se basent sur les cours boursiers passés pour calculer ou estimer la volatilité. L'hypothèse qui se cache derrière cette approche est que l'on peut se servir du passé pour prédire l'avenir. Les modèles GARCH semblent toutefois peu adaptés à la prévision à long terme puisqu'ils présentent un retour à la moyenne. Nous avons alors utilisé le modèle EWMA qui présente l'avantage de ne pas retourner à la moyenne et nous avons estimé les paramètres des modèles étudiés pour reconstruire une volatilité historique de l'indice S&P500 par le biais de chaque modèle afin de les comparer avec le modèle de la volatilité réalisée. Les résultats de notre recherche montrent que la volatilité estimée par le modèle GARCH de Heston et Nandi (2000) n'est pas en mesure de reproduire la trajectoire suivie par la volatilité de l'indice S&P500 et ce modèle ne pourrait donc être employé pour faire des prévisions sur celle-ci. Nous avons trouvé également que le modèle EWMA semble significativement reproduire la même trajectoire que celle associée à la volatilité réalisée de l'indice et par conséquent on peut l'utiliser pour prévoir la volatilité future de l'indice S&P500.

Mots clés : Volatilité, S&P500, GARCH, EWMA, Heston et Nandi, VIX.

INTRODUCTION

Ces dernières années, le marché des produits dérivés a connu un essor remarquable. En effet, les transactions sur les marchés des produits dérivés augmentent spectaculairement depuis le milieu des années quatre-vingt. La croissance très forte de l'activité sur les produits dérivés et des risques afférents rend d'autant plus important un suivi exhaustif et fiable de la volatilité, élément très important pour évaluer les options. De plus, ces années récentes ont vu l'émergence de produits dérivés d'un nouveau type, dont le payoff dépend de la volatilité réalisée par un actif de référence sur une période à venir¹.

La volatilité a plusieurs caractéristiques qui rendent le trading attrayant. Elle a tendance à augmenter quand l'incertitude et le risque augmentent. Comme les taux d'intérêt, la volatilité a tendance à retourner à la moyenne à plus long terme : les volatilités élevées diminueront éventuellement et les basses volatilités augmenteront probablement. Ensuite, la volatilité est souvent négativement corrélée avec le prix d'une action ou le niveau de l'indice et a tendance à rester élevée après de grands mouvements baissiers du marché. Étant donné ces tendances, nous utilisons le modèle GARCH, le modèle GARCH de Heston et Nandi(2000) et la moyenne mobile exponentielle pondérée, EWMA, pour étudier et prévoir les comportements de la volatilité des rendements de l'indice S&P500. Après la présentation des trois modèles, nous essaierons d'étudier la robustesse et les possibilités d'application du modèle le plus fiable en terme d'estimation.

Pour commencer, nous présenterons dans ce qui suit une brève revue de littérature sur quelques modèles de volatilité dans la littérature financière. Ensuite, nous exposerons la méthodologie retenue et les résultats obtenus pour enfin les comparer avec la méthode de la volatilité réalisée.

¹ Voir à ce sujet Kresimir D., E. Derman, M. Kamal, et J. Zou, (1999), More than You Ever Wanted to Know About Volatility Swaps, Quantitative Strategies Research Notes, 49 pp.

REVUE DE LITTÉRATURE²

Il existe plusieurs modèles d'évaluation de volatilité dans la littérature financière. Le nombre de recherches et de publications faites à propos de ce sujet ne cesse de croître pour comprendre les limites du modèle de Black et Scholes depuis sa publication, et la nécessité d'introduire des modèles plus complexes où la volatilité évolue stochastiquement à travers le temps.

Dans la pratique et pour les contrats d'options qui sont déjà sur le marché, on estime la volatilité en utilisant les données historiques et on la considère comme étant la volatilité espérée pour la durée de vie de l'option. On peut aussi calculer la volatilité implicite, qui est souvent interprétée comme étant la prévision du marché de la volatilité du sous-jacent, sous l'hypothèse d'efficacité des marchés. De même, on peut calculer les variations du rendement du sous-jacent pendant une période donnée et obtenir une estimation de sa volatilité réalisée. Dans ce qui suit, nous présentons quelques modèles permettant d'évaluer ces deux types de volatilité.

² La revue de littérature s'inspire de Racicot F.-É. et R. Théoret, (2006), « Finance computationnelle et gestion des risques », et de Rouah Douglas F. et G. Vanberg, (2007), « Option Pricing Models & Volatility Using Excel-VBA ».

CHAPITRE I

LES MODÈLES D'ÉVALUATION DE LA VOLATILITÉ

1.1 Modèle de la volatilité implicite

Malgré que plusieurs auteurs critiquent l'emploi de la volatilité implicite parce qu'elle est basée sur le prix d'exercice d'une option et non sur le prix de l'action comme telle, l'utilisation de la volatilité implicite est fort répandue. Les options sont de plus en plus cotées en termes de leur volatilité implicite. Cette dernière constitue un facteur très important car elle est intégrée dans les prix des options et ces derniers reflètent les anticipations futures du marché. Ce qui implique que la volatilité implicite constitue une estimation prévisionnelle de la volatilité de l'action. Les théoriciens et praticiens utilisent la formule de Black et Scholes pour calculer la volatilité implicite au prix de l'option. En inversant la formule de Black et Scholes de façon à obtenir la valeur de σ qui vérifie l'égalité entre le prix de marché de l'option et sa valeur théorique, la volatilité implicite est obtenue selon l'équation (1.1) :

$$C_{\text{mkt}}(K, T) = C_{\text{BS}}(\sigma_{\text{iv}}, K, T) \quad (1.1)$$

où :

$C_{\text{mkt}}(K, T)$ est le prix de l'option observé sur le marché, avec un prix d'exercice K et une échéance T .

$C_{\text{BS}}(\sigma_{\text{iv}}, K, T)$ est le prix du call obtenu par la formule de Black et Scholes avec le même prix d'exercice et la même échéance.

σ_{iv} est la volatilité implicite obtenue par la formule de Black et Scholes qui donne le prix de l'option observé sur le marché.

Pour résoudre l'équation (1.1), nous procédons par résolution numérique en l'exprimant sous la forme suivante:

$$f(\sigma) = C_{BS}(\sigma, K, T) - C_{mkt}(K, T) \quad (1.2)$$

La valeur de $f(\sigma)$ s'annule pour une valeur de σ égale à la valeur de la volatilité implicite, soit :

$$f(\sigma_{iv}) = 0. \quad (1.3)$$

Parmi les méthodes utilisées pour calculer les racines de la fonction $f(\sigma)$, on retient la méthode de Newton-Raphson, la méthode de bisection, et une méthode hybride³.

La méthode Newton-Raphson

Connaissant les paramètres de l'option tels que le prix spot, le prix d'exercice, l'échéance, le taux sans risque, et le type de l'option, call ou put, nous pouvons résoudre et trouver les racines de la fonction. L'équation (1.2) retourne la valeur de la volatilité implicite quand la différence entre le prix observé et celui du modèle est inférieure à un seuil de tolérance ε selon l'équation (1.4) :

$$C_{BS}(\sigma, K, T) - C_{mkt}(K, T) < \varepsilon \quad (1.4)$$

En spécifiant une valeur initiale estimée de la volatilité, la méthode Newton-Raphson converge rapidement vers la valeur de la volatilité implicite. Mais étant

³ Voir à ce sujet le livre de Rouah Douglas F. et V. Gregory, (2007), « Option Pricing Models & Volatility Using Excel-VBA », chapitre 10.

donné que l'algorithme de recherche des racines est très sensible à la valeur de départ («seed value»), la solution peut dévier dramatiquement de la racine réelle.

La méthode de bisection

Cette méthode requiert de spécifier deux bornes appropriées pour la fonction $f(\sigma)$. Ceci revient à fixer deux valeurs initiales σ_1 et σ_2 pour lesquelles la fonction $f(\sigma)$ prend respectivement une valeur positive et une valeur négative, soit $f(\sigma_1) > 0$ $f(\sigma_2) < 0$.

Bien que cette méthode réussit toujours à trouver la racine de la fonction $f(\sigma)$, elle requiert plus de temps et de calculs que la méthode Newton-Raphson. Cette dernière cherche la racine à chaque pas de l'algorithme tandis que la méthode bisection divise l'intervalle en deux à chaque pas. Il est alors possible d'appliquer les deux méthodes simultanément et de réaliser une convergence plus rapide avec une méthode hybride, la méthode de Newton-Raphson- bisection. Ainsi, à chaque pas, si la valeur estimée de la volatilité est hors bornes, une étape bissectrice est performée pour assurer la convergence. Une valeur initiale de volatilité n'est pas alors requise mais plutôt des bornes, et la valeur de départ sera définie comme le milieu de l'intervalle.

Le modèle de volatilité implicite permet d'identifier les propriétés des distributions des rendements des actions à travers un « smile » ou un « smirk ». En effet, la représentation, en trois dimensions, de la fonction reliant la volatilité implicite au prix d'exercice et à l'échéance fournit une surface de volatilité. À parité, la volatilité implicite est la plus basse et plus on s'éloigne de la parité, plus la volatilité implicite est élevée. On constate par ailleurs que le « smile » n'est souvent pas symétrique sur le marché des actions : plus haut du côté put que du côté call. Cela est dû au fait que les acteurs du marché sont plus sensibles au risque de baisse qu'au

risque de hausse de l'action. Pour un prix d'exercice donné, la différence entre la volatilité implicite observée et celle à parité représente le skew.

1.2 Calculs de la volatilité implicite non basés sur des modèles

Britten-Jones et Neuberger (2000) ont dérivé ces méthodes de calculs en incorporant les prix des options. Ces méthodes de calculs (« Model-free implied volatility ») ne se basent pas sur un modèle spécifique mais reposent sur un échantillon de prix d'options pour calculer la volatilité qui ne dépend d'aucun paramètre. Sous l'hypothèse que l'action ne verse pas de dividendes et que le taux sans risque est nul, ils ont dérivé l'espérance des rendements risque neutre entre deux dates T_1 et T_2 comme suit :

$$E^Q \left[\int_{T_1}^{T_2} \left(\frac{dS_t}{S_t} \right)^2 \right] = 2 \int_0^{\infty} \frac{C(T_2, K) - C(T_1, K)}{K^2} dK \quad (1.5)$$

où :

E^Q est l'espérance sous la mesure Q risque neutre

$C(T, K)$ est le prix du call observé avec une échéance T et un prix d'exercice K, S_t étant le prix de l'action au temps t

$\left(\frac{dS_t}{S_t} \right)^2$: représente la variance des rendements ou encore la volatilité au carré

Cette équation requiert deux groupes de prix du call dont le prix d'exercice K est variable et d'échéance T_1 pour un groupe et T_2 pour l'autre. La volatilité est alors obtenue en calculant la racine carrée de l'équation (1.5).

Britten-Jones et Neuberger (2000) montre que l'espérance de la volatilité sous la mesure risque neutre représente la volatilité implicite de Black et Scholes et par

conséquent produit une estimation biaisée de la volatilité comme l'illustre l'inégalité (1.6) de Jensen⁴:

$$E^Q \left[\int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{dS_t}{S_t} \right)^2 \right] \leq 2 \int_0^{\infty} \frac{C(T_2, K) - C(T_1, K)}{K^2} dK \quad (1.6)$$

Néanmoins, la partie à droite sera utilisée comme une estimation de la méthode des calculs non basés sur un modèle. En pratique, Jiang et Tian (2005) modifient le processus pour inclure les dividendes et le taux sans risque. Ainsi, le prix de l'action sera :

$$S_t^* = S_t - PV[D] \quad (1.7)$$

où :

S_t : le prix actuel de l'action

$PV[D]$: représente la valeur actuelle du montant total des dividendes versés durant la vie de l'option

Et en tenant compte du taux sans risque, le prix à terme F_t de l'action basé sur l'absence d'arbitrage sera :

$$F_t = S_t^* e^{r(T-t)} \quad (1.8)$$

Il est facile de montrer qu'une option sur F_t est équivalente à une option sur S_t^* , avec un prix d'exercice de Ke^{rT} . En incorporant les deux équations (1.7) et (1.8) dans l'équation (1.5) on aura :

⁴ Voir à ce sujet l'article de Britten-Jones M. et A. Neuberger, (2000), Option Prices, Implied Price Processes, and Stochastic Volatility, *Journal of Finance*, Vol.55, No.2, pp.839- 866.

$$E^Q \left[\int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{dS_t}{S_t} \right)^2 \right] = 2 \int_0^{\infty} \frac{C(T_2, Ke^{rt_2}) - C(T_1, Ke^{rt_1})}{K^2} dK \quad (1.9)$$

Cette équation prend en considération les dividendes versés et le taux sans risque en calculant la variance de l'action.

Pour dériver une mesure de volatilité comparable à la volatilité implicite, on doit calculer la variance entre la date actuelle et une date postérieure. Cela est effectué en fixant $T_1 = 0$ et $T_2 = T$, où T est l'échéance de l'option. On aura alors :

$$E^Q \left[\int_0^T \left(\frac{dS_t}{S_t} \right)^2 \right] = 2 \int_0^{\infty} \frac{C(T, Ke^{rT}) - \max(S_0 - K, 0)}{K^2} dK \quad (1.10)$$

A noter qu'un simple échantillon de prix d'option est requis pour effectuer le calcul. Cependant, deux problèmes se manifestent : la discrétisation des prix du call et la troncature du domaine d'intégration. En effet, les prix du call sur le marché sont disponibles dans un sous-ensemble de l'intervalle d'intégration. Ce qui implique que le domaine d'intégration sera tronqué. De plus, ces prix sont disponibles seulement dans des intervalles finis souvent des intervalles de cinq dollars, ce qui introduit un problème de discrétisation.

Calcul de la Volatilité à terme non basé sur des modèles⁵

Jusqu'à maintenant, on a pu calculer la volatilité à partir du temps 0 et jusqu'à l'échéance. Or on peut estimer la volatilité d'un temps T_1 à une date T_2 en réarrangeant l'équation de l'espérance sous la mesure Q risque neutre, on aura :

⁵ Voir à ce sujet le livre de Rouah Douglas F. et V. Gregory, (2007), « Option Pricing Models & Volatility Using Excel-VBA », chapitre 11.

$$\begin{aligned}
E^Q \left[\int_{T_1}^{T_2} \left(\frac{dS_t}{S_t} \right)^2 \right] &= 2 \int_0^{\infty} \frac{C(T_2, Ke^{rT_2}) - C(T_1, Ke^{rT_1})}{K^2} dK & (1.11) \\
&= 2 \int_0^{\infty} \frac{C(T_2, Ke^{rT_2})}{K^2} dK - 2 \int_0^{\infty} \frac{C(T_1, Ke^{rT_1})}{K^2} dK \\
&= 2 \int_0^{\infty} \frac{C(T_2, Ke^{rT_2}) - \max(S_0 - K, 0)}{K^2} dK - 2 \int_0^{\infty} \frac{C(T_1, Ke^{rT_1}) - \max(S_0 - K, 0)}{K^2} dK
\end{aligned}$$

Par conséquent, on peut exprimer la variance à terme dans un intervalle de temps $[T_1, T_2]$ comme la différence entre deux variances, où l'une est dans l'intervalle $[0, T_1]$ et l'autre dans $[0, T_2]$. La volatilité à terme (Model-free implied forward volatility) sera donc donnée par la racine carrée :

$$\sqrt{2 \int_0^{\infty} \frac{C(T_2, Ke^{rT_2}) - \max(S_0 - K, 0)}{K^2} dK - 2 \int_0^{\infty} \frac{C(T_1, Ke^{rT_1}) - \max(S_0 - K, 0)}{K^2} dK} \quad (1.12)$$

1.3 Le Modèle de Heston (1993)

Le modèle de Heston⁶ définit un processus de diffusion décrivant le prix de l'option qui est identique à celui de Black et Scholes, à l'exception de la volatilité qui varie stochastiquement avec le temps et évolue selon un processus de diffusion séparé de celui du sous-jacent. Par conséquent, l'introduction de la volatilité stochastique affecte le prix de l'option. Il y a deux façons d'implanter ce modèle, soit à travers la simulation de Monte Carlo du processus décrivant le prix de l'action, soit à travers une résolution analytique. De plus, le modèle de Heston tient compte de l'asymétrie

⁶ Voir à ce sujet l'article de Heston S., (1993), A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options, *Review of Financial Studies*, Vol.6, No 2, pp. 327- 343.

et du coefficient d'aplatissement de la distribution des prix de l'action et ajuste le prix des options en conséquence.

Dans ce modèle, il y a une corrélation entre le prix du sous-jacent et sa volatilité. Le processus de diffusion du prix de l'action est décrit par l'équation (1.13).

$$dS_t = \mu S dt + \sqrt{v(t)} S dz_1(t) \quad (1.13)$$

où :

S est le prix de l'action sous-jacente ;

μ est le taux de rendement espéré instantané de l'action (« drift parameter ») ;

$\sqrt{v(t)}$ est la volatilité du rendement de l'action ;

$dz_1(t)$ est une variable aléatoire brownienne du processus de Wiener, dont l'espérance est nulle et la variance égale à l'unité.

La volatilité $\sqrt{v_t}$ suit le processus de diffusion de Ornstein-Uhlenbeck suivant :

$$d\sqrt{v(t)} = -\beta \sqrt{v(t)} dt + \delta dz_2(t) \quad (1.14)$$

avec $z_2(t)$, un processus de Wiener qui a une corrélation ρ avec $z_1(t)$. Le lemme d'Itô permet d'obtenir le processus de diffusion de la variance $v(t)$, qui s'écrit alors comme le processus de Cox, Ingersoll, et Ross (1985) :

$$dv(t) = \kappa [\theta - v(t)] dt + \sigma \sqrt{v(t)} dz_2(t) \quad (1.15)$$

où :

θ est la moyenne de la variance à long terme ;

κ est un paramètre de retour à la moyenne ;

σ est la volatilité de la volatilité.

Les équations stochastiques risque neutres de Heston qui permettent de simuler les trajectoires du prix du sous-jacent et de sa volatilité s'écrivent alors:

$$dx(t) = \left[r - \frac{1}{2} v(t) \right] dt + \sqrt{v_t} dz_1(t) \quad (1.16)$$

$$dv(t) = \kappa [\theta - v(t)] dt + \sigma \sqrt{v_t} dz_2(t) \quad (1.17)$$

L'implantation du modèle

Ceci consiste en une simulation de Monte Carlo. Un grand nombre de trajectoires du prix de l'action est généré durant la vie de l'option selon le processus stochastique de S_t . Pour chaque trajectoire de prix, la valeur terminale de l'option est actualisée au taux sûr jusqu'au temps zéro. Ceci donne le prix de l'option pour une trajectoire. Ce processus est répété plusieurs fois et le prix de l'option sera évalué comme la moyenne des prix de l'option actualisés sur chaque trajectoire. Le même procédé peut être répété pour générer les trajectoires suivies par la volatilité.

Cette approche requiert d'estimer les paramètres du processus tels que la variance à long terme θ , la variance actuelle v_t , le paramètre de retour à la moyenne κ , la volatilité de la variance σ , et le facteur de corrélation ρ entre le processus décrivant le prix de l'action et celui de sa volatilité. Dans ce cas, la faiblesse du modèle d'Heston provient de la nécessité d'une intégration numérique et les prix de l'option ainsi que la volatilité seront très sensibles à la largeur de l'intervalle d'intégration et aux valeurs estimées. Les caractéristiques attrayantes du modèle de Heston (1993) sont :

- a) La structure dynamique de sa volatilité permettant de générer une solution analytique pour les options européennes et par conséquent le modèle est rapidement calibré pour n'importe quelles données.
- b) Le processus stochastique décrivant le prix du sous-jacent est valable aussi pour des distributions non logarithmiques des rendements des titres.

- c) Le modèle prend en considération l'effet de levier, à travers le coefficient de corrélation entre le prix de l'action et sa volatilité, soit ρ .
- d) Le modèle est capable de tracer des surfaces de volatilité à partir des prix d'options disponibles sur le marché.

Notons enfin que l'asymétrie positive ou négative affecte les prix des options. Une valeur négative de ρ induit une asymétrie négative dans la distribution des prix de l'action. Et quand les prix du titre présentent une asymétrie négative, la probabilité de réaliser de grandes pertes est plus importante que celle prédit par le modèle Black et Scholes. Le modèle de Heston est capable de détecter l'asymétrie de la distribution et d'ajuster le prix du call en conséquence.

De l'autre côté, la volatilité de la variance contrôle le coefficient d'aplatissement («kurtosis») de la distribution des rendements : une plus grande volatilité de la variance augmente le kurtosis de la distribution tandis qu'une plus faible volatilité le fait diminuer.

1.4 Modèle de volatilité stochastique avec retour à la moyenne⁷

Dans le modèle de la volatilité stochastique avec retour à la moyenne, le prix du titre sous-jacent est une variable aléatoire suivant un processus de diffusion décrit par l'équation (1.18). De même, la volatilité ne demeure pas constante durant toute la vie de l'option mais suit un processus de diffusion géométrique tel que donné par l'équation (1.19) :

$$dS = \mu S dt + \sigma S dz \quad (1.18)$$

$$d\sigma = \mu_s \sigma dt + \sigma_s \sigma dz_s \quad (1.19)$$

⁷ Khoury N. et J.-M. Ganon, (2005), Les régimes de rémunération à base d'options aux dirigeants : charge comptable et régie d'entreprise, cahier de recherche, pp. 9- 10.

où

μ_s est le taux de croissance instantané de la volatilité ;

σ_s est la volatilité de la volatilité.

Le processus du prix du titre sous-jacent et celui de sa volatilité sont corrélés comme le montre l'équation (1.20):

$$dz_s = \rho dz \quad (1.20)$$

où ρ est le coefficient de corrélation entre dz et dz_s . Ce coefficient de corrélation peut être positif ou négatif.

D'autre part, le processus aléatoire, qui décrit la volatilité du titre sous-jacent, permet de proposer que la volatilité moyenne de même que la variance de la volatilité évoluent selon la loi lognormale avec le temps. Le processus de retour à la moyenne peut être alors exprimé par l'équation (1.21):

$$d\sigma^2 = a(\mu_s - \sigma^2) dt + \sigma_s \sigma^2 dz_s \quad (1.21)$$

où a est le paramètre de vitesse de retour à la moyenne ;

μ_s est le taux de croissance instantané de la volatilité.

À partir de ces définitions, le terme $a(\mu_s - \sigma^2) dt$ représente la croissance instantanée de la variance (« drift rate »).

1.5 Le modèle du VIX⁸

L'indice récent du Chicago Board Options Exchange, le VIX, constitue l'une des applications importantes du « model free volatility ». Le VIX a été originellement défini en termes des volatilités implicites de Black et Scholes calculées à partir

⁸ www.cboe.com/micro/vix/vixwhite.pdf

d'options à parité sur l'indice S&P 100. Récemment, le VIX utilise différents types d'options écrites sur l'indice S&P500, et se base sur le « model free implied volatility » plutôt que sur le modèle de Black et Scholes. Le VIX est calculé par le biais de la formule (1.22) suivante :

$$\sigma^2 = \frac{2}{T} \sum_i \frac{\Delta K_i}{K_i^2} e^{rT} Q(K_i) - \frac{1}{T} \left[\frac{F}{K_0} - 1 \right]^2 \quad (1.22)$$

$\sigma = \text{VIX}/100$ ou $\text{VIX} = \sigma * 100$;

T est l'échéance ;

ΔK_i est l'intervalle entre deux prix d'exercices tel que $\Delta K_i = \frac{K_{i+1} - K_{i-1}}{2}$;

K_i est le prix d'exercice de l'option i hors-jeu ;

r est le taux sans risque ;

$Q(K_i)$ est le centre de l'écart entre les cours acheteur et vendeur d'une option dont le prix d'exercice est K_i ;

F est l'indice à terme ;

K_0 est le premier prix d'exercice inférieur à l'indice à terme, F.

La figure 1.1 représente les valeurs de fermetures de l'indice de volatilité VIX du 2 janvier 1990 au 20 août 2007, telles que données par le Chicago Board Options Exchange et Bloomberg.

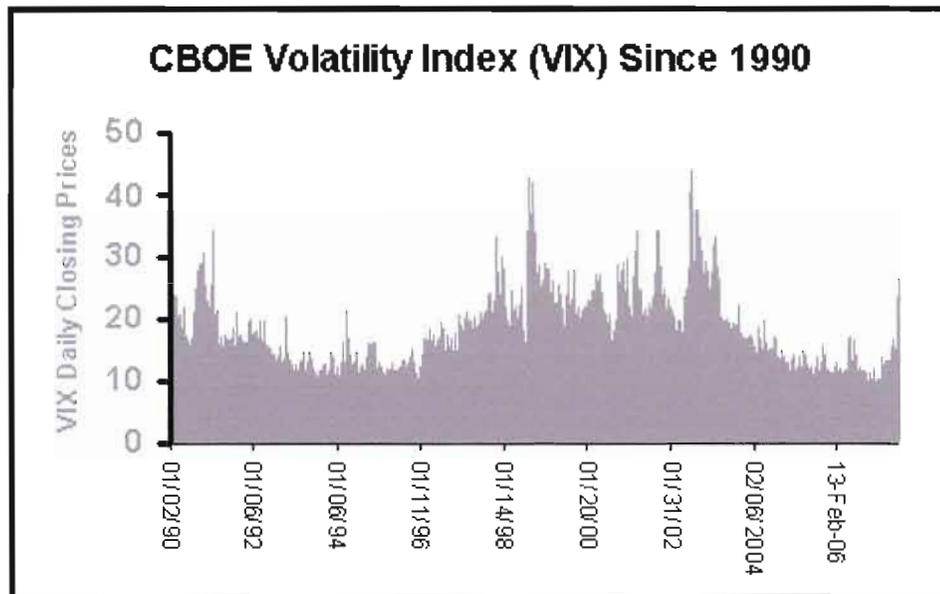


Figure 1.1 – Les valeurs de fermeture du VIX (du 2 janvier 1990 au 20 août 2007)
Source: Chicago Board Options Exchange et Bloomberg

Le VIX utilise en général des put et des call dont l'expiration est dans les deux mois les plus proches afin de couvrir une période de 30 jours. Carr et Wu(2006) expliquent la dérivation du VIX et sa relation avec l'approximation d'un taux de swap de la variance sur une période de 30 jours (« 30-day variance swap rate »). En d'autres termes, le premier ensemble de prix d'options utilisés renferme des options dont l'échéance est de moins de 30 jours. Le deuxième ensemble de prix d'options contient des options dont l'échéance est de plus de 30 jours.

Le temps jusqu'à échéance de chaque sous-ensemble est calculé en minutes à partir du moment de calcul du jour courant. Il est ensuite exprimé en année selon l'équation (1.23):

$$T_i = \frac{N_{T_i}}{M_y} = \frac{(M_C + M_S + M_O)}{M_y} \quad (1.23)$$

avec :

$$N_{Ti} = M_C + M_S + M_O$$

= nombre de minutes jusqu'à l'échéance du sous-ensemble d'options i ;

$$M_Y = 365 * 24 * 60 = 525\ 600 \text{ min, indépendamment du temps de calcul ;}$$

M_C = nombre de minutes du temps de calcul jusqu'à minuit du jour courant ;

M_S = nombre de minutes de minuit jusqu'à 8h30 le jour suivant ;

$$= 8.5 * 60 = 510 \text{ min}$$

M_O = nombre de minutes du jour suivant jusqu'à l'échéance.

Le Chicago Board Options Exchange (CBOE) explique comment calculer le VIX avec deux sous-ensembles de prix d'options en trois étapes. Chaque sous-ensemble est trié selon le prix d'exercice et n'inclut pas plus que deux options consécutives hors-jeu dont le prix est nul. Pour chaque option, le point milieu de l'écart entre le cours acheteur (« bid ») et le cours vendeur (« ask ») de l'option est considéré comme le prix de l'option.

1^{ère} étape : Sélectionner des options pour le calcul du VIX et le calcul de l'indice à terme F pour chaque sous-ensemble. L'indice à terme F est calculé en fonction de la différence en valeur absolue du prix du call et du prix du put correspondants au prix d'exercice K de l'option à parité et pour lequel cette différence est la plus petite.

$$F = K + e^{rt} \times | \text{Call} - \text{Put} | \quad (1.24)$$

Les options hors-jeu sélectionnées sont des calls dont le prix d'exercice est supérieur à K_0 et des puts dont le prix d'exercice est inférieur à K_0 . Le prix de l'option dont le prix d'exercice est égal à K_0 est considéré égal à la moyenne des prix du call et du put de même prix d'exercice.

2^{ème} étape : Calculer la volatilité de chaque sous-ensemble échéant respectivement dans T_1 et T_2 jours, selon les équations (1.25) et (1.26) :

$$\sigma_1^2 = \frac{2}{T_1} \sum_i \frac{\Delta K_i}{K_i^2} e^{rT_1} Q(K_i) - \frac{1}{T_1} \left(\frac{F_1}{K_0} - 1 \right)^2 \quad (1.25)$$

$$\sigma_2^2 = \frac{2}{T_2} \sum_i \frac{\Delta K_i}{K_i^2} e^{rT_2} Q(K_i) - \frac{1}{T_2} \left(\frac{F_2}{K_0} - 1 \right)^2 \quad (1.26)$$

3^{ème} étape : effectuer une interpolation avec les deux variances σ_1 et σ_2 calculées à la deuxième étape pour obtenir la variance correspondante à une échéance de 30 jours. Ensuite, on multiplie la racine carrée de la variance par 100 pour avoir l'indice VIX de la volatilité sur une période de 30 jours selon l'équation (1.27):

$$\sigma_{VIX} = 100\% \times \sqrt{T_1 \sigma_1^2 \left(\frac{N_{T_2} - N_{30}}{N_{T_2} - N_{T_1}} \right) + T_2 \sigma_2^2 \left(\frac{N_{30} - N_{T_1}}{N_{T_2} - N_{T_1}} \right) \times \left(\frac{N_{365}}{N_{30}} \right)} \quad (1.27)$$

où

N_{30} = le nombre de minutes dans 30 jours, soit 43 200 min;

N_{365} = le nombre de minutes dans 365 jours, soit 525 600 min;

N_{T_1} = le nombre de minutes jusqu'à l'échéance du premier sous-ensemble ;

N_{T_2} = le nombre de minutes jusqu'à l'échéance du second sous-ensemble.

MÉTHODOLOGIE

La modélisation de la volatilité est un problème assez délicat. En général, la volatilité est considérée comme une donnée dans la théorie financière. Or, il apparaît nettement que la volatilité semble présenter une dépendance temporelle, à plus ou moins long terme. Ainsi des périodes calmes avec une volatilité faible succèdent à des périodes plus agitées et chaotiques avec une volatilité bien plus importante. De plus, la volatilité semble ne pas suivre la loi normale classique, mais plutôt une distribution d'échelle.

D'abord proposé par Engle en 1982, les processus ARCH⁹ sont une forme de processus stochastiques largement utilisés dans la finance et l'économie pour modéliser l'hétéroscédasticité conditionnelle et le « clustering » de la volatilité. Le développement de ces modèles économétriques a constitué une révolution dans la modélisation financière des séries temporelles. Les modèles GARCH, ou modèles autorégressifs conditionnellement hétéroscédastiques généralisés, viennent apporter une réponse aux faits empiriques répertoriés ci-dessus, en autorisant une dépendance linéaire de la volatilité avec ses valeurs historiques, et en ajustant cette volatilité avec le carré des rendements observés. Ils permettent par conséquent d'obtenir le fameux « volatility clustering » observé sur les marchés financiers, c'est-à-dire le regroupement des valeurs extrêmes, et également d'obtenir des volatilités avec des queues de distribution épaisses. Nous allons considérer par la suite le modèle GARCH (1,1), soit le plus simple des modèles de la famille GARCH, qui permet d'établir une dépendance temporelle du premier ordre avec trois paramètres.

⁹ Autoregressive Conditional Heteroscedasticity

CHAPITRE II

LE MODÈLE DE GARCH

2.1 Le Modèle GARCH (1,1)

Ce modèle est largement utilisé autant dans la pratique que dans les discours académiques. L'estimation de la volatilité stochastique par le modèle GARCH(1,1) est perçue comme un processus générant des données réalistes par beaucoup d'institutions financières qui l'appliquent quotidiennement. En effet, le modèle est très utile pour modéliser le comportement de la variance conditionnelle du terme aléatoire d'une équation économétrique dans le temps et pour capter l'effet de la volatilité sur les prix des actions. La forme générale de ce modèle est représentée par le modèle GARCH(p, q). Les prévisions de GARCH (p, q) pour la volatilité au temps $t+1$ sont basées sur les valeurs observées au temps t , et sont données par :

$$\sigma_{t+1}^2 = w + \sum_{i=1}^p \alpha_i r_{t+1-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j \sigma_{t+1-j}^2 \quad (2.1)$$

où :

σ_{t+1-j}^2 représentent les estimations historiques de la variance

r_{t+1-i}^2 représentent les carrés des rendements historiques

w, α_i, β_j sont les paramètres du modèle

Le modèle GARCH, le plus simple et le plus utilisé, est le modèle GARCH(1,1) donné par les deux équations (2.2) et (2.3).

$$r_t = \sigma_t z_t \quad (2.2)$$

$$\sigma_t^2 = w + \alpha r_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2 \quad (2.3)$$

où z_t est une variable aléatoire distribuée normalement : $z_t \sim N(0,1)$

Les paramètres w , α , β sont utilisés pour définir le modèle GARCH(1,1) et pour illustrer l'efficacité du modèle à capter l'effet de grappe de la volatilité (« volatility clustering »), cela même en considérant des valeurs arbitraires des ces paramètres lors du calcul. Ces paramètres sont injectés dans l'équation (2.3) pour estimer la variance σ_t^2 à partir des rendements r_{t-1}^2 et des variances σ_{t-1}^2 . Une des réussites principales du modèle GARCH consiste à effectuer des prévisions précises de la volatilité à court terme. Le modèle met plus de poids et plus d'importance aux plus récents rendements observés.

Dans ce modèle, $\alpha + \beta$ mesurent la persistance de la volatilité dans le temps et il faut que $\alpha + \beta < 1$ pour que la variance retourne à la moyenne à long terme. Plus $\alpha + \beta$ tend vers 1, plus la volatilité persiste dans le temps. Plus $\alpha + \beta$ tend vers 0, plus la volatilité converge rapidement vers la variance à long terme.

Une des conséquences qui résulte du fait que les rendements des actifs ne sont pas indépendants¹⁰ est la persistance de la volatilité qui tend à se manifester en grappe et à se maintenir dans le temps. La persistance de la volatilité peut être décelée en traçant le corrélogramme des variances des rendements.

¹⁰ Parmi les hypothèses qui sous-tendent le modèle de Black et Scholes, citons les rendements d'un actif qui sont supposés non corrélés et indépendants.

Ceci est présenté à la figure 2.1 qui montre que les carrés des rendements sont autocorrélés même pour des retards k élevés.

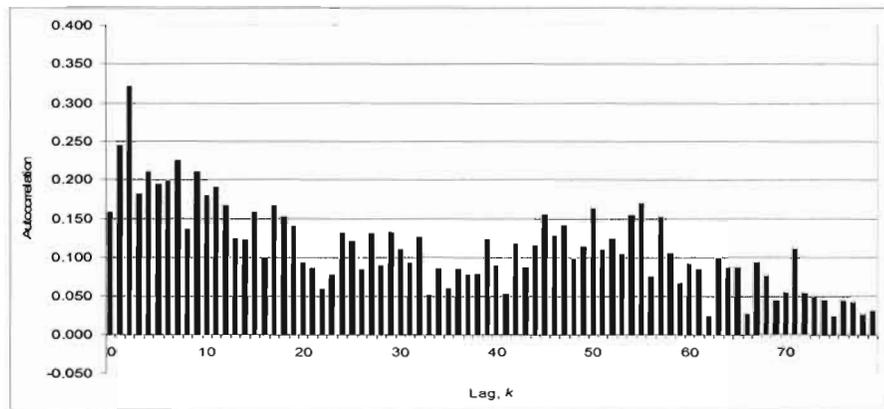


Figure 2.1 - Corrélogramme des carrés des rendements de l'indice S&P500
source : Rouah et Vainberg, (2007), « Option pricing models and volatility », p.167.

Ensuite, les rendements r_t^2 peuvent être standardisés en divisant chacun d'eux par la racine carrée de sa variance estimée par le modèle de GARCH. Ceci produit une série temporelle de rendements standardisés définis comme suit:

$$z_t = r_t / \sigma_t \quad (2.4)$$

Le corrélogramme des rendements standardisés z_t^2 est alors tracé pour s'assurer que le modèle soit en mesure de capter l'effet de grappe ou « volatility clustering ».

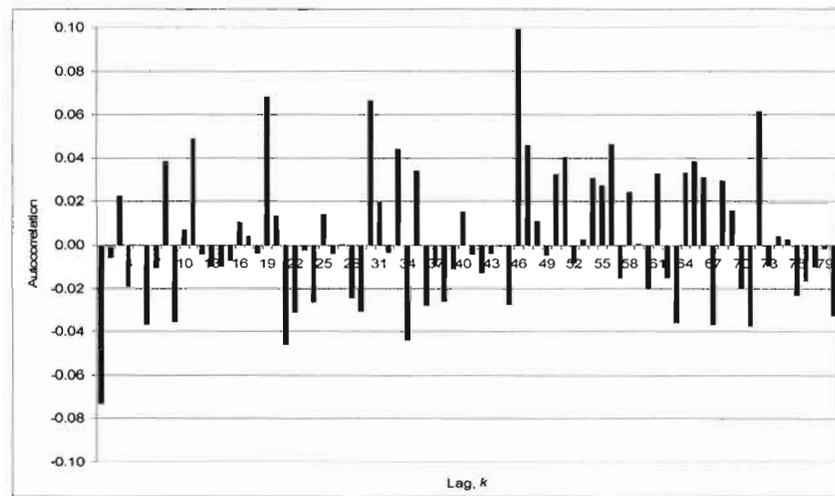


Figure 2.2 - Corrélogramme des rendements standardisés de l'indice S&P500
source : Rouah et Vainberg, (2007), Option pricing models and volatility, p.168.

Le corrélogramme présenté à la figure 2.2 indique bien que le modèle est vraiment capable de capter la volatilité variable dans les rendements. Il affiche des séries d'autocorrélations qui sont faibles pour tous les retards k , ce qui montre l'absence de profils discernables ou persistants. Par conséquent, en tenant compte de la volatilité stochastique variable dans le temps par le processus de GARCH, l'autocorrélation entre les rendements r_i^2 a été éliminée.

2.2 L'implémentation du modèle GARCH de Heston et Nandi (2000)¹¹

Heston et Nandi (2000) ont développé une approche de résolution analytique pour calculer le prix d'une option dont la volatilité suit le processus de GARCH. Leur modèle inclut des facteurs, appelés les retards, dans le processus dynamique de la variance. En effet, le pricing des options dans le modèle GARCH se fait en fonction des prix spots actuels et retardés.

¹¹ Voir à ce sujet l'article de Heston, S. et S. Nandi, (1997), A Closed Form GARCH Option Pricing Model, *Federal Reserve Bank of Atlanta*, Working Paper 97-9, 1-34.

Il y a deux suppositions qui sous-tendent ce modèle. La première suppose que le logarithme du prix spot de l'action suit un processus de GARCH(p,q) mais la présentation du modèle sera pour le premier ordre, soit $p=q=1$. La deuxième supposition spécifie que le prix d'un call s'obtient par la formule de Black et Scholes. Les deux équations qui régissent le processus GARCH (1,1) de Heston et Nandi(2000) sont :

$$r_{t+1} = r + \lambda \sigma_{t+1}^2 + \sigma_{t+1} z_{t+1} \quad (2.5)$$

$$\sigma_{t+1}^2 = \omega + \beta \sigma_t^2 + \alpha (z_t - \gamma \sigma_t)^2 \quad (2.6)$$

où

r est le taux sans risque quotidien

σ_t^2 est la variance conditionnelle

z_t est un terme d'erreur distribué normalement $\sim N(0,1)$

$\lambda, \gamma, \beta, \alpha, \omega$ sont les paramètres du modèle.

On remarque que l'équation (2.6) est une variante de l'équation (2.3) du processus de GARCH (1,1) classique. En effet, le terme r_t^2 est remplacé par $(z_t - \gamma \sigma_t)^2$.

Heston et Nandi établissent plusieurs propriétés de cette version de GARCH (1,1). La persistance de la variance est alors mesurée par l'équation (2.7) :

$$\beta + \alpha \gamma^2 \quad (2.7)$$

Le processus est stationnaire et possède une variance et une moyenne finie si le terme $\beta + \alpha \gamma^2 < 1$ et par conséquent, le processus en sera un retour à la moyenne. Qui plus est, en réarrangeant l'équation (2.6), les auteurs ont pu démontrer que α détermine le kurtosis tandis que γ mesure l'asymétrie. Pour ce modèle la relation entre la variance et le rendement de l'action est :

$$\sigma_{t+1}^2 = \omega + \beta\sigma_t^2 + \alpha \frac{(R_t - r - \lambda\sigma_t^2 - \gamma\sigma_t^2)^2}{\sigma_t^2} \quad (2.8)$$

En général, la variance et le rendement de l'action sont corrélés :

$$Cov_{t-\Delta}(\sigma_{t+\Delta}^2, r_t) = -2\alpha\gamma\sigma_t^2 \quad (2.9)$$

La version risque neutre des équations (2.5) et (2.6) se réécrit de la façon suivante :

$$r_{t+1} = r - \frac{1}{2}\sigma_{t+1}^2 + \sigma_{t+1}z_{t+1}^* \quad (2.9)$$

$$\sigma_{t+1}^2 = \omega + \beta\sigma_t^2 + \alpha(z_t - \gamma^*\sigma_t)^2 \quad (2.10)$$

où λ est remplacé par $-1/2$, γ est remplacé par $\gamma + \lambda + 1/2$ et $z^*(t) = z(t) + (\lambda + 1/2)\sigma^2(t)$,

Heston et Nandi(2000) montrent que le prix d'un call qui échoit dans $t + T$ et à un prix d'exercice K , peut être obtenu par l'équations (2.11) :

$$Call = e^{-rT} E_t^*[(S_{t+T} - K, 0)] = S_t P_1 - K e^{-rT} P_2 \quad (2.11)$$

où :

S_t est le prix du sous-jacent

$E_t^*[\cdot]$ est l'espérance sous la distribution risque neutre au temps t

P_1 et P_2 sont les probabilités risque neutres définis par :

$$P_1 = \frac{1}{2} + \frac{e^{-rT}}{\pi S_t} \int_0^\infty \text{Re} \left[\frac{K^{-i\phi} f^*(i\phi + 1)}{i\phi} \right] d\phi \quad (2.12)$$

$$P_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \text{Re} \left[\frac{K^{-i\phi} f^*(i\phi)}{i\phi} \right] d\phi \quad (2.13)$$

Dans la section suivante, on utilise ce modèle pour simuler la volatilité pour déterminer s'il constitue un modèle valable qui peut joindre la famille des modèles GARCH pour estimer la volatilité d'un actif.

2.3 Estimation des paramètres

Les paramètres du modèle GARCH(1,1) doivent être estimés à partir des rendements historiques de l'indice S&P500. La technique populaire utilisée pour l'estimation de ces paramètres est l'estimation du maximum de vraisemblance. Les rendements de l'indice S&P500 sont supposés avoir une distribution normale avec une moyenne nulle et une variance σ_t^2 . Ceci se traduit par:

$$E_{t-1}[r_t] = 0 \quad (2.14)$$

$$E_{t-1}[r_t^2] = \sigma_t^2 \quad (2.15)$$

La fonction de densité de probabilité pour r_t est donnée par la formule suivante:

$$f(r_t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_t^2}} \exp\left(\frac{-r_t^2}{2\sigma_t^2}\right) \quad (2.16)$$

En supposant que les rendements r_t sont indépendants, la densité de probabilité jointe de r_1, \dots, r_n peut être écrite sous la forme :

$$\mathbf{L}(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n) = \prod_{i=1}^n f(r_i) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_i^2}} \exp\left(\frac{-r_i^2}{2\sigma_i^2}\right) \quad (2.17)$$

Les valeurs de w , α et β qui maximisent la formule ci-dessus sont les estimations des paramètres du modèle de GARCH par la méthode de maximum de vraisemblance (maximum likelihood estimates, MLEs). La méthode du maximum de vraisemblance est très utilisée pour l'estimation des modèles des séries temporelles.

Elle est particulièrement adaptée pour prendre en compte les aspects non linéaires de ces modèles.

Quant à l'estimation des paramètres du modèle GARCH de Heston et Nandi(2000), on utilisera la méthode du maximum de vraisemblance, avec les valeurs de départ données par Christofferson and Jacobs(2004) pour les paramètres.

Vu la complexité des équations, on a recourt aux équations (2.18) et (2.19) pour estimer les paramètres :

$$r_t = r - \frac{1}{2}\sigma_t^2 + \lambda\sigma_t + \sigma_t z_t \quad (2.18)$$

$$\sigma_t^2 = \omega + \beta\sigma_{t-1}^2 + \alpha(z_{t-1} - \theta)^2 \quad (2.19)$$

où θ est un paramètre tel que $\alpha(1+\theta^2) + \beta$ mesure la persistance¹² de la volatilité. Par analogie avec l'équation (2.7)¹³, on peut déduire que le terme $\gamma^2 = 1+\theta^2$.

Ainsi, connaissant la variance au temps t-1, on peut obtenir la variance au temps t par le biais de l'équation (2.19). Ensuite, on obtient de l'équation (2.18) la valeur de z_t qui sert à calculer la variance au temps t+1 dans l'équation (2.19) et ainsi de suite. La densité de probabilité de z_t est donnée par :

$$f(z_t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_t} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{r_t - r - \lambda\sigma_t + \frac{1}{2}\sigma_t^2}{\sigma_t}\right)^2\right) \quad (2.20)$$

¹² Voir à ce sujet l'article de Christofferson P. et K. Jacobs, (2004), Which GARCH Model for Option Valuation, *Management Science*, Vol. 50, No. 9, pp.7

¹³ voir page 20

Et le logarithme de vraisemblance prend la forme suivante :

$$\text{Log}L \propto -\sum_{i=2}^T \ln \sigma_i - \sum_{i=2}^T \left(\frac{r_i - r - \lambda \sigma_i + \frac{1}{2} \sigma_i^2}{\sigma_i} \right)^2 \quad (2.21)$$

2.4 Implémentation dans VBA

On commence tout d'abord à estimer les paramètres du modèle GARCH(1,1) par la méthode des MLE (Maximum likelihood Estimation). Les estimateurs du maximum de vraisemblance sont très attrayants en raison de leurs propriétés dans les grands échantillons où les estimateurs convergent vers leur vraie valeur. De même, on peut prouver qu'ils sont asymptotiquement efficaces (à variance minimale).

Les données traitées sont les prix historiques de l'indice S&P500 s'étendant du 3 janvier 2000 jusqu'à 9 novembre 2007¹⁴. L'estimation des paramètres peut en effet être effectuée en calculant les bornes inférieure et supérieure des paramètres pour un intervalle de confiance de 95%. Les paramètres estimés obtenus¹⁵ sont présentés au tableau 2.1:

Tableau 2. 1
Les paramètres estimés du modèle GARCH(1,1) selon le MLE

Paramètres	Valeurs estimées	Intervalle de confiance à 95% Borne inférieure	Intervalle de confiance à 95% Borne supérieure
$\omega =$	1.0207E-06	-3.8578E-06	5.8992E-06
$\alpha =$	0.0649	0.026404361	0.103445571
$\beta =$	0.9262	0.842898013	1.009550539

¹⁴ Les données sont tirées du site www.yahoofinance.com

¹⁵ Les détails des calculs ainsi que le code VBA sont présentés dans l'annexe 1.

Les paramètres du modèle GARCH de Heston et Nandi (2000), sont estimés à partir de la méthode du maximum de vraisemblance avec les mêmes données de départ que précédemment. Les paramètres estimés obtenus¹⁶ sont présentés au tableau 2.2:

Tableau 2.2
Les paramètres estimés de H&N (2000)

Paramètres	Valeurs estimées
$\lambda =$	-0.01966127
$\omega =$	0.00000129
$\beta =$	0.8202621
$\alpha =$	0.04150064
$\gamma =$	2.041063842

Les paramètres du tableau 2.1 sont ensuite injectés dans l'équation (2.3) du modèle GARCH (1,1) pour générer la volatilité de l'indice S&P500 représentée à la figure 2.3 :

¹⁶ Les détails des calculs ainsi que le code VBA sont présentés dans l'annexe 2.

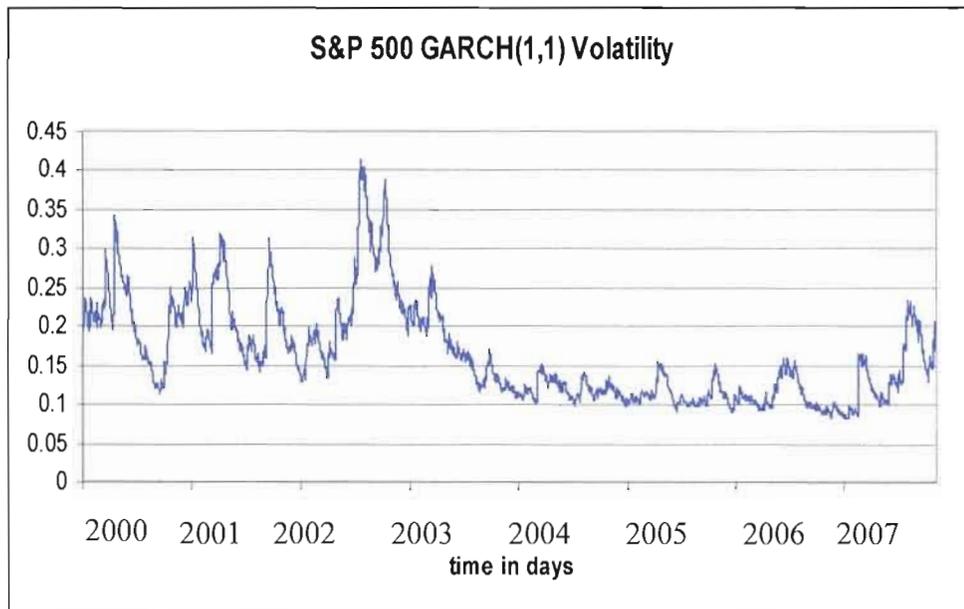


Figure 2.3 - La volatilité de l'indice S&P500 selon le modèle GARCH(1,1).

La variance à long terme dans le modèle de GARCH(1,1) est donnée par l'équation (2.22) et présentée au tableau 2.3:

$$\sigma^2 = \frac{w}{1 - \alpha - \beta} \quad (2.22)$$

Tableau 2.3
La volatilité à long terme du S&P500 par GARCH(1,1)

$\omega =$	1.0207E-06
$\alpha =$	0.0649
$\beta =$	0.9262
Variance $w / (1 - \alpha - \beta) =$	0.00011468
Volatilité =	0.1705 ou 17.05%

L'équation de la variance peut se réécrire de la façon suivante¹⁷ :

$$\sigma_t^2 = w + \alpha.r_{t-1}^2 + \beta.\sigma_{t-1}^2 = \sigma^2(1 - \alpha - \beta) + \alpha.r_{t-1}^2 + \beta.\sigma_{t-1}^2 \quad (2.23)$$

Pour le n^{ième} jour, la variance GARCH sera :

$$\begin{aligned} \Rightarrow \sigma_{t+n}^2 &= \sigma^2(1 - \alpha - \beta) + \alpha.r_{t+n-1}^2 + \beta.\sigma_{t+n-1}^2 \\ \sigma_{t+n}^2 - \sigma^2 &= \alpha(r_{t+n-1}^2 - \sigma^2) + \beta(\sigma_{t+n-1}^2 - \sigma^2) \end{aligned} \quad (2.24)$$

Au temps t, la valeur espérée de r_{t+n-1}^2 est de:

$$E_t[r_{t+n-1}^2] = \sigma_{t+n-1}^2 \quad (2.25)$$

Donc, avec $E_t[\sigma_t^2] = \sigma_t^2$, on aura :

$$\begin{aligned} E_t[\sigma_{t+n}^2 - \sigma^2] &= (\alpha + \beta) E_t[\sigma_{t+n-1}^2 - \sigma^2] \\ &= (\alpha + \beta)^n (\sigma_t^2 - \sigma^2) \end{aligned} \quad (2.26)$$

La structure à terme de la volatilité peut être également obtenue à partir du modèle GARCH(1,1). Une fonction $V(n) = E_t[\sigma_{t+n}^2]$ et une constante $a = -\ln(\alpha + \beta)$ sont définies. La fonction $V(n)$ s'écrit alors de la façon suivante :

$$V(n) = \sigma^2 + e^{-an} [V(0) - \sigma^2] \quad (2.27)$$

avec $V(0) = \sigma_t^2$ la variance GARCH

¹⁷ Voir à ce sujet Rouah Douglas F. and G. Vanberg, (2007), Option Pricing Models & Volatility Using Excel-VBA, chapitre 6 pp.172-173.

La variance moyenne sur l'intervalle (0, T) est donnée par:

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_{u=0}^T V(u) du &= \frac{1}{T} \left(u\sigma^2 - \frac{e^{-au}}{a} [V(0) - \sigma^2] \right) \Big|_{u=0}^{u=T} & (2.28) \\ &= \sigma^2 + \frac{1 - e^{-aT}}{aT} [V(0) - \sigma^2] \end{aligned}$$

Comme l'équation (2.28) représente la variance moyenne quotidienne, il faut la multiplier par 252 pour l'annualiser :

$$\sigma^2(T) = 252 \times \left(\sigma^2 + \frac{1 - e^{-aT}}{aT} [V(0) - \sigma^2] \right) \quad (2.29)$$

Et la volatilité moyenne annuelle sera donnée alors par :

$$\sigma(T) = \sqrt{252 \times \left(\sigma^2 + \frac{1 - e^{-aT}}{aT} [V(0) - \sigma^2] \right)} \quad (2.30)$$

La structure à terme prévue par le modèle de GARCH peut être représentée¹⁸ graphiquement en traçant $\sigma(T)$ en fonction de T à la figure 2.4 :

¹⁸ Le code VBA ainsi que le chiffrier Excel se trouve dans l'annexe 3.

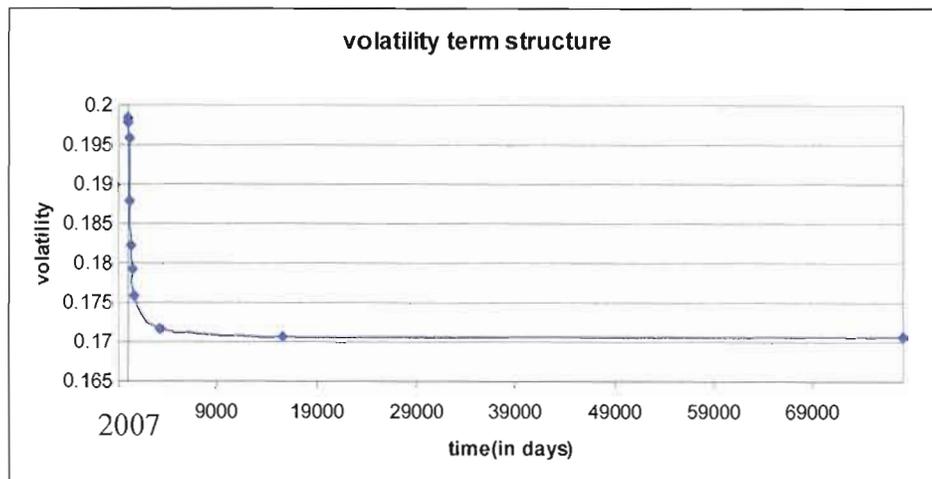


Figure 2.4 - La structure à terme de la volatilité par le modèle de GARCH(1,1).

Quand la variance actuelle de GARCH σ_{t+1}^2 est supérieure à la variance à long terme σ^2 , la pente de la courbe sera négative. Cela signifie que lorsque la variance à long terme est finie, avec $\alpha + \beta < 1$, la variance actuelle de GARCH suit un processus de retour à la variance moyenne. Par conséquent, la variance actuelle diminuera pour converger vers la variance moyenne.

Par contre, quand $\sigma_{t+1}^2 < \sigma^2$, la pente de la courbe sera positive. En effet, la variance actuelle augmentera pour converger vers la variance moyenne.

Enfin, les paramètres du tableau 2 sont injectés dans l'équation (3) pour générer la volatilité par le modèle GARCH de Heston et Nandi (2000)¹⁹ pour un scénario de 2000 à 2007 comme le montrent les figures 2.5 et 2.6 :

¹⁹ Le code VBA et les calculs sont présentés dans l'annexe 4

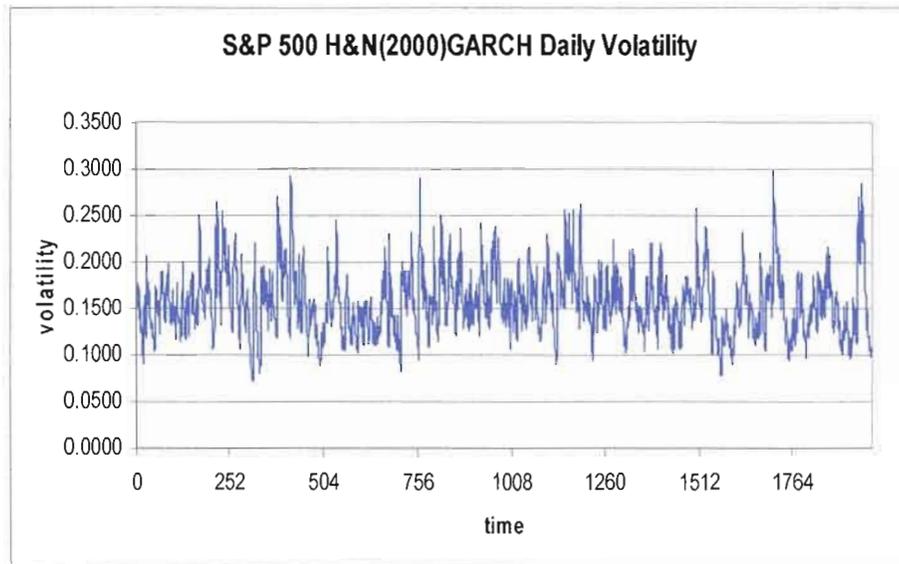


Figure 2.5 - La volatilité journalière de l'indice S&P500 selon le modèle GARCH de Heston et Nandi(2000) de l'année 2000 à l'année 2007.

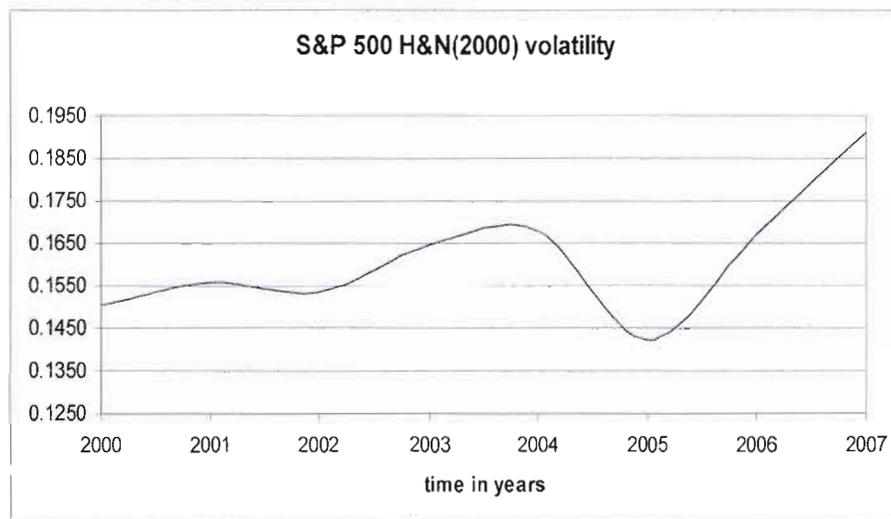


Figure 2.6 - La volatilité annuelle du S&P500 selon le modèle GARCH de Heston et Nandi(2000)

2.5 Le retour à la moyenne – Optimisation par le modèle EWMA²⁰

Les modèles GARCH semblent peu adaptés pour la prévision à long terme puisqu'ils présentent un retour à la moyenne comme on l'a vu dans la section précédente. Il semble donc difficile de prévoir la volatilité à long terme puisque cette dernière sera écrasée par la moyenne à long terme. Ce problème est le point de départ d'une optimisation du modèle et de son application au long terme. Nous allons donc considérer le modèle EWMA qui permet de calculer la valeur de la volatilité pour un temps donné conditionnée par la valeur du jour précédent mais qui accorde plus de poids aux observations les plus récentes. En utilisant la moyenne mobile exponentielle pondérée des observations historiques, ce modèle permet de capter les caractéristiques dynamiques de la volatilité selon l'équation (2.31):

$$\sigma_n^2 = \lambda \cdot \sigma_{n-1}^2 + (1 - \lambda) r_{n-1}^2 \quad (2.31)$$

où λ est le facteur de décadence. Ce paramètre définit un poids relatif qui est appliqué au dernier rendement. Ce facteur définit aussi la quantité de données effectives utilisées dans l'estimation de la volatilité. Plus la valeur de ce paramètre est élevée et moins la dernière observation affecte l'estimation actuelle. La valeur optimale de λ est de 0.94 selon RiskMetrics²¹. Pour une telle valeur, l'estimation peut être effectuée sur la base de 50 observations et le retour de premier jour (r_1) sera considéré avec un poids relatif de $(1-0.94) \cdot 0.94^{49} = 0.0029$. Même pour 30 observations, l'erreur est très faible.

La figure 2.7 représente les poids relatifs des rendements historiques selon leur réalisation historique et selon la valeur du paramètre λ .

²⁰ Exponentially Weighted Moving Average

²¹ RiskMetrics utilise 0.94 pour les estimations quotidiennes et 0.97 pour les mensuelles.

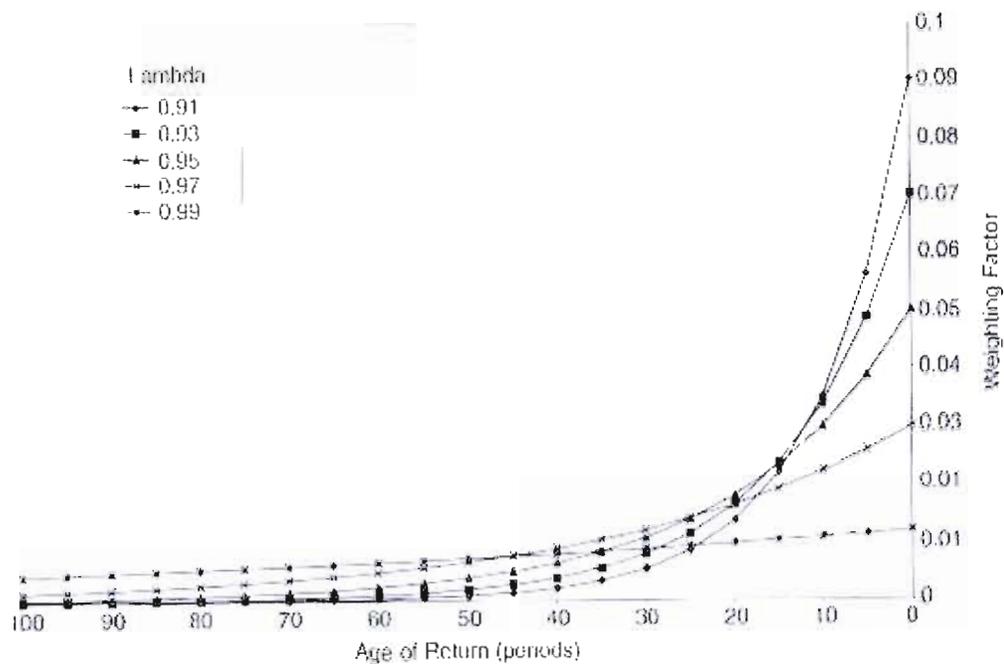


Figure 2.7 – Les facteurs pondérés de la moyenne mobile exponentielle²² pondérée EWMA en fonction de λ .

L'équation (2.31) peut s'écrire alors de la façon suivante quand la période est très longue:

$$\hat{\sigma}_{t+1}^2 = \lambda \sum_{i=0}^N (1-\lambda)^i \sigma_{t-i}^2 \quad (2.32)$$

Ce modèle plus simple, et inclus dans le précédent (soit GARCH(1,1)), présente l'avantage de ne pas retourner à la moyenne, ce qui laisse l'opportunité de voir apparaître par les simulations de Monte Carlo des scénarios très différents. En effet, le modèle EWMA est un cas spécial de GARCH (1,1) où $\omega = 0$. La valeur initiale de la volatilité est prise comme l'écart type des rendements de l'indice de l'année 2000 à 2007.

²² Source: Strickland C., (2000), "*Energy Derivatives: Pricing & Risk Management*", Clewlow L., Chapter 10, figure 10.2.

RÉSULTATS

Dans cette section, on analyse les résultats obtenus par la méthode EWMA pour simuler la volatilité de l'indice S&P500 de l'année 2000 à 2007. Ensuite on compare les résultats obtenus avec les résultats des modèles déjà vus. La comparaison finale est faite avec la méthode de la volatilité réalisée de l'indice S&P500. Enfin, on essaie d'estimer la volatilité à long terme une fois que la comparaison s'avère satisfaisante.

CHAPITRE III

ESTIMATION DE LA VOLATILITÉ DU S&P500

3.1 La volatilité générée par EWMA

Rappelons les deux équations du modèle EWMA pour simuler puis prévoir la trajectoire suivie²³ par la volatilité du S&P500 et qui est représentée à la figure 3.1:

$$\sigma_n^2 = \lambda \cdot \sigma_{n-1}^2 + (1 - \lambda) r_{n-1}^2 \quad (3.1)$$

$$\hat{\sigma}_{t+1}^2 = \lambda \sum_{i=0}^N (1 - \lambda)^i \sigma_{t-i}^2 \quad (3.2)$$

²³ Le code VBA et le chiffrier Excel utilisés pour les calculs se trouvent dans l'annexe 5.

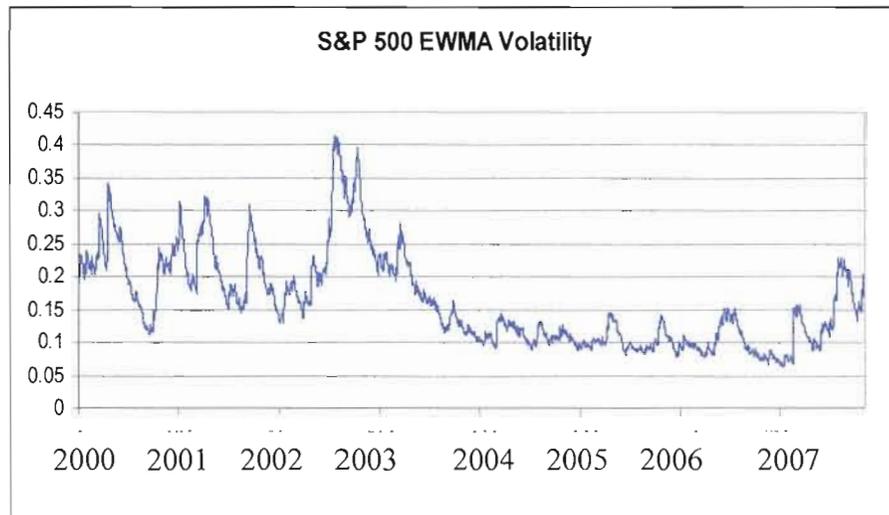


Figure 3.1- Volatilité de l'indice S&P500 générée par le modèle EWMA.

3.2 La volatilité réalisée

Andersen and Bollerslev (1997) ont montré que la volatilité réalisée d'une action calculée à partir des rendements intrajournaliers à haute fréquence constitue effectivement une mesure fiable («error-free») de la volatilité des actifs. En effet, la disponibilité des données intrajournalières crée un intérêt pour cette approche. Par conséquent, il est naturel de considérer cette volatilité comme observable²⁴. Une volatilité observable donne lieu à de nouvelles opportunités: on peut l'analyser, l'optimiser et la prévoir en utilisant des techniques plus simples que les modèles économétriques complexes utilisés lorsque la volatilité est latente. L'idée de la volatilité réalisée est initialement proposée par French, Schwert et Stambaugh (1987).

²⁴ Voir à cet effet Andersen T., T. Bollerslev, F.X. Diebold, et P. Labys, (1999), (Understanding, Optimizing, Using and Forecasting) Realized Volatility and Correlation, *Risk*, pp. 105-108

Taylor et Xu (1997) ainsi qu'Andersen et Bollerslev (1997) montrent que la volatilité journalière réalisée peut être construite en additionnant les rendements intrajournaliers au carré. En utilisant les propriétés des logarithmes, nous avons :

$$R_t^j = \sum_{i=1}^N R_{t,i} \quad (3.3)$$

Nous supposons ici qu'un jour peut être divisée en N intervalles de temps équivalentes. Le terme $R_{t,i}$ représente le rendement réalisé à l'intervalle i du jour t. La variance réalisée quodotienne est donnée par :

$$Var(R_t^j | I_{t-1}) = \sum_{i=1}^N Var(R_{t,i} | I_{t-1}) + 2 \sum_{i < j} Cov[(R_{t,i}, R_{t,j}) | I_{t-1}] \quad (3.4)$$

Si la série des rendements $R_{t,i}$ suit un processus de bruit blanc, alors les rendements ne sont pas autocorrélés. Nous avons donc:

$$Var(R_t^j | I_{t-1}) = N Var(R_{t,1}) \quad (3.5)$$

Le terme $Var(R_{t,1})$ est estimé par :

$$\hat{\sigma}_{t,j}^2 = \frac{\sum_{i=1}^N (R_{t,i} - \bar{R}_t)^2}{N-1} \quad (3.6)$$

où \bar{R}_t est la moyenne des rendements intrajournaliers. On suppose que la moyenne journalière des rendements est nulle, ce qui semble raisonnable. Ainsi,

$$\hat{\sigma}_j^2 = \frac{N}{N-1} \sum_{i=1}^N R_{t,i}^2 \quad (3.7)$$

L'attrait de la volatilité réalisée calculée à partir de données à haute fréquence dépend partiellement de la supposition que les logarithmes des prix d'actions évoluent selon un processus de diffusion. Cette supposition, bien qu'adéquate et utile dans plusieurs contextes, devient progressivement moins tolérable à fur et à mesure qu'on s'approche de l'échéance. L'échantillon optimal des fréquences à choisir semble ne pas être celui incluant les fréquences les plus élevées mais des valeurs intermédiaires. Anderson et Bollerslv proposent une méthode pour choisir l'échantillon optimal de fréquences afin de calculer la volatilité réalisée des actifs financiers.

La volatilité réalisée du S&P500

La volatilité réalisée est calculée simplement à partir des déviations des rendements quotidiens par rapport à leur moyenne. Puis on l'annualise en la multipliant par $\sqrt{252}$. Elle est calculée selon l'équation (3.8) :

$$\sigma_{i,T} = \sqrt{\frac{1}{T} \sum_{i=1}^T (r_i - \bar{r})^2} \quad \text{où} \quad \bar{r} = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T r_i \quad (3.8)$$

où r_i sont les rendements quotidiens ($i = 1, \dots, 252$) ; on considère qu'il y a 252 jours ouvrables durant l'année, et que la moyenne des rendements journaliers est nulle.

La figure 3.2 représente la volatilité réalisée annualisée²⁵ de l'indice S&P500 :

²⁵ Les calculs figurent dans l'annexe 6.

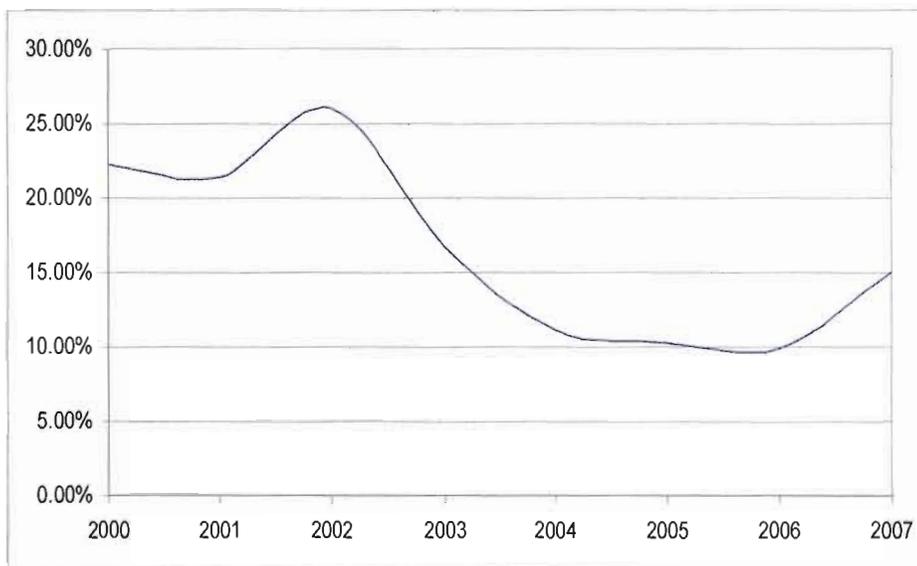


Figure 3.2 - Volatilité réalisée annuelle du S&P500.

3.3 Comparaison des modèles

Dans cette section, nous comparons les résultats obtenus par la méthode de la volatilité réalisée avec ceux obtenus par le modèle GARCH(1,1), le modèle GARCH de Heston et Nandi(2000), et le modèle de EWMA. Or, pour pouvoir effectuer cette comparaison, il fallait trouver la volatilité annuelle estimée par chaque modèle qu'on a considérée comme la moyenne des volatilités quotidiennes annualisée selon l'équation suivante :

$$\sigma_{annuelle} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum \sigma^2_{quotidienne} \times 252} \quad (3.9)$$

Le tableau 3.1 montre la volatilité annuelle des modèles, comparée à la volatilité réalisée de l'indice S&P500 de l'année 2000 à 2007.

Tableau 3.1
La différence entre la volatilité réalisée et celle résultant des modèles étudiés

Année	Volatilité réalisée annuelle du S&P500	Volatilité par GARCH(1,1)	Volatilité par H&N(2000)	Volatilité par EWMA
2000	22.22%	20.81%	15%	21.22%
2001	21.39%	20.92%	15.56%	21.54%
2002	26.01%	23.74%	15.35%	24.44%
2003	16.79%	16.95%	16.45%	17.05%
2004	11.10%	11.96%	16.80%	11.10%
2005	10.25%	11.22%	14.21%	10.17%
2006	9.92%	10.96%	16.68%	9.81%
2007	15.06%	14.03%	19.11%	13.36%

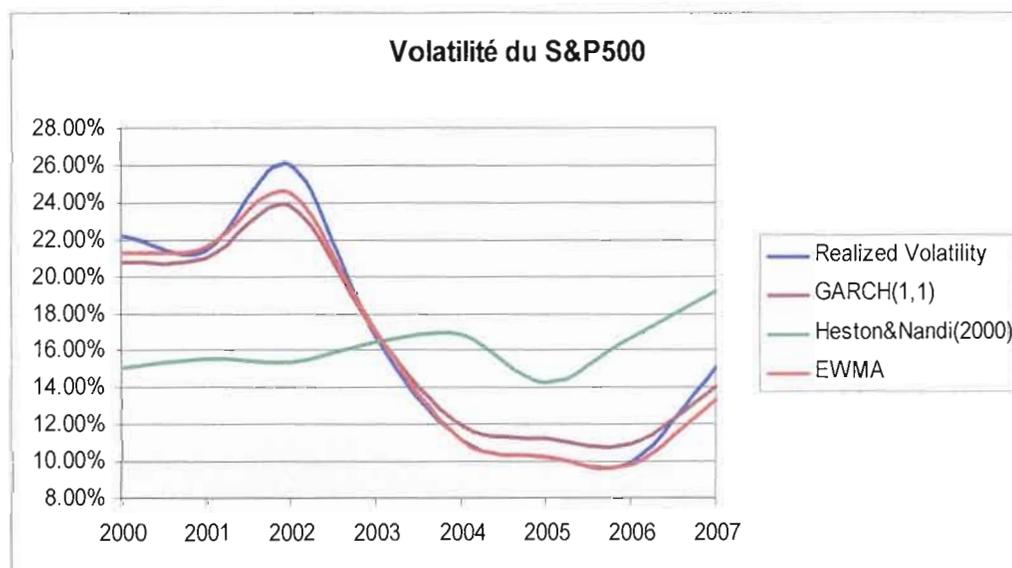


Figure 3.3 – Volatilité du S&P500 générée par les quatre méthodes.

La figure 3.3 représente la différence entre les volatilités estimées du S&P500 à partir des différentes méthodes présentées ci-dessus. En observant cette figure, il semble que la volatilité estimée par le modèle GARCH de Heston et Nandi (2000) ne soit pas en mesure de reproduire la trajectoire suivie par la volatilité de l'indice S&P500 et ce modèle ne pourrait donc être employé pour faire des prévisions sur celle-ci. Par contre, le modèle du EWMA semble significativement reproduire la même trajectoire que celle associée à la volatilité réalisée de l'indice. Et par conséquent, on essaie dans ce qui suit de prévoir la volatilité future de l'indice S&P500 à partir de la méthode EWMA.

3.4 Prévion de la volatilité à long terme

Comme on a pu le constater dans la section précédente, la différence entre la volatilité estimée par le modèle EWMA et la volatilité réalisée n'est pas significative. En plus, ce modèle ne permet pas le retour à la moyenne. À partir de ce constat, on va appliquer le modèle de EWMA pour générer la volatilité de l'indice S&P500 pour l'année à venir à l'aide de l'équation (3.10) du modèle suivant :

$$\hat{\sigma}_{t+1}^2 = \lambda \sum_{i=0}^N (1 - \lambda)^i \sigma_{t-i}^2 \quad (3.10)$$

La figure 3.4 montre la volatilité annuelle moyenne estimée²⁶ sur l'indice S&P500 pour les années 2007 - 2008 :

²⁶ Le code VBA et les estimations se trouvent dans l'annexe7

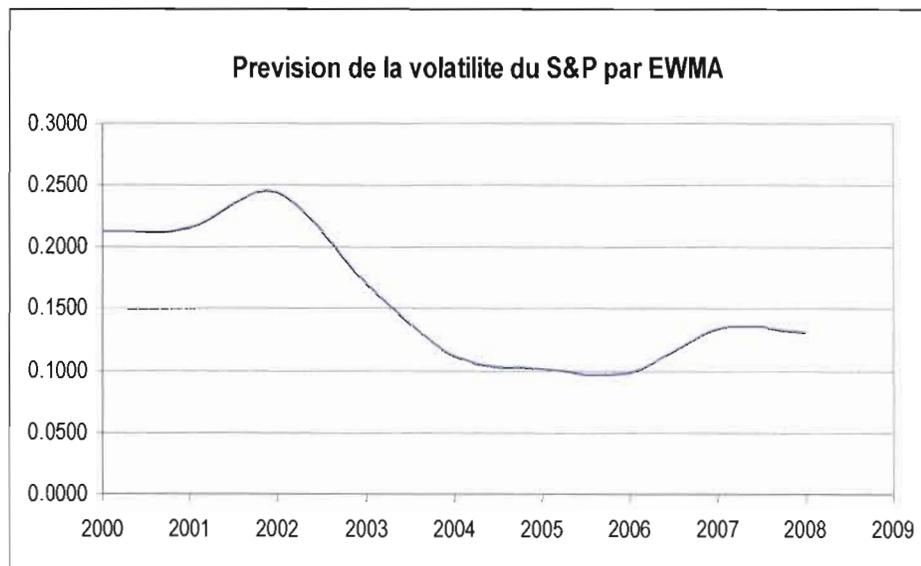


Figure 3.4 - La volatilité du S&P500 jusqu'à l'année 2008.

La volatilité est supposée augmenter en 2007 puis diminuer très légèrement pour l'année 2008 selon le modèle EWMA. En ce qui concerne l'année 2007, on peut voir que la volatilité réalisée augmente déjà par rapport à l'année 2006, ce qui confirme les prévisions du modèle.

CONCLUSION

Dans ce travail, on a tenté d'examiner le comportement de la volatilité de l'indice S&P500 à travers trois modèles, soient le modèle de GARCH(1,1), le modèle GARCH de Heston et Nandi(2000), et celui de la moyenne mobile exponentielle pondérée, EWMA. La première étape consistait à estimer les paramètres des modèles et à générer la volatilité de l'année 2000 à l'année 2006. Puis on a comparé cette volatilité générée avec la volatilité réalisée pour voir si les modèles étudiés sont en mesure de capter les dynamiques de la volatilité de l'indice. Les résultats obtenus montrent que la volatilité générée par le modèle EWMA se rapproche le plus de la volatilité réalisée et par conséquent ce modèle est capable de retracer la trajectoire de la volatilité de l'indice. La volatilité estimée par le modèle GARCH(1,1) diffère légèrement de la volatilité réalisée mais du fait que le processus est de retour à la moyenne à long terme, on ne peut l'utiliser pour faire des prévisions à très long terme. Enfin le modèle GARCH de Heston et Nandi(2000) présente une grande différence entre la volatilité estimée et la volatilité réalisée, ce qui empêche d'effectuer des prévisions à l'aide de ce modèle. La dernière étape consistait à effectuer les prévisions de la volatilité de l'indice dans les années à venir. On peut voir pour l'année 2007 que les modèles EWMA et GARCH(1,1) ont réussi à estimer une volatilité moyenne proche de la moyenne réalisée réellement, avec une tendance à la hausse.

Depuis que ces modèles de volatilité ont été représentés, il y a eu beaucoup d'alternatives et/ou de modifications proposées pour mieux les utiliser dans les prévisions de la volatilité. Il serait intéressant d'améliorer le modèle GARCH de Heston et Nandi(2000) en termes de prévisions, peut-être en trouvant une nouvelle méthode pour estimer ses paramètres, ce qui pourrait optimiser les résultats fournis par ce modèle.

ANNEXES

APPENDICE A

ESTIMATION DES PARAMÈTRES DE GARCH

A.1 Le Code VBA utilisé²⁷ pour estimer les paramètres de GARCH(1,1) selon la méthode MLE

' GARCH Likelihood

Function GARCHMLE(rets, startParams)

Dim VARt() As Double

n = Application.Count(rets)

ReDim VARt(n) As Double

omega = startParams(1)

alpha = startParams(2)

beta = startParams(3)

'Error Checking

If ((omega < 0) Or (alpha < 0) Or (beta < 0)) Then

GARCHMLE = -9999

Else

VARt(n) = Application.var(rets)

GARCHMLE = -Log(VARt(n)) - (rets(n) ^ 2 / VARt(n))

For cnt = n - 1 To 1 Step -1

VARt(cnt) = omega + alpha * rets(cnt + 1) ^ 2 + beta * VARt(cnt + 1)

GARCHMLE = GARCHMLE - Log(VARt(cnt)) - (rets(cnt) ^ 2 / VARt(cnt))

Next cnt

End If

GARCHMLE = -GARCHMLE

End Function

²⁷ Source: Rouah Douglas F. et G. Vanberg, (2007), « Option Pricing Models & Volatility Using Excel-VBA », chapitre 6.

' Finds GARCH MLEs

```
Function GARCHparams(rets, startParams)
    GARCHparams = NelderMead("GARCHMLE", rets, startParams)
End Function
```

' Nelder-Mead Algorithm

```
Function NelderMead(fname As String, rets, startParams)
    Dim resMatrix() As Double
    Dim x1() As Double, xn() As Double, xw() As Double, xbar() As Double, xr() As Double, xe() As Double,
    xc() As Double, xcc() As Double
    Dim funRes() As Double, passParams() As Double
    MAXFUN = 1000
    TOL = 0.0000000001
    rho = 1
    Xi = 2
    gam = 0.5
    sigma = 0.5
    paramnum = Application.Count(startParams)
    ReDim resmat(paramnum + 1, paramnum + 1) As Double
    ReDim x1(paramnum) As Double, xn(paramnum) As Double, xw(paramnum) As Double,
    xbar(paramnum) As Double, xr(paramnum) As Double, xe(paramnum) As Double, xc(paramnum) As
    Double, xcc(paramnum) As Double
    ReDim funRes(paramnum + 1) As Double, passParams(paramnum)
    For i = 1 To paramnum
        resmat(1, i + 1) = startParams(i)
    Next i
    resmat(1, 1) = Run(fname, rets, startParams)
    For j = 1 To paramnum
        For i = 1 To paramnum
            If (i = j) Then
                If (startParams(i) = 0) Then
                    resmat(j + 1, i + 1) = 0.05
                Else
```

```

    resmat(j + 1, i + 1) = startParams(i) * 1.05
End If
Else
    resmat(j + 1, i + 1) = startParams(i)
End If
passParams(i) = resmat(j + 1, i + 1)
Next i
resmat(j + 1, 1) = Run(fname, rets, passParams)
Next j
For Inum = 1 To MAXFUN
    resmat = BubSortRows(resmat)
    If (Abs(resmat(1, 1) - resmat(paramnum + 1, 1)) < TOL) Then
    Exit For
    End If
    f1 = resmat(1, 1)
    For i = 1 To paramnum
        x1(i) = resmat(1, i + 1)
    Next i
    fn = resmat(paramnum, 1)
    For i = 1 To paramnum
        xn(i) = resmat(paramnum, i + 1)
    Next i
    fw = resmat(paramnum + 1, 1)
    For i = 1 To paramnum
        xw(i) = resmat(paramnum + 1, i + 1)
    Next i
    For i = 1 To paramnum
        xbar(i) = 0
    For j = 1 To paramnum
        xbar(i) = xbar(i) + resmat(j, i + 1)
    Next j
    xbar(i) = xbar(i) / paramnum
    Next i
    For i = 1 To paramnum

```

```

xr(i) = xbar(i) + rho * (xbar(i) - xw(i))
Next i
fr = Run(fname, rets, xr)
shrink = 0
If ((fr >= f1) And (fr < fn)) Then
newpoint = xr
newf = fr
Elseif (fr < f1) Then
'calculate expansion point
For i = 1 To paramnum
  xe(i) = xbar(i) + Xi * (xr(i) - xbar(i))
Next i
fe = Run(fname, rets, xe)
If (fe < fr) Then
  newpoint = xe
  newf = fe
Else
  newpoint = xr
  newf = fr
End If
Elseif (fr >= fn) Then
If ((fr >= fn) And (fr < fw)) Then
For i = 1 To paramnum
xc(i) = xbar(i) + gam * (xr(i) - xbar(i))
Next i
fc = Run(fname, rets, xc)
If (fc <= fr) Then
  newpoint = xc
  newf = fc
Else
  shrink = 1
End If
Else
For i = 1 To paramnum

```

```

    xcc(i) = xbar(i) - gam * (xbar(i) - xw(i))
  Next i
  fcc = Run(fname, rets, xcc)
  If (fcc < fw) Then
    newpoint = xcc
    newf = fcc
  Else
    shrink = 1
  End If
End If
End If
If (shrink = 1) Then
  For scnt = 2 To paramnum + 1
    For i = 1 To paramnum
      resmat(scnt, i + 1) = x1(i) + sigma * (resmat(scnt, i + 1) - x1(1))
      passParams(i) = resmat(scnt, i + 1)
    Next i
    resmat(scnt, 1) = Run(fname, rets, passParams)
  Next scnt
Else
  For i = 1 To paramnum
    resmat(paramnum + 1, i + 1) = newpoint(i)
  Next i
  resmat(paramnum + 1, 1) = newf
End If
Next Inum
If (Inum = MAXFUN + 1) Then
  MsgBox "Maximum Iteration (" & MAXFUN & ") exceeded"
End If
resmat = BubSortRows(resmat)
For i = 1 To paramnum + 1
  funRes(i) = resmat(1, i)
Next i
funRes(1) = funRes(1)

```

```
NelderMead = Application.Transpose(funRes)
End Function
```

'Standard Errors of GARCH parameters

```
Function GARCHSE(r, startParams)
    theta = NelderMead("GARChMLE", r, startParams)
    omega = theta(2, 1)
    alpha = theta(3, 1)
    beta = theta(4, 1)
    n = Application.Count(r)
    Dim h() As Double
    ReDim h(n) As Double
    h(n) = Application.var(r)
    For T = n - 1 To 1 Step -1
        h(T) = omega + alpha * r(T + 1) ^ 2 + beta * h(T + 1)
    Next T
    Dim w() As Double, Dww() As Double, Daa() As Double, Dbb() As Double, Dwa() As Double, Dwb() As Double, Dab() As Double
    ReDim w(n - 2) As Double, Dww(n - 2) As Double, Daa(n - 2) As Double, Dbb(n - 2) As Double, Dwa(n - 2) As Double, Dwb(n - 2) As Double, Dab(n - 2) As Double
    For T = n - 2 To 1 Step -1
        w(T) = (1 - 2 * r(T) ^ 2 / h(T))
        Dww(T) = w(T) / h(T) ^ 2
        Daa(T) = r(T + 1) ^ 4 * w(T) / h(T) ^ 2
        Dbb(T) = (h(T + 2) / h(T)) * ((r(T) ^ 2 / h(T)) - 1) + h(T + 1) ^ 2 * w(T) / h(T) ^ 2
        Dwa(T) = r(T + 1) ^ 2 * w(T) / h(T) ^ 2
        Dwb(T) = h(T + 1) * w(T) / h(T) ^ 2
        Dab(T) = h(T + 1) * r(T + 1) ^ 2 * w(T) / h(T) ^ 2
    Next T
    WW = -Application.Sum(Dww)
    AA = -Application.Sum(Daa)
    BB = -Application.Sum(Dbb)
    WA = -Application.Sum(Dwa)
    WB = -Application.Sum(Dwb)
```

```

AB = -Application.Sum(Dab)
Dim Cov() As Double
ReDim Cov(3, 3) As Double
Cov = MInv(WW, WA, WB, WA, AA, AB, WB, AB, BB)
Dim se(3) As Double
se(1) = Sqr(Cov(1, 1))
se(2) = Sqr(Cov(2, 2))
se(3) = Sqr(Cov(3, 3))
GARCHSE = Application.Transpose(se)
End Function

'upper and lower limits
Function CI(mle, se, alpha)
    Dim output() As Double
    ReDim output(2) As Double
    output(1) = mle - Application.NormSInv(1 - alpha / 2) * se ' Lower Limit
    output(2) = mle + Application.NormSInv(1 - alpha / 2) * se ' Upper Limit
    CI = output
End Function

```

A.2 Le chiffrier Excel utilisé pour effectuer les calculs

Date	S&P500	Rendements
t	S_t	$R_t = \text{Log}(S_t/S_{t-1})$
11/9/2007	1453.7	-0.014390015
11/8/2007	1474.77	-0.000576195
11/7/2007	1475.62	-0.02980971
11/6/2007	1520.27	0.011977221
11/5/2007	1502.17	-0.004967107
11/2/2007	1509.65	0.000801832
11/1/2007	1508.44	-0.026778847
10/31/2007	1549.38	0.011920671
10/30/2007	1531.02	-0.006484398
10/29/2007	1540.98	0.003705803
10/26/2007	1535.28	0.013693454
10/25/2007	1514.4	-0.000976808
10/24/2007	1515.88	-0.002444433

10/23/2007	1519.59	0.008764333
10/22/2007	1506.33	0.003791209
.....
4-Jan-00	1399.42	-0.039099227
3-Jan-00	1455.22	

Paramètres de départ

$\omega =$	0.0000020
$\alpha =$	0.10
$\beta =$	0.85
Maximum de Vraisemblance =	16238.71
GARCH LL =	-16238.71

Paramètres estimés

GARCH LL =	-16,349.12
$\omega =$	0.0000010207
$\alpha =$	0.0649
$\beta =$	0.9262

Niveau de confiance

$\alpha = 0.05$

Intervalle de confiance

Borne inférieure	Borne supérieure
-0.0000038578	0.0000058992
0.026404361	0.103445571
0.842898013	1.009550539

APPENDICE B

ESTIMATION DES PARAMÈTRES DE HESTON ET NANDI

B.1 Le code VBA utilisé²⁸ pour estimer les paramètres du modèle GARCH de Heston et Nandi (2000)

Function LGARCHMLE(rets, startParams, rf, Optional ErrorCheckOff = 0)

Dim h() As Double, z() As Double

n = Application.Count(rets)

ReDim h(n) As Double, z(n) As Double

lambda = startParams(1)

b0 = startParams(2)

b1 = startParams(3)

b2 = startParams(4)

theta = startParams(5)

'Error Checking

If (ErrorCheckOff = 0) Then

b0 = 100 / (1 + 100 * Exp(-b0))

b1 = 100 / (1 + 100 * Exp(-b1))

b2 = 100 / (1 + 100 * Exp(-b2))

End If

' Initialize the Process

h(n) = Application.Var(rets)

z(n) = (rets(n) - rf - lambda * Sqr(h(n)) + 0.5 * h(n)) / Sqr(h(n))

LGARCHMLE = -Log(h(n)) - z(n) ^ 2

For t = n - 1 To 1 Step -1

h(t) = b0 + b1 * h(t + 1) + b2 * h(t + 1) * (z(t + 1) - theta) ^ 2

²⁸ Source: Rouah Douglas F. et G. Vanberg, (2007), « Option Pricing Models & Volatility Using Excel-VBA », chapitre 9.

```

z(t) = (rets(t) - rf - lambda * Sqr(h(t)) + 0.5 * h(t)) / Sqr(h(t))
LGARCHMLE = LGARCHMLE - Log(h(t)) - z(t) ^ 2
Next t
LGARCHMLE = -LGARCHMLE
End Function

```

Function LGARCHparams(rets, startParams, rf)

```

Dim passParams(5) As Double
For i = 1 To 5
passParams(i) = startParams(i)
Next i
passParams(2) = -Log(((100 / passParams(2)) - 1) / 100)
passParams(3) = -Log(((100 / passParams(3)) - 1) / 100)
passParams(4) = -Log(((100 / passParams(4)) - 1) / 100)
endParams = NelderMead("LGARCHMLE", rets, passParams, rf)
endParams(3, 1) = 100 / (1 + 100 * Exp(-endParams(3, 1)))
endParams(4, 1) = 100 / (1 + 100 * Exp(-endParams(4, 1)))
endParams(5, 1) = 100 / (1 + 100 * Exp(-endParams(5, 1)))
LGARCHparams = endParams
End Function

```

B.2 Le chiffrier Excel utilisé pour les calculs

Valeurs de départ

λ =	0.04340000
β_0 =	0.00000183
β_1 =	0.88470000
β_2 =	0.07180000
θ =	0.61310000
r =	0.00013699

Paramètres estimés

Maximum de vraisemblance	-16,473.63
λ =	-0.01966127
β_0 =	0.00000129

$$\beta_1 = 0.82026210$$

$$\beta_2 = 0.04150064$$

$$\theta = 1.77930931$$

Persistence		vs	H&N (2000) persistence
$\beta_2(1+\theta^2) + \beta_1 =$	0.99315		$\beta + \alpha.\gamma^2$ so $\gamma^2 = 1+\theta^2$

Variance	0.00017612
-----------------	------------

volatilité

annualisée	0.2107
-------------------	--------

**Formule
utilisée pour
l'estimation**

versus

**Formule de
H&N (2000)**

Par analogie,

on a

$$\omega = \beta_0$$

$$\beta = \beta_1$$

$$\alpha = \beta_2$$

La persistence	$\gamma = \text{SQRT}(1+\theta^2)$	2.041063842
----------------	------------------------------------	-------------

$$\sigma_{i+1}^2 = \beta_0 + \beta_1 \sigma_i^2 + \beta_2 (z_i - \theta)^2$$

$$\sigma_{i+1}^2 = \omega + \beta \sigma_i^2 + \alpha (z_i - \gamma \sigma_i)^2$$

APPENDICE C

ESTIMATION DE LA VOLATILITÉ À TERME

C.1 Le code VBA utilisé²⁹ pour calculer la volatilité à terme de GARCH(1,1)

' Volatility Term Structure

Function YearVol(T, alpha, beta, omega, V0)

var = omega / (1 - alpha - beta)

a = -Log(alpha + beta)

YearVol = Sqr(252 * (var + (1 - Exp(-a * T)) / a / T * (V0 - var)))

End Function

C.2 Le chiffrier Excel utilisé pour les calculs

Variance(2007)	0.000156268
Variance à long terme	
ω	0.000115323
Volatilité annualisée	0.170473925

²⁹ Source: Rouah Douglas F. et G. Vanberg, (2007), « Option Pricing Models & Volatility Using Excel-VBA », chapitre 6.

jours	Volatilité moyenne
1	0.1983
5	0.1979
25	0.1957
125	0.1879
252	0.1821
365	0.1792
625	0.1758
3125	0.1716
15625	0.1707
78125	0.1705

APPENDICE D

ESTIMATION DE LA VOLATILITÉ DE HESTON ET NANDI

D.1 Le code VBA que nous avons écrit pour calculer la volatilité de Heston and Nandi GARCH Model

Sub HNGarch()

```
Dim w, bet, alph, gam, zt, daynum, startv, variance, iter
```

```
Dim vol() As Double
```

```
w = Range("omega")
```

```
alph = Range("alpha")
```

```
bet = Range("beta")
```

```
gam = Range("gamma")
```

```
daynum = Range("day")
```

```
startv = Range("currvar")
```

```
iter = Range("iterations")
```

```
ReDim vol(daynum) As Double
```

```
'For first scenario
```

```
variance = startv
```

```
vol(1) = variance
```

```
For j = 2 To daynum
```

```
zt = Application.WorksheetFunction.NormSInv(Rnd)
```

```
variance = w + bet * variance + alph * (((zt - gam * Sqr(variance)) / 50) ^ 2)
```

```
vol(j) = variance
```

```
Next j
```

```
'For other scenarios
```

```
For i = 2 To iter
```

```
variance = startv
```

```
For j = 1 To daynum
```

```
zt = Application.WorksheetFunction.NormSInv(Rnd)
```

```

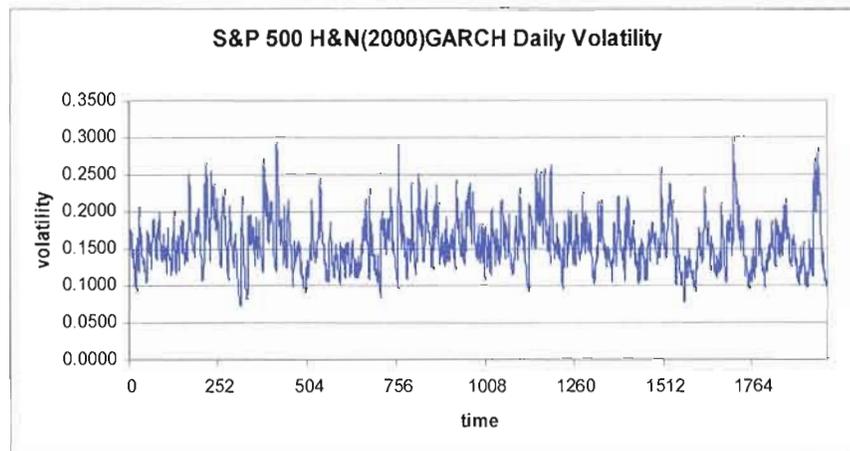
variance = w + bet * variance + alph * (zt - gam * Sqr(variance)) ^ 2
vol(j) = (vol(j) + variance) / 2
Next j
Next i
For j = daynum To 1 Step -1
Range("volatility").Offset(daynum - j + 1, 0) = Sqr(vol(j)) * 252
Next j
End Sub

```

D.2 Le chiffrier Excel utilisé pour les calculs

Paramètres estimés (MLE)		date	volatilité
Maximum de vraisemblance	-16,473.63	11/9/2007	0.1044
$\lambda =$	-0.01966127	11/8/2007	0.1088
$\omega =$	0.00000129	11/7/2007	0.1078
$\beta =$	0.8202621	11/6/2007	0.0985
$\alpha =$	0.04150064	11/5/2007	0.1027
$\gamma =$	2.041063842	11/2/2007	0.1103
days	1976	11/1/2007	0.1176
iterations	1000	10/31/2007	0.1191
startv pour 2000 est la variance des rendements historiques de l'indice soit de 1.234285E-04		10/30/2007	0.1186
		10/29/2007	0.1232
		10/26/2007	0.1339
	0.0001234285	10/25/2007	0.1464
Volatilité	0.1764
		4-Jan-00	0.1607
		3-Jan-00	0.1764
		Max	0.2969
		min	0.1088
		moyen	0.1426

Les volatilités présentées ci-dessus constituent un échantillon des volatilités générées. L'ensemble des volatilités générées est schématisé ci-dessous.



La volatilité moyenne par année

2000	0.1500
2001	0.1556
2002	0.1535
2003	0.1645
2004	0.1680
2005	0.1421
2006	0.1668
2007	0.1911

APPENDICE E

ESTIMATION DE LA VOLATILITÉ DE EWMA

E.1 *Le chiffrier Excel utilisé pour calculer la volatilité du S&P500 selon EWMA*

date	S&P500	Rendements		EWMA Variance $= \lambda \sigma_{t-1}^2 + (1-\lambda)r_{t-1}^2$	Volatilité Annualisée $\sigma(i)$
	S_t	$R_t = \text{Log}(S_t/S_{t-1})$	R_t^2		
11/9/2007	1453.7	-0.014390015	0.000207073	0.000152123	0.195793241
11/8/2007	1474.77	-0.000576195	3.32001E-07	0.000161812	0.201932086
11/7/2007	1475.62	-0.02980971	0.000888619	0.00011542	0.170545591
11/6/2007	1520.27	0.011977221	0.000143454	0.00011363	0.169218406
11/5/2007	1502.17	-0.004967107	2.46721E-05	0.000119309	0.173394845
11/2/2007	1509.65	0.000801832	6.42934E-07	0.000126883	0.178814213
11/1/2007	1508.44	-0.026778847	0.000717107	8.92092E-05	0.149935697
10/31/2007	1549.38	0.011920671	0.000142102	8.5833E-05	0.14707114
10/30/2007	1531.02	-0.006484398	4.20474E-05	8.86278E-05	0.149446366
10/29/2007	1540.98	0.003705803	1.3733E-05	9.34084E-05	0.153423949
10/26/2007	1535.28	0.013693454	0.000187511	8.74018E-05	0.148409105
.....
4-Jan-00	1399.42	-0.039099227	0.00152875	0.000123429	0.176363215

Les prix historiques utilisés pour la période s'étendant du 3 janvier 2000 jusqu'à 9 novembre 2007 ne sont pas présentés entièrement à l'annexe, ils peuvent être trouvés dans le site yahoo-finance³⁰. Les données présentées ci-dessus constituent un échantillon des données utilisées et générées.

³⁰ www.yahoofinance.com

E.2 La volatilité moyenne par année

t	$\sigma(i)$
2000	0.2122
2001	0.2154
2002	0.2444
2003	0.1705
2004	0.1110
2005	0.1017
2006	0.0981
2007	0.1336

APPENDICE F

LA VOLATILITÉ RÉALISÉE DU S&P 500

F.1 Le chiffrier Excel utilisé pour calculer la volatilité réalisée du S&P500³¹

Volatilité réalisée du S&P500		2007	
Date t	S&P500 St	$R_t = \text{Ln}\left(\frac{S_t}{S_{t-1}}\right)$	R_t^2
9-Nov-07	1,453.70		
8-Nov-07	1,474.77	0.0145	0.000210
7-Nov-07	1,475.62	0.0006	0.000000
6-Nov-07	1,520.27	0.0303	0.000916
5-Nov-07	1,502.17	-0.0119	0.000142
2-Nov-07	1,509.65	0.0050	0.000025
1-Nov-07	1,508.44	-0.0008	0.000001
31-Oct-07	1,549.38	0.0271	0.000737
30-Oct-07	1,531.02	-0.0118	0.000140
29-Oct-07	1,540.98	0.0065	0.000042
26-Oct-07	1,535.28	-0.0037	0.000014
25-Oct-07	1,514.40	-0.0136	0.000185
24-Oct-07	1,515.88	0.0010	0.000001
23-Oct-07	1,519.59	0.0024	0.000006
22-Oct-07	1,506.33	-0.0087	0.000076
.....
10-Jan-07	1,414.85	0.0063	0.000040
9-Jan-07	1,412.11	0.0019	0.000004
8-Jan-07	1,412.84	-0.0005	0.000000
5-Jan-07	1,409.71	0.0022	0.000005
4-Jan-07	1,418.34	-0.0061	0.000037
3-Jan-07	1,416.60	0.0012	0.000002

³¹ Ce chiffrier représente le calcul de la volatilité réalisée pour l'année 2007(idem pour les autres années)

F.2 La Volatilité réalisée annualisée

$$\sigma^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N R_i^2$$

Année	Volatilité réalisée annualisée
2000	22.22%
2001	21.39%
2002	26.01%
2003	16.79%
2004	11.10%
2005	10.25%
2006	9.92%
2007	15.06%

APPENDICE G

PRÉVISION DE LA VOLATILITÉ DU S&P 500

G.1 Le code VBA que nous avons écrit pour prévoir la volatilité du S&P500 jusqu'à 2008

Function ewma(sigmati, lamda)

```
Dim vart As Double
```

```
n = Application.Count(sigmati)
```

```
vart = 0
```

```
For i = 0 To n - 1
```

```
vart = vart + lamda * ((1 - lamda) ^ i) * ((sigmati(i + 1)) ^ 2)
```

```
Next i
```

```
ewma = Sqr(vart)
```

End Function

$$\hat{\sigma}_{t+1}^2 = \lambda \sum_{i=0}^N (1 - \lambda)^i \sigma_{t-i}^2$$

t	volatilité
2008	0.1317
2007	0.1336
2006	0.0981
2005	0.1017
2004	0.1110
2003	0.1705
2002	0.2444
2001	0.2154
2000	0.2122

BIBLIOGRAPHIE

- Andersen, T.G. and T. Bollerslev, (1997), Intraday periodicity and volatility persistence in financial markets, *Journal of Empirical Finance*, Vol. 4, Issues 2-3, pp 69-293.
- Andersen, T.G, T. Bollerslev, F.X. Diebold and P. Labys, (1999), (Understanding, Optimizing, Using and Forecasting) Realized Volatility and Correlation, *Risk*, pp. 105-108.
- Black, F. and M. Sholes, (1973), The pricing of options and corporate liabilities, *Journal of Political Economy*, Vol. 81, No. 3, pp.637- 659.
- Britten-Jones M., and A. Neuberger, (2000), Option Prices, Implied Price Processes, and Stochastic Volatility, *Journal of Finance*, Vol.55, No.2, pp.839- 866.
- Cox, J.C., J.E. Ingersoll, and S. A. Ross, (1985), A Theory of the Term Structure of Interest Rates, *Econometrica*, Vol. 53, pp. 385- 402.
- Carr P., and L. Wu, (2006), A Tale of Two Indices, *The Journal of Derivatives*, No. Spring, pp. 13- 29.
- Chevillon G., (2005), *Econométrie*, OFCE & University of Oxford.
- Christofferson P. and K. Jacobs, (2004), Which GARCH Model for Option Valuation, *Management Science*, Vol. 50, No. 9, 11 pages.
- Clewlow L. and C. Strickland, (2000), *Energy Derivatives: Pricing & Risk Management*, Lacima Publications.
- Dupire B., (2004), Pricing with a smile, *Risk*, Vol.7, No.1, pp. 18- 20.
- Engle R. F., (1982), Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the variance of United Kingdom inflation , *Econometrica*, Vol. 50, No. 4, pp.987-1007.
- French, K.R., G.W. Schwert and R.F. Stambaugh, (1987), Expected Stock Returns and Volatility, *Journal of Financial Economics*, Vol. 19, pp.3- 29.

Heston, S. L., (1993), A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options, *Review of Financial Studies*, Vol.6, No 2, pp. 327- 343.

Heston, S. and S. Nandi, (1997), A Closed Form GARCH Option Pricing Model, Federal Reserve Bank of Atlanta, Working Paper 97-9, 1–34.

Jacod J., (2006), Estimation de la volatilité et problèmes connexes, Université Paris VI, France.

Jiang G.J., and Y.S. Tian, (2005), The Model-Free Implied Volatility and Its Information Content, *Review of Financial studies*, Vol. 18, No.4, pp. 1305- 1342.

Khoury N. and J.M. Ganon (2005), Les régimes de rémunération à base d'options aux dirigeants : charge comptable et régie d'entreprise, cahier de recherche, pp. 9-10.

Kresimir D., E. Derman, M. Kamal, and J. Zou, 1999, More than You Ever Wanted to Know About Volatility Swaps, Quantitative Strategies Research Notes, 49 pages.

Lewis A.L., (2000), Option Valuation under Stochastic Volatility, Finance Press, Newport Beach.

Merton, R., (1973), The Theory of Rational Option Pricing, *Bell Journal of Economics and Management Science*, Vol. 4 No. Spring, pp.141- 183.

Racicot F.-É. and R. Théoret, (2004), Le Calcul Numérique en Finance Empirique et Quantitative, Ingénierie financière et Excel (Visual Basic), 2e édition, Presses de l'Université du Québec.

Racicot F.-É. and R. Théoret, (2005), Calibrage économétrique de processus stochastiques avec applications aux données boursières, bancaires et cambiales canadiennes, Working Paper No UQO-DSA-wp0292005.

Racicot F.-É. and R. Théoret, (2005), Quelques Applications du filtre de Kalman en Finance: Estimation et prévision de la volatilité stochastique et du rapport cours bénéfices, Working Paper No UQO-DSA-wp0312005.

Racicot F.-É. and R. Théoret, (2006), Finance computationnelle et gestion des risques, Presses de l'Université du Québec.

Racicot F.-É. and R. Théoret, (2007), Programmes de volatilité stochastique et de volatilité implicite: applications Visual Basic (Excel) et Matlab.

Rouah Douglas F. and G. Vanberg, (2007), Option Pricing Models & Volatility Using Excel-VBA, Wiley Finance edition.

Sergei M. and U. Nögel, (2003), Heston's Stochastic Volatility Model Implementation, Calibration and Some Extensions, *Wilmott magazine*, Technical Article, pp.74- 79.

Théoret R., P. Rostan and A. El-Moussadek, (2006), An Essay on Stochastic Volatility and the Yield Curve, *Advances in Risk Management*, chapter 5.

The CBOE - Micro Site, (2004), VIX CBOE VOLATILITY INDEX, White Paper, www.cboe.com/micro/vix/vixwhite.pdf .