

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL

INTRODUCTION À LA THÉORIE DES NOEUDS LISSES ET À LA
CONJECTURE SLICE-RIBBON

MÉMOIRE

PRÉSENTÉ

COMME EXIGENCE PARTIELLE
DE LA MAÎTRISE EN MATHÉMATIQUES

PAR

MATHIEU GAUDREAU

SEPTEMBRE 2018

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL
Service des bibliothèques

Avertissement

La diffusion de ce mémoire se fait dans le respect des droits de son auteur, qui a signé le formulaire *Autorisation de reproduire et de diffuser un travail de recherche de cycles supérieurs* (SDU-522 – Rév.10-2015). Cette autorisation stipule que «conformément à l'article 11 du Règlement no 8 des études de cycles supérieurs, [l'auteur] concède à l'Université du Québec à Montréal une licence non exclusive d'utilisation et de publication de la totalité ou d'une partie importante de [son] travail de recherche pour des fins pédagogiques et non commerciales. Plus précisément, [l'auteur] autorise l'Université du Québec à Montréal à reproduire, diffuser, prêter, distribuer ou vendre des copies de [son] travail de recherche à des fins non commerciales sur quelque support que ce soit, y compris l'Internet. Cette licence et cette autorisation n'entraînent pas une renonciation de [la] part [de l'auteur] à [ses] droits moraux ni à [ses] droits de propriété intellectuelle. Sauf entente contraire, [l'auteur] conserve la liberté de diffuser et de commercialiser ou non ce travail dont [il] possède un exemplaire.»

REMERCIEMENTS

J'aimerais tout d'abord remercier mon superviseur de mémoire Olivier Collin pour avoir cru en moi et m'avoir soutenu tout au long de mes études. Tu as toujours trouvé le temps de me rencontrer, que ce soit pour répondre à mes questions de mathématiques ou pour m'aider à m'orienter pour la suite de mes études. Merci pour tout !

J'aimerais également remercier l'ensemble du corps professoral du département de mathématiques de l'UQÀM de m'avoir transmis leur amour des mathématiques. Bien que je sois de nature réservé et que j'aie peu partagé, j'ai passé de très belles années à étudier les mathématiques à l'UQÀM. J'aimerais particulièrement remercier Frédérique Rochon et Luc Bélair de m'avoir fait confiance à l'occasion d'un stage d'initiation à la recherche, dans l'accomplissement de tâches d'auxiliaire d'enseignement et de m'avoir encouragé pour mes plans futurs.

J'aimerais également remercier l'ensemble du personnel de soutien de l'UQÀM pour avoir toujours pris le temps de répondre à mes questions, qu'elles soient pertinentes ou non, et m'avoir toujours facilité la tâche en ce qui concerne la paperasse administrative.

Enfin, j'aimerais remercier l'ensemble de ma famille : mes soeurs, mon oncle, ma tante et ma cousine, ainsi que l'ensemble de mes amis pour leur soutien et leurs encouragements.

Un énorme merci à mes grands-parents et à ma mère pour leur soutien moral et logistique. Sans vous je n'y serais jamais arrivé.

Merci Marie, pour ta patience et ta générosité. Tu as toujours su me changer les idées lorsqu'il le fallait.

TABLE DES MATIÈRES

LISTE DES FIGURES	v
RÉSUMÉ	vii
INTRODUCTION	1
CHAPITRE I	
THÉORIE DES NOEUDS LISSES	3
1.1 Formalisation de la notion de noeud	3
1.2 Un peu de topologie différentielle	6
1.2.1 Plongements et isotopies	7
1.2.2 Rappels sur les fibrés vectoriels lisses	11
1.2.3 Existence et unicité du voisinage tubulaire	20
1.2.4 Conséquences	26
1.2.5 Généralisation aux variétés à bord	30
1.3 Noeuds comme classes d'isotopies ambiantes	32
CHAPITRE II	
THÉORIE DE MORSE	40
2.1 Transversalité et fonctions de Morse	40
2.1.1 Points critiques non-dégénérés	43
2.1.2 Existence de fonctions de Morse	45
2.2 Topologie des cobordismes compacts	47
2.2.1 Cobordismes produits	51
2.2.2 Cobordismes élémentaires standards	60
2.2.3 Topologie des cobordismes élémentaires	69
CHAPITRE III	
ASPECTS GÉOMÉTRIQUES DE LA THÉORIE DES NOEUDS	73
3.1 Le complément d'un noeud	73

3.1.1	Une caractérisation topologique	74
3.1.2	Une caractérisation algébrique	77
3.2	Noeuds premiers	88
3.3	Noeuds fibrés	96
3.3.1	Définition et caractérisations	97
3.3.2	Décomposition des noeuds fibrés	100
3.4	Noeuds algébriques	102
3.4.1	Définition	102
3.4.2	Structure des noeuds algébriques	106
3.5	Noeuds fortement quasipositifs	108
3.5.1	Tresses et tresses fermées	109
3.5.2	Noeuds fortement quasipositifs	113
CHAPITRE IV		
AUTOUR DE LA CONJECTURE SLICE-RIBBON 116		
4.1	Conjecture Slice-Ribbon	117
4.1.1	Noeuds slice et ribbon	117
4.2	Concordances	128
4.2.1	Concordance slice	128
4.2.2	Concordances ribbon	131
4.3	Concordance ribbon comme relation d'ordre partielle sur les noeuds fibrés	137
4.3.1	Revêtement cyclique infini	138
4.3.2	Anti-symétrie de la relation	141
4.4	Autour de l'article de Baker	145
CONCLUSION 153		
RÉFÉRENCES 155		

LISTE DES FIGURES

Figure	Page
1.1 Noeud trèfle	4
1.2 Noeud Sauvage	4
1.3 Plongements préservant le niveau	10
1.4 Approximation polygonale	29
1.5 Sous-variété tangente au bord en un point (bleu)	30
2.1 Chirurgie lisse de type $(1, 1)$ sur un noeud	61
2.2 Représentation de la région R en dimension 2	63
2.3 Flot du champ de vecteurs	66
2.4 Construction de l'espace $\omega(M, \phi)$, avec $\dim M = \lambda = 1$	68
2.5 Le rétracte par déformation sur $W_{-\epsilon} \cup D^\lambda \times \{0\}$	70
3.1 Disques (bleus) tangents au tore	87
3.2 Construction d'une surface de Seifert	91
3.3 Demi-disque ouvert dans B^3	92
3.4 Réduction du genre d'un tore	94
3.5 Élimination des intersections transverses	96
3.6 Représentation de la tresse σ_1	110
3.7 La relation $\sigma_1\sigma_3 = \sigma_3\sigma_1$	111
3.8 La relation $\sigma_1\sigma_2\sigma_1 = \sigma_2\sigma_1\sigma_2$	111
3.9 Entrelacs à conjugaison près	113
3.10 La tresse $\sigma_{i,j}$	114

3.11	Surface de Seifert de la fermeture d'une bande plongée positive . .	114
3.12	Somme connexe de noeuds fortement quasipositifs	115
4.1	"Clasp" de Whitehead	118
4.2	Singularité ribbon	119
4.3	Noeud de Stevedore sous diverses formes	120
4.4	Immersion ribbon de $K\# - K$ lorsque K est le noeud trèfle . . .	120
4.5	Champ de vecteurs pseudo-gradient	122
4.6	Disque troué	124
4.7	Schématisation de la réduction du problème	125
4.8	Film du noeud de Stevedore	125

RÉSUMÉ

L'objectif principal de ce mémoire est d'introduire le cadre dans lequel se formule la conjecture slice-ribbon et certains de ces récents développements dus à Kenneth L. Baker. Notons que tout au long du texte, l'accent a été mis sur les parties ayant posé problème à l'auteur. Le but est donc de permettre à un étudiant ayant des connaissances en géométrie différentielle et en topologie algébrique de s'initier rapidement au sujet, et ce, sans embuche.

Les trois premiers chapitres du mémoire servent respectivement d'introduction à la topologie différentielle, à la théorie de Morse et à la théorie des noeuds. Au quatrième chapitre, on introduit les notions de noeud slice et de noeud ribbon, ainsi que les notions de concordances correspondantes. On établit certains résultats classiques autour de ces notions, on élabore sur les articles de Cameron Gordon (Gordon, 1981) et de Katura Miyazaki (Miyazaki, 1994) et, enfin, on établit le lien, en suivant l'article de Baker (Baker, 2016), entre la conjecture slice-ribbon et une conjecture de Lee Rudolph traitant de l'indépendance linéaire des classes de concordance des noeuds algébriques dans le groupe de concordance.

Mots-clefs : Topologie Différentielle, Théorie de Morse, Conjecture slice-ribbon, Noeud fibré, Noeud fortement quasipositif, Noeud algébrique, Noeud slice, Noeud ribbon, Noeud homotopiquement ribbon, Concordance, Concordance ribbon, Concordance homotopiquement ribbon.

INTRODUCTION

La théorie des noeuds traite en général des problèmes liés à la classification des classes d'isotopie des plongements de la $(n - 2)$ -sphère dans la n -sphère. Les questions entourant ce problème tire leur origine du cas $n = 3$, à savoir, de la théorie des noeuds classique. De prime à bord, remarquons que le contexte ci-haut est plutôt vague. Dans le cadre de ce mémoire, nous traiterons de la théorie des noeuds classique exclusivement dans la catégorie lisse, c'est-à-dire, en supposant que toute variété est munie d'une structure différentielle et toute application entre variétés est lisse.

Le principal avantage de travailler dans la catégorie lisse plutôt qu'une autre est la facilité avec laquelle on obtient des résultats fondamentaux concernant la structure du voisinage des sous-variétés *bien* plongées. Ces résultats, comme nous le verrons aux chapitres 1 et 2, nous donnent un plus grand contrôle dans la manipulation des sous-variétés. On peut également exploiter cette structure différentielle pour mieux comprendre la topologie des variétés qui en sont munies. La théorie de Morse, dont nous exposerons rapidement les fondements au chapitre 2, cherche à caractériser la topologie des variétés différentielles via l'utilisation de ce qu'on appelle une *fonction de Morse*. Il s'avère que l'on peut décomposer toute variété différentielle en variétés différentielles plus simples relativement à une fonction de Morse donnée, classifier ces parties plus simples à partir de l'information contenue dans cette fonction et ainsi reconstruire la variété explicitement. Cet outils de la topologie différentielle nous permettra entre autres de donner une caractérisation pratique des *noeuds ribbon*, qui sont des noeuds de ∂B^4 bordant des disques particuliers dans B^4 .

Dans un autre ordre d'idées, certains noeuds apparaissent naturellement comme l'intersection des zéros d'un polynôme complexe avec une petite 3-sphère centrée en une singularité de la variété Riemannienne ramifiée. On appelle la variété issue de cette construction un *entrelacs algébrique*. On introduit les noeuds algébriques plus précisément dans le chapitre 3 et démontre certaines de leurs propriétés. Il en ressortira que les noeuds algébriques sont d'une classe à part et munis de beaucoup plus de structure que la plupart des noeuds. Comme on le verra également, les noeuds algébriques forment un sous-ensemble d'une classe de noeuds pour lesquels on peut définir la relation d'ordre partielle déterminée par l'existence d'une *concordance ribbon*. La notion de concordance ribbon provient de la notion de disque ribbon, à l'instar de la relation qu'il existe entre les noeuds slice et la notion de concordance. Nous les introduirons toutes au chapitre 4, puis présenterons certains des résultats de Gordon (Gordon, 1981). L'un d'entre eux a ouvert la voie à une généralisation de la notion de concordance ribbon et à donc permis à Miyazaki de démontrer que cette dernière se comporte bien, dans une certaine mesure, sous la somme connexe entre noeuds faisant partie d'une certaine famille de noeuds (dont les noeuds algébriques font partie). C'est donc en utilisant ce résultat conjointement avec la résolution de la conjecture de géométrisation de Thurston et un résultat de Livingston que Baker établit un lien entre deux vieilles conjectures de la théorie des noeuds.

CHAPITRE I

THÉORIE DES NOEUDS LISSES

1.1 Formalisation de la notion de noeud

Intuitivement, quand on pense à un noeud, on s'imagine tous un bout de ficèle entremêlé qu'il est possible de défaire moyennant un certain niveau de patience. Ce qui distingue deux noeuds n'est donc pas la possibilité de défaire ou non ces derniers, puisque tout noeud peut se défaire, mais plutôt la manière dont ils sont placés dans l'espace (i.e. entremêlés). On pourrait donc définir un noeud comme étant un plongement continu de l'intervalle $[0, 1]$ dans \mathbb{R}^3 ou plutôt comme un plongement continu du cercle unité dans \mathbb{R}^3 , si on pense maintenant au même bout de ficèle entremêlé avec ses extrémités recollées. De prime à bord, cette définition semble adéquate, puisqu'elle contient l'ensemble des noeuds avec lesquels nous sommes familiers. En effet, on peut représenter comme le plongement continu

$$\begin{aligned} \rho: S^1 &\hookrightarrow S^3 \subset \mathbb{C}^2 \\ \exp(i\theta) &\mapsto (\exp(i(2\theta)), \exp(i(3\theta))) \end{aligned}$$

le noeud trèfle représenté à la figure 1.1. Toutefois, un moment de réflexion nous convainc que l'on pourrait également définir des noeuds aux allures pathologiques (voir la figure 1.2). On appellera noeuds *domptés* ceux qui formalisent notre intuition et noeuds *sauvages* de telles aberrations. On peut les distinguer formellement par le fait que les uns sont approximables (sans être dénaturé) par des chemins linéaires par morceaux de \mathbb{R}^3 ne contenant qu'un nombre fini de segments, mais

pas les autres.

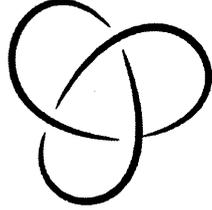


Figure 1.1 Noeud trèfle

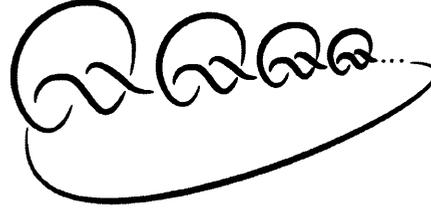


Figure 1.2 Noeud Sauvage

Pour exclure les noeuds sauvages de cette définition, on considèrera plutôt les plongements lisses de S^1 dans \mathbb{R}^3 . Il s'agit d'un résultat de topologie différentielle que toute sous-variété différentielle admet un voisinage ayant la structure d'un fibré vectoriel lisse de rang complémentaire à son fibré tangent.¹ Dans le cas d'un plongement de S^1 , on peut même raffiner ce résultat pour obtenir un voisinage difféomorphe au tore plein $S^1 \times D^2$.² Ce dernier permet de construire l'approximation polygonale recherchée et donc d'exclure les noeuds indésirables. Nous expliciterons les détails des arguments donnés plus haut dans la prochaine section.

Un problème perdue avec notre définition de noeud : cette dernière est beaucoup trop rigide. En effet, tout déplacement du plongement dans l'espace à travers d'autres plongements (i.e. des déformations ne dénaturant pas ce dernier) nous donne des noeuds distincts. On formalise cette idée de déplacement par la notion d'isotopie.

Définition 1.1.1. Étant donné $f_0: M_1 \hookrightarrow M_2$ et $f_1: M_1 \hookrightarrow M_2$ deux plongements lisses d'une même variété, on dit qu'une fonction lisse $f: M_1 \times [0, 1] \rightarrow M_2$ est

1. Voir le théorème 1.2.23.

2. Voir le corollaire 1.2.26.

une isotopie lisse de f_0 sur f_1 si on a

1. $f_0(\cdot) \equiv f(\cdot, 0)$ et $f_1(\cdot) \equiv f(\cdot, 1)$ sur tout M_1 ;
2. $f(\cdot, t): M_1 \hookrightarrow M_2$ est un plongement lisse pour tout $t \in [0, 1]$.

On dira que deux plongements sont isotopes s'il existe une isotopie entre eux.

Pour deux variétés différentielles fixées M_1 et M_2 , la relation *être isotope* sur l'ensemble des plongements de M_1 dans M_2 définit une relation d'équivalence. Seulement la transitivité demande un moment de réflexion. Or, la concaténation lisse de deux isotopies permet d'en construire une troisième, ce qui établit bel et bien la transitivité de la relation.

Ainsi, on aimerait plutôt considérer un noeud comme étant une classe d'isotopie lisse d'un plongement lisse de S^1 dans \mathbb{R}^3 .

Définition 1.1.2. On appelle *noeud lisse* une classe d'isotopie lisse d'un plongement lisse de S^1 dans \mathbb{R}^3 . On dit que deux noeuds sont égaux s'ils sont isotopes.

Remarque 1.1.3. Étant donné un plongement $K: S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ définissant donc un noeud en considérant sa classe d'isotopie, on commettra un abus de notation en dénotant également par K le noeud que K représente.

Enfin, pour des raisons pratiques, on aimerait travailler dans S^3 plutôt que \mathbb{R}^3 . Pour ce faire, il faudrait s'assurer que les théories sont équivalentes, c'est-à-dire, que tout plongement de S^1 dans S^3 correspond à un plongement de S^1 dans \mathbb{R}^3 et que deux noeuds isotopes dans S^3 sont isotopes dans \mathbb{R}^3 , et réciproquement. Or, il s'avère que c'est le cas. D'une part, les réciproques sont triviales si on utilise la projection stéréographique. D'autre part, il suffit de montrer que toute isotopie lisse $S^1 \times [0, 1] \rightarrow S^3$ donne lieu à une isotopie de mêmes extrémités qui n'est pas surjective. On peut alors utiliser la projection stéréographique pour conclure. En

effet, comme le voisinage tubulaire d'un noeud correspond à un plongement de $S^1 \times D^2$ dans S^3 dans lequel la section triviale est le noeud, pour s'assurer qu'un noeud évite un point il suffit de pousser ce dernier le long de la fibre au voisinage du point. En s'assurant que le nouveau noeud soit toujours une section lisse de $S^1 \times D^2$, on s'assure en fait qu'on obtient un noeud isotope au noeud initial. Il résulte de ce raisonnement que tout noeud de S^3 est isotope à un noeud de \mathbb{R}^3 (sous la projection stéréographique).

Enfin, comme on le verra à la section suivante, toute isotopie entre deux plongements induit une isotopie entre les voisinages tubulaires.³ Ainsi, si les deux noeuds isotopes évitent un point choisi, il est toujours possible de modifier l'isotopie de sorte à ce qu'elle évite également le point, en répétant l'argument en chaque temps de l'isotopie et ce de manière lisse.

1.2 Un peu de topologie différentielle

L'objectif de cette section est de poser les fondements rigoureux de topologie différentielle dont on fait usage dans la section précédente et dont on aura de besoin pour la suite. On rappellera d'une part certaines notions à l'intersection de la topologie et géométrie différentielle, puis on démontrera le théorème d'existence et d'unicité du voisinage tubulaire. Finalement, on tirera de toute cette machinerie certaines conclusions propres à la théorie des noeuds lisses. En particulier, on formalisera ce qu'on entend par noeud dompté et démontrerons que tout noeud lisse en est un. Notons que les fondements sur lesquelles les résultats de cette section se basent, ainsi que les résultats qu'on détaille sont tirés des ouvrages (Spivak, 1999), (Kosinski, 1993), (Hirsch, 1976).

3. Voir le théorème 1.3.3.

Notations Tout au long de ce mémoire, on travaillera dans la catégorie lisse, c'est-à-dire, que toute variété sera munie d'une structure différentielle lisse et que toute application entre variétés sera lisse. Étant donnée une variété différentielle M on dénotera TM son fibré tangent et T_pM son espace tangent en p . Dans une carte (ϕ, U) de M au voisinage de p , on dénotera $\frac{\partial}{\partial x_i}$ le champ de vecteur au dessus de U correspondant à la courbe $t \mapsto te_i$ de $\phi(U)$, où (e_1, \dots, e_m) correspond à la base canonique de \mathbb{R}^m . Enfin, étant donnée $f: M_1 \rightarrow M_2$ une application lisse entre variétés différentielles, on dénotera sa différentielle par $Df: TM_1 \rightarrow TM_2$ et sa différentielle en p par $Df_p: T_pM_1 \rightarrow T_{f(p)}M_2$.

1.2.1 Plongements et isotopies

Dans un premier temps, on rappelle la notion de plongement d'une variété différentielle.

On dit que $f: N \looparrowright M$ est une *immersion en p* si sa différentielle en p est injective. Il s'avère que si f est une immersion en p , alors elle en est une au voisinage de p . En effet, dans un système de trivialisations locales adéquates autour de p , la différentielle de f est de la forme $(p, v) \mapsto (p, A(p)(v))$, où

$$A: U \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^{\dim N}, \mathbb{R}^{\dim M})$$

est une application lisse de U , l'ouvert de la trivialisations autour de p , vers l'espace des applications linéaires $\mathcal{L}(\mathbb{R}^{\dim N}, \mathbb{R}^{\dim M})$ ⁴. Par conséquent, la composition avec la projection sur l'image de $A(p)$ nous donne un isomorphisme en T_pN et donc au voisinage de $\pi^{-1}(\{p\})$ par continuité de

$$p \mapsto \det(\text{proj} \circ A(p)).$$

4. On identifie $\mathcal{L}(\mathbb{R}^{\dim N}, \mathbb{R}^{\dim M})$ à un espace vectoriel réel de dimension $\dim N \cdot \dim M$ et la structure différentielle sur cet espace.

En vertu du théorème du rang généralisé aux variétés différentielles, on a donc le théorème d'immersion locale.

Lemme 1.2.1 (Théorème d'immersion locale). Étant donné $f: N \looparrowright M$ une immersion en p , alors il existe un système de cartes adéquat en p et $f(p)$ dans lequel f correspond à l'inclusion canonique de $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^m$.

Ainsi, il résulte du lemme 1.2.1 que l'on peut toujours munir l'image d'une immersion d'une structure différentielle faisant de $f: N \looparrowright f(N)$ un difféomorphisme, si on munit $f(N)$ de la *bonne* topologie. Toutefois, rien n'implique à priori que la topologie nécessaire pour faire de f un difféomorphisme sur son image coïncide avec la topologie induite de M . Pour cette raison, dans l'optique où l'on veut caractériser le fait d'être une sous-variété différentielle par l'existence d'une certaine application entre variétés différentielles, on doit plutôt considérer la notion de plongement lisse.

Définition 1.2.2. On dit qu'une application lisse $f: N \hookrightarrow M$ est un *plongement lisse* si c'est une immersion en chacun de ses points et un homéomorphisme sur son image. D'autre part, si N est une variété différentielle à bord, on dit que f est un plongement lisse si elle en est un sur $\text{Int}(N)$ et ∂N .

Ainsi, on a la caractérisation suivante des sous-variétés différentielles.

Proposition 1.2.3. Étant donné deux variétés différentielles N et M , on a que N est une sous-variété de M si et seulement si c'est l'image d'un plongement lisse.

On avait mentionné plus haut la notion d'isotopie lisse entre variétés différentielles. Comme nous travaillerons à l'occasion avec des variétés à bord et que le produit de deux variétés différentielles est une variété différentielle si et seulement si au

plus une des deux variétés possède un bord, on doit définir cette notion légèrement différemment.⁵

Définition 1.2.4. Étant donné deux plongements lisses $f_0: M_1 \hookrightarrow M_2$ et $f_1: M_1 \hookrightarrow M_2$ d'une même variété, on dit qu'une fonction lisse $f: M_1 \times \mathbb{R} \rightarrow M_2$ est une isotopie lisse de f_0 sur f_1 si on a

1. $f_0(\cdot) \equiv f(\cdot, 0)$ et $f_1(\cdot) \equiv f(\cdot, 1)$ sur tout M_1 ;
2. $f(\cdot, t): M_1 \hookrightarrow M_2$ est un plongement pour tout $t \in [0, 1]$;
3. $f(\cdot, t)$ est constante sur $(-\infty, 0] \cup [1, +\infty)$.

On dira que deux plongements sont isotopes s'il existe une isotopie entre eux.

On remarque que dans le cas où M_1 est une variété sans bord, les deux notions sont équivalentes. En effet, pour passer de la définition 1.2.4 à la définition 1.1.1, il suffit de considérer sa restriction à $[0, 1]$. Pour passer de la définition 1.1.1 à la définition 1.2.4, il suffit de reparamétriser adéquatement afin de pouvoir prolonger cette dernière en une application lisse sur tout $M_1 \times \mathbb{R}$. Étant donné $f: M_1 \times J \rightarrow M_2$ une isotopie d'un type ou de l'autre, on peut toujours considérer le plongement

$$\begin{aligned} \hat{f}: M_1 \times J &\hookrightarrow M_2 \times J \\ (x, t) &\mapsto (f(x, t), t). \end{aligned}$$

Remarquons qu'un tel plongement préserve le niveau, c'est-à-dire, satisfait

$$pr_2 \circ \hat{f}(x, t) = t.$$

Il n'est pas difficile de se convaincre que ces deux notions sont en correspondance biunivoque lorsque M_1 est compacte⁶. On peut alors se représenter graphiquement la différence entre les deux définitions d'isotopie via celle de plongement préservant le niveau (voir la figure 1.3).

5. Comparer la définition 1.2.4 avec la définition 1.1.1.

6. On peut consulter l'article <https://arxiv.org/pdf/1708.09703.pdf> pour un contre-exemple dans le cas où M_1 n'est pas compacte.

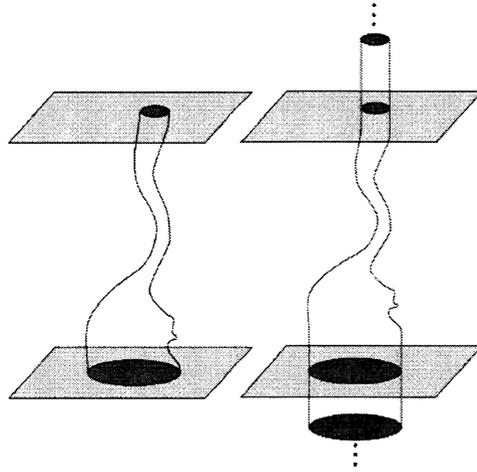


Figure 1.3 Plongements préservant le niveau

Étant donné l'importance de l'application utilisée pour la reparamétrisation, donnons les détails.

On va définir une fonction lisse $\mu: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ qui satisfait $\mu \equiv 0$ sur $(-\infty, 0]$ et $\mu \equiv 1$ sur $[1, +\infty)$. Dans (Spivak, 1965) on définit, pour $\delta_1 < \delta_2$ l'application lisse suivante

$$\mu_{\delta_1, \delta_2}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{(x-\delta_1)^2}\right) \cdot \exp\left(-\frac{1}{(x-\delta_2)^2}\right), & \text{si } x \in (\delta_1, \delta_2) \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ainsi, il suffit de définir la fonction lisse voulue comme suit

$$\mu: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$$

$$x \mapsto \frac{\int_0^x \mu_{\frac{1}{4}, \frac{3}{4}}(t) dt}{\int_0^1 \mu_{\frac{1}{4}, \frac{3}{4}}(t) dt}.$$

On constate alors qu'une isotopie $f: M_1 \times [0, 1] \rightarrow M_2$ entre f_0 et f_1 en induit une de la forme suivante

$$g: M_1 \times [0, 1] \rightarrow M_2$$

$$x \mapsto f(x, \mu(t))$$

et cette dernière s'étend en une isotopie lisse $\tilde{g}: M_1 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ qui est constamment égale à f_0 et f_1 sur respectivement $(-\infty, \frac{1}{4}]$ et $[\frac{3}{4}, +\infty)$. On réutilisera cette application μ a plusieurs endroits par la suite lorsqu'on cherchera à étendre des applications lisses ou à concaténer des isotopies lisses.

1.2.2 Rappels sur les fibrés vectoriels lisses

Dans cette sous-section, on rappellera les notions sur les fibrés vectoriels lisses dont nous aurons besoin pour la formulation et démonstration du théorème du voisinage tubulaire. On en profitera par le fait même pour introduire certaines notions plus générales qui nous seront utiles dans les chapitres subséquents lorsque l'on introduira la notion de noeud fibré lisse.

Définition 1.2.5. On appelle *F-fibré au-dessus de B* un triplet $\xi := (E, \pi, B)$, où E , B et F sont trois espaces topologiques appelés respectivement *espace total*, *espace de base* et *fibre de ξ* , et $\pi: E \rightarrow B$ est une surjection continue satisfaisant la condition de trivialité locale suivante :

Pour tout $p \in B$, il existe U un voisinage ouvert de p dans B et

$$\phi_U: \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times F$$

un homéomorphisme⁷ tel que le diagramme ci-dessous soit commutatif,

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U) & \xrightarrow{\phi_U} & U \times F \\ & \searrow \pi & \swarrow pr_1 \\ & U & \end{array}$$

où pr_1 dénote la projection sur la première composante.

7. L'espace $U \times F$ est muni de la topologie produit.

On appelle ϕ_U une *trivialisat on locale* du fibrée. On appelle *cocycle* associée à deux trivialisations ϕ_U, ϕ_V l'application $A_{U,V} = pr_2 \circ \phi_U \circ \phi_V^{-1}$ définie sur $U \cap V$.

On constate que, pour $p \in U$, la trivialisat on restreinte

$$\phi_{U,p}: \pi^{-1}(\{p\}) \rightarrow \{p\} \times F$$

est également un homéomorphisme. Il en résulte que chacune des fibres de π est homéomorphe à F , d'où la terminologie de fibre pour F .

Définition 1.2.6. Si on demande de plus que F soit un espace euclidien de dimension finie k et que les trivialisations locales soient des isomorphismes d'espaces vectoriels lorsqu'on les restreint à toute fibre de E , alors ξ est appelé *fibré vectoriel de rang k* .

De manière générale, si ξ est un fibré, où B et F sont des variétés différentielles et E une variété topologique, on peut montrer que :

L'espace total E admet une unique structure différentielle telle que π soit lisse et les trivialisations locales des diff omorphismes⁸.

On appelle un tel fibré un *fibré lisse*.

Exemple 1.2.7. Le fibré tangent est un exemple bien connu de fibré vectoriel lisse.  tant donné son importance pour la suite, rappelons brièvement sa construction.

Afin de construire TM , on va en premier lieu définir ses fibres, puis ses trivialisations locales et enfin recoller le tout de sorte à obtenir un fibré vectoriel lisse.

8. On munit les produits de la forme $U \times F$ de leur structure différentielle produit.

Tout d'abord, mentionnons qu'il existe plusieurs manières de définir les fibres du fibré tangent et que nous avons opté pour la plus intuitive d'entre elles. On dénote $\mathcal{C}_p(M)$ l'ensemble des chemins lisses $\gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ passant par p en $t = 0$. Étant donné (ψ, U) une carte de M autour de p , on dit que γ_1 et γ_2 sont équivalents si $\psi \circ \gamma_1$ et $\psi \circ \gamma_2$ ont la même différentielle en 0. Cette relation est indépendante du choix de carte de manière évidente et définit bien une relation d'équivalence sur $\mathcal{C}_p(M)$. On pose alors $T_p M$ comme étant le quotient de $\mathcal{C}_p(M)$ par cette relation d'équivalence et on définit

$$TM := \bigcup_{p \in X} T_p X$$

et $\pi: TX \rightarrow X$ l'application donnée par $\pi(\vec{v}) = p$, si $\vec{v} \in T_p M$.

On constate que dans une carte fixée (ψ, U) tout élément de $T_p M$ admet un représentant de la forme $\psi^{-1} \circ (t \mapsto t\vec{v})$, où $\vec{v} \in \mathbb{R}^m$. Ainsi, on peut définir la correspondance biunivoque

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}_{U,p}: T_p M &\rightarrow \mathbb{R}^m \\ \psi^{-1} \circ (t \mapsto t\vec{v}) &\mapsto \vec{v}. \end{aligned}$$

Cette dernière nous permet de munir $T_p M$ d'une structure d'espace vectoriel. Comme un changement de carte correspond à appliquer un isomorphisme à \mathbb{R}^m sous cette correspondance, la structure d'espace vectoriel est indépendante du choix de carte. Pour chaque carte (ψ, U) de X , on pose alors $\phi_U: \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^m$ comme étant $\phi_U := (p, \tilde{\phi}_{U,p})$, sur $\pi^{-1}(\{p\})$. Remarquons que par construction ces dernières sont des isomorphismes lorsque restreintes aux espaces tangents. De plus, il s'avère qu'il existe une métrique définie sur TM faisant des applications ϕ_U des homéomorphismes.⁹ En munissant TM de cette métrique, il en résulte que TM est un fibré vectoriel de rang voulu. De plus, comme elle est évidemment localement homéomorphe à $\mathbb{R}^{2 \dim M}$ et que tout espace métrique est paracompact

9. Voir le problème 1 et 2 du chapitre 3 dans l'ouvrage (Spivak, 1999).

et Hausdorff en vertu du théorème de métrisation de Smirnov, il s'agit d'une variété topologique. On peut alors, en vertu d'un résultat mentionné plus haut, munir TM d'une structure différentielle de sorte que (TM, π, M) soit un fibré vectoriel lisse.

Comme nous le verrons plus loin, l'existence du fibré tangent nous permet d'associer à la variété une multitude de fibrés vectoriels lisses. De plus, il permet de généraliser la notion de différentielle d'une application lisse vue dans un cours d'analyse.

Construction de fibrés vectoriels lisses Il existe une procédure générale nous permettant de construire facilement des fibrés vectoriels lisses à partir de fibrés vectoriels lisses donnés et d'opérations bien définies sur les espaces vectoriels. Cette dernière est similaire à ce qu'on a fait pour construire le fibré tangent associé à une variété différentielle. Par exemple, étant donnés deux fibrés vectoriels lisses $\xi_1 = (E_1, \pi_1, B)$ et $\xi_2 = (E_2, \pi_2, B)$ de rang k_1 et k_2 respectivement, on peut définir un nouveau fibré vectoriel lisse de rang $k_1 + k_2$ par

$$\xi_1 \oplus \xi_2 = \left(\bigcup_{p \in B} \pi_1^{-1}(\{p\}) \oplus \pi_2^{-1}(\{p\}), \pi, B \right)$$

où la projection

$$\pi: \bigcup_{p \in B} \pi_1^{-1}(\{p\}) \oplus \pi_2^{-1}(\{p\}) \rightarrow B$$

est définie simplement par $\pi(v, w) = \pi_1(v)$. Pour $p \in B$ fixé, on considère $\phi_{U_1}^1$ et $\phi_{U_2}^2$ deux trivialisations locales autour de p de respectivement ξ_1 et ξ_2 . On pose alors, pour tout $q \in U_1 \cap U_2$,

$$\begin{aligned} \phi_{U_1 \cap U_2, q}: \pi_1^{-1}(\{q\}) \oplus \pi_2^{-1}(\{q\}) &\rightarrow \{q\} \times \mathbb{R}^{k_1} \oplus \mathbb{R}^{k_2} \\ v_q \oplus w_q &\mapsto (q, \phi_{U_1}^1(v_q) \oplus \phi_{U_2}^2(w_q)). \end{aligned}$$

De manière évidente, il s'agit d'isomorphismes d'espaces vectoriels. De plus, si on prend la réunion de ces applications, on peut définir

$$\begin{aligned} \phi_{U_1 \cap U_2}: \pi^{-1}(U_1 \cap U_2) &\rightarrow (U_1 \cap U_2) \times \mathbb{R}^{k_1} \oplus \mathbb{R}^{k_2} \\ v_q \oplus w_q &\mapsto \phi_{U_1 \cap U_2, q}(v_q \oplus w_q). \end{aligned}$$

En faisant varier p dans la construction ci-dessus, on obtient un recouvrement de l'espace total par de telles applications. On munit alors ce dernier de la topologie métrique appropriée faisant de ces trivialisations locales des homéomorphismes et, à l'instar de ce qui a été fait pour le fibré tangent, on obtient que $\xi_1 \oplus \xi_2$ est un fibré vectoriel de rang $k_1 + k_2$.

Donnons maintenant quelques notions supplémentaires sur les fibrés. Dans un premier temps, on définit une classe d'applications entre fibrés vectoriels qui préservent les fibres.

Définition 1.2.8. Étant donnés $\xi_1 = (E_1, \pi_1, B_1)$ et $\xi_2 = (E_2, \pi_2, B_2)$ deux fibrés vectoriels lisses, on appelle *application entre fibrés lisses* un couple (F, f) d'applications lisses $F: E_1 \rightarrow E_2$ et $f: B_1 \rightarrow B_2$ tel que le diagramme ci-dessous soit commutatif et que les restrictions de F aux fibres de E_1 soient des homomorphismes.

$$\begin{array}{ccc} E_1 & \xrightarrow{F} & E_2 \\ \pi_1 \downarrow & & \downarrow \pi_2 \\ B_1 & \xrightarrow{f} & B_2 \end{array}$$

Dans le cas où $B_1 = B_2 =: B$ et que $f = Id_B$, on désignera l'application entre fibrés par F et on dira qu'il s'agit d'une *application entre fibrés lisses au-dessus de B* .

Exemple 1.2.9. La différentielle d'une application lisse $f: M_1 \rightarrow M_2$ est un exemple particulier d'application entre fibrés lisses.

Définition 1.2.10. Étant donné $\xi_1 = (E_1, \pi_1, B)$ et $\xi_2 = (E_2, \pi_2, B)$ deux fibrés vectoriels et $F: \xi_1 \rightarrow \xi_2$ une application entre fibrés au dessus de B , on dit qu'il

s'agit d'un *monomorphisme* (resp. *épimorphisme*) si sa restriction à chaque fibre est injective (resp. surjective).

Enfin, il existe une notion équivalente à celle de sous-variété nous permettant de mettre en relation un fibré vectoriel contenu dans un autre fibré avec le fibré ambiant.

Définition 1.2.11. Étant donné un fibré vectoriel lisse $\xi = (E_1, \pi_1, B)$ qui est de rang m , on dit que $\eta = (E_2, \pi_2, B)$ est un sous-fibré lisse de ξ de rang k si E_2 est une sous-variété de E_1 , π_1 restreinte à E_2 est π_2 et qu'il existe une famille de trivialisations locales $\{\phi_\alpha: \pi_1^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times \mathbb{R}^m\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ de ξ recouvrant B qui satisfont

$$pr_2 \circ \phi_\alpha(\pi_1^{-1}(U_\alpha) \cap E_2) = \mathbb{R}^k \subset \mathbb{R}^m,$$

où pr_2 dénote la projection sur la deuxième composante de $U_\alpha \times \mathbb{R}^m$.¹⁰

Il s'avère qu'un moyen fort utile de construire des fibrés vectoriels lisses est à partir d'applications entre fibrés. Le lemme suivant démontre le lien étroit qu'il existe entre la notion de monomorphisme et de sous-fibré à l'instar du lien entre les plongements et les sous-variétés.

Lemme 1.2.12. Étant donnés $\xi_1 = (E_1, \pi_1, B)$ et $\xi_2 = (E_2, \pi_2, B)$ deux fibrés vectoriels lisses de rang k_1 et k_2 respectivement, on a que ξ_1 est un sous-fibré de ξ_2 si et seulement si il existe un monomorphisme entre fibrés vectoriels $F: \xi_1 \rightarrow \xi_2$.

Preuve. D'une part, si ξ_1 est un sous-fibré de ξ_2 , alors l'inclusion canonique est un monomorphisme.

Réciproquement, montrons que si $F: \xi_1 \rightarrow \xi_2$ est un monomorphisme, alors $F(\xi_1)$ est un sous-fibré de ξ_2 isomorphe à ξ_1 . Soit $p \in B$ et $\phi_U: \pi_2^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^{k_2}$,

10. L'inclusion $\mathbb{R}^k \subset \mathbb{R}^m$ est en fait l'inclusion standard de \mathbb{R}^k dans les k premières coordonnées de \mathbb{R}^m .

$\phi_V: \pi_1^{-1}(V) \rightarrow V \times \mathbb{R}^{k_1}$ un système de trivialisations locales autour de p . Considérons l'application

$$\begin{aligned} \phi_U \circ F \circ \phi_V^{-1}: U \cap V \times \mathbb{R}^{k_1} &\rightarrow U \cap V \times \mathbb{R}^{k_2} \\ (q, v) &\mapsto (q, L_q(v)) \end{aligned}$$

où $L: U \cap V \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^{k_1}, \mathbb{R}^{k_2})$ est une application lisse telle que L_q est injective pour tout $q \in U \cap V$. Quitte à effectuer un changement de base pour \mathbb{R}^{k_2} , on peut supposer que

$$L_p(v) = (v, 0) \in \mathbb{R}^{k_1} \times \mathbb{R}^{k_2-k_1}.$$

Ainsi, si $pr_1: \mathbb{R}^{k_1} \times \mathbb{R}^{k_2-k_1} \rightarrow \mathbb{R}^{k_1}$ est la projection sur la première composante, on a que $pr_1 \circ L_p = Id_{\mathbb{R}^{k_1}}$, ou, encore, que $\det(pr_1 \circ L_p) \neq 0$. Par continuité de l'application

$$q \mapsto \det(pr_1 \circ L_q)$$

il existe $W \subset U \cap V$ un voisinage ouvert de p sur lequel $\det(pr_1 \circ L_q) \neq 0$. Autrement dit, $pr_1 \circ L_q$ est un isomorphisme pour tout $q \in W$. Similairement, on peut démontrer que l'application

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^{k_1} \times \mathbb{R}^{k_2-k_1} &\rightarrow \mathbb{R}^{k_1} \times \mathbb{R}^{k_2-k_1} \\ (v, w) &\mapsto (pr_1 \circ L_q(v), w + pr_2 \circ L_q(v)) \end{aligned}$$

est un isomorphisme pour tout q dans un voisinage ouvert $W' \subset W$ de p . Posons alors

$$\begin{aligned} \psi: W' \times \mathbb{R}^{k_1} \times \mathbb{R}^{k_2-k_1} &\rightarrow W' \times \mathbb{R}^{k_1} \times \mathbb{R}^{k_2-k_1} \\ (q, v, w) &\mapsto (q, pr_1 \circ L_q(v), w + pr_2 \circ L_q(v)). \end{aligned}$$

L'application $\psi^{-1} \circ \phi_U$ restreinte à $\pi_2^{-1}(W')$ est par construction une trivialisations locale de ξ_2 et elle satisfait

$$\psi^{-1} \circ \phi_U(\pi_2^{-1}(W') \cap F(E_1)) = W' \times \mathbb{R}^{k_1} \times \{0\} \subset W' \times \mathbb{R}^{k_1} \times \mathbb{R}^{k_2-k_1}.$$

□

Exemple 1.2.13. Un exemple de sous-fibré est donné par le fibré tangent d'une sous-variété. En effet, étant donnée une sous-variété différentielle $M_1 \subset M_2$, l'inclusion canonique $TM_1 \rightarrow i^*TM_2$, où $i: M_1 \hookrightarrow M_2$ dénote l'inclusion de la sous-variété, est un monomorphisme de fibrés.

Le lemme ci-dessous donne une autre méthode pour construire un fibré à partir d'une application fibrée. On appellera *noyau d'une application fibrée* la réunion des noyaux des restrictions à chaque fibre et on le dénotera $\ker F$.

Lemme 1.2.14. Étant donné $F: \xi_1 \rightarrow \xi_2$ un épimorphisme entre fibrés, on a que $\ker F$ est un sous-fibré de ξ_1 .

Preuve. Comme $F_q: \pi_1^{-1}(\{q\}) \rightarrow \pi_2^{-1}(\{q\})$ est un épimorphisme pour tout $q \in B$, on peut démontrer par un argument similaire à celui du lemme 1.2.12 que ξ_1 admet un sous-fibré $\eta := (N, \pi, B)$ de rang k_2 qui est isomorphe à ξ_2 sous F . Soit alors $p \in B$ et $\phi_U: \pi_2^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^{k_2}$, $\phi_V: \pi_1^{-1}(V) \rightarrow V \times \mathbb{R}^{k_1}$ un système de trivialisations locales en p tel que

$$\phi_V(\pi^{-1}(V) \cap N) = \mathbb{R}^{k_2} \times \{0\} \subset \mathbb{R}^{k_2} \times \mathbb{R}^{k_1-k_2}.$$

Posons alors $b_i := pr_2 \circ \phi_U \circ F \circ \phi_V^{-1}(q, e_i)$ pour tout $i \in \{1, \dots, k_2\}$, où $\{e_i\}_{i \in \{1, \dots, k_1\}}$ dénote la base canonique ordonnée de $\mathbb{R}^{k_2} \times \mathbb{R}^{k_1-k_2} = \mathbb{R}^{k_1}$. Pour tout $(i, j) \in \{1, \dots, k_2\} \times \{k_2 + 1, \dots, k_1\}$, il existe $c_{i,j}: U \cap V \rightarrow \mathbb{R}$ une application lisse telle que

$$pr_2 \circ \phi_U \circ F \circ \phi_V^{-1}(q, e_j) = \sum_i c_{i,j}(q) b_i.$$

Ainsi, en posant

$$\psi: U \cap V \times \mathbb{R}^{k_1} \rightarrow U \cap V \times \mathbb{R}^{k_1}$$

$$(q, e_j) \mapsto \begin{cases} (q, e_j - \sum_i c_{i,j}(q) e_i), & \text{si } j \in \{k_2 + 1, \dots, k_1\}; \\ (q, e_j), & \text{sinon.} \end{cases}$$

on obtient un difféomorphisme tel que $\psi^{-1} \circ \phi_V$ est une trivialisations de ξ_1 satisfaisant $\psi^{-1} \circ \phi_V(\pi_1^{-1}(U \cap V) \cap \ker F) = \{0\} \times \mathbb{R}^{k_1-k_2} \subset \mathbb{R}^{k_1}$. \square

On remarque que dans la preuve ci-haut on a en fait démontré le résultat suivant.

Corollaire 1.2.15. Étant donné un épimorphisme $F: \xi_1 \rightarrow \xi_2$ entre fibrés, alors on a un isomorphisme entre fibrés $\xi_1 \cong \xi_2 \oplus \ker F$.

Exemple 1.2.16. On apprend dans un premier cours de géométrie différentielle que toute variété différentielle M admet une section lisse du fibré $TM^* \otimes TM^*$ qui est une métrique sur chaque espace tangent. On appelle cette dernière une métrique riemannienne. Son existence nous mène naturellement à définir la notion de *fibré normal* d'une sous-variété. Il s'agit d'un autre exemple fort important de fibré vectoriel lisse associé à une variété. Étant donné N une sous-variété différentielle de M et ρ une métrique riemannienne, on peut alors le définir par

$$\nu N := \{v \in i^*TM \mid \rho(v, w) = 0, \forall w \in TN\}$$

où $i: N \hookrightarrow M$ est l'inclusion. En utilisant la métrique riemannienne sur M , on peut définir un épimorphisme entre les fibrés consistant en la projection orthogonale de T_pM sur T_pN , pour chaque $p \in N$. Le noyau de cette dernière est alors νN et par le corollaire précédent il en résulte que νN est un sous-fibré satisfaisant $i^*TM \cong \nu N \oplus TN$.

Orientabilité Pour des raisons qui seront évidentes sous peu, rappelons la notion d'orientabilité des fibrés vectoriels. Étant donné $n > 0$, posons $\{e_1, \dots, e_n\}$ la base canonique ordonnée de \mathbb{R}^n . On peut séparer l'ensemble des bases de \mathbb{R}^n en deux sous-ensembles disjoints consistant d'une part de l'ensemble des bases ordonnées $\{a_1, \dots, a_n\}$ dont l'application linéaire envoyant $\{e_1, \dots, e_n\}$ sur $\{a_1, \dots, a_n\}$ est de déterminant positif et d'autre part de celles dont le déterminant est négatif. On appelle *orientation de \mathbb{R}^n* le choix d'une des deux classes d'équivalences mentionnées ci-haut. On adopte la convention d'appeler orientation positive le choix de celle contenant la base canonique de \mathbb{R}^n .

On peut généraliser cette notion d'orientation aux fibrés vectoriels dans le cas où ces derniers sont orientables.

Définition 1.2.17. On dit qu'un fibré vectoriel $\xi = (E, \pi, B)$ de rang n est *orientable* s'il existe un recouvrement de E par des trivialisations locales $\{(\psi_\alpha, U_\alpha)\}_\alpha$ telles que

$$\det A_{\alpha,\beta}(p) > 0$$

pour tout $p \in U_\alpha \cap U_\beta$ et pour tout α, β , où $A_{\alpha,\beta} = pr_2 \circ \psi_\alpha \circ \psi_\beta^{-1}$.

Une orientation de ξ est alors un choix d'orientation sur chaque fibre de π qui est compatible avec le choix de trivialisations locales fait, c'est-à-dire, tel que chaque trivialisations envoie l'orientation des fibres sur l'orientation canonique de \mathbb{R}^n . Dans le cas où la variété est connexe, remarquons qu'il existe exactement deux orientations possibles pour un fibré orientable et que ces dernières sont indépendantes du choix particulier de recouvrement par des trivialisations locales fait plus haut. En effet, le cocycle associé au passage d'une trivialisations du premier recouvrement vers une trivialisations d'un second est soit toujours de déterminant positif ou toujours de déterminant négatif.

Définition 1.2.18. On dit qu'une variété différentielle M est *orientable* si TM l'est et on appelle orientation de M un choix d'orientation de TM .

Étant donné une variété orientable, remarquons également que tout ouvert de cette dernière est une sous-variété orientable par définition d'orientabilité. De plus, étant donné un choix d'orientation sur U , ce dernier induit un choix d'orientation sur toute la variété si cette dernière est connexe.

1.2.3 Existence et unicité du voisinage tubulaire

Étant donné une variété différentielle M , on peut toujours plonger cette dernière dans son fibré tangent via la section triviale, c'est-à-dire, via la section du fibré

tangent qui associe à tout point $p \in M$ le vecteur tangent nul de T_pM . Cela nous permet de voir M comme une sous-variété de TM . Il est intéressant de noter qu'étant donné U un voisinage ouvert de M dans TM , on peut plonger TM dans U de sorte à obtenir un voisinage de M dans TM ayant la structure d'un fibré vectoriel lisse. En effet, étant donné une structure riemannienne ρ sur M , il suffit de choisir $\varepsilon: M \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ une fonction lisse telle que si $v \in M$, $w \in TM$ et $\rho(v - w, v - w) < \varepsilon(\pi(v - w))$, alors $w \in U$. Le plongement est alors donné par

$$\begin{aligned} F: TM &\rightarrow TM \\ v &\mapsto \varepsilon(\pi(v)) \frac{v}{\sqrt{(1+\rho(v,v))}}. \end{aligned}$$

De manière plus générale on a :

Définition 1.2.19. Étant donné N une sous-variété différentielle d'une variété différentielle M , on dit qu'un voisinage U de N dans M est un voisinage tubulaire s'il existe une projection $\pi: U \rightarrow N$ faisant de (U, π, N) un fibré vectoriel lisse dont N correspond à la section triviale.

Dans ce qui suit, nous démontrerons que toute sous-variété différentielle admet un voisinage tubulaire dans sa variété ambiante. Pour ce faire, il suffira donc de plonger un voisinage de $N \subset \nu N$ dans M , puisque l'on pourra pré-composer ce dernier avec un plongement qui rattachise νN à un sous-ensemble de ce voisinage de N tel qu'indiqué ci-haut.

Application exponentielle Étant donné une variété riemannienne M , on sait que chaque fibre de TM admet un produit scalaire permettant d'y définir une métrique. Il s'avère qu'il est possible d'induire une notion de distance sur la variété elle-même via ce qu'on appelle ses *géodésiques*, lorsque la variété est compacte.

Pour une brève introduction à la géométrie riemannienne, on peut consulter (Milnor, 1968b). Le résultat suivant servira donc à la fois de théorème d'existence locale et de définition des géodésiques.¹¹

Théorème 1.2.20. Étant donné N une variété riemannienne, il existe un voisinage ouvert U de M dans TM et une application lisse $\gamma: U \times I \rightarrow M$ telle que :

1. $\gamma(v, 0) = \pi(v)$ et $(\frac{\partial}{\partial t}\gamma)(v, 0) = v$, où $\pi: TM \rightarrow M$ est la projection du fibré tangent ;
2. $\gamma(sv, t) = \gamma(v, st)$, pour tout $s, t \in I$.

On appelle l'application lisse $t \mapsto \gamma(v, t)$ la *géodésique* de M en $\gamma(v, 0)$ allant dans la direction $(\frac{\partial}{\partial t}\gamma)(v, 0) = v$.

On peut maintenant définir l'application exponentielle de laquelle on dérivera le plongement recherché de νN dans M .

Définition 1.2.21. Étant donné M une variété riemannienne et $\gamma: U \times I \rightarrow M$ l'ensemble de ses géodésiques au voisinage de M dans TM , on définit l'application exponentielle comme étant

$$\begin{aligned} \exp: U &\rightarrow M \\ v &\mapsto \gamma(v, 1). \end{aligned}$$

Remarquons de prime à bord, que si M est une variété riemannienne et que $\pi: TM \rightarrow M$ désigne la projection du fibré tangent, alors $D\pi: T(TM) \rightarrow TM$ est un épimorphisme entre fibrés, puisque la restriction de π à $M \subset TM$ est l'identité. Il en résulte par le corollaire 1.2.15 que $T(TM) \cong \ker(D\pi) \oplus TM$ et, en particulier, que $(Di)^*T(TM) \cong (Di)^*\ker(D\pi) \oplus i^*TM$, où i désigne l'inclusion

11. Voir le théorème 1.2 au chapitre 3 de l'ouvrage (Kosinski, 1993).

d'une sous-variété $N \subset M$. Similairement, si on restreint maintenant la différentielle de π à $T(\nu N)$, on a $T(\nu N) \cong \ker(D\pi_{\nu N}) \oplus TN$ avec $TN \subset i^*TM$ et $\ker(D\pi_{\nu N}) \subset \ker(D\pi)$, où $\pi_{\nu N}$ dénote la restriction de π à νN .

Constatons qu'un argument sur la dimension nous permet de montrer que

$$T_0(T_p M) = \ker_p(D\pi)$$

pour tout $p \in N$. En effet, l'inclusion $T_0(T_p M) \subset \ker_p(D\pi)$ est évidente et on a

$$\begin{aligned} \dim T_0(T_p M) &= \dim T_p M \\ &= \dim M \\ &= 2 \dim M - \dim M \\ &= \dim T_p(TM) - \dim T_p M \\ &= \dim \ker_p(D\pi). \end{aligned}$$

De même, on peut procéder similairement pour montrer que $T_0(\nu_p N) = \ker_p(D\pi_{\nu N})$, pour tout $p \in N$.

On aimerait maintenant comprendre comment la différentielle de \exp se comporte sur chaque composante de $(Di)^*T(TM)$.

Lemme 1.2.22. La différentielle $D \exp: i^*TM \rightarrow TN$ restreinte à $\ker_p(D\pi)$ correspond à l'isomorphisme naturel entre $T_0(T_p M)$ et $T_p M$, et correspond à Id_{TN} lorsque restreinte à TN .

Preuve. D'une part, pour $p \in N \subset i^*TM$, on a que $\exp(p) = \gamma_0(1) = p$, car p correspond à $0 \in T_p M$. Il en résulte qu'on a

$$D \exp \Big|_{TN} = D(\exp \Big|_N) = Id_{TN}.$$

D'autre part, pour $v \in T_0(T_p M)$, notons v' le vecteur correspondant de $T_p M$. On a alors que

$$\exp(tv') = \gamma_{tv'}(1) = \gamma_{v'}(t).$$

Il en résulte qu'on a

$$(D \exp)_p(v) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \exp(tv') = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \gamma_{v'}(t) = v'.$$

□

En vertu du lemme 1.2.22, on a que l'application

$$D \exp: T_0(\nu_p N) \oplus T_p N \rightarrow \nu_p N \oplus T_p N$$

est un isomorphisme pour tout $p \in N$ et donc qu'elle est de rang maximal sur un voisinage U de N dans $T(\nu N)$.

Existence du voisinage tubulaire

Théorème 1.2.23. Toute sous-variété différentielle M_1 d'une variété différentielle M_2 admet un voisinage tubulaire. On dénotera ce dernier $N(M_1)$.

Preuve. Par une remarque faite plus haut, il suffit de montrer qu'il existe un plongement d'un voisinage ouvert de $M_1 \subset \nu M_1$ vers M_2 . Or, on a vu suite au lemme 1.2.22 que l'application exponentielle restreinte $\exp|_{\nu M_1} : \nu M_1 \rightarrow M_2$ est une immersion sur un voisinage U de $M_1 \subset \nu M_1$. Par le théorème d'inversion locale, on a alors que $\exp|_U$ est un homéomorphisme local. Il ne reste donc qu'à démontrer qu'il existe un voisinage ouvert de $M_1 \subset \nu M_1$ sur lequel \exp est un homéomorphisme sur son image¹².

Soit alors $\{U_i\}_{i \in I}$ un recouvrement ouvert localement fini de M_1 par des ouverts de νM_1 tels que les applications restreintes $\exp|_{U_i}$ soient des homéomorphismes sur leur image $\exp(U_i)$. Comme M_2 est paracompact et Hausdorff, il existe alors

12. L'argument est tiré de (Lang, 1985).

$\{V_i\}_i$ un raffinement localement fini de $\{\exp(U_i)\}_i$ qui recouvre $M_1 \subset M_2$ et tel que $\overline{V_i} \subset \exp(U_i)$. Pour $p \in M_1 \subset M_2$, il existe W_p un voisinage ouvert de p qui n'intersecte qu'un nombre fini de $\overline{V_i}$, disons $\overline{V_{i_1}}, \dots, \overline{V_{i_r}}$. Quitte à rétrécir W_p , on peut supposer que chaque $\overline{V_{i_j}}$ contient p et que W_p est contenu dans chaque $\exp(U_{i_j})$. Ainsi, comme \exp est l'identité sur M_1 et que $p \in M_1$, on a que $(\exp|_{U_{i_j}})^{-1}(p) = p$, pour tout $j \in \{1, \dots, r\}$, ou, encore, que $p \in \bigcap_j U_{i_j}$. Comme $p \in \bigcap_j U_{i_j}$ et \exp est continue, quitte à rétrécir davantage W_p , on peut supposer que $(\exp|_{U_{i_j}})^{-1}(W_p) \subset \bigcap_j U_{i_j}$. Ainsi, on a que $(\exp|_{U_{i_s}})^{-1} = (\exp|_{U_{i_t}})^{-1}$ sur W_p , pour tout $s, t \in \{1, \dots, r\}$, car chacune est l'inverse de \exp sur $(\exp|_{U_{i_s}})^{-1}(W_p) \cap (\exp|_{U_{i_t}})^{-1}(W_p)$. Posons $W := \bigcup_{p \in N} W_p$. Il s'agit d'un voisinage ouvert de M_1 dans M_2 . On définit alors $g: W \rightarrow g(W)$ l'application donnée par $(\exp|_{U_i})^{-1}$ sur $V_i \cap W$. Par construction, cette dernière est bien définie et correspond à l'inverse de \exp sur $g(W)$. Il s'agit donc d'un homéomorphisme d'inverse $\exp|_{g(W)}: g(W) \rightarrow W$. Autrement dit, \exp plonge $g(W) \cap U$ dans M_2 tel que voulu. \square

Unicité du voisinage tubulaire Il est important de noter que le voisinage tubulaire est unique à isomorphisme de fibrés près. Il s'agit d'un corollaire direct de la proposition suivante.

Proposition 1.2.24. Soient $M_1 \subset M_2$ une sous-variété différentielle et ξ un fibré vectoriel lisse de rang $k < \dim M_2 - \dim M_1$ dont l'espace total est plongé dans M_2 et la section triviale correspond à M_1 . Alors il existe une isotopie lisse

$$F: E(\xi) \times [0, 1] \rightarrow M_2$$

de l'inclusion de $E(\xi)$ dans $N(M_1)$ vers un monomorphisme entre les fibrés à travers laquelle M_1 reste fixe.

En fait, on peut même démontrer que muni de n'importe quelle métrique, le voisinage tubulaire est unique à isométrie entre fibrés près. Ceci est une conséquence de

l'unicité à isomorphisme près et du fait que des fibrés vectoriels lisses isomorphes sont isométriques. Nous ne démontrerons pas ces derniers faits, mais nous référons le lecteur au théorème 3.3 du chapitre 1 et au corollaire 3.2 du chapitre 3 de l'ouvrage (Kosinski, 1993) auquel nous nous sommes référé pour l'écriture de cette section.

1.2.4 Conséquences

Démontrons maintenant quelques corollaires du théorème d'existence qui sont au coeur de la théorie des noeuds lisses.

Corollaire 1.2.25. Étant donnée une variété différentielle M^m et une sous-variété différentielle $N^n \subset M$, il existe un voisinage fermé de N dans M ayant une structure de D^{m-n} -fibré lisse dont N correspond à la section triviale. En particulier, l'intérieur du voisinage fermé est un voisinage ouvert de N ayant une structure de $\text{Int}(D^{m-n})$ -fibré lisse.

Preuve. On peut munir le voisinage tubulaire V de N d'une métrique lisse ρ et définir

$$F := \{v \in V \mid \sqrt{\rho(v, v)} \leq 1\}.$$

Le fermé F est le D^{m-n} -fibré lisse recherché. □

Corollaire 1.2.26. Étant donné un plongement $K: S^1 \hookrightarrow S^3$, la sous-variété $K(S^1)$ admet un voisinage fermé ayant la structure d'un $\text{Int}(D^2)$ -fibré trivial dont il correspond à la section triviale.

Preuve. Par un argument similaire à celui du corollaire 1.2.25, il suffit de vérifier que le voisinage tubulaire est un fibré trivial.

On sait que S^1 est difféomorphe au quotient de $[0, 1]$ sous l'identification de $[0, \varepsilon]$ à $[1 - \varepsilon, 1]$ via $t \mapsto 1 - \varepsilon + t$, où $\varepsilon > 0$ est très petit (ici $[0, 1]$ est muni de sa structure

différentielle standard). Ainsi, on identifiera $K(S^1)$ à $[0, 1]$ pour simplifier l'écriture du problème.

Comme S^3 est orientable, $N(K)$ l'est puisque c'est un ouvert de S^3 . En particulier, comme $K(S^1)$ est aussi orientable, on a que le fibré vectoriel $(N(K), \pi, K(S^1))$ l'est également. Soit alors $\{(\psi_\alpha, U_\alpha)\}_\alpha$ un système de trivialisations locales recouvrant $K(S^1)$ et tel que $\det(A_{\alpha,\beta}) > 0$, pour tout α, β . Comme $K(S^1)$ est compact, il existe donc un nombre $r > 0$ (i.e. le nombre de Lebesgue associé au recouvrement $\{U_\alpha\}_\alpha$) tel que $(\theta - r, \theta + r) \subset U_\alpha$, pour un certain α , pour tout $\theta \in K(S^1)$. Par compacité de $K(S^1)$, on peut extraire de $\{(\theta - r, \theta + r)\}_{\theta \in K(S^1)}$ un sous-recouvrement fini $\{I_1, \dots, I_k\}$ tel que $I_j \subset U_{\alpha_j}$, pour tout $j \in \{1, \dots, k\}$, et satisfaisant $I_i \cap I_{i+1} \neq \emptyset$, pour $i \in \{1, \dots, k-1\}$, $I_k \cap I_1 \neq \emptyset$ et $I_i \cap I_j = \emptyset$, sinon.

Pour démontrer que $(N(K), \pi, K(S^1))$ est trivial, on va construire deux sections lisses partout linéairement indépendantes. D'une part, constatons que si $k = 1$ il n'y a rien à démontrer, puisqu'alors $K(S^1)$ est trivial. On peut donc supposer sans perte de généralité que $k > 1$. Posons alors $a_i \in I_i \cap I_{i+1}$, pour tout $i \in \{1, \dots, k-1\}$, et $a_k \in I_k \cap I_1$, des éléments quelconques dans les intersections respectives.

Sur $[a_k, a_1] \subset I_1$, on définit le champ de vecteurs X_i , pour $i \in \{1, 2\}$, comme étant

$$\begin{aligned} X_i : [a_k, a_1] &\rightarrow N(K) \\ p &\mapsto \psi_{\alpha_1}^{-1}(p, e_i). \end{aligned}$$

Pour tout $j \in \{2, \dots, k-1\}$, on le définit, pour $i \in \{1, 2\}$, comme étant

$$\begin{aligned} X_i : [a_{j-1}, a_j] &\rightarrow N(K) \\ p &\mapsto \psi_{\alpha_j}^{-1}(p, p r_2 \circ \psi_{\alpha_{j-1}}(X_i(a_{j-1}))). \end{aligned}$$

Ainsi, on obtient deux champs de vecteurs X_1 et X_2 qui sont définis sur

$$[a_k, a_1] \cup \dots \cup [a_{k-2}, a_{k-1}]$$

qui sont continues, lisses par morceaux et partout linéairement indépendant par construction. On peut étendre ce dernier à tout $K(S^1)$ comme suit. On constate qu'il existe une unique application linéaire A de déterminant positif (par choix des trivialisations) qui envoie $pr_2 \circ \psi_{\alpha_k}(X_i(a_{k-1}))$ sur $pr_2 \circ \psi_{\alpha_k}(X_i(a_1))$, pour $i \in \{1, 2\}$. On peut donc trouver un chemin lisse allant de Id vers A tout en restant dans la composante connexe des applications linéaires inversibles de \mathbb{R}^2 préservant l'orientation. Disons que cette dernière est de la forme $\gamma: [a_{k-1}, a_k] \rightarrow GL_2(\mathbb{R})$ et satisfait $\gamma(a_{k-1}) = Id$ et $\gamma(a_k) = A$. Ainsi, on peut étendre nos champs de vecteurs sur $[a_{k-1}, a_k]$ par

$$t \mapsto \psi_{\alpha_k}^{-1}(t, \gamma(t)(pr_2 \circ \psi_{\alpha_k}(X_i(a_{k-1}))))$$

pour $i \in \{1, 2\}$. On a donc deux champs de vecteurs continus, lisses sur un nombre fini de morceaux et partout linéairement indépendants. On conclut en appliquant le lemme 1.2.27 pour lisser les champs de vecteurs. \square

Lemme 1.2.27. Si $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ est une application continue et lisse sur un sous-ensemble compact $K \subset [0, 1]$, alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ lisse telle que $f \equiv g$ sur K et $\|f(t) - g(t)\| < \varepsilon$, pour tout t .

Ce dernier nous permet en effet de lisser les champs de vecteurs construits tout en gardant suffisamment de contrôle pour que ces derniers forment toujours une base de la fibre en chaque point.

Noeuds domptés Formalisons à présent ce que nous entendons par un noeud dompté et démontrons que tout noeud lisse en est un. On a dit dans la première section qu'un noeud dompté était une approximation polygonale de ce dernier ne le dénaturant pas. On doit donc dans un premier temps définir ce qu'on entend par là.

Définition 1.2.28. On appelle *noeud polygonal de \mathbb{R}^3* un plongement $K': P \hookrightarrow$

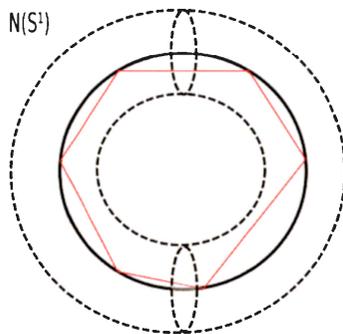


Figure 1.4 Approximation polygonale

\mathbb{R}^3 , où P est un polygone homéomorphe à S^1 ayant un nombre fini d'arêtes, tel que sur chaque arête le plongement est une application affine. On dit alors qu'un plongement $K: P \hookrightarrow S^3$ est un *noeud polygonal de S^3* s'il correspond à un noeud polygonal de \mathbb{R}^3 sous la projection stéréographique.

Il ne reste donc qu'à définir ce qu'on entend par *ne dénaturant pas le noeud*.

Définition 1.2.29. On dit qu'un noeud polygonal est équivalent à un noeud lisse s'il existe une isotopie lisse par morceaux et continue envoyant l'un sur l'autre.

Définition 1.2.30. On dit qu'un plongement lisse $K: S^1 \hookrightarrow S^3$ est *dompté* s'il existe un noeud polygonal qui lui est équivalent. Dans le cas contraire, on dira que le noeud est *sauvage*.

Proposition 1.2.31. Tout noeud lisse est dompté.

Preuve. Étant donné un noeud lisse K , ce dernier admet un voisinage tubulaire $N(K) \cong S^1 \times \text{Int}(D^2)$ dans lequel il correspond à $S^1 \times \{0\}$. Il suffit donc de montrer que $S^1 \times \{0\} \subset S^1 \times \text{Int}(D^2)$ est équivalent à un noeud polygonal, ce qui est évident (voir la figure 1.4). \square

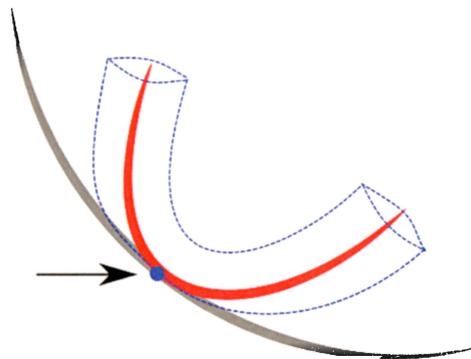


Figure 1.5 Sous-variété tangente au bord en un point (bleu)

1.2.5 Généralisation aux variétés à bord

Plus loin, lorsque l'on parlera de concordance entre noeuds, nous aurons besoin de l'existence d'un voisinage tubulaire d'un plongement de $S^1 \times [0, 1]$ dans $S^3 \times [0, 1]$. Il s'agit d'un exemple de sous-variété à bord contenue dans une variété à bord. Évidemment, il n'est pas nécessairement vrai que toute sous-variété d'une variété à bord admet un voisinage tubulaire (voir la figure 1.5). Toutefois, en s'assurant que la sous-variété soit placée de manière adéquate, on peut généraliser le résultat. Dans la définition qui suit, on dénotera par \mathbb{R}_+^m l'ensemble $\{(x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m \mid x_m \geq 0\}$ et on verra $\mathbb{R}_+^n \subset \mathbb{R}_+^m$ comme étant les n dernières coordonnées de \mathbb{R}_+^m .

Définition 1.2.32. Étant donné une sous-variété $N \subset M$, on dit que cette dernière est bien plongée si :

1. N est un sous-ensemble fermé de M :
2. $N \cap \partial M = \partial N$:
3. Pour tout point $p \in \partial N$, il existe une carte $h: U \rightarrow V$ de M autour de p telle que $V \subset \mathbb{R}_+^m$ contient 0 et satisfait $h(U \cap N) = \mathbb{R}_+^n \cap V$.

De prime à bord, on constate que l'on évite les situations représentées à la figure 1.5 grâce à la condition (3). En particulier, cette dernière implique que

$$T_p\partial M + T_pN = T_pM.$$

Nous discuterons de l'implication réciproque dans le prochain chapitre, lorsque nous introduirons la notion de collier.

Or, à la section 1.2.2 on a présenté une méthode générale permettant de définir des fibrés vectoriels à partir d'opérations bien définies sur les fibres. Dans le cas où on a un sous-fibré $\eta \subset \xi$, il est possible de définir ce qu'on appellera le fibré quotient ξ/η dont les fibres sont le quotient des fibres de ξ par celles de η . Dans le cas où on a une sous-variété $N \subset M$, on peut alors définir le fibré quotient i^*TM/TN , où i dénote l'inclusion. En définissant une application envoyant les fibres de ce dernier sur celles de νN , on peut en fait démontrer que ces deux fibrés sont isomorphes. L'avantage de cette construction sur celle du fibré normal à partir d'une métrique est la facilité avec laquelle on peut comparer de tels fibrés issus d'un même fibré ambiant¹³. Voici un exemple de cette assertion tiré du livre de (Kosinski, 1993).

Exemple 1.2.33. Si X désigne un champ de vecteur pointant vers l'intérieur de N le long de ∂N , alors ce dernier est également un champ de vecteur pointant vers l'intérieur de M le long de $\partial N \subset \partial M$. Ainsi, le fibré vectoriel de rang 1 qu'un tel champ de vecteur induit, disons ξ , satisfait à la fois $j^*TN = T\partial N \oplus \xi$ et $j^*TM = j^*T\partial M \oplus \xi$, où $j: \partial N \hookrightarrow \partial M$ dénote l'inclusion. Ainsi, on peut identifier j^*TM/j^*TN à $j^*T\partial M/T\partial N$.

On peut alors identifier le fibré normal de N restreint à ∂N au fibré normal de $\partial N \subset \partial M$.

13. Il est toutefois important de noter que c'est grâce à la métrique riemannienne qu'on a pu voir le fibré quotient comme un sous-fibré du fibré tangent de la variété ambiante.

Définition 1.2.34. Un voisinage tubulaire νN d'une sous-variété bien plongée $N \subset M$ est dit être un *voisinage tubulaire bien plongé* si $\nu N \cap \partial M$ est un voisinage tubulaire de $\partial N \subset \partial M$.

On peut maintenant généraliser le théorème d'existence du voisinage tubulaire.

Théorème 1.2.35. Toute sous-variété bien plongée $N \subset M$ admet un voisinage tubulaire bien plongé.

Preuve. Notons que si on arrive à démontrer que le fibré normal de $\partial N \subset \partial M$ est le fibré normal de N restreint à ∂M , alors le tour est joué, puisqu'on saura que les géodésiques induites par le fibré normal de N restreintes à ∂M restent dans ∂M .

Pour voir que ceci est bien vrai, on fait appel à un résultat que l'on démontrera au chapitre 3. Il s'avère que ∂M admet toujours un voisinage de la forme $\partial M \times [0, 1)$ dans lequel ∂M correspond à $\partial M \times \{0\}$. Un tel voisinage s'appelle un collier de ∂M et permet de définir au voisinage de M une métrique qui est le produit d'une métrique sur ∂M et d'une métrique sur $[0, 1)$. On peut alors définir explicitement un champ de vecteurs X tel que mentionné dans l'exemple 1.2.33 en s'assurant de plus que ce dernier soit normal à ∂M . La correspondance donnée dans l'exemple 1.2.33 correspond alors à l'égalité voulue entre le fibré normal de $\partial N \subset \partial M$ et celui de N restreint à ∂M . \square

1.3 Noeuds comme classes d'isotopies ambiantes

Bien que notre définition de noeud lisse formalise l'intuition que nous en avons initialement, cette dernière n'est pas pratique. En effet, démontrer en toute rigueur l'existence ou la non-existence d'une isotopie entre deux plongements lisses est une tâche ardue. Au cours de la présente sous-section, nous tenterons d'alléger cette

tâche en donnant deux nouvelles définitions équivalentes pour la notion de noeud lisse.

On a mentionné précédemment que toute isotopie entre noeuds induit une isotopie entre leurs voisinages tubulaires. Ce résultat est en fait un corollaire direct d'un résultat beaucoup plus général impliquant la notion plus forte de difféotopie.

Définition 1.3.1. Soient M_1 et M_2 deux variétés différentielles. Étant donné

$$h_0: M_1 \rightarrow M_2 \text{ et } h_1: M_1 \rightarrow M_2$$

deux difféomorphismes, on appelle *difféotopie* de h_0 vers h_1 une application lisse $H: M_1 \times [0, 1] \rightarrow M_2$ satisfaisant :

1. $h_0(\cdot) \equiv H(\cdot, 0)$ et $h_1(\cdot) \equiv H(\cdot, 1)$ sur tout M_1 ;
2. $H(\cdot, t)$ est un difféomorphisme pour tout t .

On dira que deux difféomorphismes sont *difféotopes* s'il existe une difféotopie entre eux.

Remarque 1.3.2. Les mêmes remarques que pour la définition 1.2.4 concernant le choix de $[0, 1]$ plutôt que \mathbb{R} tiennent pour cette définition.

Théorème 1.3.3 (Théorème d'extension des isotopies). Soit $M_1 \subset M_2$ une sous-variété fermée d'une variété différentielle fermée. Si $f: M_1 \times [0, 1] \rightarrow M_2$ est une isotopie telle que f_0 est l'inclusion, alors f s'étend à une difféotopie $F: M_2 \times [0, 1] \rightarrow M_2$ telle que F_0 est l'identité et $F_t|_{M_1} = f_t$, pour tout t .

Preuve. En vertu de la discussion suivant la définition 1.2.4 on peut considérer l'isotopie $g: M_1 \times \mathbb{R} \rightarrow M_2$ tirée de f et satisfaisant $g \equiv f_0$ sur $[0, \frac{1}{4}]$ et $g \equiv f_1$ sur $[\frac{3}{4}, 1]$. Constatons que cette dernière, comme toute isotopie, induit le plongement suivant

$$\begin{aligned} \hat{g}: M_1 \times \mathbb{R} &\hookrightarrow M_2 \times \mathbb{R} \\ (x, t) &\mapsto (g(x, t), t). \end{aligned}$$

Par le théorème 1.2.23, il existe $N(\hat{g}(M_1 \times \mathbb{R}))$ un voisinage de $\hat{g}(M_1 \times \mathbb{R})$ dans $M_2 \times \mathbb{R}$ admettant une structure de fibré vectoriel lisse

$$(N(\hat{g}(M_1 \times \mathbb{R})), \pi, \hat{g}(M_1 \times \mathbb{R}))$$

dont $\hat{g}(M_1 \times \mathbb{R})$ correspond à la section triviale.

Notons que \hat{g} induit naturellement un champ de vecteurs sur $\hat{g}(M_1 \times \mathbb{R})$ défini par

$$\begin{aligned} X: \hat{g}(M_1 \times \mathbb{R}) &\rightarrow T(M_2 \times \mathbb{R}) \\ \hat{g}(x, t) &\mapsto \left(\frac{\partial}{\partial t} g(x, t), 1 \right) = \frac{\partial}{\partial t} \hat{g}(x, t) \end{aligned}$$

où on a implicitement identifié $T(M_2 \times \mathbb{R})$ à $TM_2 \times \mathbb{R}$. Par définition, son flot est \hat{g} . De plus, on constate par définition de g que $pr_1 \circ X$ est nul sur

$$\hat{g}(M_1 \times \mathbb{R}) \setminus \hat{g}(M_1 \times [0, 1]).$$

Ainsi, en modifiant légèrement la composante en \mathbb{R} de X on va pouvoir étendre ce dernier sur $M_2 \times \mathbb{R}$ en un champ de vecteurs qui est de support compact. Pour ce faire, on va utiliser de manière cruciale le voisinage tubulaire $N(\hat{g}(M_1 \times \mathbb{R}))$.

Munissons donc $N(\hat{g}(M_1 \times \mathbb{R}))$ d'une métrique ρ et considérons $\mu: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction lisse satisfaisant $\mu \equiv 0$ sur $(-\infty, \frac{1}{4})$ et $\mu \equiv 1$ sur $[\frac{3}{4}, +\infty)$. On définit dans un premier temps le champ de vecteurs suivant

$$\begin{aligned} Y: N(\hat{g}(M_1 \times \mathbb{R})) &\rightarrow T(M_2 \times \mathbb{R}) \\ (x, t) &\mapsto (\mu(\rho(\pi(x), x)) X(\pi(x), t), \mu(t+1) \cdot (1 - \mu(t-1))). \end{aligned}$$

Notons que ce dernier coïncide avec X sur $\hat{g}(M_1 \times [\frac{-1}{4}, \frac{5}{4}])$. Ainsi, le flot qu'il engendrera correspondra bien à $\hat{g}|_{M_1 \times [\frac{-1}{4}, \frac{5}{4}]}$. Par définition, on peut de plus étendre ce dernier à tout $M_2 \times \mathbb{R}$ en posant

$$\begin{aligned} Z: M_2 \times \mathbb{R} &\rightarrow T(M_2 \times \mathbb{R}) \\ (x, t) &\mapsto \begin{cases} Y(x, t), & \text{si } (x, t) \in N(\hat{g}(M_1 \times \mathbb{R})); \\ (0, \mu(t+1) \cdot (1 - \mu(t-1))), & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi, on obtient le champ de vecteurs à support compact mentionné plus haut. En vertu d'un théorème classique de géométrie différentielle, il existe alors un groupe de difféomorphismes à 1-paramètre $\{\phi_s\}_{s \in \mathbb{R}}$ de la forme

$$\phi_s: M_2 \times \mathbb{R} \rightarrow M_2 \times \mathbb{R}$$

et satisfaisant

$$\frac{\partial}{\partial s} \phi_s(x, t) = X(\phi_s(x, t)) \text{ et } \phi_0(x, t) = (x, t).$$

Considérons enfin l'application suivante

$$\begin{aligned} \psi: M_2 \times [0, 1] &\rightarrow M_2 \times [0, 1] \\ (x, t) &\mapsto \phi_t(x, 0). \end{aligned}$$

D'une part, par sa définition, on constate que $pr_{[0,1]} \circ \psi(x, t) = t$. En effet, on a que

$$\frac{\partial}{\partial t} (pr_{[0,1]} \circ \psi)(x, t) \equiv 1$$

et donc que

$$pr_{[0,1]} \circ \psi(x, t) = t + c$$

où c est une constante. On constate que

$$c = pr_{[0,1]} \circ \psi(x, 0) = pr_{[0,1]} \circ \phi((x, 0), 0) = pr_{[0,1]}(x, 0) = 0.$$

En particulier, ψ est un difféomorphisme préservant le niveau. On a donc que $pr_1 \circ \psi$ est une difféotopie prolongeant g telle que $\psi(\cdot, 0) = Id_{M_2}$. Pour conclure, il suffit de considérer l'homotopie lisse définie par $(s, t) \mapsto (1-t)s + t\mu(s)$. Cette dernière induit une homotopie de $pr_1 \circ \psi$ vers la difféotopie recherchée. \square

Regardons maintenant quelles sont les conséquences sur la théorie des noeuds.

Définition 1.3.4. Étant donné deux noeuds K_0 et K_1 , on dira qu'ils sont *isotopes de manière ambiante* s'il existe une difféotopie $F: S^3 \times [0, 1] \rightarrow S^3$ telle que $F(K_0, 0) = K_0$ et $F(K_0, 1) = K_1$.

Il résulte de cette définition que deux noeuds isotopes de manière ambiante sont en particulier isotopes, donc égaux. En effet, étant donné une telle difféotopie F , la composition de F avec un plongement représentant K_1 donne une isotopie entre les deux noeuds. Or, il s'agit a priori d'une notion beaucoup plus forte que celle d'isotopie entre deux plongements. Toutefois, en vertu du théorème d'extension des isotopies, la réciproque est également vraie. En effet, étant donné une isotopie f entre deux plongements de S^1 , disons K_0 et K_1 , il existe une isotopie de l'inclusion $K_0(S^1) \subset S^3$ vers le plongement de $K_0(S^1)$ sur $K_1(S^1)$. Cette dernière, s'étend alors à une difféotopie F satisfaisant la propriété voulue. Autrement dit, les relations d'équivalence *être isotope* et *être isotope de manière ambiante* sont équivalentes.

Corollaire 1.3.5. Deux noeuds sont isotopes dans S^3 si et seulement si ils sont isotopes de manière ambiante.

À priori, ce résultat ne semble pas améliorer la situation. Il est, en effet, plus difficile de démontrer l'existence d'une difféotopie que d'une isotopie. Par contre, non seulement on peut transporter le voisinage tubulaire d'un noeud sur celui d'un autre noeud qui lui est isotope, mais cela nous donne aussi un critère tangible pour démontrer que deux noeuds ne sont pas égaux (i.e. qu'il n'existe pas d'isotopie entre deux plongements).

Corollaire 1.3.6. Étant donné deux noeuds K_0 et K_1 qui sont isotopes de manière ambiante, il existe toujours un difféomorphisme $h: S^3 \rightarrow S^3$ satisfaisant $h \circ K_0 = K_1$

Ainsi, pour démontrer que deux noeuds ne sont pas égaux il suffit de montrer qu'il n'existe pas de tel difféomorphisme. Notons que jusqu'à présent nous n'avons considéré la notion de noeud lisse qu'indépendamment d'un choix d'orientation pour S^1 .

Définition 1.3.7. Si on munit S^1 de l'orientation associée au champ de vecteurs unitaires suivant le sens anti-horaire, tout plongement de $S^1 \hookrightarrow S^3$ représente alors ce qu'on appellera un noeud lisse *orienté*.

On remarque que si deux noeuds sont isotopes, alors l'orientation de leur image coïncide. En munissant S^3 d'une orientation, on peut alors raffiner le corollaire précédent.

Corollaire 1.3.8. Étant donné deux noeuds orientés K_0 et K_1 qui sont isotopes de manière ambiante, il existe toujours un difféomorphisme

$$h: (S^3, K_0(S^1)) \rightarrow (S^3, K_1(S^1))$$

qui préserve l'orientation de chaque composante et satisfait $h \circ K_0 = K_1$.

La réciproque du corollaire 1.3.8 est due à un résultat profond de topologie différentielle.

Théorème 1.3.9. Deux noeuds K_0 et K_1 sont isotopes si et seulement si il existe un difféomorphisme

$$h: (S^3, K_0(S^1)) \rightarrow (S^3, K_1(S^1))$$

préservant l'orientation et satisfaisant $h(K_0) = K_1$.

En effet, on peut voir le théorème 1.3.9 comme une conséquence plus ou moins directe du théorème de Cerf.

Théorème 1.3.10 (Théorème de Cerf). Tout difféomorphisme $f: S^3 \rightarrow S^3$ préservant l'orientation s'étend à un difféomorphisme $\tilde{f}: D^4 \rightarrow D^4$ dont la restriction à ∂D^4 correspond à f .

Étant donné sa complexité, nous omettrons la démonstration du théorème de Cerf et référerons le lecteur à (Eliashberg, 1992) pour une preuve utilisant des techniques contemporaines de topologie de contact. Toutefois, pour fins de complétude, explicitons en quoi le théorème 1.3.9 est une conséquence de ce dernier.

Théorème 1.3.11. Si $f: S^3 \rightarrow S^3$ est un difféomorphisme préservant l'orientation et que ce dernier s'étend de manière lisse à $\tilde{f}: D^4 \rightarrow D^4$, alors il existe une difféotopie allant de Id_{S^3} vers f .

Preuve. Montrons d'abord qu'il suffit que tout difféomorphisme de D^4 préservant l'orientation s'étende à un difféomorphisme de \mathbb{R}^4 préservant l'orientation. En effet, supposons que \tilde{f} s'étend à $g: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$. Par un argument fort astucieux, Milnor démontre dans (Milnor, 1997) qu'il existe $G: \mathbb{R}^4 \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^4$ une difféotopie de $Id_{\mathbb{R}^4}$ vers g . Cette dernière induit un difféomorphisme $\hat{G}: \mathbb{R}^4 \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^4 \times [0, 1]$ et, en restreignant ce dernier à $S^3 \times [0, 1]$, on obtient un plongement de $S^3 \times [0, 1]$ dans $\mathbb{R}^4 \times [0, 1]$. Comme $pr_{[0,1]}$ est une fonction lisse sans point critique, il existe un difféomorphisme¹⁴ $l: \hat{G}(S^3 \times [0, 1]) \rightarrow S^3 \times [0, 1]$ qui fixe les extrémités et préserve les niveaux relativement à $pr_{[0,1]}$. Ainsi, la composition suivante

$$k: S^3 \times [0, 1] \xrightarrow{\subset} \mathbb{R}^4 \times [0, 1] \xrightarrow{\hat{G}} \hat{G}(\mathbb{R}^4 \times [0, 1]) \xrightarrow{l} S^3 \times [0, 1]$$

nous donne un difféomorphisme préservant les niveaux. La projection sur la première composante $pr_1 \circ k$ est donc la difféotopie recherchée.

Pour conclure cette preuve, il suffit de démontrer que g existe. Or pour ce faire, il suffit de paramétriser un voisinage du bord de D^4 comme étant $\partial D^4 \times [0, 1]$ (où ∂D^4 correspond à $\partial D^4 \times \{0\}$), puis de modifier le difféomorphisme via l'application μ^{15} de sorte à ce que ce dernier soit constamment égal à f sur $\partial D^4 \times [0, \frac{3}{4}]$. On

14. Voir le théorème 2.2.10.

15. Il s'agit de l'application définie à la section 1.2.1.

peut alors prolonger D^4 à \mathbb{R}^4 de manière évidente.

□

CHAPITRE II

THÉORIE DE MORSE

Au premier chapitre, nous avons introduit l'ensemble des notions de topologie différentielle nécessaires afin de poser les fondements rigoureux de la théorie des noeuds lisses. Dans le présent chapitre, nous compléterons notre bagage d'outils en développant certaines des idées de la théorie de Morse. Dans un premier temps, nous rappellerons la notion de transversalité entre applications. Cette dernière nous permettra de généraliser l'idée derrière la définition des sous-variétés bien plongées et nous permettra de faciliter l'introduction des fonctions de Morse. Dans un second temps, nous définirons ce qu'est une fonction de Morse, établirons leur existence, ainsi que certaines de leurs propriétés. On démontrera ensuite comment l'existence d'une fonction de Morse permet de décomposer toute variété différentielle compacte en un nombre fini de sous-variétés plus *simples*. Cette décomposition nous mènera naturellement à donner une description explicite de la topologie d'une variété en fonction de sa décomposition, résultat au coeur de la théorie de Morse.

2.1 Transversalité et fonctions de Morse

Nous avons introduit au chapitre précédent la notion de sous-variété bien plongée. Rappelons qu'une sous-variété bien plongée $N \subset M$ satisfait en particulier

$$T_p N + T_p \partial M = T_p M$$

pour tout $p \in N \cap \partial M = \partial N$. On dit alors que N est *transverse* à la sous-variété ∂M . On peut en fait généraliser cette notion de transversalité aux applications.

Définition 2.1.1. Étant donné $f: N_1 \rightarrow M$ et $g: N_2 \rightarrow M$ deux applications lisses, on dit que f est *transverse* à g , noté $f \bar{\cap} g$, si pour tout $p \in N_1$ et $q \in N_2$ tels que $f(p) = g(q)$, on a

$$Df_p(T_p N_1) + Dg_q(T_q N_2) = T_{f(p)} M.$$

Remarque 2.1.2. En particulier, lorsque $f: N \rightarrow M$ et $g: \partial M \rightarrow M$ sont les inclusions, on retrouve la condition des sous-variétés bien plongées. Notons que dans le cas où

$$\dim N_1 + \dim N_2 < \dim M$$

les sous-variétés sont transverses seulement si leur intersection est vide.

En général, étant donné deux sous-variétés d'une même variété, il est naturel de se demander s'il est possible de modifier l'une de ces dernières de sorte à ce que leur intersection soit transverse. Une réponse dans cette direction a été donnée en 1954 par René Thom (Thom, 1954).

Théorème 2.1.3. Étant donné un fibré vectoriel lisse $\xi := (E, \pi, B)$ et une application lisse $f: N \rightarrow E$, il existe toujours une section lisse de ξ qui est transverse à f .

C'est toutefois une conséquence directe de ce résultat et de l'existence du voisinage tubulaire qui nous intéressera.

Corollaire 2.1.4. Étant donné une sous-variété compacte bien plongée $N_1 \subset M$ et $f: N_2 \rightarrow M$ une application lisse, il existe toujours une isotopie $h: N_1 \times \mathbb{R} \rightarrow M$ partant de l'inclusion et telle que $h(N_1, 1) \bar{\cap} f$.

Preuve. Comme N_1 est bien plongée, elle admet un voisinage tubulaire bien plongé $N(N_1)$. En vertu du théorème 2.1.3, il existe une section lisse $s: N_1 \rightarrow N(N_1)$ satisfaisant $s \bar{\cap} f$. Comme N_1 est compact et en particulier paracompact, on peut choisir un recouvrement localement fini de N_1 par un système de trivialisations locales de $N(N_1)$. Dans chacune de ces dernières, on peut définir l'isotopie linéaire envoyant N_1 sur $s(N_1)$, puis les recoller via une partition de l'unité pour obtenir l'isotopie recherchée. \square

Notons que dans un cadre plus restrictif, on a un résultat plus fort.

Corollaire 2.1.5. Étant donné une sous-variété compacte bien plongée N_1 contenue dans une variété fermée M , U un voisinage ouvert de N_1 dans M et $f: N_2 \rightarrow M$ une application lisse, il existe toujours une difféotopie $H: M \times \mathbb{R} \rightarrow M$ partant de l'identité, fixant le complément de U et telle que $H(N_1, 1) \bar{\cap} f$.

Preuve. Par la preuve du corollaire 2.1.4, on sait qu'il existe une isotopie $h: N_1 \times \mathbb{R} \rightarrow M$ qui part de l'inclusion. En rattachant le voisinage tubulaire $N(N_1)$ de sorte à ce qu'il soit inclus dans U , comme N_1 est compacte et sans bord, le théorème d'extension des isotopies nous permet de conclure. \square

De plus, notons que la transversalité entre deux sous-variétés nous permet, à l'instar des sous-variétés bien plongées, de contrôler le comportement de ces dernières sur leur intersection.

Théorème 2.1.6. Étant donné deux sous-variétés N_1^k et N_2^l d'une variété différentielle M^m , on a que $N_1 \bar{\cap} N_2$ si et seulement si au voisinage de chaque point de leur intersection il existe une carte (ϕ, U) dans laquelle

$$\phi(U \cap N_1) = \phi(U) \cap \mathbb{R}^k \times \{0\} \subset \mathbb{R}^m \quad \text{et} \quad \phi(U \cap N_2) = \phi(U) \cap \{0\} \times \mathbb{R}^l \subset \mathbb{R}^m.$$

Les détails sont faits au théorème 1.6 du chapitre 4 de l'ouvrage (Kosinski, 1993).

2.1.1 Points critiques non-dégénérés

Le concept de transversalité nous donne également un point de vue différent sur les notions classiques de points critiques et points critiques non-dégénérés. Étant donné une fonction lisse $f: M \rightarrow \mathbb{R}$, on rappelle qu'un point critique est un point en lequel la différentielle est l'application nulle et que ce dernier est dit non-dégénéré si la Hessienne de f en p est non-singulière. À la différentielle Df , on peut naturellement associer la section lisse du fibré cotangent suivante

$$\begin{aligned} df: M &\rightarrow TM^* \\ p &\mapsto Df_p. \end{aligned}$$

On remarque alors qu'un point critique de f correspond à un point au-dessus duquel la section df intersecte la section triviale $M_0 \subset TM^*$. De plus, on dira plutôt qu'un point critique est *non-dégénéré* lorsque cette intersection avec M_0 est transverse. Il s'avère que la notion classique est équivalente à cette dernière :

Lemme 2.1.7. Étant donné une fonction lisse $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ et un point critique p de f , $df \bar{\cap}_p M_0$ si et seulement si la Hessienne de f en p est non-singulière.

Preuve. Par la définition 2.1.1, on sait que $df \bar{\cap}_p M_0$ si et seulement si

$$T_p M_0 + D(df)_p(T_p M) = T_{df_p}(TM^*).$$

Or, dans la discussion précédent le théorème d'existence du voisinage tubulaire, on a montré que pour tout $p \in M_0$, on a

$$T_{df_p}(TM^*) \cong T_p M_0 \oplus Ker_{df_p}(D\pi)$$

où $\pi: TM^* \rightarrow M$ désigne la projection du fibré cotangent. Il suffit donc de démontrer que la projection de $D(df)_p$ sur $Ker_{df_p}(D\pi)$ est surjective si et seulement si la Hessienne de f en p est non-singulière.

Soit alors $(\phi = (x_1, \dots, x_m), U)$ une carte de M autour de p . Cette dernière induit une trivialisaton locale

$$\begin{aligned} \psi: \pi^{-1}(U) &\rightarrow U \times \mathbb{R}^m \\ v_q &\mapsto (q, D\phi_q(v_q)). \end{aligned}$$

Notons $i: U \hookrightarrow M$ l'inclusion et considérons alors le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccccc} T(i^*TM^*) & \xrightarrow{D\pi} & & & i^*TM \\ & \searrow & & & \swarrow \\ & & i^*TM^* & \xrightarrow{\pi} & U \\ & & \downarrow \psi & & \downarrow Id \\ & & U \times \mathbb{R}^m & \xrightarrow{pr_1} & U \\ & \swarrow & & & \swarrow \\ i^*TM \times T\mathbb{R}^m & \xrightarrow{Dpr_1} & & & i^*TM \\ & & & & \downarrow Id \\ & & & & U \end{array}$$

Comme $D\psi$ est un isomorphisme entre fibrés et que le diagramme ci-dessus est commutatif, $D\psi$ envoie

$$T_pM_0 \oplus Ker_{df_p}(D\pi) \subset T(i^*TM^*)$$

isomorphiquement sur

$$T_pM \oplus Ker_0(Dpr_1) \subset i^*TM \oplus T\mathbb{R}^m$$

tout en préservant les composantes. Il en résulte que la composition de $D(df)_p$ avec la projection sur $Ker_{df_p}(D\pi)$ est surjective si et seulement si $Dpr_2 \circ D(\psi \circ df)_p$ est surjective. Or, par choix de ψ , on a que

$$pr_2 \circ \psi \circ df = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$$

si bien qu'on a

$$Dpr_2 \circ D(\psi \circ df)_p = D(pr_2 \circ \psi \circ df)_p = D\left(\sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i\right)_p = \sum_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p)(dx_i \wedge dx_j)_p.$$

□

Le lemme précédent est important, puisque d'une part il nous permettra de traiter l'existence des fonctions de Morse géométriquement et d'autre part d'exploiter l'aspect algébrique de la notion pour classifier les différents types de points critiques non-dégénérés.

Définition 2.1.8. Étant donné une fonction lisse $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ et $p \in M$ un point critique non-dégénéré de f , on appelle *indice du point critique* p la dimension d'un sous-espace de dimension maximal sur lequel la Hessienne est définie négative.

Comme cette notion est invariante sous-changement de coordonnées linéaires et qu'un changement de carte correspond à un changement de coordonnées linéaires dans la fibre, l'indice d'un point critique est bien défini.

Définition 2.1.9. Étant donné une fonction lisse $f: M \rightarrow \mathbb{R}$, on dit que f est une *fonction de Morse* si $df \neq 0$ sur M_0 .

Une fonction de Morse est donc une fonction n'admettant que des points critiques non-dégénérés.

2.1.2 Existence de fonctions de Morse

On se demande maintenant dans quelle mesure il est possible d'établir l'existence d'une fonction de Morse sur une variété différentielle donnée. Nous verrons dans cette section que non seulement toute variété différentielle compacte admet une fonction de Morse, mais plus généralement que tout cobordisme compact admet une fonction de Morse adaptée, c'est-à-dire, une fonction de Morse se comportant *bien* au voisinage de son bord.

Rappelons dans un premier temps que toute variété compacte de dimension finie se plonge dans \mathbb{R}^n pour un certain entier $n \in \mathbb{N}$. Ainsi, pour voir que toute variété

compacte admet une fonction de Morse, il suffit de démontrer que toute sous-variété compacte de \mathbb{R}^n admet une fonction de Morse.

Théorème 2.1.10. Étant donné une sous-variété $M \subset \mathbb{R}^n$ et $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction lisse, il existe un sous-ensemble dense de $(\mathbb{R}^n)^*$ dont les éléments $\phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ satisfont $d(f - \phi|_M) \bar{\cap} M_0$.

Preuve. On dénotera $g := df$ et $i: M \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ l'inclusion. Tout d'abord, on constate que TM^* peut-être vu comme un sous-fibré de $i^*T\mathbb{R}^{n*}$, puisque l'inclusion $M \subset \mathbb{R}^n$ induit un monomorphisme entre fibrés $TM^* \subset i^*T\mathbb{R}^{n*}$. Ainsi, on a une décomposition de la forme

$$i^*T\mathbb{R}^{n*} \cong TM^* \oplus i^*T\mathbb{R}^{n*}/TM^*$$

et donc une projection $\pi: i^*T\mathbb{R}^{n*} \rightarrow TM^*$ nous permettant de voir $i^*T\mathbb{R}^{n*} = M \times \mathbb{R}^{n*}$ comme un fibré au-dessus de TM^* . De plus, en définissant E comme l'espace total du tiré en arrière de $i^*T\mathbb{R}^{n*}$ par g , on obtient le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{g^*} & i^*T\mathbb{R}^{n*} \\ \pi^* \downarrow & & \downarrow \pi \\ M & \xrightarrow{g} & TM^* \end{array}$$

L'avantage de travailler dans $M \times \mathbb{R}^{n*}$ provient du fait que si la projection de g^* sur \mathbb{R}^{n*} admet $\phi \in \mathbb{R}^{n*}$ comme valeur régulière, alors g^* est transverse à la section constante $M \times \{\phi\}$. En effet, dans ce cas, pour tout $e \in E$ tel que $g^*(e) \in M \times \{\phi\}$, on a

$$Dpr \circ Dg_e^*(T_e E) = D(pr \circ g^*)_e(T_e E) = T_{g^*(e)}\mathbb{R}^{n*}$$

ou, encore, on a

$$Dg_e^*(T_e E) + T_{\pi^*(e)}M = T_{g^*(e)}(M \times \mathbb{R}^{n*})$$

où pr dénote la projection sur \mathbb{R}^{n*} . Ainsi, par le théorème de Sard, on a que $g^* \bar{\cap} M \times \{\phi\}$ pour un ensemble dense de formes linéaires $\phi \in \mathbb{R}^{n*}$. Il suffit donc

de montrer que si $g^* \bar{\cap} M \times \{\phi\}$, alors $d(f - \phi|_M) \bar{\cap} M_0$.

On constate que, d'une part, la section constante $M \times \{\phi\}$ correspond à la section $d\phi|_M$ et, d'autre part, que $\pi \circ d\phi|_M = d(\phi|_M)$. Ainsi, si $g^* \bar{\cap} d\phi|_M$, on a que

$$Dg_e^*(T_e E) + D(d\phi|_M)_p(T_p M) = T_{g^*(e)}(M \times \mathbb{R}^{n*})$$

par définition de transversalité. En appliquant $D\pi$ de part et d'autre de l'égalité, on obtient donc

$$Dg_p(T_p M) + D(d(\phi|_M))_p(T_p M) = T_{df_p} M^*$$

par commutativité du diagramme ci-dessous

$$\begin{array}{ccccc} E & \xrightarrow{g^*} & i^* T\mathbb{R}^{n*} & \xleftarrow{(d\phi)|_M} & M \\ \pi^* \downarrow & & \downarrow \pi & \swarrow & \\ M & \xrightarrow{g} & TM^* & \xleftarrow{d(\phi|_M)} & \end{array}$$

Autrement dit, si $g^* \bar{\cap} (d\phi)|_M$, alors $g \bar{\cap} d(\phi|_M)$ ou, encore, $df \bar{\cap} d(\phi|_M)$. Or, cette dernière est équivalente à $d(f - \phi|_M) \bar{\cap} M_0$. \square

Remarque 2.1.11. L'argument ci-haut ressemble beaucoup à celui nécessaire à la démonstration du théorème 2.1.3.

Il résulte du théorème 2.1.10 et de la discussion le précédant qu'on a

Corollaire 2.1.12. Toute variété compacte admet une fonction de Morse.

2.2 Topologie des cobordismes compacts

Nous discuterons dans les chapitres subséquents des concordances entre noeuds, ainsi que des disques slices et ribbons associés à certains noeuds. Ces derniers sont tous des cas particuliers de cobordismes compacts.

Définition 2.2.1. On dit qu'une m -variété différentielle W est un *cobordisme compact* entre les $(m - 1)$ -variétés différentielles W_0, W_1 , si W est compact et $\partial W \cong W_0 \sqcup W_1$. On dénote un cobordisme compact W par le triplet $(W; W_0, W_1)$.¹

Notons que la définition ci-dessus inclut la possibilité que W soit une variété compacte fermée. Toutefois, dans le cas où un cobordisme compact possède un bord, bien que le corollaire 2.1.12 nous permette de conclure en l'existence d'une fonction de Morse, nous aimerions nous assurer qu'il en admette une d'un type particulier.

Définition 2.2.2. Étant donné un cobordisme compact $(W; W_0, W_1)$ et une fonction lisse $f: W \rightarrow [0, 1]$, on dit que f est une *fonction de Morse adaptée* au cobordisme si :

1. $f^{-1}(\{i\}) = W_i$, pour $i \in \{0, 1\}$;
2. f n'admet pas de points critiques au voisinage de ∂W ;
3. f est une fonction de Morse.

Il s'avère qu'il existe toujours de telles fonctions.

Théorème 2.2.3. Tout cobordisme compact admet une fonction de Morse adaptée.

Nous reportons la démonstration de ce résultat à la fin de la présente section, car nous chercherons d'abord à extraire de l'information concernant le cobordisme à partir d'une telle fonction de Morse.

Un premier pas dans cette direction consiste à constater la pertinence des fonctions de Morse et de l'indice des points critiques non-dégénérés.

1. On ne se préoccupera pas de l'orientation des cobordismes compacts dans ce chapitre.

Lemme 2.2.4 (Lemme de Morse (Milnor, 1965)). Étant donné W une variété différentielle, $f: W \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de Morse et $p \in W$ un point critique de f , il existe une carte $((x_1, \dots, x_m), U)$ au voisinage de p satisfaisant :

1. $(x_1(p), \dots, x_m(p)) = \vec{0}$;
2. $f(x_1, \dots, x_m) = f(p) - \sum_{1 \leq i \leq \lambda} x_i^2 + \sum_{\lambda < i \leq m} x_i^2$, où λ correspond à l'indice du point critique p .

On dit que $((x_1, \dots, x_m), U)$ est une *carte de Morse*.

Nous exploiterons plus loin cette forme standard que prend les fonctions de Morse au voisinage d'un point critique. Il s'agit de la pierre angulaire de la théorie de Morse. Toutefois, dans l'immédiat on se contente de constater que le lemme de Morse entraîne que les points critiques d'une fonction de Morse sont isolés, puisque la différentielle dans une carte de Morse ne s'annule qu'en $\vec{0}$.² Il en résulte que l'ensemble des points critiques d'une fonction de Morse sur W est de cardinalité finie. On peut alors raffiner le théorème 2.2.3.

Proposition 2.2.5. Tout cobordisme compact admet une fonction de Morse adaptée dont les valeurs critiques sont distinctes sur l'ensemble des points critiques.

Preuve. Disons que p_1, \dots, p_n sont les points critiques de f . Supposons que $f(p_1) = f(p_2)$. Soit alors U un voisinage ouvert de p_2 dans W contenu dans un ouvert V ne contenant pas d'autre point critique et tel que \bar{V} n'intersecte pas ∂W . Quitte à rétrécir U et V on peut supposer que $(V, U) \cong (\text{Int}(D^m), r\text{Int}(D^m))$, où $0 < r < 1$. Ainsi, en utilisant l'application $\mu_{\delta_1, \delta_2}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et la norme euclidienne

2. De même, en invoquant le théorème 2.1.6 on aurait pu conclure le même résultat en constatant que les dimensions de la section triviale et de la fibre de TM^* sont complémentaires.

de \mathbb{R}^m , on peut définir l'application lisse

$$\begin{aligned}\tilde{\lambda}: D^m &\rightarrow [0, 1] \\ p &\mapsto 1 - \mu_{r^2, 1}(\|p\|^2).\end{aligned}$$

En ramenant cette dernière à V et en l'étendant de manière évidente à tout W , on a donc une application lisse $\lambda: W \rightarrow [0, 1]$ telle que $\lambda \equiv 1$ sur U et $\lambda \equiv 0$ en dehors de V . Par continuité de f et par compacité de \bar{V} (voisinage dans lequel $f \neq 0, 1$), on peut alors choisir $\epsilon_0 > 0$ suffisamment petit pour que $f + \epsilon_0\lambda$ soit toujours de valeur dans $[0, 1]$. Par définition de λ et puisque $\epsilon_0 > 0$, on constate qu'on a de plus

$$f(p_1) + \epsilon_0\lambda(p_1) \neq f(p_2) + \epsilon_0\lambda(p_2).$$

Ainsi, l'application $f_0 := f + \epsilon_0\lambda$ est lisse, sépare p_1 de p_2 , mais peut créer des singularités supplémentaires, puisqu'on ne sait rien à priori sur $\nabla\lambda$ (i.e. le gradient de λ) sur l'ouvert $\mathcal{A} := \{p \in W \mid 0 < \lambda(p) < 1\}$ (i.e. là où le gradient de λ est non-nul). Afin de s'assurer que la fonction ne crée pas de points critiques supplémentaires, on introduit une métrique Riemannienne, puis on choisit c, c' tels que $0 < c \leq \|\nabla f\|$ et $\|\nabla\lambda\| \leq c'$ sur $\bar{\mathcal{A}}$, où l'existence de c' est garantie par compacité de $\bar{\mathcal{A}}$ et, enfin, on remplace ϵ_0 par ϵ satisfaisant $0 < \epsilon < \min\{\epsilon_0, \frac{c}{c'}\}$. En posant plutôt $g := f + \epsilon\lambda$, on vérifie sans difficulté que cette dernière est de gradient non-nul sur $\bar{\mathcal{A}}$ et de même gradient que f hors de $\bar{\mathcal{A}}$. En procédant par induction sur le nombre de points critiques, on peut conclure. \square

Ce dernier résultat nous permet de décomposer un cobordisme en un nombre fini de parties plus simples. En effet, étant donnée une telle fonction de Morse adaptée $f: W \rightarrow [0, 1]$, si p_1, \dots, p_n désigne l'ensemble des points critiques de f et que $c_i := f(p_i)$, pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$, on peut supposer, quitte à les renuméroter, que les valeurs critiques satisfont $c_1 < \dots < c_k$. De plus, comme $a_1 := \frac{c_1 + c_2}{2}$ est une valeur régulière de f , il en résulte que

$$W^{(1)} := (f^{-1}([0, a_1]); W_0, f^{-1}(a_1)) \text{ et } (f^{-1}([a_1, 1]), f^{-1}(a_1), W_1)$$

sont deux cobordismes compacts. En procédant par induction sur le nombre de points critiques et en définissant $a_i := \frac{c_i + c_{i+1}}{2}$, pour $i \in \{1, \dots, n-1\}$, on peut ainsi décomposer W en cobordismes compacts

$$W^{(1)} = f^{-1}([0, a_1]), \dots, W^{(n)} = f^{-1}([a_{n-1}, 1])$$

sur lesquels f n'y possède qu'un point critique.

Définition 2.2.6. On dit qu'un cobordisme compact est un *cobordisme élémentaire* s'il admet une fonction de Morse adaptée n'ayant qu'un seul point critique.

Ainsi, on constate qu'on a démontré la proposition suivante :

Proposition 2.2.7. Tout cobordisme compact se décompose en la réunion disjointe de cobordismes élémentaires.

D'une part, on se demande s'il est toujours possible de retrouver le cobordisme original via sa décomposition et, si oui, s'il existe une méthode bien définie nous permettant de l'obtenir. D'autre part, il est également naturel de se demander dans quelle mesure le choix des a_i entre c_i et c_{i+1} affecte la topologie des cobordismes élémentaires dans la décomposition ci-haut. Comme nous le verrons sous peu, ce choix est sans importance et il existe une unique manière de reconstruire un cobordisme à partir de ses cobordismes élémentaires.

2.2.1 Cobordismes produits

Si on reprend les notations ci-dessus, dans cette sous-section, on cherchera à comprendre en quoi consiste un cobordisme de la forme

$$(f^{-1}([a_i, a'_i]); f^{-1}(\{a_i\}), f^{-1}(\{a'_i\}))$$

où $a_i < a'_i < c_{i+1}$. On cherche donc à expliciter la topologie d'un cobordisme compact admettant une fonction de Morse sans point critique. Pour ce faire, in-

roduisons une notion qui nous servira d'intermédiaire entre le comportement d'une fonction de Morse et la topologie du cobordisme.

Définition 2.2.8. Étant donné une fonction de Morse adaptée $f: W \rightarrow [0, 1]$ où C désigne l'ensemble de ses points critiques, on appelle *champ de vecteurs pseudo-gradient pour f* un champ de vecteurs $X: W \rightarrow TW$ satisfaisant

1. $X(f) > 0$ sur $W \setminus C$;
2. Pour tout $p \in C$, il existe une carte $((x_1, \dots, x_m), U)$ autour de p dans laquelle on a

$$f(x_1, \dots, x_m) = f(p) - \sum_{1 \leq i \leq \lambda} x_i^2 + \sum_{\lambda < i \leq m} x_i^2$$

et

$$X(x_1, \dots, x_m) = (-x_1, \dots, -x_\lambda, x_{\lambda+1}, \dots, x_m).$$

Le résultat suivant garantit l'existence d'un tel champ de vecteur.

Proposition 2.2.9. Étant donné une fonction de Morse adaptée $f: W \rightarrow [0, 1]$, il existe toujours un champ de vecteurs pseudo-gradient pour f .

Preuve. Pour simplifier l'écriture de la preuve, supposons que f n'a qu'un point critique $p \in W$ d'indice λ (la preuve se généralise de manière évidente au cas général). En vertu du Lemme 2.2.4, il existe un système de coordonnées

$$((x_1, \dots, x_\lambda, x_{\lambda+1}, \dots, x_m), U_0)$$

au voisinage de p (n'intersectant pas ∂W), dans lequel f est de la forme suivante

$$f(x_1, \dots, x_m) = f(p) - \sum_{1 \leq i \leq \lambda} x_i^2 + \sum_{\lambda < i \leq m} x_i^2.$$

Posons alors le champ de vecteurs défini comme suit

$$\begin{aligned} X_0: U_0 &\rightarrow TM \\ (x_1, \dots, x_m) &\mapsto (-x_1, \dots, -x_\lambda, x_{\lambda+1}, \dots, x_m). \end{aligned}$$

Par un simple calcul, on a que

$$X_0(f)(x_1, \dots, x_m) = 2x_1^2 + \dots + 2x_m^2 > 0$$

sur $U_0 \setminus \{p\}$. Posons alors U un voisinage ouvert de p tel que $\bar{U} \subset U_0$. Par compacité et donc normalité de $W \setminus U_0$, on peut trouver un recouvrement fini de ce dernier par des ouverts U_1, \dots, U_k tels que $U_i \cap \bar{U} = \emptyset$, pour tout $i \neq 0$. De plus, on peut supposer que chaque U_i est issu d'un système de coordonnées $\left((x_1^{(i)}, \dots, x_m^{(i)}), U_i \right)$ tel que $f = c_i + x_1^{(i)}$, où les c_i sont des constantes. Cette dernière condition est possible en vertu du théorème des fonctions implicites, puisque tout point en dehors de U est supposé un point régulier. On pose enfin $X_i := \frac{\partial}{\partial x_1^{(i)}}$ sur chacun des ouverts U_i et on remarque qu'on a

$$X_i(f) \left(x_1^{(i)}, \dots, x_m^{(i)} \right) = 1 > 0.$$

Si on recolle les X_i via une partition de l'unité subordonnée à $\{U_i\}_{i \in \{0,1,\dots,k\}}$, on obtient alors un champ de vecteurs pseudo-gradient sur W relativement à f . \square

On peut maintenant démontrer le principal résultat de cette sous-section.

Théorème 2.2.10. Étant donné un cobordisme $(W; W_0, W_1)$ et $f: W \rightarrow [0, 1]$ une fonction de Morse adaptée, si f n'admet pas de point critique, alors

$$(W; W_0, W_1) \cong (W_0 \times [0, 1]; W_0 \times \{0\}, W_0 \times \{1\}).$$

On appelle un tel cobordisme un *cobordisme produit*.

Preuve.³ Tout d'abord, notons que par la proposition 2.2.9, W admet un champ de vecteurs pseudo-gradient X relativement à f . Comme f n'admet pas de points critiques, ce dernier doit en tout point de W satisfaire $X(f) > 0$. On aimerait donc établir l'existence d'un flot sur W allant de W_0 vers W_1 donnant le difféomorphisme

3. Cette preuve est tiré de l'ouvrage (Milnor, 1965).

voulu. Or, on ne peut pas invoquer le résultat affirmant que tout champ de vecteurs de support compact admet un flot bien défini, puisque la variété W admet un bord. Ici, nous devons procéder différemment.

On rappelle tout d'abord qu'étant donné un point $p \in W_i \subset \partial W$, W admet au voisinage de p une carte $(\phi := (x_1, \dots, x_m), U)$ telle que $x_m \geq 0$. On rappelle également que $f \circ \phi^{-1}$ soit lisse signifie que cette dernière s'étend en une application lisse sur un ouvert de \mathbb{R}^m . On peut alors étendre similairement notre champ de vecteurs pseudo-gradient relativement à cette fonction étendue et ainsi on a l'existence du flot au voisinage de $\phi(p)$ dans \mathbb{R}^m . En restreignant ce flot à U , on a bien l'existence des lignes de champs au voisinage de p dans W . Par l'argument usuel qui exploite la compacité de W (Spivak, 1999)⁴, on a donc l'existence de lignes de champs maximales pour X sur tout W . Si plutôt on considère le champ de vecteur $Y := X/X(f)$, ce dernier est toujours égal à 1 sur W , et on obtient alors des lignes de champs $\gamma_t(q)$ sur W satisfaisant

$$\frac{d}{dt} \Big|_{f \circ \gamma_t(q)} = Y(f)(\gamma_t(q)) = 1.$$

On en déduit, que

$$f \circ \gamma_t(q) = t$$

modulo une translation du paramètre en t . Comme $f^{-1}(\{t\}) = W_i$, puisque f est une fonction de Morse adaptée, il en résulte que $\gamma: W_0 \times [0, 1] \rightarrow W$ est le flot recherché, modulo la démonstration que $\gamma_t(q)$ dépend de manière lisse de q . \square

Ainsi, un cobordisme admettant une fonction de Morse sans point critique est difféomorphe à un cobordisme produit. En particulier, on constate que les variétés W_0 et W_1 sont difféomorphes.

4. Voir le théorème 6 du chapitre 5 de l'ouvrage.

Dans un autre ordre d'idées, ce résultat nous permet également de démontrer l'existence d'un voisinage *structuré* du bord de toute variété compacte.

Théorème 2.2.11. Toute variété compacte à bord M admet un voisinage U de ∂M qui est difféomorphe à $\partial M \times [0, 1)$. On appelle ce dernier un *collier* de M .

Preuve. Remarquons tout d'abord, qu'en vertu du théorème 2.2.10, il suffit de prouver l'existence d'une fonction lisse $f: M \rightarrow \mathbb{R}_+$ telle que $f^{-1}(\{0\}) = \partial M$ et que f n'admette pas de point critique sur un voisinage U de ∂M de la forme $U = f^{-1}([0, \epsilon])$, pour un certain $\epsilon > 0$.

Soit $\{(\phi_i, U_i)\}_{i \in \{1, \dots, k\}}$ un recouvrement localement fini de M par des cartes qui sont telles que pour tout ouvert U_i qui intersecte ∂M , on ait

$$\phi(U_i) = \frac{1}{2} \text{Int}(D^m) \cap \mathbb{R}_+^m.$$

On définit alors, pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$, la fonction suivante

$$f_i: U_i \rightarrow [0, \frac{1}{2}) \\ \phi^{-1}(x_1, \dots, x_m) \mapsto \begin{cases} \mu_{0, \frac{1}{2}}(x_m), & \text{si } U_i \cap \partial M \neq \emptyset; \\ \frac{1}{2}, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Posons alors $\{\lambda_i\}_i$ une partition de l'unité subordonnée à $\{U_i\}_i$. Il suffit donc de poser

$$f: M \rightarrow [0, \frac{1}{2}) \\ p \mapsto \sum_i \lambda_i(p) f_i(p).$$

En effet, si U dénote la réunion de tous les ouverts intersectant ∂M et que V est un voisinage ouvert de ∂M satisfaisant $\bar{V} \subset U$, on peut trouver $\epsilon > 0$ tel que $\sup f = \epsilon$ sur \bar{V} , puisque \bar{V} est compact. \square

Grâce à l'existence d'un collier, nous pouvons enfin mettre un point final à la démonstration du théorème 1.3.11. De plus, à l'instar d'un voisinage tubulaire, on peut démontrer l'unicité d'un collier⁵.

5. Voir le commentaire suite au théorème 3.5 du chapitre 3 de l'ouvrage (Kosinski, 1993).

Lemme 2.2.12. Le collier de toute variété compacte à bord est unique à isotopie près.

Il s'avère qu'avec cette structure additionnelle au bord d'une variété, il est possible de recoller deux variétés différentielles pour en obtenir une troisième.

Corollaire 2.2.13. Étant donné M_1 et M_2 deux variétés différentielles compactes à bord et $h: \partial M_1 \rightarrow \partial M_2$ un difféomorphisme, il existe une structure différentielle faisant de $M_1 \sqcup_h M_2$ une variété différentielle.

Preuve. Constatons d'abord qu'en vertu du théorème 2.2.11, M_1 et M_2 admettent des colliers U_1 et U_2 , respectivement. De plus, quitte à reparamétriser, on peut supposer que

$$U_1 \cong \partial M_1 \times (0, 1] \text{ et } U_2 \cong \partial M_2 \times [1, 2)$$

où les difféomorphismes sont respectivement dénotés par g_1 et g_2 .

Considérons alors les plongements continus $j_1: M_1 \rightarrow M_1 \sqcup_h M_2$, $j_1: M_1 \rightarrow M_1 \sqcup_h M_2$ et

$$k: \partial M_1 \times (0, 2) \rightarrow M_1 \sqcup_h M_2$$

$$(x, t) \mapsto \begin{cases} j_1(g_1^{-1}(x, t)), & \text{si } (x, t) \in \partial M_1 \times (0, 1]; \\ j_2(g_2^{-1}(h(x), t)), & \text{si } (x, t) \in \partial M_1 \times [1, 2). \end{cases}$$

où j_1 et j_2 sont les inclusions. Ces derniers permettent de définir des structures différentielles sur les ouverts

$$V_1 := j_1(U_1 \setminus \partial M_1), \quad V_2 := k(\partial M_1 \times (0, 2)) \text{ et } V_3 := j_2(U_2 \setminus \partial M_2).$$

Pour voir que la réunion de ces structures différentielle forme bien un atlas sur $M_1 \sqcup_h M_2$, il suffit donc de vérifier leur compatibilité sur $V_1 \cap V_2$ et sur $V_2 \cap V_3$. Or, la compatibilité sur $V_1 \cap V_2$ est directe par définition de k et la compatibilité sur $V_2 \cap V_3$ découle de la définition de k et du fait que h est un difféomorphisme. \square

Remarquons que ce résultat s'applique en particulier au cas de deux cobordismes ayant une extrémité en commun et où le difféomorphisme est l'identité. On a donc un moyen de recoller deux cobordismes élémentaires. Avant de démontrer l'unicité de la structure différentielle, notons qu'il est possible dans le cas où la sous-variété N est bien plongée de raffiner le théorème 2.2.11.

Théorème 2.2.14. Étant donné une sous-variété bien plongée $N \subset M$ où M est compacte, il existe un voisinage ouvert U de ∂M tel que $U \cong \partial M \times [0, 1)$ et $U \cap N \cong \partial N \times [0, 1)$.

Remarque 2.2.15. La preuve est essentiellement la même que celle du théorème 2.2.11, à l'exception que notre recouvrement fini contient un sous-recouvrement fini de ∂N par des cartes dont l'existence est garantie dans la définition 1.2.32.

Ceci étant dit, on aimerait maintenant s'assurer que la variété différentielle obtenue dans le corollaire 2.2.13 est unique à difféomorphisme près. Le théorème suivant qui se démontre similairement au théorème 2.2.11 permet d'établir l'unicité de la structure différentielle.

Théorème 2.2.16. Étant donné une variété différentielle M et $N \subset M$ une sous-variété dont la suppression sépare un de ses voisinages en deux composantes connexes, alors N admet un voisinage ouvert difféomorphe à $N \times (0, 2)$ dans lequel N correspond à $N \times \{1\}$. On dit qu'un tel voisinage de N est un *bicollier de N* .

Remarque 2.2.17. À l'instar du théorème 2.2.14, dans le cas où une hypersurface à bord N est bien plongée dans une variété compacte à bord M et telle que $\partial M \setminus \partial N$ et $M \setminus N$ comportent chacune deux composantes connexes, on peut déterminer que l'hypersurface N admet un bicollier U tel que $U \cap \partial N \cong \partial N \times (0, 2)$ en modifiant l'argument similairement à ce qui est suggéré dans la remarque 2.2.15.

Étant donné deux variétés différentielles recollés par leur bords, disons M_1 et M_2 , donnant une variété différentielle W , on peut trouver un bicollier de ∂M_1 dans

cette dernière. La fermeture des deux composantes connexes issuent du complément de ∂M_1 dans le bicollier correspond à un collier de M_1 et un collier de M_2 . Par unicité des colliers, on a donc que la structure différentielle de W est la même que $M_1 \sqcup_h M_2$ construit dans le corollaire 2.2.13. Autrement dit, on a démontré le corollaire suivant :

Corollaire 2.2.18. Étant donné deux variétés différentielles M_1 et M_2 et $h: M_1 \rightarrow M_2$ un difféomorphisme, il existe une unique structure différentielle faisant de $M_1 \sqcup_h M_2$ une variété différentielle.

Il en résulte que toute décomposition en cobordismes élémentaires peut se recoller de manière unique et la variété ainsi obtenue est bien le cobordisme original. Ainsi, en vertu du théorème 2.2.10, on a le corollaire suivant :

Corollaire 2.2.19. La décomposition de tout cobordisme compact en cobordismes élémentaires relativement à une fonction de Morse donnée est unique à difféomorphisme près de ses composantes.

Pour conclure cette section, donnons enfin la preuve que tout cobordisme admet une fonction de Morse adaptée. Cette dernière est tiré du livre (Milnor, 1965).

Preuve (Théorème 2.2.3). En vertu du corollaire 2.2.11, il existe U_0 et U_1 deux voisinages ouverts de W_0 et W_1 qui sont difféomorphes à

$$W_0 \times [0, 1) \quad \text{et} \quad W_1 \times [0, 1).$$

Comme W_0 et W_1 consiste en deux composantes connexes distinctes de ∂W , on peut supposer que $U_0 \cap U_1 = \emptyset$. On définit alors une fonction $f: W \rightarrow [0, 1]$ n'admettant pas de point critique au voisinage de ∂W et telle que $f^{-1}(\{i\}) = W_i$,

pour $i = 0, 1$, de la manière suivante

$$f: W \rightarrow [0, 1]$$

$$p \mapsto \begin{cases} (1 - \mu_{\frac{1}{4}, \frac{1}{2}}(t)) \cdot t + \mu_{\frac{1}{4}, \frac{1}{2}}(t) \cdot \frac{1}{2}, & \text{si } p = (x, t) \in U_1; \\ (1 - \mu_{\frac{1}{4}, \frac{1}{2}}(t)) \cdot (1 - t) + \mu_{\frac{1}{4}, \frac{1}{2}}(t) \cdot \frac{1}{2}, & \text{si } p = (x, t) \in U_2; \\ \frac{1}{2}, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soit alors $U := f^{-1}([0, \frac{1}{4})) \cup f^{-1}((\frac{3}{4}, 1])$ un voisinage ouvert de ∂W n'admettant pas de point critique. Choisissons V un autre voisinage ouvert de ∂W tel que $\overline{V} \subset U$ et prenons $\{(\psi_i, U_i)\}_{i \in \{1, \dots, k\}}$ un recouvrement ouvert fini de W par des cartes telles que chaque U_i est soit contenue dans U ou dans $W \setminus \overline{V}$. Posons alors I comme étant le sous-ensemble de $\{1, \dots, k\}$ contenant tout les indices d'ouverts contenus dans $W \setminus \overline{V}$, et considérons un raffinement $\{K_i\}_{i \in I}$ de $\{U_i\}_{i \in I}$ par des compacts qui est toujours un recouvrement de $W \setminus U$. Quitte à renuméroter les U_i , on peut supposer que $I := \{1, \dots, l\}$, où $l \leq k$.

On va maintenant modifier f sur chaque U_i de sorte à obtenir une fonction de Morse adaptée à W . En vertu du théorème 2.1.10, il existe $\phi_1 \in \mathbb{R}^{m^*}$ telle que $f \circ \psi_1^{-1} + \phi_1|_{\psi_1(K_1)}$ soit une fonction de Morse sur $\psi_1(K_1)$. De plus, par la partie densité du théorème, on peut choisir ϕ_1 de sorte à avoir $\|\phi_1|_{\psi_1(K_1)}\| < \epsilon_1$, pour n'importe quel $\epsilon_1 > 0$.

À l'instar de la construction de λ dans le théorème 2.2.5, on peut trouver une application $\delta: W \rightarrow [0, 1]$ qui est identiquement égale à 1 sur un voisinage de K_1 et identiquement égal à 0 dans un voisinage du complément de \overline{U}_i . Posons alors $g_1 := f + \delta \cdot (\phi_1 \circ \psi_1)$. Cette dernière ne modifie pas le comportement de f en dehors de U_1 et est une fonction de Morse sur K_1 . Or, par construction, on sait que g_1 dépend d'un paramètre $\epsilon_1 > 0$ et en prenant ce dernier suffisamment petit, on peut s'assurer que g_1 soit toujours à valeur dans $[0, 1]$ et satisfasse $g_1^{-1}(\{i\}) = W_i$, pour $i = 0, 1$, puisque les valeurs prises par f sur $W \setminus \overline{V}$ n'admettent pas 0 et 1 comme points d'accumulations.

On aimerait maintenant modifier g_1 de sorte à ce que le résultat soit une fonction de Morse sur $K_1 \cup K_2$. Similairement à la construction de g_1 , on peut construire g_2 de sorte à ce que cette dernière soit une fonction de Morse sur K_2 et ne modifie pas g_1 en dehors de U_2 . Or, g_2 dépend également d'un paramètre $\epsilon_2 > 0$ qui peut être pris suffisamment petit pour qu'elle soit toujours à valeur dans $[0, 1]$ et satisfasse $g_2^{-1}(\{i\}) = W_i$, pour $i = 0, 1$. De plus, dans l'argument du théorème 2.7 du livre (Milnor, 1965), on démontre que pour $\epsilon_2 > 0$ suffisamment petit, on peut s'assurer que

$$\left| \frac{\partial((g_1 - g_2) \circ \psi_1^{-1})}{\partial x_i} \right| < \epsilon \text{ et } \left| \frac{\partial^2((g_1 - g_2) \circ \psi_1^{-1})}{\partial x_i \partial x_j} \right| < \epsilon$$

sur K_1 , pour tout i, j , où $\epsilon > 0$ est une quantité arbitrairement petite et fixe. Il s'avère que, pour $\epsilon > 0$ suffisamment petit, cette condition est suffisante pour que g_2 soit toujours une fonction de Morse sur K_1 . En effet, il suffit de constater qu'un point n'est pas un point critique dégénéré si et seulement si on a

$$\|\nabla((g_1 - g_2) \circ \psi_1^{-1})\| + \left| \det(H_{((g_1 - g_2) \circ \psi_1^{-1})}) \right| \neq 0$$

où $H_{((g_1 - g_2) \circ \psi_1^{-1})}$ dénote la Hessienne de $(g_1 - g_2) \circ \psi_1^{-1}$, et d'utiliser le fait que K_1 est un compact.

Ainsi, on peut obtenir une fonction g_2 telle que voulue. En répétant le procédé un nombre fini de fois (i.e. pour $i = 3, \dots, l$) on obtient une fonction de Morse adaptée à W , puisque $W \setminus U \subset K_1 \cup \dots \cup K_l$. \square

2.2.2 Cobordismes élémentaires standards

On a vu plus haut qu'étant donnée une fonction de Morse adaptée $f: W \rightarrow [0, 1]$, il est toujours possible de décomposer W de manière unique en cobordismes élémentaires relativement à f . On aimerait maintenant classifier ces cobordismes élémentaires à difféomorphisme près en fonction de l'indice de leur point critique.



Figure 2.1 Chirurgie lisse de type $(1, 1)$ sur un noeud

Définition 2.2.20. Étant donné une $(m - 1)$ -variété différentielle M et

$$\phi: S^{\lambda-1} \times D^{m-\lambda} \rightarrow M$$

un plongement lisse, on dit que l'espace quotient

$$\chi(M, \phi) := (M \setminus \phi(S^{\lambda-1} \times \{0\}) \sqcup D^\lambda \times S^{m-\lambda-1}) / (\phi(\vec{x}, (r, \vec{y})) \sim ((r, \vec{x}), \vec{y}))$$

est le *résultat de la chirurgie lisse de type $(\lambda, m - \lambda)$ sur M le long de ϕ* (voir la figure 2.1).

Dans un premier temps, on cherchera à démontrer que toute variété différentielle fermée est cobordante au résultat d'une telle chirurgie et que le cobordisme les reliant admet une fonction de Morse n'ayant qu'un unique point critique d'indice dépendant du type de la chirurgie. Autrement dit, cela nous donnera une forme standard pour un cobordisme élémentaire qui dépend de l'indice λ .

Théorème 2.2.21. Étant donné M une variété différentielle et un plongement lisse

$$\phi: S^{\lambda-1} \times D^{m-\lambda} \rightarrow M$$

il existe un cobordisme élémentaire $(\omega(M, \phi): M, \chi(M, \phi))$ et $f: \omega(M, \phi) \rightarrow [0, 1]$ une fonction de Morse adaptée n'admettant qu'un unique point critique d'indice λ .

Dans un second temps, on démontrera que tout cobordisme élémentaire admettant un point critique d'indice λ est difféomorphe à un tel cobordisme élémentaire standard.

Théorème 2.2.22. Soit W un cobordisme entre les variétés W_0 et W_1 admettant une fonction de Morse adaptée $f: W \rightarrow [0, 1]$ n'ayant qu'un point critique d'indice λ en p . Alors il existe un plongement lisse $\phi_g: S^{\lambda-1} \times D^{m-\lambda} \rightarrow W_0$ tel que

$$(\omega(W_0, \phi_g); W_0, \chi(W_0, \phi_g)) \cong (W; W_0, W_1).$$

Ainsi, en démontrant ces deux résultats, pour avoir une classification complète des cobordismes élémentaires, il ne restera plus qu'à distinguer deux cobordismes élémentaires admettant des fonctions de Morse d'indices distincts.

Avant de procéder à la démonstration de ces résultats, mettons en place le contexte dans lequel ces dernières auront lieu. Introduisons d'abord une région de \mathbb{R}^m qui nous permettra de construire $\omega(W_0, \phi)$ à partir de $S^{\lambda-1} \times D^{m-\lambda} \times [-1, 1]$. Considérons la région de \mathbb{R}^m définie par

$$R := \{(\vec{x}, \vec{y}) \in \mathbb{R}^\lambda \times \mathbb{R}^{m-\lambda} \mid -1 \leq -\|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 \leq 1, \|\vec{x}\| \|\vec{y}\| \leq \cosh(1) \sinh(1)\}$$

et posons

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}^\lambda \times \mathbb{R}^{m-\lambda} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (\vec{x}, \vec{y}) &\longmapsto -\|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2. \end{aligned}$$

On dénotera $R^* := R \cap (\mathbb{R}^\lambda \setminus \{0\} \times \mathbb{R}^{m-\lambda} \setminus \{0\})$ (voir la figure 2.2).

On cherche d'abord à comprendre à quoi correspond cette région R^* .

Lemme 2.2.23.

1. Si $c \in [-1, 0)$, alors il existe un difféomorphisme de la forme

$$\phi_c: S^{\lambda-1} \times \text{Int}(D^{m-\lambda}) \setminus \{0\} \rightarrow R^* \cap f^{-1}(\{c\}).$$

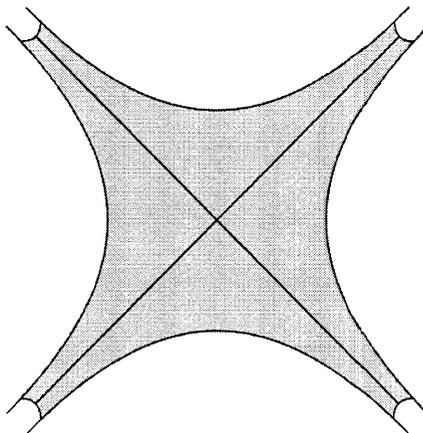


Figure 2.2 Représentation de la région R en dimension 2

2. Si $c \in (0, 1]$, alors il existe un difféomorphisme de la forme

$$\phi_c : \text{Int}(D^\lambda) \setminus \{0\} \times S^{m-\lambda-1} \rightarrow R^* \cap f^{-1}(\{c\}).$$

Preuve. Nous ne traiterons que le cas où $c \in [-1, 0)$, puisque l'autre cas est en tout point similaire. Supposons d'abord que $c = -1$. On affirme alors que le difféomorphisme recherché est donné par

$$\phi_{-1}(\vec{x}, (r, \vec{y})) := (\vec{x} \cosh(r), \vec{y} \sinh(r))$$

où on utilise les coordonnées polaires dans $S^{\lambda-1} \times \text{Int}(D^{m-\lambda}) \setminus \{0\}$. D'une part, on constate que cette application est bien définie (i.e. qu'elle est à valeur dans $R^* \cap f^{-1}(\{-1\})$), car $\cosh^2(r) - \sinh^2(r) = 1$, pour tout r , et que l'on ne considère que des valeurs de r dans $(0, 1]$. D'autre part, un simple calcul nous convainc qu'il s'agit d'une immersion lisse. Notons de plus que l'injectivité est triviale, elle découle de l'injectivité de l'application \sinh . Il suffit donc de démontrer la surjectivité de l'application, puisqu'alors le théorème d'inversion locale nous permettra de conclure.

Soit $(\vec{x}, \vec{y}) \in R^* \cap f^{-1}(\{-1\})$. Si on avait que

$$\cosh(1) < \|\vec{x}\|$$

alors on aurait que

$$\sinh(1) < \|\vec{y}\|$$

puisque $\cosh^2(1) - \sinh^2(1) = 1$ et $(\vec{x}, \vec{y}) \in f^{-1}(\{-1\})$. Par conséquent, on en déduirait que

$$\cosh(1) \sinh(1) < \|\vec{x}\| \|\vec{y}\|$$

ou, encore, que

$$(\vec{x}, \vec{y}) \notin R$$

ce qui est une contradiction.

On peut donc supposer que $\|\vec{x}\| \leq \cosh(1)$ et donc que $\|\vec{y}\| \leq \sinh(1)$, puisque $(\vec{x}, \vec{y}) \in f^{-1}(\{-1\})$. Comme $\sinh(0) = 0 < \|\vec{y}\| \leq \sinh(1)$, par continuité de \sinh il existe $r \in (0, 1]$ tel que $\|\vec{y}\| = \sinh(r)$. On en déduit que $\|\vec{x}\| = \cosh(r)$ et donc qu'on a

$$(\vec{x}, \vec{y}) = \left(\frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|} \cosh(r), \frac{\vec{y}}{\|\vec{y}\|} \sinh(r) \right).$$

Ainsi, on a bien que ϕ_{-1} est surjective et donc un difféomorphisme.

On traite le cas où $c \in (-1, 0)$ légèrement différemment. On définit

$$\phi_c(\vec{x}, (r, \vec{y})) := (\sqrt{|c|} \vec{x} \cosh(\alpha r), \sqrt{|c|} \vec{y} \sinh(\alpha r))$$

où α est un réel strictement positif qui permet de compenser l'apparition de $\sqrt{|c|}$. On pose en fait $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$ tel que $\sqrt{|c|} \sinh(\alpha) = \sinh(1)$. Ce dernier existe par continuité de \sinh . Pour la suite de la démonstration, on procède exactement comme dans le cas $c = -1$. □

On aimerait à présent identifier R^* à la variété $S^{\lambda-1} \times \text{Int}(D^{m-\lambda}) \setminus \{0\} \times [-1, 1]$ et pour ce faire on va utiliser le flot dans R^* d'un champ de vecteurs normal unitaire relativement aux surfaces de niveau de f (i.e. relativement aux $(m-1)$ -variétés lisses $f^{-1}(\{c\})$). On sait qu'un tel champ est donné par

$$\frac{\nabla f(\vec{x}, \vec{y})}{\|\nabla f(\vec{x}, \vec{y})\|} = \frac{(-x_1, \dots, -x_\lambda, y_1, \dots, y_{n-\lambda})}{\|(\vec{x}, \vec{y})\|}.$$

En effet, si X_p est un vecteur tangent en p de $f^{-1}(\{c\})$, alors il existe une courbe $\gamma(t)$ passant par p en $t = 0$ et de dérivée égale à X_p . Or, comme $f \circ \gamma = c$, en commettant l'abus consistant à identifier le champ de vecteur gradient à la différentielle de f , on a que

$$\langle \nabla f(p), X_p \rangle = \langle \nabla f(p), \dot{\gamma}(0) \rangle = D(f \circ \gamma) = 0.$$

Ainsi ∇f et $\frac{\nabla f}{\|\nabla f\|}$ sont des champs de vecteurs orthogonaux aux surfaces de niveau de f . Considérons alors l'application suivante

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^\lambda \setminus \{0\} \times \mathbb{R}^{m-\lambda} \setminus \{0\} \times (0, +\infty) &\longrightarrow \mathbb{R}^\lambda \setminus \{0\} \times \mathbb{R}^{m-\lambda} \setminus \{0\} \\ ((\vec{x}, \vec{y}), t) &\longmapsto (t\vec{x}, \frac{1}{t}\vec{y}). \end{aligned}$$

On vérifie aisément que cette dernière est en fait le flot du champ de vecteurs normal unitaire ci-haut. De plus, pour $(\vec{x}, \vec{y}) \in \mathbb{R}^* \cap f^{-1}(\{1\})$, on sait par le lemme précédent qu'il existe r tel que

$$(\vec{x}, \vec{y}) = \left(\frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|} \cosh(r), \frac{\vec{y}}{\|\vec{y}\|} \sinh(r) \right) \in R^* \cap f^{-1}(\{-1\}).$$

On constate alors qu'au temps $t = \frac{\sinh(r)}{\cosh(r)}$, le flot envoie (\vec{x}, \vec{y}) au point

$$\left(\frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|} \sinh(r), \frac{\vec{y}}{\|\vec{y}\|} \cosh(r) \right) \in R^* \cap f^{-1}(\{1\}).$$

Cela suggère qu'il existe un difféomorphisme de la forme voulue qui est induit par la restriction du flot à $f^{-1}(\{-1\}) \cap R^*$ (voir la figure 2.3).

En effet, considérons le plongement lisse $\Phi: S^{\lambda-1} \times \text{Int}(D^{m-\lambda}) \setminus \{0\} \times [-1, 1] \rightarrow R^*$ définie par la composition suivante

$$(S^{\lambda-1} \times \text{Int}(D^{m-\lambda}) \setminus \{0\}) \times [-1, 1] \xrightarrow{\phi_{-1 \times h}} R^* \cap f^{-1}(\{-1\}) \times (0, +\infty) \longrightarrow R^*$$

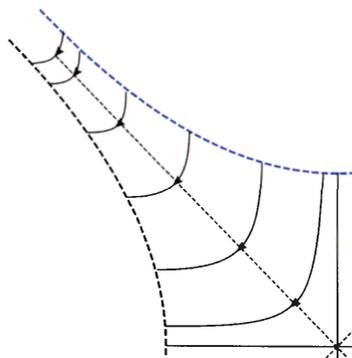


Figure 2.3 Flot du champ de vecteurs

où l'application de droite est le flot et h est la fonction

$$\begin{aligned} h: S^{\lambda-1} \times \text{Int}(D^{m-\lambda}) \setminus \{0\} \times [-1, 1] &\rightarrow (0, +\infty) \\ (\vec{x}, (r, \vec{y}), s) &\mapsto \left(1 - \frac{(s+1)}{2}\right) + \frac{(s+1)}{2} \left(\frac{\sinh(r)}{\cosh(r)}\right). \end{aligned}$$

Par construction, l'image de ce dernier est toujours dans R^* . Ainsi, pour conclure qu'il s'agit bien du difféomorphisme recherché, il suffit de démontrer sa surjectivité. D'une part, pour $(\vec{x}, \vec{y}) \in R^*$, on a qu'en tout temps $t \in \mathbb{R}_+$ la courbe intégrale passant par ce point satisfait l'inégalité

$$\|\vec{x}\| \|\vec{y}\| < \cosh(1) \sinh(1).$$

D'autre part, on a que

$$f\left(t\vec{x}, \frac{1}{t}\vec{y}\right) = -t^2 \|\vec{x}\|^2 + \frac{1}{t^2} \|\vec{y}\|^2 \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} -\infty.$$

Ainsi, par le théorème de la valeur intermédiaire, il en résulte que (\vec{x}, \vec{y}) passe par une ligne de champ partant d'un point de $R^* \cap f^{-1}(\{-1\})$.

Preuve (du Théorème 2.2.21). Étant donné le plongement lisse

$$\varphi: S^{\lambda-1} \times D^{n-\lambda} \rightarrow M$$

donné dans l'énoncé, on peut définir la variété quotient suivante

$$\omega(M, \phi) := (M \setminus \phi(S^{\lambda-1} \times \{0\}) \times [-1, 1] \sqcup R) / ((\phi(\vec{x}, (r, \vec{y})), t) \sim \Phi(\vec{x}, (r, \vec{y}), t))$$

et la munir de l'unique structure différentielle faisant des inclusions des plongements lisses (voir la figure 2.4). Notons que l'identification ci-haut correspond à l'identification démontrée plus haut

$$S^{\lambda-1} \times \text{Int}(D^{m-\lambda}) \setminus \{0\} \times [-1, 1] \cong R^*.$$

Par construction, $\omega(M, \phi)$ est une variété différentielle à bords donnés par

$$(M \setminus \phi(S^{\lambda-1} \times \{0\}) \times \{0\} \sqcup S^{\lambda-1} \times D^{m-\lambda} \times \{-1\}) / (\phi(\vec{x}, (r, \vec{y})), -1) \sim \Phi(\vec{x}, (r, \vec{y}), -1) \cong M$$

et

$$(M \setminus \phi(S^{\lambda-1} \times \{0\}) \times \{1\} \sqcup S^{\lambda-1} \times D^{m-\lambda} \times \{1\}) / (\phi(\vec{x}, (r, \vec{y})), 1) \sim \Phi(\vec{x}, (r, \vec{y}), 1) \cong \chi(M, \phi)$$

où les difféomorphismes découlent de la définition de Φ et du lemme 2.2.23. Pour conclure, il suffit donc de considérer la fonction $g: \omega(X, \phi) \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$g(p) := \begin{cases} -\|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2, & \text{si } p = (\vec{x}, \vec{y}) \in R; \\ c, & \text{si } p \in M \setminus \phi(S^{\lambda-1} \times \{0\}) \times [-1, 1] \text{ et } pr_2(p) = c. \end{cases}$$

et de constater que cette dernière est bien définie, lisse et admet un unique point critique non-dégénéré d'indice λ en $(0, 0)$. \square

Preuve (du Théorème 2.2.22). Considérons un champ de vecteurs pseudo-gradient X pour f . Par définition d'un tel champ, il existe une carte $(\psi = (\vec{x}, \vec{y}), U)$ autour du point critique p (qui satisfait en particulier $\psi(p) = 0$) telle que

$$f(\vec{x}, \vec{y}) = f(p) - \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2.$$

Quitte à rétrécir le domaine et l'ensemble d'arrivé de ψ , on peut supposer que cette dernière est de la forme $\psi^{-1}: D(0, 4\epsilon) \rightarrow U$ avec $\epsilon > 0$ satisfaisant

$$0 < f(p) - \epsilon^2 < f(p) < f(p) + \epsilon^2 < 1.$$

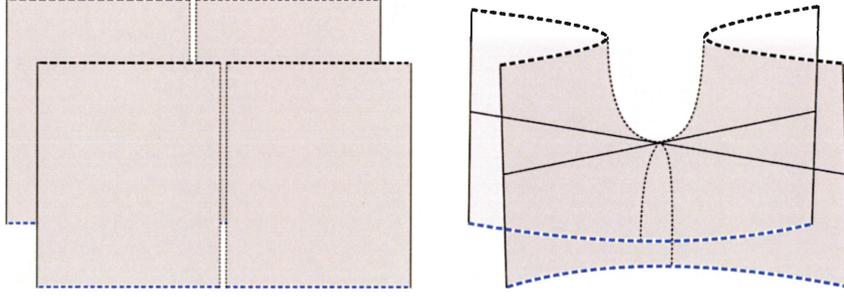


Figure 2.4 Construction de l'espace $\omega(M, \phi)$. avec $\dim M = \lambda = 1$

Posons alors

$$\begin{aligned} \phi: S^{\lambda-1} \times D^{m-\lambda} &\rightarrow U \\ (\vec{x}, (r, \vec{y})) &\mapsto \psi^{-1}((\epsilon \vec{x} \cosh(r), \epsilon \vec{y} \sinh(r))). \end{aligned}$$

Cette dernière est bien un plongement lisse. De plus, comme $f^{-1}([0, f(p) - \epsilon^2])$ ne contient pas de point critique, on a que le flot de X induit un difféomorphisme de $f^{-1}(\{f(p) - \epsilon^2\})$ vers $f^{-1}(\{0\}) = W_0$ dont la restriction à l'image de ϕ induit un plongement

$$\phi_g: S^{\lambda-1} \times D^{m-\lambda} \rightarrow W_0.$$

Notons à présent $W_{-\epsilon} := f^{-1}(\{f(p) - \epsilon^2\})$ et $W_{\epsilon} := f^{-1}(\{f(p) + \epsilon^2\})$.

En vertu du théorème 2.2.10. on a que

$$f^{-1}([0, f(p) - \epsilon^2]) \text{ et } f^{-1}([f(p) + \epsilon^2, 1])$$

sont des cobordismes produits et donc que

$$(W; W_0, W_1) \cong (f^{-1}([f(p) - \epsilon^2; f(p) + \epsilon^2]), W_{-\epsilon}, W_{\epsilon}) =: (\omega_{-\epsilon}; W_{-\epsilon}, W_{\epsilon}).$$

De plus, par construction de $\omega(W_0, \phi_g)$ et $\omega(W_{-\epsilon}, \phi)$, on a directement qu'ils sont difféomorphes en tant que cobordismes. Il suffit donc d'expliciter un difféomorphisme entre

$$(\omega(W_{-\epsilon}; \phi), W_{-\epsilon}, \chi(W_{-\epsilon}, \phi)) \text{ et } (\omega_{-\epsilon}; W_{-\epsilon}, W_{\epsilon}).$$

Posons alors $Y := \frac{X}{\|X\|}$ et dénotons son flot par $\gamma_t(q)$. Comme $Y(f) = 1$ sur $\omega_{-\epsilon} \setminus C$, ce dernier induit un difféomorphisme de la forme

$$(W_{-\epsilon} \setminus \phi(S^{\lambda-1} \times \{0\})) \times [-1, 1] \cong \omega_{-\epsilon} \setminus C$$

où C dénote l'ensemble des points dont le flot mène vers ou arrive de p . Dans l'argument du théorème 3.13 du livre (Milnor, 1965), on démontre qu'on a le difféomorphisme suivant

$$F: (\omega(W_{-\epsilon}, \phi), W_{-\epsilon}, \chi(W_{-\epsilon}, \phi)) \rightarrow (\omega_{-\epsilon}, W_{-\epsilon}, W_{\epsilon})$$

$$q \mapsto \begin{cases} \gamma_t(\vec{z}), & \text{si } q = (\vec{z}, t) \in (W_{-\epsilon} \setminus \phi(S^{\lambda-1} \times \{0\})) \times [-1, 1]; \\ \psi^{-1}(\epsilon\vec{x}, \epsilon\vec{y}), & \text{si } q = (\vec{x}, \vec{y}) \in R. \end{cases}$$

□

Remarque 2.2.24. On appelle *sphères d'attachement gauche* l'image

$$\phi_g(S^{\lambda-1} \times \{0\}) \subset W_0.$$

Par construction, cette dernière correspond aux points de W_0 dont les lignes de champs du champ de vecteurs pseudo-gradient X intersectent le point critique.

2.2.3 Topologie des cobordismes élémentaires

On a vu à la section précédente que tout cobordisme élémentaire relativement à une fonction de Morse f est difféomorphe à un cobordisme élémentaire dans une forme standard qui dépend de l'indice du point critique. On aimerait maintenant voir que deux cobordismes élémentaires admettant des fonctions de Morse dont les indices sont distincts ne sont pas difféomorphes ou, encore, que deux cobordismes élémentaires de la forme standard avec des λ distincts ne sont pas difféomorphes.

Or, en réutilisant les notations de la section précédente, il s'avère que Milnor a démontré que si

$$(W; W_0, W_1) \cong (\omega(W_{-\epsilon}); W_{-\epsilon}, \chi(W_{-\epsilon}, \phi))$$

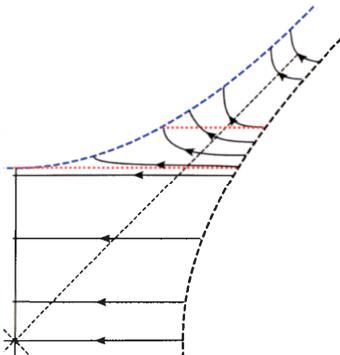


Figure 2.5 Le rétracte par déformation sur $W_{-\epsilon} \cup D^\lambda \times \{0\}$

alors on a que

$$H_n(\omega(W_{-\epsilon}, \phi), W_{-\epsilon}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{si } n = \lambda: \\ \{0\}, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ce résultat découle de l'existence d'un rétracte par déformation de la forme

$$\omega(W_{-\epsilon}, \phi) \rightarrow W_{-\epsilon} \cup D^\lambda \times \{0\}.$$

Nous avons représenté ce dernier sur la figure 2.5. En effet, étant donné un tel rétracte par déformation, on a que

$$\begin{aligned} H_n(\omega(W_{-\epsilon}, \phi), W_{-\epsilon}) &\cong H_n(W_{-\epsilon} \cup D^\lambda \times \{0\}, W_{-\epsilon}) \\ &\cong H_n(D^\lambda, \partial D^\lambda) \end{aligned}$$

où le premier isomorphisme découle de l'axiome d'équivalence homotopique et le second de l'argument usuel utilisant l'axiome d'équivalence homotopique et d'excision. On conclut en considérant la longue suite exacte induite par le couple $(D^\lambda, \partial D^\lambda)$.

Ainsi, les groupes d'homologie nous permettent de distinguer deux cobordismes élémentaires admettant des fonctions de Morse d'indices distincts. On a donc une classification complète à difféomorphisme près des cobordismes élémentaires ou,

encore, que l'indice d'un cobordisme élémentaire est indépendant du choix de fonction de Morse adaptée y admettant un unique point critique.

Notons d'une part qu'il est possible de raffiner la construction du rétracte par déformation pour obtenir

$$\omega(W_{-\epsilon}, \phi) \cong (W_{-\epsilon} \times [0, 1]) \sqcup_{\phi \times \{1\}} D^\lambda \times D^{m-\lambda}$$

où \cong représente un homéomorphisme.

Définition 2.2.25. On dit qu'une variété topologique M_2 est obtenue de M_1 en rajoutant une λ -anse de dimension m sur son bord ∂M_1 si

$$M_2 \cong M_1 \sqcup_\phi D^\lambda \times D^{m-\lambda}$$

où $\phi: S^{\lambda-1} \times D^{m-\lambda} \rightarrow \partial M_1$ est un plongement. On le dénotera alors $M_2 = M_1 \sqcup_\phi h^{(\lambda)}$.

Dans (Milnor, 1959), on démontre dans l'appendice qu'il est toujours possible de redresser le coin créé par le recollement de sorte à obtenir une variété M'_2 homéomorphe à M_2 et pouvant être munie d'une unique structure différentielle compatible avec celle de M_1 et celle de

$$D^\lambda \times D^{m-\lambda} \setminus \partial D^\lambda \times \partial D^{m-\lambda}.$$

L'unicité de cette dernière implique donc qu'il existe un difféomorphisme entre M'_2 et $\omega(W_{-\epsilon}, \phi)$, lorsque $M_1 = W_{-\epsilon} \times [0, 1]$.

Ce résultat est intéressant dans la mesure où il permet de simplifier des arguments nécessitant toute la machinerie développée dans (Milnor, 1965) à des arguments géométriquement plus intuitifs. Par exemple, on démontre le théorème de réarrangement de manière concise dans (Gompf et Stipsicz, 1999).

Théorème 2.2.26 (Théorème de réarrangement). Étant donné une fonction de Morse adaptée $f: W \rightarrow [0, 1]$ admettant p_0, p_1 deux points critiques d'indice $\lambda_0 \leq \lambda_1$ satisfaisant $f(p_0) > f(p_1)$, alors il existe une fonction de Morse g ayant les mêmes points critiques, mais telle que $g(p_0) \leq g(p_1)$.

D'autre part, on peut déduire de l'existence du rétracte par déformation que

Théorème 2.2.27. Tout cobordisme compact $(W; W_0, W_1)$ de dimension n est du même type d'homotopie qu'un complexe CW relatif à W_0 ayant une λ -cellule pour chaque point critique d'indice λ et ce pour tout $\lambda \in \{1 \cdots, n\}$.

Les détails de ce résultat se retrouvent dans (Milnor, 1968b). On se servira du théorème 2.2.27 lorsque l'on cherchera à comprendre le groupe fondamental du complément d'une concordance ribbon. Toutefois, dans la pratique, ce sont les résultats de la sous-section 2.2.2 qui permettent de reconstruire explicitement un cobordisme compact à partir de sa fonction de Morse adaptée et de construire une fonction de Morse adaptée à partir d'un champ de vecteurs pseudo-gradient.

CHAPITRE III

ASPECTS GÉOMÉTRIQUES DE LA THÉORIE DES NOEUDS

Dans les chapitres précédents, nous avons introduit certains outils indispensables au développement rigoureux de la théorie des noeuds lisses. Dans le présent chapitre, nous traiterons du point de vue de la topologie différentielle certains des aspects plus géométriques de la théorie des noeuds. Dans un premier temps, on cherchera à caractériser le noeud trivial, ce qui nous mènera à discuter de la structure périphérique des noeuds. On démontrera par la suite comment on peut définir une somme connexe de paires afin de former un noeud orienté à partir de deux noeuds orientés plus simples, puis discuterons du théorème de décomposition en noeuds premiers. Enfin, on considèrera les noeuds fibrés et fortement quasipositifs et verrons comment ces notions sont préservées sous la somme connexe.

3.1 Le complément d'un noeud

Jusqu'à présent, très peu a été fait concernant la classification des noeuds. Dans le premier chapitre, nous n'avons fait qu'établir l'équivalence des trois relations d'équivalence sur les plongements qui définissent ce qu'est un noeud. On aimerait dans un premier temps avoir un critère calculable nous permettant de déterminer si un noeud est le noeud trivial, c'est-à-dire, un noeud isotope à l'inclusion standard du cercle

$$S^1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1^2 + x_2^2 = 1\} \subset S^3.$$

3.1.1 Une caractérisation topologique

Dans un premier cours de topologie algébrique, on apprend le fameux théorème de séparation de Jordan affirmant que tout plongement d'une $(n-1)$ -sphère dans une n -sphère sépare cette dernière en deux composantes connexes U_1 et U_2 , au sens où si $S \subset S^n$ représente l'image de ce plongement, $S^n \setminus S = U_1 \sqcup U_2$. Il s'avère qu'un résultat dû à Alexander nous permet de conclure que la fermeture de chacune de ces composantes connexes est difféomorphe à B^3 , dans le cas où $n = 3$.

Théorème 3.1.1 (Théorème d'Alexander). Tout plongement lisse de S^2 dans \mathbb{R}^3 borde une 3-boule.

En choisissant $p_1 \in U_1$, on peut alors considérer la projection stéréographique

$$\rho_1: S^3 \setminus \{p_1\} \rightarrow \mathbb{R}^3$$

et on obtient en appliquant le théorème 3.1.1 à $\rho_1(S)$ que $\overline{\rho_1(U_2)} \cong B^3$ et donc que $\overline{U_2} \cong B^3$. Similairement, on démontre que $\overline{U_1} \cong B^3$.

Corollaire 3.1.2 (Problème de Schoenflies généralisé). Tout plongement lisse de la sphère dans S^3 sépare cette dernière en deux composantes connexes dont la fermeture de chacune est difféomorphe à B^3 .

Mentionnons que la preuve du théorème 3.1.1 dans la catégorie lisse est un joli exemple d'application de la théorie de Morse (Hatcher, 2000). Notons de plus qu'il nécessite de manière cruciale l'hypothèse de régularité sur le plongement, puisqu'il existe des exemples de 2-sphères topologiques dans \mathbb{R}^3 ne bordant pas de 3-boules. On peut par exemple consulter la proposition 3.1.1 dans le livre (Rolfsen, 2003) dans lequel on explicite en quoi la sphère hornée d'Antoine est un contre-exemple à cet énoncé dans la catégorie topologique.

Notons enfin que le théorème d'Alexander est également vrai en dimension 2, c'est-à-dire, que tout cercle plongé dans \mathbb{R}^2 borde un disque. Ce dernier, beaucoup plus simple, peut se démontrer de plusieurs façons : on peut le voir soit par un argument de la théorie de Morse ou soit, plus simplement, en invoquant le théorème de Riemann vu dans un cours d'analyse complexe (Conway, 1978)

Dans un ordre d'idées quelque peu différent, il est également possible de démontrer que tout difféomorphisme de la 2-sphère préservant l'orientation s'étend à un difféomorphisme de la 3-boule. En effet, Munkres a démontré que l'espace des automorphismes lisses de la 2-sphère préservant l'orientation est connexe par arcs lorsque muni de la bonne topologie (Munkres, 1960a). Or, il a également démontré que dans cette topologie, l'existence d'un chemin continu allant d'un automorphisme à un autre induit une difféotopie lisse entre ces automorphismes (Munkres, 1960b). Il en résulte que tout automorphisme de la sphère préservant l'orientation est difféotope à l'identité.

Lemme 3.1.3 (Lemme d'Alexander). Tout difféomorphisme de S^2 sur elle-même préservant l'orientation s'étend en un difféomorphisme préservant l'orientation de B^3 sur elle-même.

Preuve. Étant donné $h: S^2 \rightarrow S^2$ un automorphisme préservant l'orientation, il existe en vertu du théorème de Munkres une difféotopie $H: S^2 \times \mathbb{R} \rightarrow S^2$ telle que $H(x, t) \equiv h(x)$ pour $t \leq \frac{1}{4}$ et $H(x, t) \equiv Id(x)$ pour $t \geq \frac{3}{4}$. Fixons alors $U \cong_{\phi} \partial B^3 \times [0, 2)$ un collier de ∂B^3 . Il suffit alors de poser

$$G: B^3 \rightarrow B^3$$

$$p \mapsto \begin{cases} (\phi^{-1}(H(\phi(p)), pr_2 \circ \phi(p)), pr_2 \circ \phi(p)), & \text{si } p \in \phi^{-1}(\partial B^3 \times [0, 1]); \\ Id(p), & \text{sinon.} \end{cases}$$

□

Le corollaire 3.2 et le lemme d'Alexander nous permettent de donner une caractérisation topologique du noeud trivial.

Proposition 3.1.4. Un noeud $K \subset S^3$ est trivial si et seulement s'il borde un disque plongé dans S^3 .

Preuve.¹ Si un noeud K est isotope à $S^1 \subset S^3$, on peut étendre l'isotopie en une difféotopie de S^3 en vertu du théorème 1.3.3 et ainsi transporter le disque standard $D^2 \subset S^3$ bordant S^1 sur un disque bordant K .

Réciproquement, supposons que K borde un disque plongé D et dénotons ce plongement par $\phi: D \hookrightarrow S^3$. Via l'utilisation d'un voisinage tubulaire de $\text{Int}(D^2)$ dans \mathbb{R}^3 et d'un voisinage tubulaire de $\text{Int}(D)$ dans S^3 , on peut étendre ϕ en un plongement $\tilde{\phi}: U \hookrightarrow S^3$, où U correspond à $N(\text{Int}(D^2)) \cup \partial D^2$. Comme $N(\text{Int}(D^2)) \cong \text{Int}(D^2) \times \mathbb{R}$, par unicité du voisinage tubulaire, on peut facilement construire un sous-ensemble fermé $B \subset U$ tel que $B \cong_{\psi} B^3$ et $D^2 \subset B$ correspond à $D^2 \subset B^3$ sous ψ . Posons alors $\rho: S^3 \setminus \{(0, 0, 0, 1)\} \rightarrow \mathbb{R}^3$ la projection stéréographique et considérons le difféomorphisme suivant

$$\tilde{\phi} \circ \rho|_{\rho^{-1}(B)}: \rho^{-1}(B) \rightarrow \tilde{\phi}(B).$$

D'une part, par le théorème 3.1.1, on a que $\rho^{-1}(\partial B)$ et $\tilde{\phi}(\partial B)$ bordent deux boules de part et d'autre d'elles mêmes dont l'une correspond à $S^3 \setminus \text{Int}(\rho^{-1}(B))$ et $S^3 \setminus \text{Int}(\tilde{\phi}(B))$ respectivement. Enfin, en vertu du lemme d'Alexander et comme ρ et $\tilde{\phi}$ préservent l'orientation, on a qu'il existe une extension de $\tilde{\phi} \circ \rho|_{\rho^{-1}(B)}$ en un automorphisme de la 3-sphère préservant l'orientation. Pour conclure, il suffit de remarquer que par construction ce difféomorphisme envoie S^1 sur K en préservant l'orientation et donc que K est le noeud trivial. \square

1. Nous suivons essentiellement la preuve donnée par Rolfsen dans (Rolfsen, 2003) à la section 2.F.7.

3.1.2 Une caractérisation algébrique

La caractérisation précédente du noeud trivial est de nature topologique. Dans cette sous-section, nous élaborerons sur la structure périphérique des noeuds et déduirons entre autre une caractérisation algébrique du noeud trivial. Motivons d'abord par la présentation de deux problèmes classiques de théorie des noeuds une discussion sur leur structure périphérique.

Problème 1 On a vu au premier chapitre que tout noeud $K \subset S^3$ admet un voisinage fermé $\overline{N(K)}$ et un difféomorphisme $h: \overline{N(K)} \rightarrow S^1 \times D^2$ sous lequel K correspond à $S^1 \times \{0\}$. D'une part, un difféomorphisme préservant l'orientation de la forme

$$g: (S^3, K_1) \rightarrow (S^3, K_2)$$

où K_1, K_2 sont deux noeuds, induit un difféomorphisme

$$g: (S^3, \overline{N(K_1)}) \rightarrow (S^3, \overline{N(K_2)})$$

modulo une certaine difféotopie, par unicité du voisinage tubulaire à isotopie près et par le théorème d'extension des isotopies. En restreignant g , on obtient un difféomorphisme de la forme suivante

$$\tilde{g}: (S^3 \setminus N(K_1), \partial \overline{N(K_1)}) \rightarrow (S^3 \setminus N(K_2), \partial \overline{N(K_2)})$$

ou, encore, un isomorphisme

$$\tilde{g}_*: \pi_1(S^3 \setminus N(K_1)) \rightarrow \pi_1(S^3 \setminus N(K_2))$$

envoyant le groupe $\pi_1(\partial \overline{N(K_1)})$ sur $\pi_1(\partial \overline{N(K_2)})$. On peut alors se demander si l'implication inverse est vrai, c'est-à-dire, si cette paire de groupes caractérise le noeud.

Problème 2 D'autre part, en restreignant h en un difféomorphisme

$$\tilde{h}: \overline{\partial N(K)} \rightarrow S^1 \times \partial D^2$$

on constate que S^3 est le résultat de l'identification de $S^3 \setminus N(K)$ à $S^1 \times D^2$ par leur bord via \tilde{h} . Comme on le verra plus loin, deux tels recollements sont difféomorphes lorsque fait à partir de difféomorphismes difféotopes. On peut alors se demander quelle est la classification de tels recollements de $S^3 \setminus N(K)$ avec $S^1 \times D^2$ en fonction des classes de difféotopie des automorphismes du tore ou, *plus simplement*, on peut se demander s'il existe une autre classe de difféotopie dont le recollement qu'elle induit est difféomorphe à S^3 . Bien que nous ne ferons que présenter rapidement ces deux problèmes, ils motivent l'introduction de certaines notions qui nous serviront pour les sections suivantes et pour la caractérisation algébrique du noeud trivial.

Structure périphérique

Dans les deux problèmes présentés ci-haut, on constate que l'on doit mieux comprendre $\overline{\partial N(K)}$ et le difféomorphisme \tilde{h} . Dans un premier cours de topologie algébrique, on démontre que $\pi_1(S^1 \times S^1) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Essentiellement, il suffit de constater que le complément d'un petit disque dans le tore est homotopiquement équivalent à $S^1 \vee S^1$ et puis d'appliquer le théorème de Van-Kampen. En donnant à $S^1 \times S^1$ une orientation, on induit alors un choix naturel de générateurs nous permettant d'exprimer tout élément de $\pi_1(S^1 \times S^1)$ comme un couple d'entiers relatifs. On s'intéresse alors aux noeuds du tore, c'est-à-dire, aux classes d'homotopie (a, b) qui sont représentées par des plongements du cercle.

Lemme 3.1.5. Une classe d'homotopie $(a, b) \in \pi_1(S^1 \times S^1)$ est représentée par un plongement si et seulement si

$$(a, b) = (0, 0) \quad \text{ou} \quad p.g.c.d(a, b) = 1.$$

On peut consulter le théorème 2.C.2 dans l'ouvrage (Rolfsen, 2003) pour voir une démonstration de ce fait. Il s'avère qu'un représentant d'une telle classe (a, b) est de la forme suivante

$$\begin{aligned} \rho_{(a,b)}: S^1 &\hookrightarrow S^1 \times S^1 \\ \exp(i\theta) &\mapsto (\exp(ia\theta), \exp(ib\theta)). \end{aligned}$$

On peut en fait démontrer que tout plongement représentant une classe d'homotopie est unique à isotopie près². Il suffit en fait de ramener le problème au cas où $(a, b) = (0, \pm 1)$ via une composition des automorphismes suivant

$$(\exp(i\theta), \exp(i\phi)) \mapsto (\exp(i\theta), \exp(i\phi+\theta)) \quad \text{et} \quad (\exp(i\theta), \exp(i\phi)) \mapsto (\exp(i\theta+\phi), \exp(i\phi))$$

appelés respectivement *twist méridional* et *twist longitudinale*. On peut alors utiliser le revêtement donné par

$$\begin{aligned} q: \mathbb{C} \setminus \{0\} &\rightarrow S^1 \times S^1 \\ r \exp(i\theta) &\mapsto (\exp(i \ln r), \exp(i\theta)) \end{aligned}$$

puis démontrer que tout relèvement d'un plongement de classe $(0, \pm 1)$ est isotope à l'un contenu dans une région où q est un difféomorphisme, et que dans ce cas il est forcément isotope au plongement standard. Pour démontrer ces deux faits, on utilise l'analogie en dimension 2 de l'argument utilisé pour réduire le nombre d'intersections de deux surfaces transverses³.

Définition 3.1.6. On appelle *méridien* de $S^1 \times S^1$ un noeud de classe d'homotopie égale à $(0, \pm 1)$ et *longitude* tout autre noeud non-trivial du tore.

2. C'est pourquoi nous nous permettons d'employer le terme noeud plutôt que plongement pour les désigner.

3. Voir la preuve du théorème 3.2.8.

Remarque 3.1.7. Le choix de la classe $(0, \pm 1)$ plutôt que $(\pm 1, 0)$ dépend en fait de la convention adoptée au chapitre 1 de considérer $S^1 \times D^2$ comme étant le voisinage tubulaire de $S^1 \subset S^3$ plutôt que $D^2 \times S^1$. Notons qu'on aurait également pu définir le méridien du tore à partir de la caractérisation donnée dans le lemme 3.1.10. La justification de notre convention prendrait alors tout son sens.

Contrairement aux méridiens, on constate que les longitudes admettent une infinité de classes d'homotopie (et donc d'isotopie) distinctes. Considérons alors $K \subset S^3$ et $\overline{N(K)}$. La suite de Mayer-Vietoris du triplet $(S^3, S^3 \setminus N(K), \overline{N(K)})$ ⁴ est de la forme suivante

$$\{0\} \longrightarrow H_1(\partial \overline{N(K)}) \longrightarrow H_1(S^3 \setminus N(K)) \oplus H_1(\overline{N(K)}) \longrightarrow \{0\}$$

où l'isomorphisme

$$(i_1, i_2): H_1(\partial \overline{N(K)}) \rightarrow H_1(S^3 \setminus N(K)) \oplus H_1(\overline{N(K)})$$

est le produit cartésien des homomorphismes induits par les inclusions

$$i_1: S^3 \setminus N(K) \hookrightarrow S^3 \quad \text{et} \quad i_2: \overline{N(K)} \hookrightarrow S^3.$$

Or, en vertu de la surjection d'Hurewicz

$$\pi_1(\partial \overline{N(K)}) \rightarrow H_1(\partial \overline{N(K)})$$

qui est un isomorphisme dans ce cas, on a qu'un méridien de $\partial \overline{N(K)}$ correspond à la classe d'homologie $(0, 1)$ de $H_1(\partial \overline{N(K)})$, en faisant le même choix de générateurs. Autrement dit, on a que $i_1(0, 1) = 1$ et $i_2(0, 1) = 0$. Comme (i_1, i_2) est

4. Notons que la suite de Mayer-Vietoris nécessite l'utilisation d'un triplet de la forme (X, A, B) tel que l'union de l'intérieur de A et B soit X . Ici, il faudrait plutôt considérer le triplet $(S^3, S^3 \setminus \frac{1}{2}N(K), \overline{N(K)})$, où $\frac{1}{2}N(K)$ désigne un voisinage tubulaire difféomorphe à $N(K)$ et inclut dans celui-ci.

un isomorphisme, on doit avoir que $i_2(1, 0) = \pm 1$ et $i_1(1, 0) = n$ pour un certain entier relatif n . Ainsi, en concaténant avec $-n$ fois un méridien, on obtient que $i_1(1, -n) = 0$ et $i_2(1, -n) = \pm 1$. Comme $p.g.c.d(\pm 1, -n) = 1$, on a donc qu'il existe un noeud de $\overline{\partial N(K)}$ qui est homologiquement trivial dans $S^3 \setminus N(K)$ et représente un générateur positif de $H_1(\overline{\partial N(K)})$.

Définition 3.1.8. On appelle une telle longitude une *longitude canonique*.

Remarque 3.1.9. Dans le cas où K est le noeud trivial, cette dernière correspond à une courbe homologue à $S^1 \times \{(0, 0)\} \subset S^1 \times D^2$. Précisons également que comme on se sert implicitement du difféomorphisme \tilde{h} pour établir que

$$H_1(\overline{\partial N(K)}) \cong H_1(S^1 \times \partial D^2) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$$

cette classe $(\pm 1, n)$ correspond en fait à la classe du plongement dans $S^1 \times \partial D^2$ telle que la composition avec le difféomorphisme \tilde{h} donne la courbe homologiquement triviale dans $S^3 \setminus N(K)$.

Pour ce qui est du méridien, représentant une unique classe d'isotopie, il est caractérisé par le lemme suivant :

Lemme 3.1.10. Un noeud de $S^1 \times S^1$ est un méridien si et seulement si il borde un disque dans $S^1 \times D^2$.

Il s'avère que ce résultat découle d'un fait plus général en topologie des 3-variétés.

Lemme 3.1.11 (Lemme de Dehn). Étant donné une 3-variété différentielle à bord M et $\rho: S^1 \hookrightarrow \partial M$ un plongement lisse tel que $[\rho] \neq 0 \in \pi_1(\partial M)$, mais $[\rho] = 0 \in \pi_1(M)$, alors il existe un bon plongement lisse $\tilde{\rho}: D^2 \hookrightarrow M$ tel que $\tilde{\rho}|_{\partial D^2}$ est isotope à ρ .

Le lemme de Dehn est un résultat très fort permettant d'établir un lien entre le groupe fondamental du bord d'une 3-variété et l'existence d'un disque bien plongé.

En particulier, ce dernier implique que la longueur canonique d'un noeud non-trivial ne peut être homotopiquement triviale. En effet, on aurait par le Lemme de Dehn que la longueur canonique borde un disque dans $S^3 \setminus N(K)$ pouvant s'étendre à un disque bordant le noeud et cela constituerait une contradiction en vertu du théorème 3.1.4⁵.

Corollaire 3.1.12. Étant donné un noeud $K \subset S^3$, $\pi_1(\overline{\partial N(K)})$ est un sous-groupe de $\pi_1(S^3 \setminus N(K))$ si et seulement si K est non-trivial. On appelle le sous-groupe $\pi_1(\overline{\partial N(K)})$ le *sous-groupe périphérique du noeud K* .

Ce corollaire nous permet de donner la seconde caractérisation du noeud trivial mentionnée au début de la section.

Lemme 3.1.13. Un noeud $K \subset S^3$ est trivial si et seulement si

$$\pi_1(S^3 \setminus N(K)) \cong \mathbb{Z}.$$

Preuve. Si K est le noeud trivial, il est isotope à l'inclusion canonique $S^1 \subset S^3$ et, par conséquent, $\overline{N(K)}$ correspond au plongement standard de $S^1 \times D^2$ dans S^3 . En effet, on sait que son complément est difféomorphe⁶ à $D^2 \times S^1$, et ce dernier est homotopiquement équivalent à S^1 . D'où on a bien que $\pi_1(S^3 \setminus N(K)) \cong \mathbb{Z}$.

Réciproquement, par un argument de théorie des groupes, on sait qu'il n'existe pas de monomorphisme de $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ sur \mathbb{Z} . Ainsi, si $\pi_1(S^3 \setminus N(K)) \cong \mathbb{Z}$, l'inclusion n'induit pas une injection du sous-groupe périphérique dans le groupe fondamental de l'extérieur du noeud. □

5. Voir le théorème 4.B.1 de l'ouvrage de (Rolfsen, 2003).

6. Voir l'exemple 3.3.4.

Groupe du noeud

Pour conclure cette section, répondons partiellement aux problèmes soulevés en introduction. On a vu que tout noeud non-trivial admet une longitude canonique qui n'est pas homotopiquement triviale dans l'extérieur du noeud. L'existence de cette longitude homologiquement triviale, mais non homotopiquement triviale suggère que le groupe fondamental du complément d'un noeud contient davantage d'information que les groupes d'homologie de ce dernier. De plus, on a établi plus haut la proposition 3.1.14.

Proposition 3.1.14. Un difféomorphisme $h: (S^3, K_1) \rightarrow (S^3, K_2)$ préservant l'orientation induit un isomorphisme entre paires de groupes

$$\tilde{h}_*: (\pi_1(S^3 \setminus N(K_1)), \pi_1(\overline{\partial N(K_1)})) \rightarrow (\pi_1(S^3 \setminus N(K_2)), \pi_1(\overline{\partial N(K_2)})).$$

Il s'avère que la réciproque de ce résultat est vrai, c'est-à-dire, que toute paire orientée (S^3, K) est uniquement déterminée par la paire $(\pi_1(S^3 \setminus N(K)), \pi_1(\overline{\partial N(K)}))$. Dans un premier temps, grâce à un autre théorème de Papakyriakopoulos, il est possible de démontrer que la paire de groupes

$$\left(\pi_1(S^3 \setminus N(K)), \pi_1(\overline{\partial N(K)}) \right)$$

détermine le type d'homotopie de la paire orientée

$$\left(S^3 \setminus N(K), \overline{\partial N(K)} \right).$$

Théorème 3.1.15 (Théorème de la sphère). S'il existe une application $S^2 \rightarrow M$ représentant un élément non-trivial du groupe $\pi_2(M)$, où M est une 3-variété orientable, alors il existe un plongement non-homotopiquement trivial de S^2 dans M .

Corollaire 3.1.16. Pour tout noeud $K \subset S^3$, on a $\pi_2(S^3 \setminus N(K)) = \{1\}$.

Preuve. Procédons par contradiction et supposons que $\pi_2(S^3 \setminus N(K)) \neq \{1\}$. En vertu du théorème de la sphère, on a qu'il existe un plongement lisse de S^2 dans $S^3 \setminus N(K)$ qui n'est pas homotopiquement trivial. Notons S l'image de ce plongement. En vertu du théorème de Schoënfliès, S sépare S^3 en deux composantes connexes, chacune d'entre elles bordant une 3-boule dans S^3 . Puisque $N(K)$ est connexe, $N(K)$ est strictement compris dans l'une de ses dernières. Autrement dit, la composante de $S^3 \setminus S$ ne contenant pas $N(K)$ doit border une 3-boule dans $S^3 \setminus N(K)$ et par conséquent le plongement est homotopiquement trivial. Ceci contredit le théorème de la sphère.

Corollaire 3.1.17. Pour tout noeud $K \subset S^3$, on a $\pi_r(S^3 \setminus N(K)) = \{1\}$, pour tout $r \geq 2$.

Preuve. Notons X l'extérieur du noeud et notons \tilde{X} son revêtement universel. En vertu de la longue suite exacte d'homotopie induite par la fibration $\tilde{X} \rightarrow X$, on sait que $\pi_r(\tilde{X}) \cong \pi_r(X)$, pour tout $r \geq 2$, puisque la fibre est discrète. De plus, en vertu du théorème de décomposition en anses, on peut poser sur X une structure de complexe CW n'ayant que des cellules de dimension au plus égale à 3. Enfin, en vertu du corollaire précédent, le résultat est vrai pour $r = 2$. Il suffit donc de vérifier que $\pi_3(\tilde{X}) = \{1\}$ ou encore que $H_3(\tilde{X}) = \{0\}$ en vertu du théorème d'isomorphisme d'Hurewicz (en se rappelant que par définition/construction de \tilde{X} , on a $\pi_1(\tilde{X}) = \{1\}$). Or, comme \tilde{X} n'est pas compact, le théorème de dualité de Poincaré généralisé⁷ implique

$$H_3(\tilde{X}) \cong H_c^0(\tilde{X}) = \{0\}.$$

Autrement dit, le théorème de la sphère nous permet de conclure que

7. Voir le théorème 3.35 dans l'ouvrage de Hatcher (Hatcher, sd) pour l'énoncé de ce théorème.

Théorème 3.1.18. Étant donné un noeud $K \subset S^3$, $S^3 \setminus N(K)$ est un espace $K(\pi_1(S^3 \setminus N(K)), 1)$.

ou plus précisément que

Théorème 3.1.19. Étant donné deux noeuds $K_1, K_2 \subset S^3$

$$(\pi_1(S^3 \setminus N(K_1)), \pi_1(\overline{\partial N(K_1)})) \cong (\pi_1(S^3 \setminus N(K_2)), \pi_1(\overline{\partial N(K_2)}))$$

si et seulement si

$$(S^3 \setminus N(K_1), \overline{\partial N(K_1)}) \simeq (S^3 \setminus N(K_2), \overline{\partial N(K_2)}).$$

Ce dernier résulte de la classification à type d'homotopie près des espaces $K(G, n)$, où G est un groupe et $n \in \mathbb{N}$ (Hatcher, sd)⁸.

Dans un deuxième temps, Waldhausen (Waldhausen, 1968) a démontré que le type d'homotopie de $(S^3 \setminus N(K), \overline{\partial N(K)})$ détermine le type topologique de l'extérieur du noeud. Il ne resterait donc qu'à vérifier que le type topologique de l'extérieur du noeud détermine le type topologique du noeud. Dans l'article (Luecke et Gordon, 1989) Gordon et Luecke ont établi le résultat suivant qui répond au problème 2.

Théorème 3.1.20. Étant donné $K \subset S^3$ un noeud distinct du noeud trivial et $h': \overline{\partial N(K)} \rightarrow S^1 \times D^2$ un difféomorphisme de classe de difféotopie distincte de celle de \tilde{h} , alors

$$S^3 \setminus N(K) \sqcup_{h'} S^1 \times D^2 \not\cong S^3.$$

Un corollaire plus ou moins directe est la réponse à notre problème.

Corollaire 3.1.21 (Théorème du complément). Tout noeud est uniquement déterminé à partir de son complément.

8. Voir le théorème 4.30 dans l'ouvrage.

Toutefois, avant de démontrer le corollaire 3.1.21 à partir du théorème 3.1.20, démontrons le lemme suivant dont nous nous servirons à plusieurs reprises.

Lemme 3.1.22. Un automorphisme lisse de $S^1 \times S^1$ s'étend en un automorphisme lisse de $S^1 \times D^2$ si et seulement s'il envoie un méridien sur un méridien.

Preuve. Supposons d'abord qu'on ait un automorphisme lisse

$$f: S^1 \times D^2 \rightarrow S^1 \times D^2.$$

Si ce dernier envoie une longitude sur un méridien, alors notre automorphisme induit une application

$$f_*: \pi_1(S^1 \times D^2) \rightarrow \pi_1(S^1 \times D^2)$$

de noyau non-trivial et donc on contredit le fait que f est un automorphisme. On doit donc avoir que f_* est de noyau vide ou, encore, que f envoie un méridien sur un méridien.

Réciproquement, supposons que l'automorphisme lisse

$$g: S^1 \times S^1 \rightarrow S^1 \times S^1$$

envoie un méridien m_1 sur un méridien m_2 . Par la caractérisation du méridien, on a que m_1 et m_2 bordent chacun un disque bien plongé D_1 et D_2 , respectivement. On peut alors étendre f en un automorphisme de la forme

$$\tilde{g}: S^1 \times S^1 \cup D_1 \rightarrow S^1 \times S^1 \cup D_2$$

via l'utilisation du lemme d'Alexander en dimension 2. Considérons $N(D_1)$ et $N(D_2)$. Comme D_1 et D_2 (resp. ∂D_1 et ∂D_2) sépare un de leur voisinage en deux composantes connexes dans $S^1 \times D^2$ (resp. $S^1 \times \partial D^2$) et qu'ils sont bien plongés, on a que $N(D_i) \cong D_i \times (0, 2)$ (resp. $N(D_i) \cap S^1 \times \partial D^2 \cong \partial D_i \times (0, 2)$) par le

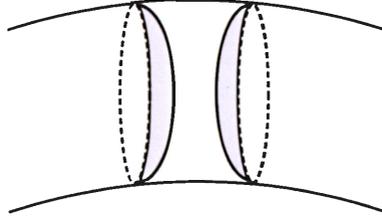


Figure 3.1 Disques (bleus) tangents au tore

théorème du bicollier.⁹ On peut donc étendre \tilde{g} en un automorphisme lisse

$$\tilde{g}: S^1 \times S^1 \cup \mathcal{N}(D_1) \rightarrow S^1 \times S^1 \cup \mathcal{N}(D_2)$$

en utilisant cette structure additionnelle. Considérons alors $D_i \times \{j\}$, où $j \in \{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\}$, et notons ces derniers D_i^- et D_i^+ , respectivement. On peut alors, construire explicitement une isotopie de ces derniers contenue dans $\mathcal{N}(D_i)$ et fixe sur leur bord de sorte à ce qu'on ait

$$D_i^+ \cup D_i^- \bigcup (S^1 \times S^1) \setminus \left(\partial D_i \times \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right) \right) \cong S^2.^{10}$$

Pour ce faire, il suffit d'utiliser la structure de $\mathcal{N}(D_i)$ et les applications μ_{δ_1, δ_2} usuelles. En invoquant le lemme d'Alexander en dimension 3, on peut alors étendre l'automorphisme tel que voulu. \square

Preuve (Corollaire 3.1.21). Étant donné deux noeuds $K_1, K_2 \subset S^3$ et un difféomorphisme préservant l'orientation $h: S^3 \setminus \mathcal{N}(K_1) \rightarrow S^3 \setminus \mathcal{N}(K_2)$, ce dernier se restreint en un automorphisme du tore. Supposons que h envoie un méridien de $\overline{\partial \mathcal{N}(K_1)}$ sur une longitude de classe d'homotopie (a, b) . En recollant $S^1 \times D^2$ le long de $\overline{\partial \mathcal{N}(K_2)}$ via un difféomorphisme h' du tore envoyant un méridien sur la

9. Voir la remarque 2.2.17.

10. Voir la figure 3.1.

longitude (a, b) , on peut former le recollement $M := S^3 \setminus N(K_2) \sqcup_{h'} S^1 \times D^2$, puis étendre h en un difféomorphisme de S^3 sur M en vertu du lemme 3.1.22. Par Gordon et Luecke, M n'est pas difféomorphe à la 3-sphère, car h' n'est pas difféotopie à l'identité (sinon on aurait $(a, b) = (0, \pm 1)$). Ainsi, on a une contradiction. Il en résulte que forcément h envoie un méridien de $\overline{\partial N(K_1)}$ sur un méridien de $\overline{\partial N(K_2)}$ et donc on peut étendre h par le lemme 3.1.22 en un automorphisme $(S^3, N(K_1)) \rightarrow (S^3, N(K_2))$. \square

3.2 Noeuds premiers

Dans cette section, on définira une opération sur les noeuds appelée *somme connexe*. Cette dernière nous permettra à l'instar des anneaux factoriels de factoriser de manière unique tout noeud en noeuds dits *premiers*.

On a vu au chapitre 2 qu'étant donné deux variétés différentielles compactes M_1 et M_2 et un difféomorphisme $h_0: \partial M_1 \rightarrow \partial M_2$, il existe une unique structure différentielle sur $M_1 \sqcup_{h_0} M_2$. Étant donné un second difféomorphisme $h_1: \partial M_1 \rightarrow \partial M_2$, on se demande alors quelle est la relation entre $M_1 \sqcup_{h_0} M_2$ et $M_1 \sqcup_{h_1} M_2$, si $H: \partial M_1 \times [0, 1] \rightarrow \partial M_2$ est une difféotopie allant de h_0 vers h_1 .

Lemme 3.2.1. $M_1 \sqcup_{h_0} M_2 \cong M_1 \sqcup_{h_1} M_2$.

Preuve. Reprenons les notations utilisées dans la preuve du corollaire 2.2.13.

Posons alors les fonctions lisses

$$\alpha_1: \left[0, \frac{1}{2}\right] \rightarrow [0, 1], \quad \alpha_2: \left[\frac{1}{2}, 1\right] \rightarrow \left[1, \frac{3}{2}\right] \quad \text{et} \quad \alpha_3: [1, 2] \rightarrow \left[\frac{3}{2}, 2\right]$$

définies comme suit

$$\alpha_1(t) := \mu_{\frac{1}{5}, \frac{2}{5}}(t), \quad \alpha_2(t) := \frac{\mu_{\frac{3}{5}, \frac{4}{5}}(t)}{2} + 1, \quad \alpha_3(t) := \frac{\mu_{\frac{5}{4}, \frac{7}{4}}(t)}{2} + \frac{3}{2}.$$

Ces dernières nous permettent de poser

$$G: M_1 \sqcup_{h_1} M_2 \rightarrow M_1 \sqcup_{h_0} M_2$$

le difféomorphisme défini par

$$\begin{cases} j_1(g_1^{-1}(x, t)) & \mapsto j_1(g_1^{-1}(x, \alpha_1(t))), & \text{sur } g_1(\partial M_1 \times (0, \frac{1}{2}]); \\ j_1(g_1^{-1}(x, t)) & \mapsto j_2(g_2^{-1}(H(x, \mu_{\frac{3}{5}, \frac{4}{5}}(t)), \alpha_2(t))), & \text{sur } g_1(\partial M_1 \times [\frac{1}{2}, 1]); \\ j_2(g_2^{-1}(h_1(x), t)) & \mapsto j_2(g_2^{-1}(h_1(x), \alpha_3(t))), & \text{sur } g_2(\partial M_2 \times [1, 2]); \\ Id, & & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

□

Lemme 3.2.2. Étant donné M_1 et M_2 deux variétés compactes orientées et $B_1 \subset M_1$ et $B_2 \subset M_2$ deux sous-variétés fermées difféomorphes à une 3-boule il existe une unique manière, à difféomorphisme près, de recoller $M_1 \setminus \text{Int}(B_1)$ à $M_2 \setminus \text{Int}(B_2)$ via leurs bords de sorte à obtenir une 3-variété compacte orientée M dont les inclusions $M_1 \setminus \text{Int}(B_1) \subset M$ et $M_2 \setminus \text{Int}(B_2) \subset M$ sont des plongements lisses préservant l'orientation.

Preuve. On sait en vertu du théorème de Munkres mentionné plus haut que tout difféomorphisme de S^2 préservant l'orientation (ou la renversant) est isotope à l'identité (ou à l'opposé de l'identité). Considérons alors B_1 et B_2 deux copies de B^3 . Supposons d'abord que sous l'identification $B_1 \cong B^3$ et $B_2 \cong B^3$, elles soient d'orientations opposées. Si on recolle ces dernières de sorte à ce que la variété différentielle obtenue soit orientée par les orientations sur B_1 et B_2 , on doit alors envoyer ∂B_1 difféomorphiquement sur ∂B_2 tout en préservant l'orientation. Un tel difféomorphisme devant être difféotope à $-Id_{S^2}$ sous leur identification avec B^3 , on a en vertu du lemme 3.2.1 que toutes les manières de les recoller en préservant l'orientation du bord sont équivalentes. Le résultat suit similairement dans le cas où B_1 et B_2 ont la même orientation. On en déduit donc le résultat voulu. □

Étant donné deux variétés compactes orientées M_1 et M_2 et deux 3-boules $B_1 \subset M_1$ et $B_2 \subset M_2$, on peut alors bien définir leur somme connexe.

Définition 3.2.3. On appelle *somme connexe de M_1 avec M_2 le long de ∂B_1 et ∂B_2* , dénotée simplement par $M_1 \# M_2$ lorsque les B_i sont clairs selon le contexte,

la variété différentielle

$$M_1 \setminus \text{Int}(B_1) \sqcup_{Id} M_2 \setminus \text{Int}(B_2) \text{ ou } M_1 \setminus \text{Int}(B_1) \sqcup_{-Id} M_2 \setminus \text{Int}(B_2),$$

dépendamment des orientations.¹¹

Remarque 3.2.4. Dans (Hatcher, 2000) on vérifie que cette opération sur les noeuds est associative et commutative.

Similairement, en vertu de l'analogie du théorème de Munkres en dimension 1, on peut bien définir la somme connexe de surfaces et, trivialement, la somme connexe de variétés difféomorphes au cercle. Comme toute sphère plongée borde deux 3-boules dans S^3 la somme connexe de deux 3-sphères orientées est toujours une 3 sphère orientée et similairement pour des variétés difféomorphes au cercle. On peut donc spécialiser la définition précédente aux noeuds.

Définition 3.2.5. Étant donné $K_1 \subset S^3$ et $K_2 \subset S^3$ deux noeuds orientés dans deux copies orientées de la 3-sphère, on appelle *somme connexe des noeuds* K_1 et K_2 , et on la dénote simplement par $K_1 \# K_2$, la somme connexe des paires (S^3, K_1) et (S^3, K_2) .

Remarque 3.2.6. Mentionnons qu'afin de faire la somme connexe des noeuds, on doit choisir une 2-sphère transverse à K_i dans chaque copies de S^3 . Cela nous permet d'identifier un voisinage du bord de $(S^3 \setminus \text{Int}(B_i), K_i \setminus (\text{Int}(B_i) \cap K_i))$ à un collier de la forme

$$(\partial B_i \times [0, 1], (\partial B_i \cap K_i) \times [0, 1))$$

et d'effectuer simultanément les deux sommes connexes. Comme le choix de la 2-sphère n'affecte pas le résultat, il suffit d'invoquer l'existence d'une telle sphère en vertu du corollaire 2.1.4.

11. Notons que cette définition fait du sens en vertu du lemme 3.2.2.

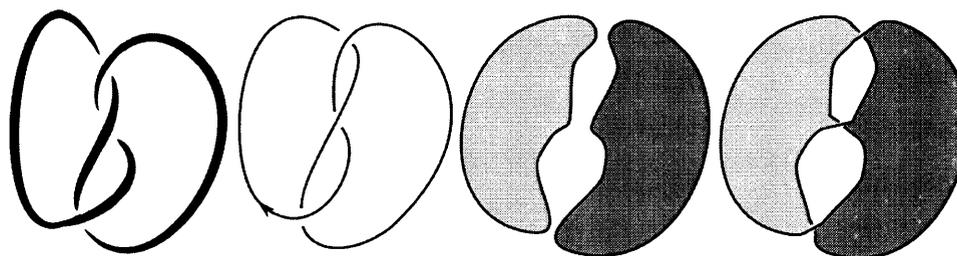


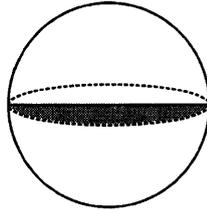
Figure 3.2 Construction d'une surface de Seifert

Définition 3.2.7. On dit qu'un noeud $K \subset S^3$ est premier s'il ne s'exprime pas comme la somme connexe de deux noeuds non-triviaux.

Pour établir l'existence d'une décomposition en noeuds premiers, on va procéder par induction sur le genre minimal d'une surface compacte orientable bordant un noeud. En général, on dit qu'une surface $F \subset S^3$ est une *surface de Seifert* pour un noeud $K \subset S^3$ s'il s'agit d'une surface compacte orientable plongée dans S^3 telle que $\partial F = K$. On appelle *genre de Seifert du noeud K* le genre minimal parmi toutes les surfaces de Seifert bordant un noeud K et on le dénote $g(K)$. Enfin, il s'agit d'un résultat fort simple que tout noeud orienté admette une surface de Seifert. La notion de genre de Seifert est donc bien définie. Nous avons illustré les étapes de la construction d'une surface de Seifert pour le noeud trèfle à la figure 3.2.

Afin de pouvoir procéder par induction tel que voulu, on doit démontrer que le genre diminue lorsque l'on factorise un noeud en deux noeuds non-triviaux. Le résultat ci-dessous établit donc l'additivité du genre de Seifert relativement à la somme connexe.

Théorème 3.2.8 (Théorème d'additivité). Étant donné deux noeuds K_1 et K_2 ,

Figure 3.3 Demi-disque ouvert dans B^3

on a toujours la relation

$$g(K_1 \# K_2) = g(K_1) + g(K_2).$$

Remarque 3.2.9. Remarquons qu'en vertu de l'additivité du genre et d'une partie de l'argument détaillé ci-dessous, la somme connexe de noeuds non-triviaux ne peut donner un noeud trivial.

Regardons d'abord en quoi l'additivité du genre nous permet de conclure. Étant donné un noeud $K \subset S^3$, si $g(K) = 1$, alors K est premier en vertu de l'additivité du genre. En effet, si un noeud est de genre 0, par le théorème de classification des surfaces compactes orientables, il existe un disque plongé dans S^3 le bordant et, en vertu du théorème 3.1.4, cela implique que le noeud est trivial. Par l'additivité du genre, si on peut trouver une décomposition de la forme $K = K_1 \# K_2$, on doit avoir $g(K_1) = 0$ et $g(K_2) = 1$, ou inversement. Il en résulte donc qu'aucune décomposition d'un noeud de genre 1 ne peut impliquer deux noeuds non-triviaux. Supposons donc que l'on a $g(K) > 1$. Si K est premier, il n'y a rien à démontrer. On peut donc supposer qu'il existe deux noeuds K_1 et K_2 distincts du noeud trivial et tels que $K = K_1 \# K_2$. En vertu de l'additivité, comme $g(K_1), g(K_2) > 0$, on a que $g(K_i) < g(K_1) + g(K_2) = g(K)$. Ainsi, on peut conclure par induction que tout noeud K de genre $g(K) \geq 1$ admet une décomposition en noeuds premiers.

Théorème 3.2.10. Tout noeud $K \subset S^3$ admet une décomposition en noeuds premiers.

Exemple 3.2.11. Dans (Rolfsen, 2003)¹², on établit que le genre d'une surface de Seifert d'un noeud K peut-être calculé à partir de la formule

$$g(K) = 1 - \frac{s - c + 1}{2}$$

où s désigne le nombre de disques obtenus à la 3-ième étape de la construction d'une surface de Seifert représentée à la figure 3.3 et c le nombre de croisement. On constate alors que la surface de Seifert construite à la figure 3.3 est de genre 1. Ainsi, comme le noeud trèfle est distinct du noeud trivial, il doit donc être de genre de Seifert 1 et en particulier premier.

Exemple 3.2.12. On démontre dans (Burde et Zieschang, 2013)¹³ que les noeuds toriques sont premiers.

Exemple 3.2.13. On démontre dans (Cromwell, 2004)¹⁴ que les noeuds toriques itérés sont premiers, et donc, que les noeuds algébriques¹⁵ le sont.

Preuve (Théorème 3.2.8). Supposons d'abord que l'on ait $K_1, K_2 \subset S^3$ deux noeuds contenus dans des copies distinctes de S^3 et admettant respectivement F_1 et F_2 comme surface de Seifert de genre minimal. En vertu de la remarque 3.2.6 et en s'assurant de prendre des sphères transverses à F_1 et F_2 , on peut effectuer la somme connexe des paires (S^3, F_1) et (S^3, F_2) le long des sphères choisies. Le résultat est donc la somme connexe $F_1 \# F_2$ qui représente maintenant une surface de Seifert pour $K_1 \# K_2$ de genre $g(K_1) + g(K_2)$. Autrement dit, on a l'inégalité

$$g(K_1 \# K_2) \leq g(K_1) + g(K_2).$$

12. Voir à la section 5.A.10.

13. Voir le corollaire 7.11 à la page 95.

14. Voir le corollaire 4.4.3 à la page 85.

15. Voir la définition 3.4.1.

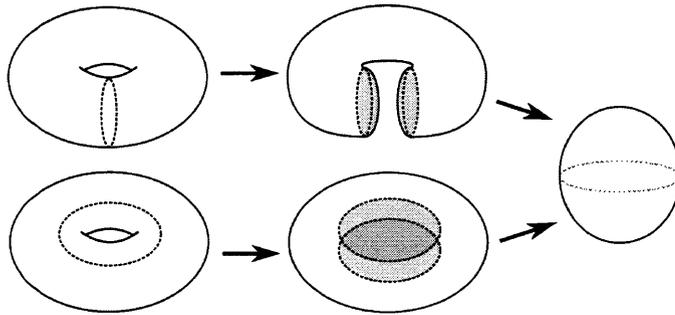


Figure 3.4 Réduction du genre d'un tore

Pour conclure, il suffit de démontrer l'inégalité inverse. Supposons alors qu'on ait un noeud $K \subset S^3$ qui se décompose sous la forme $K = K_1 \# K_2$ et que F soit une surface de Seifert de genre *minimal* pour K . Quitte à modifier la sphère S à l'aide de laquelle on a effectué la somme connexe de (S^3, K_1) avec (S^3, K_2) via une isotopie, on peut supposer que cette dernière est également transverse à F . Si l'intersection entre F et S consiste seulement en un arc d'extrémités correspondant à $K \cap S$, on peut alors *scinder* S^3 en deux composantes connexes disjointes en considérant le complément de S et la fermeture de chacune des composantes connexes. Chacune d'entre elles, disons B_1 et B_2 , correspond alors à une 3-boule en vertu du corollaire . On peut alors recoller les paires $(B_1, B_1 \cap F)$ et $(B_2, B_2 \cap F)$ avec deux copies disjointes de (B^3, D) , où D correspond à un demi-disque ou encore à la fermeture du demi-disque ouvert (voir la figure 3.3), et obtenir (S^3, F_1) et (S^3, F_2) , où F_i est une surface de Seifert de K_i . On a donc $g(K_1) + g(K_2) \leq g(K_1 \# K_2)$.

Toutefois, il est également possible que l'intérieur de la surface F intersecte transversalement S en un nombre fini de cercles, par compacité de S et transversalité de leur intersection. Il faut donc trouver une isotopie de F qui laisse son bord fixe et qui élimine une à une ces intersections. En vertu du théorème de Riemann,

chacune de ces intersections borde un disque D_S dans S . Il y a deux cas possibles. Soit le cercle borde un disque ne contenant aucun autre cercle de l'intersection, soit il en contient un. Dans le second cas, on se ramène au premier cas en considérant l'un des cercles les plus intérieur, c'est-à-dire, un cercle ne contenant pas de cercle dans le disque qu'il borde, mais qui est toutefois contenu dans le disque du cercle original. Dans les deux cas, on élimine l'intersection comme suit. On constate d'abord que le cercle en question borde également un disque dans F que l'on dénotera D_F . En effet, si ce n'était pas le cas, on pourrait construire modulo l'utilisation de D_S une surface de genre inférieur à F bordant K , ce qui contredirait l'assertion que F est de genre minimal (voir la figure 3.4 pour avoir une idée de comment on construit la surface de genre inférieur). Quitte à effectuer une isotopie de F de support compris dans un voisinage tubulaire de $F \cap S$, on peut de plus supposer que la réunion des deux disques forme une 2-sphère plongée $D_S \cup D_F$. En vertu du théorème de Schoënfliès, cette dernière borde deux 3-boules dont l'une d'entre elle, disons B , n'intersecte ni F ni S ailleurs qu'en $D_F \cup D_S$. On peut alors construire explicitement une isotopie de D_F vers D_S via le difféomorphisme identifiant B à B^3 et étendre cette dernière à une isotopie de F de support compris dans un petit voisinage de D_F . L'intersection entre F et S devient alors D_S et pour l'éliminer complètement, on utilise un bicollier de S pour pousser F de l'autre côté de S . Comme il n'y a qu'un nombre fini d'intersections, on peut donc se ramener au cas où l'intérieur de F n'intersecte pas l'intérieur de S . \square

On a représenté les dernières étapes de la preuve schématiquement sur la figure 3.5.

Remarque 3.2.14. Dans la preuve ci-haut, on a utilisé le corollaire 3.2 pour trouver une isotopie de D_F sur D_S gardant leurs bords fixes. En dimension supérieure ou égale à 5, il nous aurait également été possible de procéder similairement, c'est-à-dire, à la condition que les disques soient des sous-variétés à bord de codi-

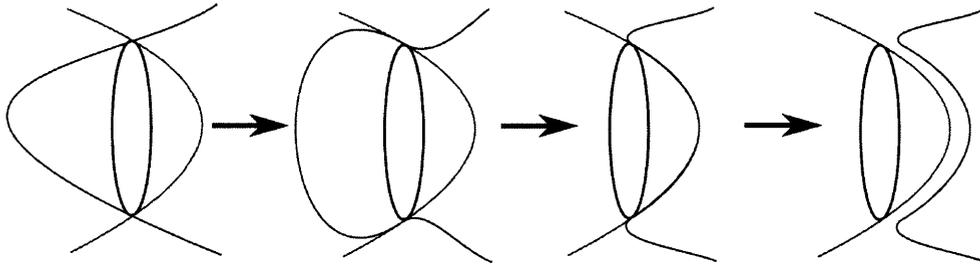


Figure 3.5 Élimination des intersections transverses

mension 1 relativement à une sphère ambiante. Il s'avère qu'il est toujours possible de trouver une telle isotopie entre deux disques de codimension 1. Il s'agit d'un cas particulier du *théorème du disque*¹⁶. Pour la suite nous n'explicitons donc plus les détails d'un tel argument où on réduit les intersections transverses de deux variétés à partir de l'une ou l'autre des méthodes.

Enfin, notons que cette décomposition est unique à commutativité des composantes près. Un argument géométrique fort joli est fait dans (Burde et Zieschang, 2013)¹⁷ pour démontrer l'unicité.

Théorème 3.2.15. Toute décomposition d'un noeud en facteurs premiers est unique à permutation des facteurs près.

3.3 Noeuds fibrés

Nous introduirons dans la présente section la notion de noeud fibré. Nous donnerons une caractérisation géométrique ainsi qu'une caractérisation algébrique des noeuds fibrés et établirons également que la propriété d'être un noeud fibré est préservée sous la décomposition en facteurs et réciproquement.

16. Voir le théorème 3.1 dans (Hirsch, 1976)

17. Voir l'argument 7.18 à la page 98.

3.3.1 Définition et caractérisations

Définition 3.3.1. On dit qu'un noeud $K \subset S^3$ est un *noeud fibré*, s'il existe un fibré lisse

$$f : S^3 \setminus K \rightarrow S^1$$

et un difféomorphisme

$$\phi : N(K) \rightarrow S^1 \times \text{Int}(D^2)$$

sous lequel K correspond à $S^1 \times \{0\}$ et tel qu'on ait le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc} N(K) \setminus K & \xrightarrow{\phi} & S^1 \times \text{Int}(D^2) \setminus \{0\} \\ & \searrow f & \downarrow \tau \\ & & S^1 \end{array}$$

où $\tau : S^1 \times \text{Int}(D^2) \setminus \{0\}$ est donnée par $\tau(z_1, z_2) := \frac{z_2}{\|z_2\|}$.

Remarque 3.3.2. En vertu de la condition sur le comportement du fibré au voisinage du bord, on sait que chaque fibre de f est l'intérieur d'une surface de Seifert de K . De plus, il s'avère qu'il est possible de démontrer que ces surfaces de Seifert sont de genre minimal.¹⁸

Il existe une caractérisation géométriquement intuitive pour la notion de noeud fibré.

Théorème 3.3.3. Un noeud $K \subset S^3$ est fibré si et seulement s'il existe une surface de Seifert F de genre minimal et $h : F \rightarrow F$ un automorphisme fixant un voisinage du bord, appelé monodromie du fibré, tel que

$$S^3 \setminus \frac{1}{2} \overline{N(K)} \stackrel{\Phi}{\cong} \text{Int}(F) \times [0, 1] / h =: \Sigma(h)$$

18. On peut consulter le chapitre 5 de l'ouvrage (Burde et Zieschang, 2013).

en commettant l'abus de notation consistant à dénoter $\text{Int}(F)$ l'intersection

$$F \cap \frac{1}{2}N(K).$$

Preuve. Nous allons seulement démontrer que la condition est suffisante. On peut consulter l'ouvrage (Geiges, 2008)¹⁹ pour une preuve de la réciproque. Le difféomorphisme $\Phi: S^3 \setminus \frac{1}{2}\overline{N(K)} \rightarrow \Sigma(h)$ induit un champ de vecteurs $X(p) := \frac{\partial}{\partial t}(\Phi^{-1})_{\Phi(p)}$ dont le flot ψ_t au temps $t = 2\pi$ coïncide avec h . Une structure de fibré lisse est alors donnée sur l'ouvert $\Sigma(h) \setminus (\text{Int}(F) \times \{0\})$ via la projection

$$f_1 := pr_2 \circ \psi^{-1}: \Sigma(h) \setminus (\text{Int}(F) \times \{0\}) \rightarrow (0, 2\pi).$$

Similairement, on définit une structure de fibré lisse sur l'ouvert $\Sigma(h) \setminus (\text{Int}(F) \times \{\pi\})$ via la projection

$$f_2 := pr_2 \circ \psi^{-1}: \Sigma(h) \setminus (\text{Int}(F) \times \{\pi\}) \rightarrow (\pi, 3\pi).$$

On peut modifier ces applications pour qu'elles soient à valeurs dans S^1 en identifiant $(0, 2\pi)$ à $S^1 \setminus \{(1, 0)\}$ et $(\pi, 3\pi)$ à $S^1 \setminus \{(-1, 0)\}$, tout en préservant l'orientation, via $\theta \mapsto \exp(i\theta)$. On obtient alors respectivement les applications

$$\tilde{f}_1: \Sigma(h) \setminus (\text{Int}(F) \times \{0\}) \rightarrow S^1 \setminus \{(1, 0)\} \text{ et } \tilde{f}_2: \Sigma(h) \setminus (\text{Int}(F) \times \{\pi\}) \rightarrow S^1 \setminus \{(-1, 0)\}.$$

Pour obtenir un fibré lisse sur $\Sigma(h)$ qui étend \tilde{f}_1 et \tilde{f}_2 , il suffit donc de poser

$$\begin{aligned} \tilde{f}: \Sigma(h) &\rightarrow S^1 \\ p &\mapsto \begin{cases} \tilde{f}_1(p), & \text{si } p \in \Sigma(h) \setminus (\text{Int}(F) \times \{0\}); \\ \tilde{f}_2(p), & \text{si } p \in \Sigma(h) \setminus (\text{Int}(F) \times \{\pi\}). \end{cases} \end{aligned}$$

Enfin, on pose $f: S^3 \setminus K \rightarrow S^1$ comme étant l'extension évidente en utilisant le lemme 3.1.22. □

19. Voir la discussion suivant la définition 4.4.4 à la page 149.

Exemple 3.3.4. Le noeud trivial est un noeud fibré. Notons d'abord que la longueur canonique de K borde un disque dans $S^3 \setminus \frac{1}{2}N(K)$. Ainsi, si on identifie $\frac{1}{2}\overline{N(K)}$ à $S^1 \times D^2$ et que l'on considère le difféomorphisme

$$\rho: S^1 \times \partial D^2 \rightarrow \partial \frac{1}{2}\overline{N(K)}$$

induit par cette identification, on constate qu'un méridien de $D^2 \times \partial D^2$ est envoyé sur la longueur canonique de K . En vertu de la preuve du lemme 3.1.22, on peut étendre ce dernier de manière unique en un difféomorphisme de $D^2 \times S^1$ sur $S^3 \setminus \frac{1}{2}N(K)$. Pour conclure, il suffit de restreindre ce dernier à un difféomorphisme de $\text{Int}(D^2) \times S^1$ sur $S^3 \setminus \frac{1}{2}\overline{N(K)}$ et de constater que

$$\text{Int}(D^2) \times [0, 1] / Id \cong \text{Int}(D^2) \times S^1.$$

Exemple 3.3.5. On définira à la section 3.4 la notion de noeud algébrique et on verra qu'ils constituent une famille infinie de noeuds fibrés.

On peut également donner une caractérisation algébrique des noeuds fibrés. Remarquons d'abord qu'étant donné un noeud fibré $K \subset S^3$ de projection $f: S^3 \setminus K \rightarrow S^1$, cette dernière induit la suite exacte courte de fibration suivante

$$\{1\} \longrightarrow \pi_1(f^{-1}(\{0\})) \xrightarrow{i_*} \pi_1(S^3 \setminus K) \xrightarrow{f_*} \pi_1(S^1) \longrightarrow \{1\}$$

où i_* dénote l'application induite par inclusion. Par exactitude de la suite, on a que $i_*(\pi_1(f^{-1}(\{0\})))$ est un sous-groupe de $\pi_1(S^3 \setminus K)$. De plus, comme l'application induite

$$\tilde{f}_*: \pi_1(S^3 \setminus K) / \ker(f_*) \rightarrow \mathbb{Z}$$

est un isomorphisme par exactitude (i.e. puisque f_* est surjective), il en résulte que

$$[\pi_1(S^3 \setminus K), \pi_1(S^3 \setminus K)] = \ker(f_*) \cong \pi_1(f^{-1}(\{0\})).$$

Plus précisément, l'égalité se déduit du diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc}
 \pi_1(S^3 \setminus K) / \ker(f_*) & & \\
 \uparrow & \searrow \cong & \\
 \pi_1(S^3 \setminus K) & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\
 \downarrow & \nearrow \cong & \\
 H_1(S^3 \setminus K) & &
 \end{array}$$

et l'isomorphisme découle de l'exactitude. Notons de plus que puisque

$$f^{-1}(\{0\}) \cup K$$

est une surface de Seifert de genre minimal pour K , $\pi_1(f^{-1}(\{0\}))$ est un groupe libre à $2g(K)$ éléments. Il s'avère que la réciproque est également vraie.

Théorème 3.3.6 (Stallings). Étant donné un noeud $K \subset S^3$ et S une surface de Seifert de genre minimal pour K , on a que K est un noeud fibré si et seulement si

$$[\pi_1(S^3 \setminus K), \pi_1(S^3 \setminus K)] \cong \pi_1(S).$$

On retrouve les détails (plutôt techniques) de la réciproque dans (Burde et Zieschang, 2013)²⁰.

3.3.2 Décomposition des noeuds fibrés

On a vu dans la sous-section précédente qu'un noeud fibré admet une caractérisation géométrique ainsi qu'une caractérisation algébrique. En utilisant l'une ou l'autre on peut alors démontrer que la propriété d'être un noeud fibré est préservée sous la somme connexe. Étant donné notre penchant pour l'aspect géométrique, démontrons le résultat par un tel argument. D'une part, dans (Burde et Zieschang, 2013) on affirme que le lemme suivant permet de conclure que la factorisation d'un noeud fibré donne des facteurs qui sont fibrés.

²⁰. Voir la preuve du théorème 5.1 à la page 69.

Lemme 3.3.7. Soit $K \subset S^3$ un noeud fibré de projection $f: S^3 \setminus K \rightarrow S^1$ et $K = K_1 \# K_2$ une décomposition induite par une 2-sphère S . Quitte à lui appliquer une isotopie, on peut supposer que S intersecte $N(K) \setminus K$ en deux disques troués correspondant à deux fibres de $f|_{N(K) \setminus K}$ et que l'intersection avec $\overline{\partial N(K)}$ est transverse. De plus, on peut également supposer que S intersecte chaque fibre de $\Sigma(h)$ transversalement en un unique arc.

Pour une preuve utilisant la caractérisation algébrique et pour la preuve du lemme 3.3.7 voir respectivement la proposition 7.19 et le théorème 7.20 à la page 99 dans le livre (Burde et Zieschang, 2013).

Théorème 3.3.8. Étant donné $K \subset S^3$ un noeud fibré et $K = K_1 \# K_2$ une décomposition quelconque, K_1 et K_2 sont deux noeuds fibrés.

Preuve (Idée). En vertu du lemme 3.3.7, on peut supposer que la 2-sphère S qui sépare K en K_1 et K_2 satisfait les hypothèses du lemme. On peut alors adapter la preuve de la réciproque du théorème 3.3.3 faite dans (Geiges, 2008)²¹ de sorte à obtenir un champ de vecteurs X dont le flot donne la fibration et tel que $X(p) \in T_p S$, pour tout $p \in S \cap \Sigma(h)$. On peut donc supposer que la monodromie $h: \text{Int}(F) \rightarrow \text{Int}(F)$ envoie $\text{Int}(F) \cap S$ sur $\text{Int}(F) \cap S$. Considérons alors \tilde{F}_i , pour $i \in \{1, 2\}$, la fermeture des composantes connexes de $\text{Int}(F) \setminus (\text{Int}(F) \cap S)$ respectivement associées à K_i . Il résulte de la nouvelle construction de X que h ainsi induit se restreint à des automorphismes de \tilde{F}_i , pour $i \in \{1, 2\}$, se prolongeant en des monodromies pour les noeuds K_1 et K_2 . \square

Notons d'autre part que pour démontrer que la somme connexe de noeuds fibrés est un noeud fibré, il suffit de *recoller* les monodromies associées aux \tilde{F}_i via leur bord.

21. Voir la discussion suivant la définition 4.4.4 à la page 149.

Remarque 3.3.9. Bien que nous ne l'ayons pas explicitement mentionné, il suffit de construire l'automorphisme tel qu'il a été fait puisque, par hypothèse, ces derniers fixent l'intersection de la surface avec le voisinage tubulaire fermé de K . Ainsi, l'espace $\Sigma(h)$ qu'ils induisent est tel que voulu.

3.4 Noeuds algébriques

Dans cette section, nous introduirons l'ensemble des noeuds algébriques et démontrerons que ces derniers sont des noeuds fibrés. Cette famille de noeuds étant infinie, ils sont de bons exemples à garder en tête lorsque l'on travaille avec des noeuds fibrés.

3.4.1 Définition

Étant donné un polynôme $P \in \mathbb{C}[X, Y]$, ce dernier donne lieu à une surface de Riemann ramifiée V correspondant à l'ensemble de ses zéros. Si $\Sigma(V)$ dénote l'ensemble de ses points de ramification, $V \setminus \Sigma(V)$ est une surface de Riemann non-ramifiée. Soit alors $\vec{z}_0 \in \Sigma(V)$ (si $\Sigma(V) = \emptyset$, on prend \vec{z}_0 un point régulier). On va démontrer dans ce qui suit qu'il existe toujours $\varepsilon_0 > 0$ tel que pour tout $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$, $B^4(\vec{z}_0, \varepsilon)$ ne contient qu'au plus \vec{z}_0 comme singularité et borde une 3-sphère transverse à $V \setminus \Sigma(V)$ dont l'intersection avec V est un entrelacs de type indépendant de $\varepsilon \leq \varepsilon_0$. Notons que l'ensemble des détails de cette section, sauf mentions explicite du contraire, se trouvent dans (Milnor, 1968c).

Définition 3.4.1. Un noeud qui s'obtient par la construction précédente est appelé un *noeud algébrique*.

De prime à bord, comme $V \setminus \Sigma(V)$ est en particulier une variété réelle lisse de dimension 2, pour montrer que $S^3(\vec{z}_0, \varepsilon)$ lui est transverse dans \mathbb{C}^2 , il suffit de voir

que ε est une valeur régulière de l'application

$$\begin{aligned} r_{\bar{z}_0}: V \setminus \Sigma(V) &\rightarrow \mathbb{R} \\ \bar{z} &\mapsto \|\bar{z} - \bar{z}_0\|^2. \end{aligned}$$

Ainsi, pour obtenir l'existence du $\varepsilon_0 > 0$ mentionné plus haut, il suffirait de montrer que l'ensemble des valeurs critiques de $r_{\bar{z}_0}$ est fini.

Notons W_0 l'ensemble de ses points critiques et remarquons qu'il s'agit d'un ensemble algébrique. En effet, si R dénote le polynôme de $\mathbb{C}[X, Y]$ dont $r_{\bar{z}_0}$ est la restriction et qu'on considère l'application

$$\begin{aligned} (P, R): \mathbb{C}^2 &\rightarrow \mathbb{C}^2 \\ \bar{z} &\mapsto (P(\bar{z}), R(\bar{z})) \end{aligned}$$

on constate que W_0 correspond à l'intersection de l'ensemble algébrique $V \setminus \Sigma(V)$ avec l'ensemble algébrique des points de V où (P, R) est de rang complexe inférieur ou égal à 1²².

Un joli résultat de Whitney²³ qui affirme que le complément d'un ensemble algébrique contenu dans un autre ensemble algébrique est la réunion finie de variétés lisses n'admettant chacune qu'un nombre fini de composantes connexes. On peut alors voir W_0 comme une réunion disjointe et finie de variétés lisses de dimension potentiellement différentes. Par définition de W_0 , l'application $r_{\bar{z}_0}$ est constante sur chacune d'entre elles et n'admet donc qu'au plus un nombre fini de valeurs critiques (i.e. au plus le nombre de composantes connexes dans la réunion disjointe). On en déduit la proposition 3.4.2.

Proposition 3.4.2. Étant donné la construction ci-haut, il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que pour tout $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$, $S^3(\bar{z}_0, \varepsilon)$ est transverse à $V \setminus \Sigma(V)$.

22. Il s'agit d'un cas simple du lemme 2.7 dans le livre (Milnor, 1968c).

23. Pour l'énoncé exact, voir le théorème 2.4 dans le livre (Milnor, 1968c) et, pour une démonstration, voir l'appendice du livre.

Corollaire 3.4.3. Étant donné la construction ci-haut, il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que pour tout $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$, $S^3(\vec{z}_0, \varepsilon) \cap V$ est un entrelacs.

Preuve. Par la proposition précédente, il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que $S^3(\vec{z}_0, \varepsilon)$ est transverse à $V \setminus \Sigma(V)$ pour tout $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$. De plus, comme \vec{z}_0 est une singularité isolée, quitte à prendre $\varepsilon_0 > 0$ plus petit, on a que

$$S^3(\vec{z}_0, \varepsilon) \cap V = S^3(\vec{z}_0, \varepsilon) \cap V \setminus \Sigma(V)$$

pour tout $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$. Enfin, en vertu du théorème de la pré-image, l'intersection est une variété compacte sans bords de dimension 1. Autrement dit, l'intersection est un entrelacs, puisque la seule variété compacte sans bord de dimension 1 qui est connexe est le cercle. \square

Théorème 3.4.4. Si on suppose de plus que P est irréductible, on a que l'entrelacs construit plus haut est un noeud.

On peut consulter (Trang, 1972) pour une démonstration de ce fait.

On aimerait maintenant démontrer que le type de $L_\varepsilon := S^3(\vec{z}_0, \varepsilon) \cap V$ est indépendant du choix de $\varepsilon \leq \varepsilon_0$.

Théorème 3.4.5. Pour $\varepsilon_0 > 0$ suffisamment petit

$$(B^4(\vec{z}_0, \varepsilon_0), B^4(\vec{z}_0, \varepsilon_0) \cap V) \cong (C(S^3(\vec{z}_0, \varepsilon_0)), C(L_{\varepsilon_0}))$$

où $C(S^3(\vec{z}_0, \varepsilon_0))$ et $C(L_{\varepsilon_0})$ sont les cônes des espaces respectifs.

Remarque 3.4.6. On verra dans la preuve ci-dessous que l'homéomorphisme est en fait un difféomorphisme du disque épointé en \vec{z}_0 vers le cône sans son sommet.

Preuve (Idée). On considère maintenant \mathbb{C}^2 comme un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension 4 et on dénote le produit scalaire euclidien de \vec{z}_1 avec \vec{z}_2 par $\langle \vec{z}_1, \vec{z}_2 \rangle_{\mathbb{R}}$.

L'idée est d'utiliser d'abord la transversalité de $S^3(\vec{z}_0, \varepsilon)$ et V pour $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ afin de construire un champ de vecteurs

$$X: V \setminus \{\vec{z}_0\} \rightarrow TV$$

satisfaisant $\langle X(\vec{z}), \vec{z} - \vec{z}_0 \rangle \neq 0$. On étend alors X à un champ de vecteurs satisfaisant cette condition sur tout $B^4(\vec{z}_0, \varepsilon_0) \setminus \{\vec{z}_0\}$, puis on le normalise en le divisant par $\langle \tilde{X}(\vec{z}), \vec{z} - \vec{z}_0 \rangle$. Le résultat est un champ de vecteurs induisant un flot ψ_t défini sur tout $B^4(\vec{z}_0, \varepsilon_0) \setminus \{\vec{z}_0\}$ qui est tel qu'en restreignant ψ_{ε_0-t} à $(S^3(\vec{z}_0, \varepsilon_0), L_{\varepsilon_0})$ puis en reparamétrisant, on obtient un difféomorphisme entre paires

$$(S^3(\vec{z}_0, \varepsilon_0) \times [0, 1), L_{\varepsilon_0} \times [0, 1)) \cong (B^4(\vec{z}_0, \varepsilon_0) \setminus \{\vec{z}_0\}, V \setminus \{\vec{z}_0\}).$$

Comme par construction ce difféomorphisme tend vers \vec{z}_0 lorsque t tend vers 1, il induit l'homéomorphisme recherché. \square

Exemple 3.4.7. Pour $n, m \geq 2$ entiers premiers entre eux, le polynôme $f(z, w) := z^m + w^n$ donne le noeud torique de type (n, m) pour tout $\varepsilon > 0$ en considérant $S^3(0, \varepsilon) \cap f^{-1}(\{0\})$. En effet, on a que l'application

$$\begin{aligned} \rho: S^1 &\rightarrow S^3(0, \varepsilon) \\ \exp(i\theta) &\mapsto \left(\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} \right)^{\frac{1}{m}} \exp(i\theta), \left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} \right)^{\frac{1}{n}} \exp(i(\theta \frac{m}{n} + \frac{\pi}{n})) \right) \end{aligned}$$

est un plongement d'image $S^3(0, 1) \cap f^{-1}(\{0\})$ qui est clairement contenu dans un tore de \mathbb{C}^2 .

Exemple 3.4.8. Étant donné une suite finie $(m_1, n_1), \dots, (m_k, n_k)$ de paires d'entiers premiers entre eux, on peut définir de manière récursive le noeud torique itéré de type $(m_1, n_1), \dots, (m_k, n_k)$ que l'on dénotera $T_{(m_1, n_1), \dots, (m_k, n_k)}$. Supposons que $T_{(m_1, n_1), \dots, (m_{k-1}, n_{k-1})}$ est déjà construit et fixons un automorphisme

$$h: \partial N(T_{(m_1, n_1), \dots, (m_{k-1}, n_{k-1})}) \rightarrow S^1 \times S^1$$

préservant l'orientation et envoyant la longitude canonique de $\partial N(T_{(m_1, n_1), \dots, (m_{k-1}, n_{k-1})})$ sur celle de $S^1 \times \partial D^2$ et un méridien sur un méridien. Posons $\{r_i\}_{i \in \{2, \dots, k\}}$ une suite d'entiers définie récursivement par

$$r_1 := m_1 \text{ et } r_i := m_i - m_{i-1}n_i + r_{i-1}n_{i-1}n_i$$

pour $i \geq 2$. On définit alors le noeud torique itéré comme étant

$$T_{(m_1, n_1), \dots, (m_k, n_k)} := h^{-1}(T_{(r_k, n_k)}).$$

Il s'agit d'un résultat classique que l'ensemble des noeuds toriques itérés de type satisfaisant $m_{i-1}n_i < m_i$, pour tout $i \geq 2$, consiste en l'ensemble de tous les noeuds algébriques. On peut par exemple consulter (Trang, 1972)²⁴ pour avoir une idée de la théorie nécessaire. Dans le même ordre d'idées, on retrouve dans cet article un argument explicitant la distinction des classes d'isotopies des noeuds toriques via l'utilisation du polynôme d'Alexander. Ils constituent donc une famille infinie de noeuds distincts.

3.4.2 Structure des noeuds algébriques

Étant donné un polynôme irréductible $f \in \mathbb{C}[X, Y]$ tel que \vec{z}_0 est une singularité isolée de $f^{-1}(\{0\})$, on aimerait montrer que pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, l'application

$$\begin{aligned} \phi: S^3(\vec{z}_0, \varepsilon) \setminus K_\varepsilon &\rightarrow S^1 \\ \vec{z} &\rightarrow \frac{f(\vec{z})}{|f(\vec{z})|} \end{aligned}$$

est un fibré ayant comme fibre l'intérieur d'une surface de Seifert de K_ε .

Notons d'abord que pour $\vec{z}_1 \in S^3(\vec{z}_0, \varepsilon)$ il existe un voisinage²⁵ ouvert $U \subset \mathbb{C}^2$ sur

24. Voir la discussion qui précède le théorème 1.2.1.

25. Le voisinage ouvert U doit être contenu dans le domaine d'une branche du logarithme pour que $\theta: U \rightarrow \mathbb{R}$ soit bien définie.

lequel ϕ s'exprime sous la forme

$$\phi(\vec{z}) = \exp(i\theta(\vec{z})).$$

Notons également que si on arrive à trouver un champ de vecteurs sur $S^3(\vec{z}_0, \varepsilon)$ dont le flot est défini partout, complet et satisfait $\phi(\psi_t) = t + \alpha$, pour une certaine constante α , alors on aura un automorphisme de $S^3(\vec{z}_0, \varepsilon)$ envoyant la fibre au-dessus de $\exp(i\theta)$ sur la fibre au-dessus $\exp(i(\theta+t))$, pour chaque valeur de $\theta \in \mathbb{R}$. Ainsi, pour $\exp(i\theta_0)$ fixé, il en résultera²⁶ que pour $|t| < \beta$

$$\psi_t: \phi^{-1}(\exp(i\theta_0)) \times (-\beta, \beta) \rightarrow \phi^{-1}(\{\exp(i\theta) \mid \theta_0 - \beta < \theta < \theta_0 + \beta\})$$

est une trivialisatation locale de ϕ autour de $\exp(i\theta_0)$.

Pour déterminer un tel champ de vecteurs il suffit d'en trouver un autour de chaque point satisfaisant localement la condition

$$\frac{d}{dt}\theta(\psi_t(\vec{z})) \equiv 1$$

puis de les recoller via une partition de l'unité. Or, on a

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\theta(\psi_t(\vec{z})) &= \frac{d}{dt}\mathcal{R}e(-i(\log(f(\psi_t(\vec{z}))) + i \log(|f(\psi_t(\vec{z}))|))) \\ &= \frac{d}{dt}\mathcal{R}e(-i \log(f(\psi_t(\vec{z})))) \\ &= \mathcal{R}e \langle \frac{d}{dt}\psi_t(\vec{z}), i \text{grad} \log f(\psi_t(\vec{z})) \rangle_{\mathbb{C}} \\ &= \langle \frac{d}{dt}\psi_t(\vec{z}), i \text{grad} \log f(\psi_t(\vec{z})) \rangle_{\mathbb{R}} \end{aligned}$$

où $\text{grad}(g) := \left(\overline{\frac{\partial g}{\partial z_1}}, \overline{\frac{\partial g}{\partial z_2}} \right)$. Par conséquent, modulo une normalisation lisse du champ de vecteurs $\frac{d}{dt}\psi_t(\vec{z})$, il suffit que ce dernier ne soit ni orthogonal à $i \text{grad} \log f(\psi_t(\vec{z}))$, ni ne tende à le devenir lorsque $U \cap K_\varepsilon \neq \emptyset$ et \vec{z} tend vers K_ε . Milnor a démontré dans un résultat plutôt technique²⁷ que pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit et

26. La constante $\beta > 0$ est choisi de sorte à ce qu'on ne sorte pas du domaine de la branche du logarithme choisie.

27. Voir le lemme 4.3 dans le livre (Milnor, 1968c).

$\vec{z} \in S^3(\vec{z}_0, \varepsilon)$, le vecteur $igrad \log f(\vec{z})$ est soit \mathbb{C} -linéairement indépendant de \vec{z} ou $igrad \log f(\vec{z}) = \lambda \vec{z}$, avec λ d'argument strictement compris entre $\frac{\pi}{4}$ et $\frac{3\pi}{4}$. D'où la possibilité de construire un tel champ de vecteur.

D'autre part, comme pour tout chemin $\gamma(t) \subset S^3(\vec{z}_0, \varepsilon)$ on a

$$\frac{d}{dt}\theta(\gamma(t)) = \left\langle \frac{d}{dt}\gamma(t), igrad \log f(\gamma(t)) \right\rangle_{\mathbb{R}}$$

et que \vec{z} est un point critique de ϕ sur U si et seulement si c'est un point critique de θ , il s'agit d'un point critique si et seulement si $igrad \log f(\vec{z}) = \lambda \vec{z}$, pour un certaine $\lambda \in \mathbb{R}$ (car $\frac{d}{dt}\gamma(t) \in T_{\vec{z}}(S^3(\vec{z}_0, \varepsilon))$). Donc, pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit on a également que ϕ est sans point critique et que $\phi^{-1}(\exp(i\theta_0))$ est toujours une surface. Il ne reste donc plus qu'à exploiter le fait que la singularité est isolée pour obtenir que chaque fibre est l'intérieur d'une surface de Seifert de K_ε .

Fixons alors $\exp(i\theta_0) \in S^1$ et $\varepsilon > 0$ suffisamment petit pour que f n'admette pas de point critique dans $(B^4(\vec{z}_0, \varepsilon) \setminus \{\vec{z}_0\}) \cap V$. Prenons alors $\vec{z}_1 \in S^3(\vec{z}_0, \varepsilon)$. Comme l'ensemble des points critiques d'une fonction est fermé, on peut choisir un voisinage de \vec{z}_1 dans $B^4(\vec{z}_0, \varepsilon)$ ne contenant pas de point critique de f . Ainsi, par le théorème de submersion locale, il existe un système de coordonnées locales (x_1, x_2, x_3, x_4) dans un voisinage W de \vec{z}_1 tel que $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 + ix_2$. Par définition de ϕ , il en résulte que $\vec{z} \in \phi^{-1}(\{\exp(i\theta_0)\})$ si et seulement si $x_1(\vec{z}) > 0$ et $x_2(\vec{z}) = \sin(\theta_0)$. Ainsi, on a que la fermeture de $\phi^{-1}(\exp(i\theta_0))$ est une variété à bord dont le bord est représenté dans W par l'ensemble des points satisfaisant $x_1(\vec{z}) = 0$ et $x_2(\vec{z}) = \sin(\theta_0)$. Autrement dit, K_ε est le bord de $\phi^{-1}(\exp(i\theta_0))$.

3.5 Noeuds fortement quasipositifs

Dans cette section, on introduit la notion de noeud fortement quasipositif et démontre qu'à l'instar des noeuds fibrés cette classe est préservée sous la somme connexe. De plus, nous discuterons sur le fait que l'ensemble des noeuds algé-

briques forme une famille de noeuds fortement quasipositifs.

3.5.1 Tresses et tresses fermées

Introduisons tout d'abord les notions sous-jacentes à celle de noeud fortement quasipositif et donnons quelques résultats standards sur ces dernières.

Définition 3.5.1. Posons $P_i := (i, 1, 0)$ et $Q_i := (i, 1, 1)$, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, des points de \mathbb{R}^3 . On définit une n -tresse de \mathbb{R}^3 comme étant la donnée de n chemins lisses et disjoints $\alpha_i: \mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ satisfaisant

1. $pr_3 \circ \alpha_i(t) = t$, pour tout t ;
2. Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que si $t > 1 - \varepsilon$ ou $t < \varepsilon$,
 $\alpha_i(t) = (i, 1, t)$;
3. Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$

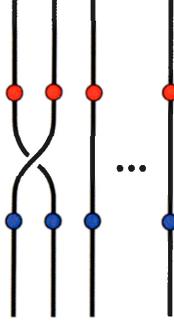
$$pr_1 \circ \alpha_i([0, 1]) \subset [-1, n + 1] \quad \text{et} \quad pr_2 \circ \alpha_i([0, 1]) \subset \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right].$$

On appelle α_i le i -ème brin de la n -tresse.

En particulier, on constate dans la définition ci-haut que $\alpha_i(0) = P_i$ et $\alpha_i(1) = Q_i$. D'autre part, la notion de tresse est intéressante à l'instar de celle de noeud dans la mesure où on considère les classes d'équivalence des n -tresses pour la relation suivante.

Définition 3.5.2. Étant donné deux n -tresses T_1 et T_2 , on dit qu'elles sont équivalentes s'il existe une isotopie envoyant T_1 sur T_2 et fixant les brins pour $t \leq 0$ et $t \geq 1$.

Il s'avère que contrairement aux noeuds, on peut définir une opération binaire de sorte à ce que l'ensemble des classes de n -tresses forme un groupe. Pour T_1 et T_2

Figure 3.6 Représentation de la tresse σ_1

deux n -tresses de brins $\{\alpha_i\}_i$ et $\{\beta_i\}_i$, on définit une troisième n -tresse en posant

$$\gamma_i: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$t \mapsto \begin{cases} (i, 1, t), & \text{pour } t \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty); \\ \left(\alpha_i^{(1)}(2t), \alpha_i^{(2)}(2t), t \right), & \text{pour } t \in \left[0, \frac{1}{2}\right]; \\ \left(\beta_i^{(1)}(2t-1), \beta_i^{(2)}(2t-1), t \right), & \text{pour } t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]. \end{cases}$$

où $\alpha_i^{(j)}$ et $\beta_i^{(j)}$ dénote la j -ième composante de α_i et β_i respectivement.

On peut vérifier directement qu'il s'agit bien d'une n -tresse et que l'opération est bien définie sur les classes d'équivalences.

Proposition 3.5.3. L'ensemble des classes d'équivalence des n -tresses munit de cette opération est un groupe que l'on dénotera \mathcal{T}_n , appelé groupe des n -tresses.

Preuve (Idée). L'élément neutre est la n -tresse ayant pour brins les $\alpha_i(t) := (i, 1, t)$. L'inverse d'une n -tresse de brins $\{\beta_i\}_i$ est la tresse ayant pour brins la famille $\{\tilde{\beta}_i\}_i$ où ces derniers sont définis par

$$\tilde{\beta}_i(t) := \left(\beta_i^{(1)}(1-t), \beta_i^{(2)}(1-t), t \right).$$

L'associativité de ce groupe se démontre similairement à l'associativité du groupe fondamental d'un espace. \square

On aimerait à présent déterminer une présentation par générateurs et relations de \mathcal{T}_n de sorte à pouvoir exprimer de manière concise une n -tresse. Constatons d'abord que \mathcal{T}_n est engendré par $(n - 1)$ tresses $\{\sigma_i\}_i$, où σ_1 est représenté sur la figure 3.6.

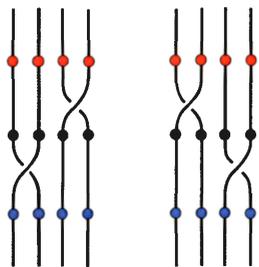


Figure 3.7 La relation $\sigma_1 \sigma_3 = \sigma_3 \sigma_1$

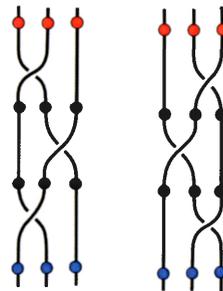


Figure 3.8 La relation $\sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 = \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2$

En effet, ces dernières engendrent bel et bien \mathcal{T}_n , puisqu'on peut montrer que toute n -tresse admet un représentant dans sa classe d'équivalence dont la projection sur le plan $\{(x, y, z) | y = 0\}$ admet un nombre fini de points doubles dont chacun ont une valeur distincte relativement à la projection pr_3 .

D'autre part, pour tout i, j tels que $|i - j| > 1$, $\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i$ et, pour tout $i < n - 1$, $\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}$ (voir la figure 3.7 et la figure 3.8). Il s'agit en fait des seules relations possibles. On peut entre autre consulter (Burde et Zieschang, 2013)²⁸ pour une démonstration concise de ce fait.

Théorème 3.5.4. Le groupe \mathcal{T}_n admet une représentation par générateurs et relations de la forme

$$(\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} \mid \sigma_i \sigma_j \sigma_i^{-1} \sigma_j^{-1} = 1, \text{ si } |i - j| > 1, \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}^{-1} \sigma_i^{-1} \sigma_{i+1}^{-1} = 1, \text{ si } i < n - 1).$$

On aimerait à présent associer à chaque tresse un entrelacs. Étant donné une

28. Voir la discussion précédent la proposition 10.3.

n -tresse $T \in \mathcal{T}_n$ ayant pour brins $\{\alpha_i\}_i$, on sait par définition que

$$\alpha_i([0, 1]) \subset B^3 \left(\vec{0}, \sqrt{n^2 + 2} \right) \quad \text{et} \quad \partial B^3 \left(\vec{0}, \sqrt{n^2 + 2} \right) \overline{\cap} T.$$

Dénotons cette 3-boule par B . Ainsi, étant donné $T_1, T_2 \in \mathcal{T}_n$, on peut considérer $(B, B \cap T_1)$ et $(B, B \cap T_2)$ et faire la somme connexe. Le résultat est (S^3, T) , où T est un entrelacs. En particulier, si T_2 est la tresse représentant l'élément neutre, le résultat s'appelle *la tresse fermée associée à T_1* ou, encore, la fermeture de T_1 . On la dénotera par \widehat{T}_1 .

Remarque 3.5.5. Le nombre de composantes connexes d'une n -tresse fermée associée à une tresse de brins $\{\alpha_i\}_i$ correspond au nombre de cycles de la permutation

$$(pr_1 \circ \alpha_1(0), \dots, pr_1 \circ \alpha_n(0)) \mapsto (pr_1 \circ \alpha_1(1), \dots, pr_1 \circ \alpha_n(1)).$$

Dénotons à présent O le noeud trivial obtenu en effectuant la somme connexe de la paire $(B, B \cap \alpha)$, où α est l'équateur de ∂B dans le plan $x - y$, avec elle-même. On remarque que $T \subset S^3 \setminus O$ et on l'appelle l'axe de T .

Proposition 3.5.6. L'entrelacs T obtenu par la construction précédente est un revêtement à n -feuilles de projection donnée par la restriction à L de la projection du fibré trivial associé à O introduite dans l'exemple 3.3.4.

Preuve. Le résultat découle directement du fait que L obtenue de T_1 et T_2 est un plongement de S^1 et du fait qu'une n -tresse préserve le niveau. \square

Ainsi, on définira formellement une n -tresse fermée comme étant la donnée d'un entrelacs qui est un revêtement à n -feuille relativement à la restriction de la projection du fibré associé à O . De plus, on peut à l'instar des plongements du cercle définir une relation d'équivalence sur les n -tresses fermés.

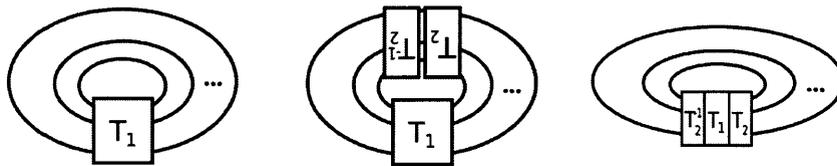


Figure 3.9 Entrelacs à conjugaison près

Définition 3.5.7. On dira que deux n -tresses fermées \widehat{T}_1 et \widehat{T}_2 sont équivalentes s'il existe une isotopie envoyant l'une sur l'autre tout en gardant O fixé.

Autrement dit, deux n -tresses fermées sont équivalentes si et seulement si il existe une isotopie de l'une sur l'autre à travers des n -tresses fermées. On se convainc facilement à partir de la figure 3.9 que la conjugaison de toute tresse nous donne deux tresses fermées équivalentes.

Théorème 3.5.8. Étant donné \widehat{T}_1 et \widehat{T}_2 deux n -tresses fermées équivalentes, il existe $T \in \mathcal{T}_n$ tel que $T_1 = TT_2T^{-1}$.

Remarque 3.5.9. Il s'avère de plus que tout entrelacs est isotope à une tresse fermée. On peut consulter (Burde et Zieschang, 2013)²⁹ pour une démonstration de cette assertion et du théorème 3.5.8. Notons toutefois que la classification des entrelacs à isotopie près est distincte de celle des tresses fermées à équivalence près. On peut facilement trouver un exemple d'une 2-tresse fermée non-triviale isotope au noeud trivial.

3.5.2 Noeuds fortement quasipositifs

Définition 3.5.10. Une tresse de \mathcal{T}_n présentée par un mot de la forme

$$\sigma_{i,j} := (\sigma_i \cdots \sigma_{j-2})\sigma_{j-1}(\sigma_i \cdots \sigma_{j-2})^{-1}$$

29. Voir le chapitre 10.

où $1 \leq i < j \leq n$, est appelée une *bande plongée positive*³⁰.

En réfléchissant un moment, on constate qu'une telle tresse consiste en le croisement du i -ème brin avec le j -ème brin, le premier au dessous du second et le tout au dessus des autres brins (voir la figure 3.10). On peut facilement construire une surface de Seifert pour la fermeture d'une telle tresse consistant en n disques disjoints dont le i -ème est relié au j -ème par une bande faisant un demi-twist dans la direction adéquate (voir la figure 3.11), d'où la nomenclature de ce type de tresse. Il s'agit d'un exemple très simple de ce qu'on appelle une surface de Seifert quasipositive.

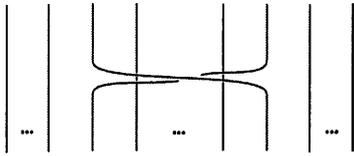


Figure 3.10 La tresse $\sigma_{i,j}$

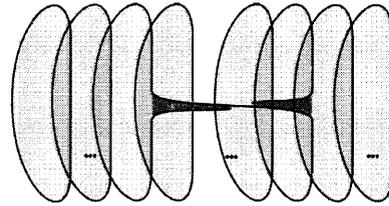


Figure 3.11 Surface de Seifert de la fermeture d'une bande plongée positive

En général, on dit qu'une surface de Seifert est *tressée* si elle est isotope à une surface de Seifert obtenue de la sorte à partir de la fermeture d'une tresse présentée par un produit de bandes plongées. Dans le cas où chacune de ces bandes est positive, on dit qu'elle est *quasipositive*.

Définition 3.5.11. Un noeud est dit *fortement quasipositif* s'il admet une surface de Seifert quasipositive.

Exemple 3.5.12. On voit directement à partir de la figure 3.2 que l'on peut considérer $T_{(2,3)}$ comme étant la fermeture de la tresse présentée par σ_1^3 . Comme chaque

30. Notons que dans le cas où $j = i + 1$, $\sigma_{i,i+1} = \sigma_i$. Pour la définition de bande plongée négative, bande positive (négative), on peut consulter l'article (Rudolph, 1989).

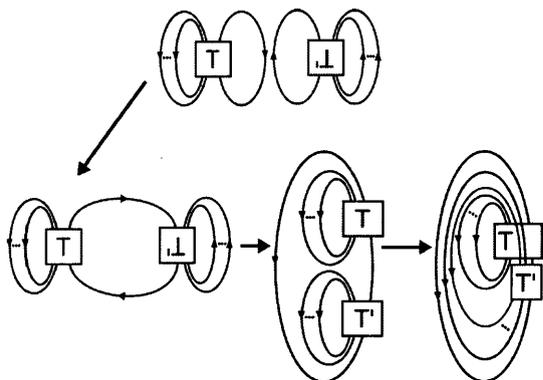


Figure 3.12 Somme connexe de noeuds fortement quasipositifs

générateur de la présentation est canoniquement une bande plongée positive, le noeud trèfle est un noeud fortement quasipositif.

Exemple 3.5.13. Plus généralement si $T_{(p,q)}$ est un noeud torique, alors il peut être vu comme la fermeture de la p -tresse de présentation $(\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_{p-1})^q$. Il en résulte que tous les noeuds toriques sont fortement quasipositifs.

Exemple 3.5.14. On établit dans (Rudolph, 1983; Rudolph, 1989)³¹ que les noeuds algébriques sont fortement quasipositifs.

Enfin, on constate que la somme connexe de noeuds fortement quasipositifs est un noeud fortement quasipositif (voir la figure 3.12).

31. On démontre un résultat plus général dans (Rudolph, 1983) et on suggère comment spécialiser le résultat aux noeuds algébriques dans l'appendice de la section 1 dans (Rudolph, 1989).

CHAPITRE IV

AUTOUR DE LA CONJECTURE SLICE-RIBBON

On a introduit au chapitre précédent la notion de genre de Seifert d'un noeud. Il s'avère que toute surface de Seifert d'un noeud fixé peut-être bien plongée dans B^4 en poussant son intérieur dans la 4-ième dimension via l'utilisation d'un collier de son bord. Il naît de cette constatation la notion de genre slice, c'est-à-dire, celle du genre minimal d'une surface bien plongée dans B^4 bordant le noeud donné dans ∂B^4 . On dénotera $g_4(K)$ le genre slice d'un noeud $K \subset S^3$ et on note de manière évidente que $g(K) \geq g_4(K)$. Il s'avère que cette notion est non-triviale et distincte de la notion de genre puisqu'on peut, d'une part, démontrer qu'il existe des noeuds de genre slice différent de 0 en utilisant la signature de la forme de Seifert (Rolfsen, 2003)¹ et que, d'autre part, il existe des noeuds non-triviaux (donc satisfaisant $g(K) > 0$) pour lesquels $g_4(K) = 0$. On présentera dans cette section différents types de noeuds ayant un genre slice nul, en mettant l'accent sur l'inclusion de ces familles l'une dans l'autre. D'autre part, il est également possible de définir la notion de genre minimal d'un cobordisme bien plongé dans $S^3 \times [0, 1]$ de bords deux noeuds orientés fixés. On appellera concordance les cobordismes de genre nul et regarderons comment les différents types de noeuds de genre slice nul donnent naissance à des notions de concordances correspondantes. Nos principaux

1. On donne l'exemple du noeud trèfle dans l'exemple 8.E.14.

outils seront évidemment ceux de la topologie différentielle introduite précédemment, mais également un brin de topologie algébrique élémentaire. Remarquons enfin que tout au long de ce mémoire nous avons présenté des résultats dans la catégorie lisse et que, conséquemment, la notion de plongement considérée a été celle de bon plongement lisse. Or, certaines des questions traitées ici peuvent également l'être dans la catégorie topologique dans laquelle on considère plutôt la notion de plongement localement plat. Il est important de noter que les résultats diffèrent grandement d'une catégorie à l'autre et que nous resterons toujours dans la catégorie lisse.

4.1 Conjecture Slice-Ribbon

La conjecture Slice-Ribbon est l'une des plus élusives de la théorie des noeuds. Cette conjecture est née de la constatation que l'existence d'un disque immergé dans S^3 dit *ribbon*, c'est-à-dire, n'admettant que des singularités que nous appellerons plus loin de *type ribbon*, peut toujours être désingularisé modulo l'utilisation de la 4-ième dimension. Il est alors naturel de se demander si tout disque bien plongé dans B^4 est isotope à un tel disque ribbon.

4.1.1 Noeuds slice et ribbon

Nous avons noté dans l'introduction que tout disque lisse plongé dans B^4 peut-être bien plongé. Nous désignerons donc un disque bien plongé comme étant un disque lisse plongé, sauf lorsque nous voudrions insister sur le fait qu'un disque donné l'est.

Définition 4.1.1. On dit qu'un noeud $K \subset S^3$ est *slice* s'il existe un disque lisse $D \subset B^4$ qui est plongé et satisfait $\partial D = K(S^1)$.

Il existe plusieurs méthodes pour construire un noeud slice à partir de noeuds slice plus simples.

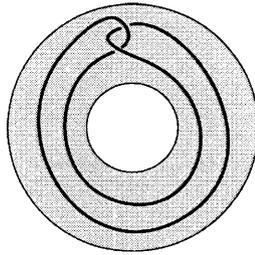


Figure 4.1 "Clasp" de Whitehead

Exemple 4.1.2. En vertu de la proposition 4.2.3, la somme connexe de noeuds slice est un noeud slice.

Exemple 4.1.3. Considérons respectivement L_1 , l'entrelacs non-noué obtenu en prenant le noeud trivial $S^1 \subset S^3$ et sa longitude canonique le long du bord de son voisinage tubulaire, et K_1 , le noeud du tore plein obtenu en effectuant une chirurgie de type $(1, 1)$ telle que représenté à la figure 4.1 à l'entrelacs L_1 . Étant donné un noeud $K \subset S^3$, on peut former un nouveau noeud en retirant le voisinage tubulaire de K et recollant le voisinage tubulaire du noeud trivial contenant L_1 et K_1 à sa place². Les noeuds résultants de cette opération s'appellent respectivement *le double du noeud K* et *le double de Whitehead de K* . Par un argument dans lequel on élimine les auto-intersections transverses entre deux disques de bords disjoints, on peut démontrer qu'un noeud est slice si et seulement si son double l'est. De plus, en réutilisant l'argument précédent et la construction de K_1 à partir de L_1 , on voit directement que le double de Whitehead d'un noeud slice est toujours slice.

Définition 4.1.4. On dit qu'un noeud $K \subset S^3$ est ribbon s'il existe une immersion $\rho: D^2 \looparrowright S^3$ dont les auto-intersections sont transverses et forment des arcs

2. On effectue le recollement via l'homéomorphisme du tore envoyant un méridien sur un méridien et la longitude canonique sur la longitude canonique.

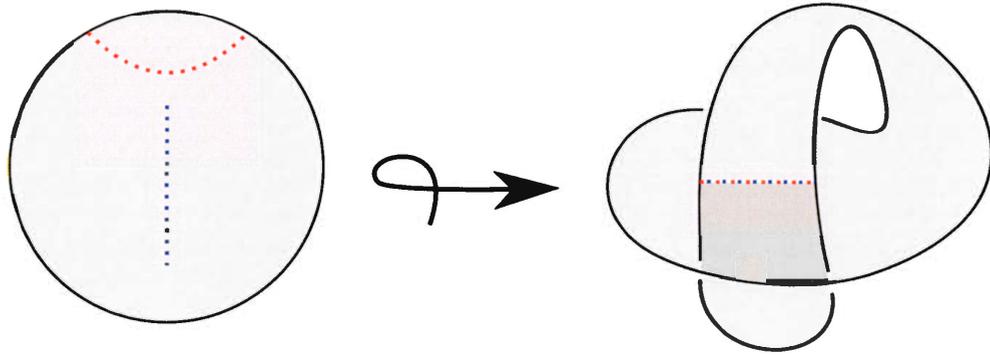


Figure 4.2 Singularité ribbon

dont la pré-image consiste en deux arcs disjoints, l'un dans l'intérieur de D^2 et l'autre bien plongé dans D^2 (voir la figure 4.2). On appelle ces auto-intersections des *singularités de type ribbon*.

Comme on le verra sous peu, l'ensemble des noeuds ribbon constitue un sous-ensemble des noeuds slice. Ils sont en fait, jusqu'à preuve du contraire, le seul bassin d'exemples de noeuds slice connu à ce jour. Notons toutefois que dans les articles (Gompf *et al.*, 2010; Abe et Tange, 2016), on construit des noeuds slice dont on ne connaît pas encore le statut ribbon.

Exemple 4.1.5. Sur la figure 4.3 on voit que les diverses isotopies appliquées au noeud de Stevedore prouvent que c'est un noeud ribbon.

Exemple 4.1.6. Étant donné un noeud $K \subset \mathbb{R}^3$ de représentant $\kappa = (\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3)$, on définit $-K$ comme étant le noeud de représentant

$$\begin{aligned} \rho: S^1 &\hookrightarrow \mathbb{R}^3 \\ \theta &\mapsto (\kappa_1(-\theta), \kappa_2(-\theta), -\kappa_3(-\theta)) \end{aligned}$$

c'est-à-dire que $-K$ est la réflexion de K par rapport au plan $z = 0$ sur lequel on a également inversé l'orientation. Montrons que le noeud $K \# -K$ est toujours un noeud ribbon.

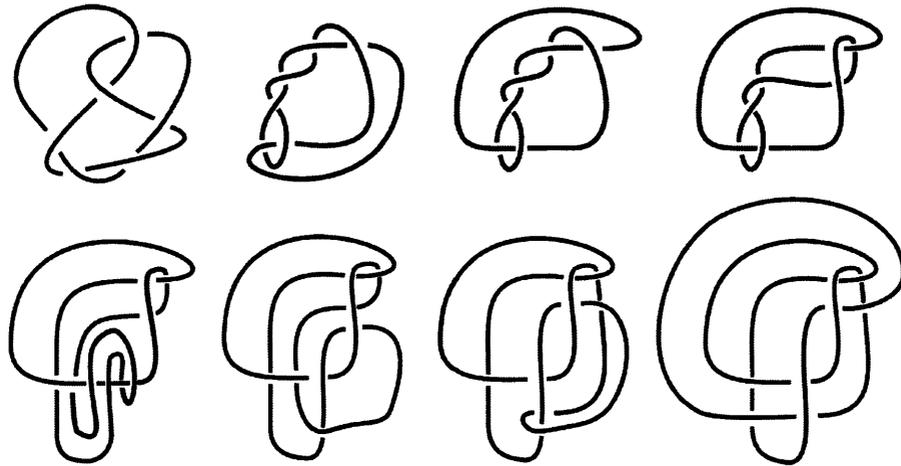


Figure 4.3 Noeud de Stevedore sous diverses formes

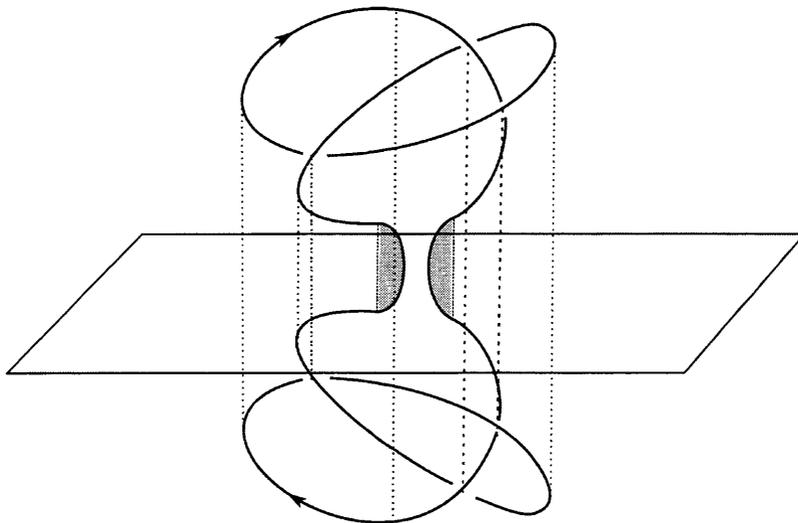


Figure 4.4 Immersion ribbon de $K \# -K$ lorsque K est le noeud trèfle

Quitte à effectuer une isotopie, on peut supposer que K admet un représentant $\kappa: S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ se trouvant dans $\{(x, y, z) | 0 \leq z\}$ sauf en un arc non-noué et que

$$\kappa \cap \{(x, y, z) | z = 0\}.$$

Identifions alors l'arc de κ se trouvant dans le demi espace supérieur à $[0 - \frac{\varepsilon}{2}, 1 + \frac{\varepsilon}{2}]$.

Considérons alors l'immersion

$$\begin{aligned} \phi: (0 + \varepsilon, 1 - \varepsilon) \times [0, 1] &\hookrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (\theta, s) &\mapsto s\kappa(\theta) + (1 - s)\rho(-\theta). \end{aligned}$$

Quitte à effectuer une isotopie, on peut supposer que $pr_{\mathbb{R}^2} \circ \kappa$ est de dérivée partout non-nulle et d'auto-intersections transverses (donc en particulier en nombre fini)³. Ainsi, par construction de ρ relativement à κ et par les hypothèses faites sur κ , on a que les autos-intersections sont des singularités de type ribbon. Pour conclure, il suffit de constater qu'il est possible d'étendre ϕ en une immersion $\tilde{\phi}: D^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ ne rajoutant pas de nouvelles auto-intersections et telle que l'on ait $\tilde{\phi}(\partial D^2) = K \# -K$. On a représenté cette dernière étape à la figure 4.4 où nous avons teint en gris la région sur laquelle s'étend l'immersion.

Il s'avère que la notion de noeud ribbon admet une caractérisation plus pratique en termes de théorie de Morse.

Lemme 4.1.7. Un noeud est ribbon si et seulement si il existe un disque lisse plongé $D \subset B^4$ pour lequel la fonction *distance radiale* de B^4 restreinte à D est une fonction de Morse adaptée n'admettant pas de points critiques d'indice 2, c'est-à-dire, n'admettant pas de maximum local. On dit qu'un tel disque est un *disque ribbon*.

3. Ce résultat découle de l'existence d'une projection régulière sur un plan donné, modulo une petite isotopie du noeud. Pour avoir une idée des détails, on peut consulter (Rolfsen, 2003) 3.E.1 ou plusieurs autres ouvrages d'introduction à la théorie des noeuds.

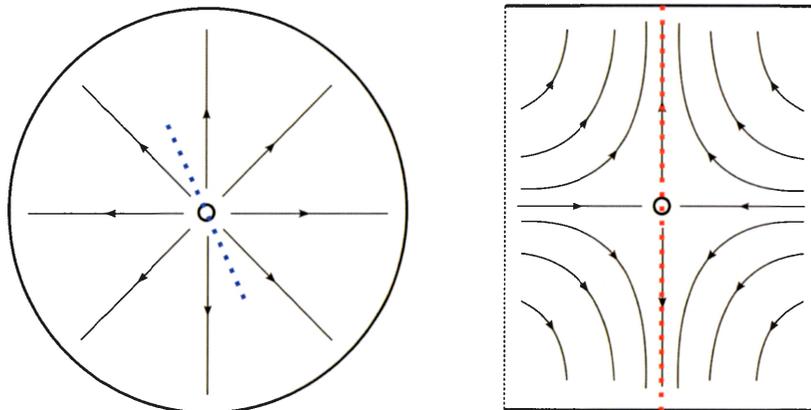


Figure 4.5 Champ de vecteurs pseudo-gradient

Remarque 4.1.8. Notons que par la théorie de Morse, tout disque slice admet, modulo une petite isotopie, la restriction de la fonction distance radiale comme fonction de Morse⁴. Ce qui peut donc distinguer un disque slice d'un disque ribbon est la présence éventuelle de points critiques d'indice 2 dont on ne peut pas se débarrasser sous isotopie.

Preuve. Supposons d'abord qu'il existe un disque D tel que mentionné dans l'énoncé. L'argument qui suit est tiré de (Hass, 1983). Quitte à effectuer un réarrangement des cobordismes élémentaires formant le cobordisme D , on peut supposer que tous les points critiques d'indice 1 prennent la valeur $t_1 \in (0, 1)$ lorsqu'évalués par la fonction distance radiale. De plus, on peut également supposer que tous les points critiques d'indice 0 prennent la valeur $t_0 \in (0, 1)$, où $t_0 < t_1$. On dénotera S_t la pré-image de t relativement à la fonction distance radiale restreinte au disque D . En vertu de la classification des cobordismes élémentaires, pour $\varepsilon = \min \left\{ \frac{t_1 - t_0}{2}, \frac{1 - t_1}{2} \right\} > 0$ et en supposant qu'il y a n points critiques d'indice

4. Voir la discussion suivant le corollaire 4.2.8.

0, on a que le passage de $S_{t_0-\varepsilon}$ à $S_{t_0+\varepsilon}$ correspond à l'ajout de n cercles non-noués bordant des disques disjoints dans $(t_0 + \varepsilon)S^3 \subset B^4$. Ainsi, si la fonction de Morse admet k points critiques d'indice 1, le passage de la surface de niveau $S_{t_0+\varepsilon}$ à $S_{t_1+\varepsilon}$ correspond à effectuer k chirurgies de type $(1,1)$ sur le bord des cercles. En se rappelant que ces chirurgies sont le résultat du recollement de k 1-anses, on peut supposer que la surface de niveau $S_{t_1+\varepsilon}$ consiste en n cercles reliés par k bandes disjointes. On peut maintenant construire une immersion de D^2 dans $(t_1 + \varepsilon)S^3 \subset B^4$ consistant en la surface de niveau $S_{t_1+\varepsilon}$ avec les disques que chacun des noeuds non-noués bordent. Par construction, les intersections ne peuvent avoir lieu qu'à l'intérieur de ces disques⁵. Il en résulte que, modulo une isotopie, ces auto-intersections sont transverses et en nombre fini, et donc que le noeud correspondant au bord de l'immersion est ribbon. Or, en vertu du théorème 2.2.10, on a que K doit-être isotope à ce dernier et donc que K est ribbon.

Donnons à présent une idée de la réciproque. Supposons qu'on ait un noeud ribbon K . Par définition cela implique qu'il existe une immersion $\phi: D^2 \looparrowright S^3$ n'admettant qu'un nombre fini de singularités de type ribbon. Par définition de singularité de type ribbon, chacune d'entre elles est de pré-image deux arcs disjoints α et β , le second séparant le disque en deux composantes connexes et le premier étant compris dans l'intérieur d'une de ces dernières. Supposons que ϕ admette n singularités de type ribbon, $\gamma_1, \dots, \gamma_n$. Disons que leur pré-image sont les arcs intérieurs $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ et les arcs bien plongés β_1, \dots, β_n . On peut considérer un petit voisinage fermé B_i difféomorphe à un disque pour chaque α_i et U_i un bicollier de β_i , pour tout i , de sorte à ce que les $U_1, \dots, U_n, B_1, \dots, B_n$ soient deux à deux disjoints. Sur chacun de ces voisinages, on définit dans les coordonnées adéquates

5. En effet, ces bandes correspondent à la projection des 1-anses dans la sphère de niveau considérée, donc doivent-être disjointes des 0-anses que borde les cercles dans B^4 et en particulier des cercles.

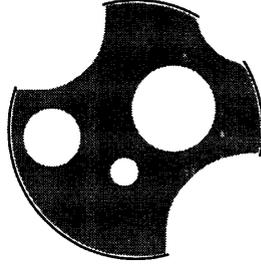


Figure 4.6 Disque troué

les fonctions de Morse dont les champs de vecteurs pseudo-gradient sont représentés sur la figure 4.5. On considère alors le complément de l'ensemble des $\{U_i\}_i$ et $\{B_j\}_j$. On obtient $n + 1$ disques troués (voir la figure 4.6). On peut alors étendre cette dernière, quitte à rajouter des points critiques d'indice 0 et 1, en une fonction de Morse adaptée au disque. Cette étape demande un bon moment de réflexion. Il faut en fait considérer l'ensemble de tous les disques troués possibles et réduire le problème à un nombre fini de cas modulo l'insertion d'un point critique d'indice 0. Nous avons représenté sur la figure 4.7 cette étape et la construction de la fonction de Morse adéquate sur chaque type de morceau possible via l'insertion de points critiques d'indice 1. Les points critique d'indice 0 et 1 qui sont insérés sont représentés respectivement par un point bleu et rouge. Disons que la fonction de Morse obtenue est $f: D^2 \rightarrow [0, 1]$. Cette dernière induit donc, modulo l'immersion, un cobordisme bien plongé dans $S^3 \times [0, 1]$ dont l'une extrémité est vide et l'autre borde le noeud K . Enfin, on étend de manière évidente cette dernière en un plongement dans B^4 . \square

Il découle du lemme 4.1.7 le corollaire suivant :

Corollaire 4.1.9. Tout noeud ribbon est slice.

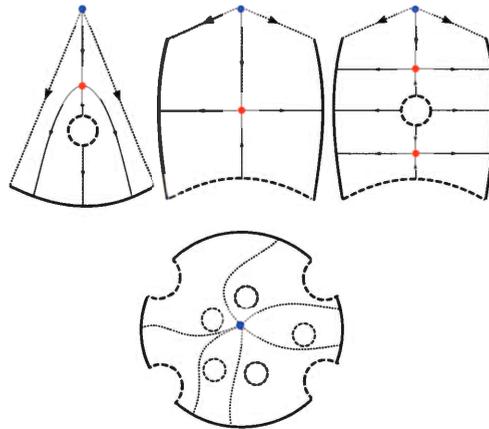


Figure 4.7 Schématisation de la réduction du problème

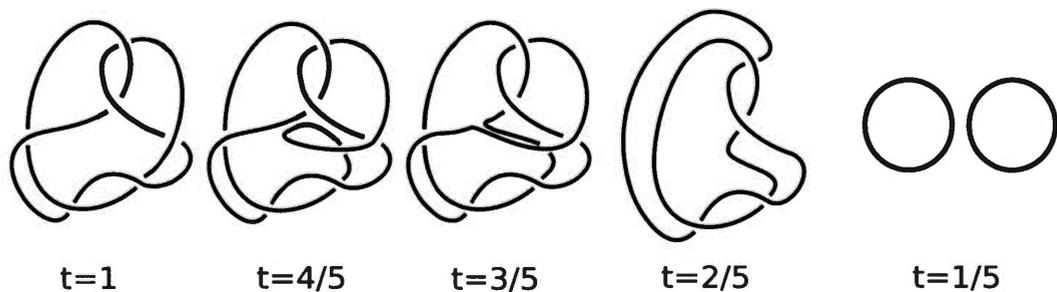


Figure 4.8 Film du noeud de Stevedore

La réciproque de cette assertion est toujours à l'état de conjecture et est due à Fox (Fox, 1961). Il s'agit de la célèbre conjecture slice-ribbon.

Conjecture 4.1.10 (Slice-Ribbon). Tout noeud slice est un noeud ribbon.

Nous reviendrons plus loin sur le lien qui existe entre cette dernière et d'autres conjectures de la théorie des noeuds.

Notons que la première partie de la preuve du lemme 4.1.7 suggère une méthode pour démontrer qu'un noeud est ribbon. En effet, si un noeud K est ribbon, il doit exister un disque ribbon D bien plongé dans B^4 le bordant. Quitte à

rétrécir D , on peut supposer que $D \subset B^4 \setminus \{0\} \cong S^3 \times (0, 1]$. Ainsi, en considérant $D \cap S^3 \times \{t\}$ pour des valeurs de t décroissantes, on obtient un *film* du noeud $D \cap S^3 \times \{1\} = K$ se modifiant par une chirurgie de type $(1, 1)$ chaque fois qu'on passe un point critique d'indice 1 et donnant un entrelacs non-noué bordant $n + 1$ disques disjoints lorsque l'on aura passé par tous les n points critiques d'indice 1. Réciproquement, un tel film décrit un disque ribbon plongé dans $S^3 \times (0, 1] \subset B^4$ et bordant notre noeud K . Pour démontrer qu'un noeud est ribbon il est donc nécessaire et suffisant qu'il existe un tel film. La figure 4.8 représente un film décrivant un disque ribbon pour le noeud de Stevedore.

Finalement, notons qu'il existe une approche à la conjecture 4.1.10 se basant sur le résultat suivant (Gordon, 1981).

Théorème 4.1.11. Si un noeud $K \subset S^3$ est ribbon de disque ribbon $D \subset B^4$, alors l'inclusion induit un épimorphisme

$$\pi_1(S^3 \setminus K) \rightarrow \pi_1(B^4 \setminus D).$$

Preuve. Comme D est bien plongé dans B^4 il admet un voisinage tubulaire bien plongé. Or, on démontre dans (Gompf et Stipsicz, 1999)⁶ que $B^4 \setminus N(D)$ est du même type d'homotopie qu'un complexe CW relativement à $\partial B^4 \setminus N(K)$ n'admettant que des 2-cellules et des 3-cellules. Comme l'ajout de telles cellules sur l'extérieur du noeud ne peut pas rajouter de générateurs au groupe fondamental, on en déduit le résultat. \square

Ce résultat nous permet de définir une notion chevauchant celles de noeud ribbon et de noeud slice.

Définition 4.1.12. On dit qu'un noeud $K \subset S^3$ est homotopiquement ribbon s'il

6. Voir la proposition 6.2.1 de l'ouvrage, ainsi que le théorème 2.2.27 du présent mémoire.

admet un disque slice $D \subset B^4$ tel que l'inclusion induit un épimorphisme

$$\pi_1(S^3 \setminus K) \rightarrow \pi_1(B^4 \setminus D).$$

Remarque 4.1.13. En fait, la définition donnée ci-haut n'est qu'un cas particulier de ce qu'est un noeud homotopiquement ribbon. En général, on dit qu'un noeud $K \subset M$, où M est une 3-sphère homologique, est homotopiquement ribbon s'il existe un bon plongement du disque dans une 4-variété contractile bordant M .

Comme tout noeud ribbon est homotopiquement ribbon et qu'évidemment tout noeud homotopiquement ribbon est slice, l'existence d'un contre-exemple à l'une des réciproques suffirait pour contredire la conjecture Slice-Ribbon.⁷ Pour plus d'informations sur les noeuds homotopiquement ribbon, on peut entre autres consulter l'article (Casson et Gordon, 1983) dans lequel Casson et Gordon donnent une caractérisation géométrique de la notion de noeud fibré homotopiquement ribbon.

Enfin, notons qu'il est possible de construire un disque slice non-ribbon pour le noeud trivial en recollant une demi-sphère nouée dans B^4 au disque standard troué bordant S^1 dans B^4 . Si D dénote le disque slice ainsi construit, il suffit en fait de s'assurer que le groupe $\pi_1(B^4 \setminus D)$ admette plus d'un générateur pour que $\pi_1(S^3 \setminus S^1) \cong \mathbb{Z} \rightarrow \pi_1(B^4 \setminus D)$ ne soit pas un épimorphisme. Ainsi, le fait d'être un noeud ribbon est réellement caractérisé par l'existence d'un disque ribbon et non par le fait qu'un disque slice donné le soit.

7. Bien qu'on y travaille dans la catégorie des noeuds topologiques localement plats, notons que l'article (Cha et Powell, 2016) semble une bonne porte d'entrée pour s'initier aux obstructions potentielles de la première de ces réciproques, autant pour son contenu à la section 5 que pour les références qui y sont données.

4.2 Concordances

Dans cette section, nous introduisons les notions de concordances correspondantes à celles de noeud slice et ribbon, puis nous regardons le lien qui existe entre ces notions.

4.2.1 Concordance slice

Définition 4.2.1. On dit que deux noeuds orientés $K_0, K_1 \subset S^3$ sont *concordants*, noté $K_0 \sim K_1$, s'il existe un bon plongement lisse $f: S^1 \times [0, 1] \rightarrow S^3 \times [0, 1]$ qui satisfait $f|_{S^1 \times \{i\}} = (-1)^i K_i \subset S^3 \times \{i\}$, où $i \in \{0, 1\}$. On dit alors que f est une *concordance lisse entre K_0 et K_1* .

On remarque de prime à bord que cette notion généralise celle d'isotopie entre noeuds. En effet, étant donné $h: S^1 \times [0, 1] \rightarrow S^3$ une isotopie de K_0 vers K_1 , on peut toujours définir la concordance de K_0 vers K_1 suivante

$$\begin{aligned} \hat{h}: S^1 \times [0, 1] &\rightarrow S^3 \times [0, 1] \\ (x, t) &\mapsto (h(x, t), t). \end{aligned}$$

Ainsi, deux noeuds ne peuvent-être isotopes s'ils ne sont pas concordants.

Il s'avère que tout comme la relation *d'isotopie*, la relation *de concordance* est une relation d'équivalence. D'une part, la réflexivité et la symétrie sont évidentes, et la transitivité découle de la possibilité de concaténer de manière unique, à difféomorphisme près, deux concordances ayant une extrémité en commun.

Corollaire 4.2.2. La relation \sim est une relation d'équivalence.

Il s'avère même que sous l'opération de somme connexe entre noeuds, les classes de concordances forment un groupe abélien. La proposition suivante nous permettra de définir une opération bien définie sur les classes de concordances.

Proposition 4.2.3. Étant donné deux noeuds K_0 et \tilde{K}_0 qui sont respectivement concordants à K_1 et \tilde{K}_1 , il existe une concordance lisse entre $K_0\#\tilde{K}_0$ et $K_1\#\tilde{K}_1$.

Afin de démontrer cette dernière proposition, nous avons besoin du lemme suivant.

Lemme 4.2.4. Étant donné $\rho: S^1 \times I \rightarrow S^3 \times I$ une concordance, il existe un arc ouvert $A \subset S^1$ paramétrisé par $\gamma: (0, 1) \rightarrow S^1$ et une isotopie

$$h: S^1 \times I \times [0, 1] \rightarrow S^3 \times I$$

partant de ρ et telle que

$$h((\gamma(s), t), 1) = (pr_1 \circ h((\gamma(s), 0), 1), t)$$

pour toute valeur de s et t .

Preuve (Idée). Considérons les arcs

$$\begin{array}{ccc} \alpha_0: I \rightarrow \mathcal{C} \subset S^3 \times I & \text{et} & \alpha_1: I \rightarrow S^3 \times I \\ t \mapsto \rho(*, t) & & t \mapsto (\rho(*, 0), t) \end{array}$$

où $*$ $\in S^1$ est fixé. Quitte à modifier légèrement la concordance dans un collier de $S^3 \times \{1\}$, on peut supposer que $\alpha_0(1) = \alpha_1(1)$.

En vertu d'un théorème de Whitney (Kosinski, 1993)⁸, comme

$$2 \dim(\alpha_0(I)) + 2 \leq \dim(S^3 \times I)$$

et que ces derniers sont clairement homotopes, ils sont isotopes. On peut alors étendre l'isotopie en une difféotopie H de $S^3 \times I$ de support contenu à l'extérieur d'un collier de $\partial(S^3 \times I)$. En prenant $B \subset S^3 \times \{0\}$ une 3-boule suffisamment petite et centrée en $\alpha_1(0)$, on obtient que $B \cap \mathcal{C}$ est l'arc recherché. \square

8. Voir le théorème 4.7 du chapitre 2.

Preuve (Lemme 4.2.3). Soit $\rho_i: S^1 \times I \rightarrow S^3 \times I$ la concordance entre K_i et \tilde{K}_i , pour $i \in \{0, 1\}$, et dénotons son image par \mathcal{C}_i .

En vertu du lemme précédent, quitte à appliquer une isotopie, on peut supposer qu'il existe $A_i \subset S^1$ un arc ouvert tel que construit dans la preuve du lemme 4.2.4. On peut alors considérer B_i une petite boule fermée et centrée en $*$ $\in \rho_i(A_i \times \{0\})$ dont le bord intersecte transversalement l'arc en deux points. Remarquons que par construction

$$S^3 \times I \setminus B_i \times I \cong \text{Int}(B^3) \times I.$$

Ainsi, pas l'uniformité des couples

$$(S^3 \times I \setminus \text{Int}(B_i) \times I, \mathcal{C}_i \setminus \text{Int}(B_i) \times I)$$

sur leur bord, on peut simultanément faire la somme connexe

$$((S^3 \setminus \text{Int}(B_0)) \times \{t\}, (\mathcal{C}_0 \setminus \text{Int}(B_0)) \times \{t\}) \# ((S^3 \setminus \text{Int}(B_1)) \times \{t\}, (\mathcal{C}_1 \setminus \text{Int}(B_1)) \times \{t\})$$

pour chaque valeur de $t \in I$. On obtient ainsi la paire $(S^3 \times I, \mathcal{C})$, où \mathcal{C} est une concordance entre $K_0 \# K_1$ et $\tilde{K}_0 \# \tilde{K}_1$. \square

Si on dénote la classe de concordance d'un noeud $K \subset S^3$ par $[K]$, il résulte du lemme 4.2.3 que l'on a une opération bien définie sur l'ensemble des classes de concordance des noeuds de S^3 .

Définition 4.2.5. Étant donné deux noeuds K_0 et K_1 de S^3 , on définit la somme de leur classe de concordance par

$$[K_0] + [K_1] := [K_0 \# K_1].$$

Corollaire 4.2.6. Les classes de concordance des noeuds de S^3 munies de cette opération forment un groupe abélien dont l'élément neutre est la classe du noeud trivial et l'inverse d'un noeud $K \subset S^3$ est $[-K]$.

On peut donc considérer ce groupe comme étant un \mathbb{Z} -module.

Conjecture 4.2.7. [Lee Rudolph] L'ensemble des noeuds algébriques non-triviaux forme un ensemble linéairement indépendant dans le \mathbb{Z} -module correspondant au groupe de concordance.

Cette conjecture fut rapidement soutenue, entre autres, par les résultats de (Litherland, 1979) où l'auteur démontre la conjecture dans le cas restreint des noeuds toriques et sous une forme plus faible dans le cas général. Nous reviendrons sur cette conjecture plus loin.

4.2.2 Concordances ribbon

On peut également déduire de la proposition 4.2.3 qu'il existe un lien très étroit entre la notion de noeud slice et celle de concordance.

Corollaire 4.2.8. Étant donné deux noeuds K_0 et K_1 , on a que $[K_0] = [K_1]$ si et seulement si $[K_0\# - K_1] = 0$ ou, encore, $K_0\# - K_1$ est slice.⁹

Le corollaire 4.2.8 suggère un moyen de spécialiser notre définition de concordance. En effet, on aimerait définir une notion de concordance telle que $[K_0] = [K_1]$ si et seulement si $K_0\# - K_1$ est un noeud ribbon. Or, remarquons qu'en vertu de la théorie de Morse, pour toute concordance $\mathcal{C} \subset S^3 \times [0, 1]$, il existe une fonction aussi proche que voulu de la fonction hauteur

$$pr_{[0,1]}|_{\mathcal{C}}: \mathcal{C} \rightarrow [0, 1]$$

qui est une fonction de Morse adaptée au cobordisme $(\mathcal{C}; K_0, -K_1)$. On peut alors reconstruire le cobordisme en considérant cette dernière comme étant la fonction hauteur de $S^3 \times [0, 1]$. Ainsi, en prenant la fonction de Morse suffisamment

9. Évidemment, un noeud est slice si et seulement si il est concordant au noeud trivial.

proche de la fonction hauteur, on peut s'assurer qu'il existe une isotopie entre \mathcal{C} et la reconstruction du cobordisme. Le résultat est une concordance isotope à \mathcal{C} admettant la fonction hauteur comme fonction de Morse adaptée.

Définition 4.2.9. On dit que deux noeuds concordants $K_0, K_1 \subset S^3$ de concordance \mathcal{C} sont *ribbon concordants*, dénoté $K_1 \geq K_0$, si $pr_{[0,1]}|_{\mathcal{C}}$ est une fonction de Morse adaptée n'admettant pas de point critique d'indice 2. On dit également que \mathcal{C} est une *concordance ribbon de K_1 vers K_0* .

Il s'avère que la proposition 4.2.3 est également valide lorsque l'on remplace la notion de concordance par celle de concordance ribbon. Cela découle de la possibilité de modifier le lemme 4.2.4 de sorte à ce que l'isotopie entre les arcs préserve la fonction hauteur. Pour ce faire, il suffit de démontrer que dans le cas d'une concordance ribbon, il est toujours possible de trouver un chemin allant d'un côté à l'autre du cobordisme et qui est paramétrisé par sa hauteur. L'existence d'un tel arc découle essentiellement du fait qu'il n'y a pas de point critique d'indice 2 pour la fonction hauteur restreinte, que la sphère gauche des 1-anses consiste en 2 points (faciles à éviter modulo un mouvement en hélice paramétrisé en utilisant un collier du cobordisme élémentaire) et que \mathcal{C} est connexe par arcs. Ainsi, on a l'analogie du corollaire pour les concordances ribbon et il s'agit bien de la spécialisation recherchée.

Corollaire 4.2.10. Si $K_1 \geq K_0$, alors $K_1 \# -K_0 \geq 0$, où 0 dénote le noeud trivial.

Remarque 4.2.11. Notons que contrairement au cas des concordances ribbons, la réciproque du corollaire précédent n'est pas vrai a priori. En effet, il s'agit d'un résultat que nous verrons sous peu que la relation est anti-symétrique pour les noeuds fibrés alors que clairement si $K_0 \# -K_1$ est ribbon, $K_1 \# -K_0$ l'est.

Enfin, notons que le théorème 4.1.11 suggère la généralisation suivante aux concordances ribbon.

Théorème 4.2.12. Étant donné une concordance ribbon \mathcal{C} allant de $K_1 \subset S^3$ vers $K_0 \subset S^3$, alors on a que les morphismes induit par l'inclusion

$$\pi_1(S^3 \setminus K_1) \rightarrow \pi_1(S^3 \times [0, 1] \setminus \mathcal{C}) \quad \text{et} \quad \pi_1(S^3 \setminus K_0) \rightarrow \pi_1(S^3 \times [0, 1] \setminus \mathcal{C})$$

sont respectivement surjectif et injectif.

Supposons que l'on ait une concordance ribbon $\mathcal{C} \subset S^3 \times [0, 1]$ allant de K_1 vers K_0 . Par un argument similaire à celui fait dans la preuve 4.1.1 on peut conclure que

$$\pi_1(S^3 \setminus K_1) \rightarrow \pi_1(S^3 \times [0, 1] \setminus \mathcal{C})$$

est un épimorphisme.

On aimerait pouvoir simplement dualiser l'argument de (Gompf et Stipsicz, 1999) faisant en sorte que $S^3 \times [0, 1] \setminus \mathcal{C}$ admet une structure de complexe CW relativement à $S^3 \setminus K_0$ n'admettant que des 1-cellules et des 2-cellules. Malheureusement, on ne peut pas conclure aussi facilement dans ce cas. Cela est dû au fait que les 2-cellules créent potentiellement des relations entre des éléments de $\pi_1(S^3 \setminus K_0)$ dans $\pi_1(S^3 \times [0, 1] \setminus \mathcal{C})$. On doit donc en premier lieu s'assurer que toutes les relations engendrées par l'ajout des 2-cellules font intervenir des générateurs distincts créés par l'ajout des 1-cellules.

Lemme 4.2.13. L'inclusion induit un isomorphisme

$$H_*(S^3 \setminus K_0) \rightarrow H_*(S^3 \times [0, 1] \setminus \mathcal{C}).$$

Preuve. Il suffit de considérer la suite exacte longue de Mayer-Vietoris pour le couple $(S^3 \times [0, 1] \setminus \mathcal{C}, S^3 \times \{0\})$. Le résultat découle alors de l'existence d'un rétracte par déformation de $S^3 \times [0, 1]$ sur $S^3 \times [0, 1] \setminus \mathcal{C} \cup S^3 \times \{0\}$ via le plongement $S^1 \times [0, 1] \hookrightarrow S^3 \times [0, 1]$ dont l'image est la concordance. \square

D'une part, l'ajout d'une 2-cellule crée soit une relation sur le premier groupe d'homologie ou est équivalent à effectuer un produit wedge d'une 2-sphère avec $S^3 \setminus K_0$, c'est-à-dire, à rajouter un générateur au deuxième groupe d'homologie. Comme l'isomorphisme du lemme 4.2.13 est vrai pour les deuxièmes groupes d'homologie, l'ajout des 2-cellules ne crée pas de générateurs et donc que des relations. D'autre part, ajouter une 1-cellule est équivalent à effectuer le produit wedge d'un cercle avec $S^3 \setminus K_0$, puisque ce dernier est connexe par arcs. Ainsi, l'ajout des 1-cellules correspond à rajouter des générateurs au premier groupe d'homologie. Comme les premiers groupes d'homologies sont isomorphes par le lemme 4.2.13, on a donc qu'à chaque générateur rajouté il y a une relation le tuant. De plus, comme aucune nouvelle relation n'est créée, il doit y avoir exactement le même nombre de 1-cellules que de 2-cellules.

Ainsi, on a l'isomorphisme suivant

$$\pi_1(S^3 \times [0, 1] \setminus \mathcal{C}) \cong \pi_1(S^3 \setminus K_0) * F(x_1, \dots, x_n) / N(r_1, \dots, r_n)$$

où $F(x_1, \dots, x_n)$ dénote le groupe libre engendré par n éléments que l'on a dénotés x_1, \dots, x_n et $N(r_1, \dots, r_n)$ le sous-groupe distingué engendré par les relations que l'on a dénotées r_1, \dots, r_n . En se rappelant que le premier groupe d'homologie correspond à l'abélianisé du groupe fondamental, on en déduit que les relations doivent être triviales à commutativité près des éléments. Comme chaque x_i correspond à une 1-cellule, on doit donc avoir $r_i = x_i w a^{-1} w^{-1}$, où a représente un méridien quelconque du voisinage tubulaire du noeud et w un mot dans le produit libre $\pi_1(S^3 \times K_0) * F(x_1, \dots, x_n)$.

Avant de poursuivre et de conclure la démonstration, nous avons besoin d'introduire une nouvelle notion.

Définition 4.2.14. On dit qu'un groupe G est résiduellement fini si l'intersection

de tout ses sous-groupes d'indice fini est trivial ou, de manière équivalente, si pour tout élément $g \in G \setminus \{1\}$, il existe un sous-groupe normal $N < G$ tel que G/N est fini et tel que sous la projection canonique $q: G \rightarrow G/N$, $\bar{g} := q(g) \neq 1$.

Dans le contexte de la théorie des noeuds, on dira qu'un noeud K est *résiduellement fini* si le groupe $\pi_1(S^3 \setminus K)$ l'est.

Théorème 4.2.15. Tous les noeuds sont résiduellement finis.

Il est simple de démontrer que les noeuds fibrés le sont. Rappelons que si $\pi_1(S^3 \setminus K)$ est un noeud fibré, alors ce dernier est de sous-groupe dérivé isomorphe à $\pi_1(F)$, où F est une surface de seifert de genre minimal. Plus précisément, si F est de genre n , alors $\pi_1(F)$ est un groupe libre sur $2n$ éléments. Il s'avère d'une part que tout groupe libre finiment engendré est résiduellement fini (Hempel, 1972).

D'autre part, en considérant la suite exacte courte

$$\{1\} \longrightarrow [\pi_1(S^3 \setminus K), \pi_1(S^3 \setminus K)] \longrightarrow \pi_1(S^3 \setminus K) \longrightarrow H_1(S^3 \setminus K) \longrightarrow \{1\}$$

et sachant que toute extension cyclique infini d'un groupe finiment engendré et résiduellement fini est résiduellement fini (Hempel, 2004), on en conclut qu'un noeud fibré est bien résiduellement fini.

Dans le cas général, on décompose l'extérieur du noeud en parties plus simples (Johannson, 1979; Jaco et Shalen, 1979) dont on sait que le groupe fondamental est résiduellement fini (Hempel, 2004), puis on conclut en démontrant que le tout l'est (Hempel, 1987). Les détails sortent du cadre de ce mémoire¹⁰.

Preuve (Théorème 4.2.12). En reprenant les mêmes notations que dans l'énoncé, procédons par contradiction et supposons qu'il existe $g \neq 1$ tel que

$$g \in \ker (\pi_1(S^3 \setminus K_0) \rightarrow \pi_1(S^3 \times [0, 1] \setminus \mathcal{C})) .$$

10. L'ensemble des détails exposés dans ce bref paragraphe ont été extraits de (Campbell, 1989).

Comme $\pi_1(S^3 \setminus K_0)$ est résiduellement fini, il existe un sous-groupe normal N tel que $H := \pi_1(S^3 \setminus K_0)/N$ est fini et $q: \pi_1(S^3 \setminus K_0) \rightarrow H$ satisfait $q(g) \neq 1$. D'autre part, l'application q induit l'application

$$\tilde{q}: \pi_1(S^3 \setminus K_0) * F(x_1, \dots, x_n) / N(r_1, \dots, r_n) \rightarrow H * F(x_1, \dots, x_n) / N(\bar{r}_1, \dots, \bar{r}_n) =: \hat{H}$$

où \bar{r}_i désigne le mot r_i dans lequel on a substitué tous les éléments de $\pi_1(S^3 \setminus K_0)$ par leur image dans H .

Si on arrive à démontrer qu'il existe une injection $f: H \rightarrow \hat{H}$ tel que le diagramme ci-dessous soit commutatif

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(S^3 \setminus K_0) & \xrightarrow{q} & H \\ i_* \downarrow & & \downarrow f \\ \pi_1(S^3 \times [0, 1] \setminus \mathcal{C}) & \xrightarrow{\tilde{q}} & \hat{H} \end{array}$$

alors on aura terminé. En effet, on aurait alors que

$$1 \neq f \circ q(g) = \tilde{q} \circ i_*(g) = 1$$

ce qui serait une contradiction.

Remarquons, d'une part, que si on pose ε_{ij} la somme des exposants des x_i dans r_j , alors on a $\varepsilon_{ij} = \delta_{ij}$, où δ_{ij} désigne le delta de Kronecker. Ainsi, on a que $\det((\varepsilon_{ij})) \neq 0$. En vertu du théorème dans (Gerstenhaber et Rothaus, 1962), il existe donc une suite exacte courte de groupes

$$\{1\} \longrightarrow H \xrightarrow{k_1} H_1 \xrightarrow{k_2} H_2 \longrightarrow \{1\}.$$

et un morphisme de groupes

$$l: \hat{H} \rightarrow H_1$$

tels que le diagramme suivant soit commutatif

$$\begin{array}{ccc} H & \xrightarrow{f} & \hat{H} \\ k_1 \downarrow & \swarrow l & \\ H_1 & & \end{array}$$

où f est la composition suivante

$$H \longrightarrow H * F(x_1, \dots, x_n) \longrightarrow \hat{H}.$$

Comme k_1 est injective, il en résulte que f l'est. Donc on a bien le résultat voulu. \square

À l'instar des noeuds homotopiquement ribbon, on peut définir la notion de concordance homotopiquement ribbon.

Définition 4.2.16. On dit qu'il existe une *concordance homotopiquement ribbon* de $K_0 \subset M_0$ vers $K_1 \subset M_1$, où M_0, M_1 sont des 3-sphères homologues, s'il existe un cobordisme X entre M_0 et M_1 ayant la même homologie que S^3 , tel que l'inclusion induit un isomorphisme sur les groupes d'homologie $H_*(M_0, \mathbb{Z}) \rightarrow H_*(X, \mathbb{Z})$, et un bon plongement \mathcal{C} de $S^1 \times [0, 1]$ dans X tel que les extrémités correspondent aux noeuds et que les applications induites par inclusion

$$\pi_1(M_1 \setminus K_1) \rightarrow \pi_1(X \setminus \mathcal{C}) \quad \text{et} \quad \pi_1(M_0 \setminus K_0) \rightarrow \pi_1(X \setminus \mathcal{C})$$

soient respectivement surjective et injective. On dénotera cette relation également par $K_1 \geq K_0$ et précisons ce que l'on entend selon le contexte.

Nous laissons cette notion de côté pour l'instant et y reviendrons à la fin du chapitre. Notons seulement que cette notion de concordance généralise celle de concordance ribbon introduite par Gordon.

4.3 Concordance ribbon comme relation d'ordre partielle sur les noeuds fibrés

Dans cette section, nous établissons en suivant l'article (Gordon, 1981) que la relation *être ribbon concordants* est une relation d'ordre partielle sur l'ensemble des noeuds fibrés. Comme la transitivité et la réflexivité suivent aussi facilement que pour une concordance slice, il suffit de démontrer l'anti-symétrie. Nous énoncerons

le résultat clef dans l'article de Gordon (Gordon, 1981), puis en déduisons le résultat. Pour ce faire, nous aurons besoin d'introduire la notion de revêtement cyclique infini de l'extérieur d'un noeud et d'une concordance, ainsi que le résultat de dualité de Milnor s'appliquant à ces espaces. Enfin, nous réinterpréterons les résultats de Gordon en fonction du genre de Seifert des noeuds en suivant l'article de Baker (Baker, 2016).

4.3.1 Revêtement cyclique infini

Étant donné un noeud K , dénotons par X l'extérieur du noeud $S^3 \setminus N(K)$. Par dualité d'Alexander, on sait que $H_1(X) \cong \mathbb{Z}$. L'homomorphisme d'Hurewicz

$$h: \pi_1(X) \rightarrow H_1(X) \cong H_1(S^1)$$

induit donc une application lisse $f: X \rightarrow S^1$. Le tiré en arrière du revêtement universel de S^1 par cette application

$$\begin{array}{ccc} X^\infty & \xrightarrow{f^*} & \mathbb{R} \\ \rho^* \downarrow & & \downarrow \rho \\ X & \xrightarrow{f} & S^1 \end{array}$$

nous donne le *revêtement cyclique infini*. Ce dernier est uniquement déterminé par le type d'homotopie de f , est normal de fibre \mathbb{Z} et de groupe d'automorphisme $Aut(X^\infty) \cong \mathbb{Z}$. On peut consulter (Rolfsen, 2003) pour une construction explicite de cet espace à partir d'une surface de Seifert et pour la démonstration des faits mentionnés. D'autre part, on a vu que l'extérieur d'une concordance est de même homologie que le cercle. Il en découle la possibilité de construire un revêtement cyclique infini pour l'extérieur d'une concordance.

Considérons la suite courte suivante

$$\{1\} \longrightarrow \pi_1(X^\infty) \xrightarrow{(\rho^*)_*} \pi_1(X) \xrightarrow{\gamma} Aut(X^\infty) \longrightarrow \{1\}$$

où γ est l'application qui a un lacet simple α associe l'automorphisme de revêtement envoyant un point de base choisi $\tilde{\alpha}(0) \in X^\infty$ au point final du relèvement en ce point $\tilde{\alpha}(1)$. Par normalité du revêtement, γ est bien définie. De plus, par la théorie des revêtements, on sait que $(\rho^*)_*$ est injective, γ surjective et que

$$(\rho^*)_*(\pi_1(X^\infty)) = Ker(\gamma).$$

Autrement dit, on a que la suite courte est exacte. D'une part, l'exactitude implique que γ induit un isomorphisme

$$\hat{\gamma}: \frac{\pi_1(X)}{Ker(\gamma)} \rightarrow Aut(X^\infty).$$

D'autre part, comme

$$[\pi_1(X), \pi_1(X)] \subset Ker(\gamma)$$

par définition de γ , on a que γ induit un épimorphisme

$$\tilde{\gamma}: H_1(X) \rightarrow Aut(X^\infty).$$

Comme chacun de ces groupes est isomorphe à \mathbb{Z} , il doit s'agir d'un isomorphisme. Par conséquent, on a en déduit que

$$[\pi_1(X), \pi_1(X)] = Ker(\gamma)$$

et donc que

$$\pi_1(X^\infty) \cong [\pi_1(X), \pi_1(X)].$$

Proposition 4.3.1. Étant donné un noeud fibré $K \subset S^3$, $\pi_1(X^\infty) \cong \pi_1(S)$, où S dénote une surface de Seifert de genre minimal pour K .

Preuve. En vertu du théorème 3.3.6, on a que $[\pi_1(X), \pi_1(X)] \cong \pi_1(S)$. Enfin, par la discussion précédente, on a que $[\pi_1(X), \pi_1(X)] \cong \pi_1(X^\infty)$. \square

Un fait qui nous sera d'une grande importance pour la suite concerne la possibilité d'étendre la dualité de Poincaré à certains revêtements cycliques infinis.

Théorème 4.3.2. Étant donné un revêtement cyclique infini M^∞ , où M est une variété différentielle compacte à bord de dimension n , si $H_*(M^\infty; \mathbb{Q})$ est finiment engendré en tant qu'espace vectoriel, alors

$$H^{i-1}(M^\infty; \mathbb{Q}) \cong H^{n-i}(M^\infty, \partial M^\infty; \mathbb{Q})$$

pour tout i satisfaisant $1 < i < n$.

On peut trouver une démonstration de ce théorème dans (Milnor, 1968a). Il s'avère que le théorème s'applique toujours à l'extérieur d'un noeud et à l'extérieur d'une concordance.

Lemme 4.3.3. Étant donné une variété différentielle compacte M tel que

$$H_*(M; \mathbb{Q}) = H_*(S^1; \mathbb{Q})$$

alors $H_*(M^\infty; \mathbb{Q})$ est finiment engendré en tant qu'espace vectoriel.

Preuve. Considérons l'anneau des polynômes de Laurent $\mathbb{Q}[t, t^{-1}]$. Il n'est pas difficile de démontrer que ce dernier est principal et intègre, et donc en particulier Noetherien. Si on pose la convention que t correspond à l'isomorphisme induit sur les groupes d'homologie à partir d'un générateur fixé de $\text{Aut}(M^\infty)$, on peut considérer l'action de cet anneau sur le groupe $H_i(M^\infty; \mathbb{Q})$ pour chaque i . On obtient donc les $\mathbb{Q}[t, t^{-1}]$ -modules Noetheriens $H_*(M^\infty; \mathbb{Q})$. Comme ils sont Noetheriens, ils sont en particulier de type fini. Fixons i quelconque. Comme $\mathcal{A} := H_i(M^\infty; \mathbb{Q})$ est de type fini, il existe $a_1, \dots, a_m \in \mathcal{A}$ tels que

$$\mathcal{A} \cong \frac{\mathbb{Q}[t, t^{-1}]}{a_1 \mathbb{Q}[t, t^{-1}]} \oplus \dots \oplus \frac{\mathbb{Q}[t, t^{-1}]}{a_m \mathbb{Q}[t, t^{-1}]}.$$

On dénotera cet isomorphisme comme étant Φ . Rappelons qu'on appelle idéal d'ordre du module l'idéal engendré par l'élément $a_1 \cdots a_m$.

Sous les hypothèses du théorème, Milnor démontre dans (Milnor, 1968a)¹¹ que l'idéal d'ordre du module est non-nul. Remarquons que comme l'idéal d'ordre est non-nul, il faut que chaque a_i soit non-nul. Pour chaque polynôme de Laurent a_j , posons m_j son plus grand exposant et k_j son plus petit. Posons alors e_j l'élément de \mathcal{A} envoyé sur le générateur de $\frac{\mathbb{Q}[t, t^{-1}]}{a_j \mathbb{Q}[t, t^{-1}]}$ sous l'isomorphisme Φ .

On constate alors que

$$\bigcup_{j \in \{1, \dots, m\}} \{t^{k_j}(e_j), t^{k_j+1}(e_j), \dots, t^{m_j}(e_j)\}$$

engendre l'espace vectoriel $H_i(M^\infty; \mathbb{Q})$. Autrement dit, il s'agit bien d'un \mathbb{Q} -espace vectoriel finiment engendré. \square

4.3.2 Anti-symétrie de la relation

En utilisant la dualité de Milnor, un résultat d'algèbre homologique dû à Stallings, le fait que les noeuds fibrés sont résiduellement nilpotents et un corollaire de Waldhausen, Gordon démontre le théorème suivant sur lequel repose la démonstration de l'anti-symétrie de la relation pour les noeuds fibrés. Les détails sont plutôt techniques et se retrouvent avec les références nécessaires dans (Gordon, 1981)¹².

Théorème 4.3.4. Soient $K_0, K_1 \subset S^3$ deux noeuds tels que $K_1 \geq K_0$ dont on dénote respectivement l'extérieur par X_0, X_1 et l'extérieur de la concordance dans $S^3 \times [0, 1]$ par Y . Si K_1 est un noeud fibré et $H_1(X_1^\infty; \mathbb{Q}) \rightarrow H_1(Y^\infty; \mathbb{Q})$ est injective, alors $K_0 = K_1$ et $\pi_1(X_i) \rightarrow \pi_1(Y)$ est un isomorphisme, pour $i = 0, 1$.

Toutefois, la condition sur les groupes d'homologie n'est pas très pratique. On utilisera plutôt le corollaire suivant pour la suite.

11. Voir l'assertion 5 dans l'article de Milnor (Milnor, 1968a).

12. Voir le lemme 3.2 de l'article.

Corollaire 4.3.5. Étant donné deux noeuds K_0 et K_1 tels $K_1 \geq K_0$, alors

$$\dim(H_1(X_1^\infty; \mathbb{Q})) \geq \dim(H_1(X_0^\infty; \mathbb{Q})).$$

De plus, si K_1 est fibré et

$$\dim(H_1(X_1^\infty; \mathbb{Q})) = \dim(H_1(X_0^\infty; \mathbb{Q}))$$

alors $K_0 = K_1$.

Preuve. Supposons d'abord qu'on ait deux noeuds $K_0, K_1 \subset S^3$ satisfaisant $K_1 \geq K_0$. En vertu du théorème 4.2.12, on a que $\pi_1(X_1) \rightarrow \pi_1(Y)$ est surjectif. Comme $H_1(X_1) \rightarrow H_1(Y)$ est un isomorphisme en vertu du lemme 4.2.13, et que $\pi_1(X_1^\infty) \cong [\pi_1(X_1), \pi_1(X_1)]$ et $\pi_1(Y^\infty) \cong [\pi_1(Y), \pi_1(Y)]$, on a que $\pi_1(X_1^\infty) \rightarrow \pi_1(Y^\infty)$ est un épimorphisme¹³. Ainsi, l'application induite sur leur abélianisé, c'est-à-dire, l'application induite $H_1(X_1^\infty) \rightarrow H_1(Y^\infty)$, doit également être surjective. Il en résulte que

$$\dim_{\mathbb{Q}}(H_1(Y^\infty; \mathbb{Q})) \leq \dim_{\mathbb{Q}}(H_1(X_1^\infty; \mathbb{Q})).$$

De plus, comme

$$H_1(\partial Y^\infty; \mathbb{Q}) \cong H_1(X_1^\infty; \mathbb{Q}) \oplus H_1(X_0^\infty; \mathbb{Q})$$

on a que

$$H_1(\partial Y^\infty; \mathbb{Q}) \rightarrow H_1(Y^\infty; \mathbb{Q})$$

est également surjective.

Considérons alors la longue suite exacte d'homologie suivante

13. Il s'agit d'un résultat de théorie des groupes que si l'application induite entre les abélianisés est un isomorphisme, alors l'application entre les groupes est surjective (resp. injective) si et seulement si l'application restreinte aux sous-groupes dérivés l'est. Ce résultat se démontre directement en utilisant la définition d'abélianisé comme quotient d'un groupe par son sous-groupe dérivé.

$$\begin{array}{ccccccc}
\cdots & \longrightarrow & H_2(Y^\infty; \mathbb{Q}) & \longrightarrow & H_2(Y^\infty, \partial Y^\infty; \mathbb{Q}) & \longrightarrow & H_1(\partial Y^\infty; \mathbb{Q}) \\
& & & & & & \swarrow i_* \\
& & & & H_1(Y^\infty; \mathbb{Q}) & \longrightarrow & H_1(Y^\infty, \partial Y^\infty; \mathbb{Q}) \longrightarrow \cdots
\end{array}$$

Par exactitude et comme i_* est surjective, on a $H_1(Y^\infty, \partial Y^\infty; \mathbb{Q}) = \{0\}$. Rappelons qu'en vertu du théorème des coefficients universel en cohomologie, comme \mathbb{Q} est un corps, les groupes de cohomologie sont duaux aux groupes d'homologie. Ainsi, on a que $H^1(Y^\infty, \partial Y^\infty; \mathbb{Q}) = \{0\}$. Par la version relative de la dualité de Milnor ceci implique que $H^2(Y^\infty; \mathbb{Q}) = \{0\}$ et donc que $H_2(Y^\infty; \mathbb{Q}) = \{0\}$. Autrement dit, on a la suite exacte courte d'espaces vectoriels suivant

$$0 \longrightarrow H_2(Y^\infty, \partial Y^\infty; \mathbb{Q}) \longrightarrow H_1(\partial Y^\infty; \mathbb{Q}) \xrightarrow{i_*} H_1(Y^\infty; \mathbb{Q}) \longrightarrow 0$$

On déduit alors du théorème du rang l'égalité suivante

$$\begin{aligned}
\dim_{\mathbb{Q}}(H_1(\partial Y^\infty)) &= \dim_{\mathbb{Q}}(\text{Ker}(i_*)) + \dim_{\mathbb{Q}}(H_1(Y^\infty; \mathbb{Q})) \\
&= \dim_{\mathbb{Q}}(H_2(Y^\infty, \partial Y^\infty; \mathbb{Q})) + \dim_{\mathbb{Q}}(H_1(Y^\infty; \mathbb{Q})) \\
&= 2 \dim_{\mathbb{Q}}(H_1(Y^\infty; \mathbb{Q}))
\end{aligned}$$

où la seconde égalité découle de l'exactitude et la troisième de la version relative de la dualité de Milnor. Enfin, on a que

$$\begin{aligned}
\dim_{\mathbb{Q}}(H_1(X_1^\infty; \mathbb{Q})) &\geq \dim_{\mathbb{Q}}(H_1(Y^\infty; \mathbb{Q})) \\
&= \frac{1}{2} \dim_{\mathbb{Q}}(H_1(\partial Y^\infty; \mathbb{Q})) \\
&= \frac{1}{2} (\dim_{\mathbb{Q}}(H_1(X_1^\infty; \mathbb{Q})) + \dim_{\mathbb{Q}}(H_1(X_0^\infty; \mathbb{Q})))
\end{aligned}$$

ou, encore, que

$$\dim_{\mathbb{Q}}(H_1(X_1^\infty; \mathbb{Q})) \geq \dim_{\mathbb{Q}}(H_1(X_0^\infty; \mathbb{Q})).$$

Supposons de plus que K_1 est fibré et que

$$\dim_{\mathbb{Q}}(H_1(X_0^\infty; \mathbb{Q})) = \dim_{\mathbb{Q}}(H_1(X_1^\infty; \mathbb{Q})).$$

En vertu d'une de ce qui précède, on a que

$$\dim_{\mathbb{Q}}(H_1(X_1^\infty; \mathbb{Q})) = \dim_{\mathbb{Q}}(H_1(Y^\infty; \mathbb{Q})).$$

Ainsi, par le théorème du rang, on doit avoir que $H_1(X_1^\infty; \mathbb{Q}) \rightarrow H_1(Y^\infty; \mathbb{Q})$ est également un monomorphisme. Il résulte donc du théorème 4.3.4 qu'on a l'égalité des noeuds orientés. \square

Il résulte du corollaire 4.3.5 que l'existence d'une concordance ribbon est bien une relation anti-symétrique sur les noeuds fibrés, donc une relation d'ordre partielle pour cette classe.

Théorème 4.3.6. Étant donné deux noeuds fibrés K_0 et K_1 , si

$$K_0 \geq K_1 \text{ et } K_1 \geq K_0$$

alors $K_0 = K_1$.

Preuve. La première partie du corollaire 4.3.5 implique que

$$\dim(H_1(X_1^\infty; \mathbb{Q})) = \dim(H_1(X_0^\infty; \mathbb{Q}))$$

En vertu de la seconde partie, il en résulte que $K_0 = K_1$. \square

Remarquons enfin que si K est un noeud fibré, alors

$$\dim(H_1(X^\infty; \mathbb{Q})) = 2g(K).$$

En effet, par le théorème des coefficients universels en homologie, on a

$$\begin{aligned} H_1(X^\infty; \mathbb{Q}) &\cong H_1(X^\infty) \otimes \mathbb{Q} \\ &\cong \frac{\pi_1(X^\infty)}{[\pi_1(X^\infty), \pi_1(X^\infty)]} \otimes \mathbb{Q} \\ &\cong \mathbb{Z}^{2g(K)} \otimes \mathbb{Q} \\ &\cong \mathbb{Q}^{2g(K)}. \end{aligned}$$

Ainsi, le corollaire 4.3.5 peut donc être reformulé en termes du genre de Seifert des noeuds.

Corollaire 4.3.7. Étant donné deux noeuds fibré K_0 et K_1 tels que $K_1 \geq K_0$, alors $g(K_1) \geq g(K_0)$. De plus, si $g(K_1) = g(K_0)$, alors $K_0 = K_1$.

Autrement dit, on a que l'égalité des genres suffit à établir l'égalité de noeuds fibrés ribbon concordants. Or, dans (Ozsváth et Szabó, 2003) on voit apparaître l'invariant de concordance τ de Ozsváth et Szabó qui satisfait $g_4(K) \geq \tau(K)$ pour tout noeud $K \subset S^3$ et on démontre dans (Livingston, 2004) qu'il est équivalent pour un noeud fibré d'être fortement quasipositif et de satisfaire $\tau(K) = g(K)$. Il résulte donc du corollaire 4.3.7 que le fait d'être fortement quasipositif est une condition suffisante pour qu'un noeud soit minimal sous la relation de concordance ribbon.

Corollaire 4.3.8. Étant donné un noeud fibré fortement quasipositif K_1 et K_0 un second noeud fibré tel que $K_1 \geq K_0$, alors $K_0 = K_1$.

Preuve. Comme $K_1 \geq K_0$, on a que $g(K_1) \geq g(K_0)$ en vertu du corollaire 4.3.7. Or, comme K_1 est fibré et fortement quasipositif, $\tau(K_1) = g(K_1)$. Enfin, comme K_1 est en particulier concordant à K_0 , on a que

$$g(K_0) \geq \tau(K_0) = \tau(K_1) = g(K_1).$$

Il en résulte que $K_0 = K_1$. □

Remarque 4.3.9. Notons que les preuves faites ci-haut et que la preuve du théorème 4.3.4 faite dans l'article de Gordon tiennent également pour la notion de concordance homotopiquement ribbon entre noeuds de S^3 , ou même plus généralement pour la notion de concordance homotopiquement ribbon.

4.4 Autour de l'article de Baker

Dans l'article (Baker, 2016), Baker fait suite à un commentaire de l'article de Miyazaki (Miyazaki, 1994) et utilise la résolution de la géométrisation de Thurston

pour donner une réciproque partielle à l'exemple 4.1.6 pour la classe restreinte des noeuds fibrés fortement quasipositifs. Cette réciproque à comme conséquence plus ou moins directe d'établir un lien entre la conjecture slice-ribbon et la conjecture de Lee Rudolph. Dans cette section, nous rappellerons donc brièvement ce qu'est la conjecture de géométrisation de Thurston et démontrerons comment cette dernière permet de conclure que la conjecture de Poincaré est vraie¹⁴. Ensuite, nous exposerons les résultats de Miyazaki donnant une réciproque partielle à l'exemple 4.1.6 dans le cadre plus général des noeuds homotopiquement ribbon, puis discuterons des conséquences déduites par Baker sur la conjecture slice-ribbon en conjonction avec celles déduites par Tetsuya Abe et Keiji Tagami (Abe et Tagami, 2015) sur la conjecture de Lee Rudolph.

Rappelons qu'il y a huit 3-variétés modèles en géométrie de dimension 3 dont S^3 est l'unique qui est compacte. Rappelons également qu'une 3-variété M est dite *première* si toute 2-sphère plongée séparant M en deux composantes connexes ne borde pas de 3-boule. Enfin, rappelons qu'une surface S qui est compacte, sans bord et plongée dans une 3 variété M est dite *incompressible* si l'application

$$\pi_1(S) \rightarrow \pi_1(M)$$

induite par inclusion est un monomorphisme.

La conjecture de géométrisation de Thurston qui a été démontrée par Perelman dans une série d'articles entre 2002 et 2003 s'énonce comme suit.

Conjecture 4.4.1 (de géométrisation de Thurston). Étant donné une 3-variété différentielle première, compacte, sans bord et orientable, il existe une famille de tores et de bouteilles de Klein deux à deux disjoints et incompressibles telle que chacune des composantes du complément peut-être munie d'une structure

14. La brève discussion est basé sur l'article (Morgan, 2005).

riemmanienne de volume fini et localement isométrique à l'un des huit modèles de géométrie¹⁵.

Il n'est pas évident à priori que ce résultat implique la conjecture de Poincaré qui est de nature topologique plutôt que géométrique. Rappelons qu'on appelle *3-sphère homotopique* une 3-variété différentielle compacte, sans bord et simplement connexe.

Conjecture 4.4.2 (de Poincaré). L'unique 3-sphère homotopique est la 3-sphère.

D'une part, une 3-sphère homotopique n'est pas a priori une variété première. C'est grâce au théorème d'existence et d'unicité d'une décomposition en variétés premières que l'on peut ramener la conjecture de Poincaré en un énoncé sur les 3-sphères homotopiques premières.

Théorème 4.4.3 (Kneser). Toute 3-variété différentielle compacte, sans bord et orientable se décompose en la somme connexe de 3-variétés premières. De plus, cette décomposition est unique à permutation et difféomorphisme près des facteurs.

En effet, si on a une 3-sphère homotopique qui n'est pas première et qui n'est pas une 3-sphère, par le théorème de Van-Kampen, on peut conclure qu'elle se décompose en 3-sphères homotopiques premières dont au moins une n'est pas une 3-sphère et réciproquement¹⁶. Afin de démontrer la conjecture de Poincaré, il suffit donc de démontrer que toute 3-sphère homotopique première est une 3-sphère.

15. En fait, un des 8 modèles est le revêtement universel de la variété.

16. On utilise implicitement le fait que la somme connexe de 3-sphères est une 3-sphère et qu'une 3-sphère est une variété première.

Preuve (Poincaré découle de la géométrisation). Soit M une 3-sphère homotopique première. En vertu de la conjecture de géométrisation, on a que cette dernière se décompose en composantes bordant chacune soit un tore ou une bouteille de Klein incompressible et admettant une structure riemannienne de volume fini et localement isométrique à l'un des 8 modèles. Comme $\pi_1(M) = \{1\}$ par hypothèse, il en résulte qu'il ne peut exister de tore ou de bouteille de Klein incompressible. Ainsi, M admet l'un des 8 modèles comme revêtement universel, mais puisque $\pi_1(M) = \{1\}$, M doit lui être isométrique¹⁷. Comme M est compacte par hypothèse et que S^3 est l'unique modèle compact, il en résulte en particulier que M est difféomorphe à S^3 . \square

Remarque 4.4.4. Il s'avère qu'une seconde conséquence du théorème de géométrisation de Thurston est que le groupe fondamental des 3-variétés différentielles est résiduellement fini. Nous n'élaborerons pas sur ce point qui sort du cadre de ce mémoire, mais utiliserons tout de même ce fait par la suite.

Dans un autre ordre d'idées, Miyazaki démontre dans l'article (Miyazaki, 1994) le résultat suivant.

Théorème 4.4.5. Soient K_0 et K_1 deux noeuds fibrés de S^3 . Si chacun est minimal dans sa chaîne de concordance homotopiquement ribbon parmi les noeuds fibrés se trouvant dans des 3-sphères homologues et, s'ils satisfont $K_0 \# K_1 \geq 0$, alors $K_0 = -K_1$.

Définition 4.4.6. On dit que T est un corps de compression s'il s'agit d'une 3-variété différentielle compacte telle que $\partial T = \partial_e T \sqcup \partial_i T$, où $(T; \partial_e T, \partial_i T)$ est un cobordisme admettant une décomposition avec des 2-anses et des 3-anses et tel que $\partial_i T$ n'admette pas de composante difféomorphe à une 2-sphère.

17. C'est par l'unicité du revêtement universel.

Remarque 4.4.7. Pour construire un corps de compression lisse, il suffit d'arrondir les coins en utilisant la procédure de Milnor discutée à la suite de la définition 2.2.25.

Dans sa démonstration du résultat, Miyazaki n'a besoin de la minimalité des noeuds dans leur chaîne de concordance homotopiquement ribbon que pour établir que leur monodromie ne s'étend pas à un corps de compression d'un type particulier. Plus précisément, il démontre le lemme suivant et n'a besoin de la condition de minimalité que pour pouvoir appliquer la contraposée.

Lemme 4.4.8. Soit $K \subset M$ un noeud fibré, où M est une 3-sphère homologique. Posons $f: F \rightarrow F$ la monodromie du noeud K . Si f s'étend en un difféomorphisme $\tilde{f}: T \rightarrow T$, où T est un corps de compression tel que $\partial_i T$ est connexe, $\partial_e T = F$ et $\tilde{f}|_{\partial F \times I} = Id$, alors il existe une 3-sphère homologique M' et un noeud fibré $K' \subset M'$ de monodromie $\tilde{f}|_{\partial_i T}$ et tel que $(M, K) \geq (M', K')$.

Il démontre également que dans le cas où M est simplement connexe, M' l'est également, et ce en utilisant le fait que le groupe fondamental des 3-variétés est résiduellement fini¹⁸. En vertu de la résolution de la conjecture de Poincaré en dimension 3, il en résulte donc que si $M = S^3$, alors $M' = S^3$. On peut donc changer la condition d'être minimal parmi les noeuds fibrés se trouvant dans des 3-sphères homologiques par la condition d'être minimal parmi les noeuds fibrés se trouvant dans des 3-sphères. Autrement dit, en utilisant le corollaire 4.3.8 démontré par Baker, il suffit de supposer que les noeuds de S^3 sont fibrés et fortement quasipositifs.

Corollaire 4.4.9. Un noeud fibré fortement quasipositif est unique dans sa chaîne de noeuds fibrés fortement quasipositifs ribbon concordants.

18. L'argument fait ici ressemble beaucoup à celui fait dans la démonstration du théorème 4.2.12.

Preuve. En effet, si on a deux noeuds fibrés et fortement quasipositifs $K_0, K_1 \subset S^3$ tels que K_1 soit ribbon concordant à K_0 , c'est-à-dire tels que $K_1 \geq K_0$, alors on a que $K_1\# - K_0 \geq 0$ en vertu du corollaire 4.2.10 et donc que $K_1\# - K_0$ est ribbon. En particulier, on a que $K_1\# - K_0$ est un noeud de S^3 homotopiquement ribbon concordant au noeud trivial et on peut conclure par le théorème 4.4.5. \square

Remarque 4.4.10. En fait, on pourrait changer *ribbon concordants* pour *homotopiquement ribbon concordant* dans l'énoncé ci-haut.

Notons qu'en particulier le corollaire 4.4.9 donne la réciproque partielle à l'exemple 4.1.6 mentionnée plus haut. D'autre part, dans son article (Baker, 2016), Baker pose la conjecture suivante.

Conjecture 4.4.11. Un noeud fibré fortement quasipositif est unique dans sa classe de concordance restreinte aux noeuds fibrés fortement quasipositifs.

On constate alors que si la conjecture slice-ribbon est vraie, alors la conjecture 4.4.11 l'est. Ainsi, un contre-exemple à la conjecture de Baker nous permettrait de contre-dire la conjecture slice-ribbon.

De plus, si la conjecture 4.4.11 est vraie (et donc si la conjecture slice-ribbon l'est), on peut démontrer la conjecture suivante due à Abe et Tagami (Abe et Tagami, 2015).

Conjecture 4.4.12. Étant donné K_0, \dots, K_n des noeuds distincts, premiers, fibrés et fortement quasipositifs, si

$$c_1[K_1]\# \cdots \# c_n[K_n] = 0$$

alors

$$c_1 = \cdots = c_n = 0.$$

Preuve. Soient $K_0, \dots, K_n \subset S^3$ des noeuds distincts, fibrés, fortement quasipositifs et premiers. Considérons un noeud ribbon obtenu par combinaison linéaire de ces noeuds, c'est-à-dire, supposons qu'on ait

$$c_1[K_1] \# \dots \# c_n[K_n] = 0$$

pour des entiers relatifs c_1, \dots, c_n .

D'une part, si tout les c_i sont positifs, il s'agit d'une somme connexe de noeuds fibrés fortement quasipositifs. Comme la somme connexe de noeuds fibrés fortement quasipositifs est un noeud fibré fortement quasipositif, on doit avoir l'égalité

$$c_1 K_1 \# \dots \# c_n K_n = 0$$

en vertu de la conjecture 4.4.11, puisque le noeud trivial l'est également. Par unicité de la décomposition en facteurs premiers, on a bien le résultat dans ce cas. Dans le cas où tous les c_i sont négatifs, on procède similairement.

Supposons finalement qu'on ait, quitte à les renuméroter, c_1, \dots, c_l entiers positifs et c_{l+1}, \dots, c_n entiers négatifs. On a alors la relation suivante

$$c_1[K_1] \# \dots \# c_l[K_l] = (-c_{l+1})[K_{l+1}] \# \dots \# (-c_n)[K_n]$$

où le noeud de droite est fibré et fortement quasipositif et le noeud de gauche est en particulier fibré. On applique alors la conjecture 4.4.11 une fois de plus pour avoir l'égalité des noeuds et on conclut par unicité de la décomposition en noeuds premiers. \square

Ainsi, comme les noeuds algébriques sont des noeuds premiers, fibrés et fortement quasipositifs, un contre-exemple à la conjecture 4.2.7 nous donne un contre-exemple à la conjecture 4.1.10.

Théorème 4.4.13. Si la conjecture slice-ribbon est vrai, alors la conjecture de Lee Rudolph l'est.

CONCLUSION

Suite à la publication d'un article de Jean Martinet dans lequel il démontre que toute 3-variété différentielle orientable et fermée admet une *structure de contact*, une nouvelle branche de la topologie différentielle, la topologie de contact, s'est grandement développée. Entre autres, on a établi la dichotomie des structures de contacts sur les 3-variétés entre *structures de contacts vrillées* et les *structures de contact tendues*. Les premières étant générique contrairement au seconde, une attention particulière a été porté sur les structures de contact tendues. On dit qu'un noeud fibré *supporte une structure de contact tendue* si l'extérieur du noeud peut-être muni d'une structure de contact tendue qui induit une orientation cohérente (dans un sens bien précis) au fibré et à ses fibres. Or, en vertu d'un résultat de Matthew Hedden (Hedden, 2010), l'ensemble des noeuds fibrés fortement quasi-positifs coïncide avec l'ensemble des noeuds fibrés supportant une structure de contact tendue. On peut alors reformuler les résultats présentés au chapitre 4 en ces termes.

À l'instar d'une structure différentielle, l'existence d'une structure de contact implique l'existence d'un voisinage avec davantage de structure et donc, dans sa rigidité accrue, les rend plus facile à manipuler. L'avènement de la topologie de contact a entre autres permis la démonstration du théorème de Cerf. Il serait donc intéressant de suivre de plus près à la théorie des noeuds dans ce contexte.

Dans un autre ordre d'idées, toujours en suivant le mouvement initié par Baker, Tetsuya Abe et Keiji Tagami démontrent de surcroît dans leur article (Abe et Tagami, 2015) que seulement une parmi la conjecture slice-ribbon et la conjecture

d'Akbulut-Kirby revisitée peut-être vraie.

Conjecture 4.4.14 (Akbulut-Kirby revisitée). Étant donné K_0 et K_1 deux noeuds de S^3 , si $S^3 \setminus N(K_0) \sqcup_{h_0} D^2 \times S^1$ et $S^3 \setminus N(K_1) \sqcup_{h_1} D^2 \times S^1$ sont difféomorphes, alors K_0 et K_1 sont concordants à orientation près, avec $h_i: \partial N(K_i) \rightarrow \partial D^2 \times S^1$ le difféomorphisme envoyant un méridien sur une longitude canonique et réciproquement.

Malheureusement, dans un article paru peu de temps après, Kouichi Yasui démontre que cette conjecture est fautive. Bien que ce programme n'ait pas permis la résolution de la conjecture slice-ribbon, il marque toutefois un intérêt nouveau pour la conjecture slice-ribbon, la découverte de nouveaux liens, et laisse présager davantage de résultats en ce sens pour les années à venir.

RÉFÉRENCES

- Abe, T. et Tagami, K. (2015). Fibered knots with the same 0-surgery and the slice-ribbon conjecture. *Mathematical Research Letters*, 23(2). <http://dx.doi.org/10.4310/MRL.2016.v23.n2.a1>
- Abe, T. et Tange, M. (2016). A construction of slice knots via annulus twists. *Michigan Mathematical Journal*, 65(3). <http://dx.doi.org/10.1307/mmj/1472066149>
- Baker, K.-L. (2016). A note on the concordance of fibered knots. *Journal of Topology*, 9(1), 1–4. <http://dx.doi.org/10.1112/jtopol/jtv024>
- Burde, G. et Zieschang, H. (2013). *Knots*. Berlin, Germany : Walter de Gruyter.
- Campbell, R.-I. (1989). Residually finite groups. [document électronique]. Récupéré le 28 août 2017 de http://www.math.umbc.edu/~campbell/CombGpThy/RF_Thesis/index.html
- Casson, A.-J. et Gordon, C.-M. (1983). A loop theorem for duality spaces and fibred ribbon knots. *Inventiones mathematicae*, 74(1), 119–138. <http://dx.doi.org/10.1007/BF01388533>
- Cha, J.-C. et Powell, M. (2016). Casson towers and slice links. *Inventiones mathematicae*, 205(2), 413–457. <http://dx.doi.org/10.1007/s00222-015-0639-z>
- Conway, J.-B. (1978). *Functions of one complex variable I*. New York, NY : Springer-Verlag New York.
- Cromwell, P. R. (2004). *Knots and links*. Cambridge, Royaume-Uni : Cambridge University Press.
- Eliashberg, Y. (1992). Contact 3-manifolds twenty years since j. martinet’s work. *Annales de l’institut Fourier*, 42(1–2), 165–192.
- Fox, R.-H. (1961). *Quick trip through knot theory. Topology of 3-manifolds and related topics*. Englewood Cliffs, NJ : Prentice Hall.
- Geiges, H. (2008). *An introduction to contact topology*. New York, NY : Cambridge University Press.

- Gerstenhaber, M. et Rothaus, O.-S. (1962). The solution of sets of equations in groups. [document électronique]. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 48(9), 1531–1533. Récupéré le 13 août 2017 de https://www.jstor.org/stable/71389?seq=1#page_scan_tab_contents
- Gompf, R.-E., Scharlemann, M. et Thompson, A. (2010). Fibered knots and potential counterexamples to the property $2r$ and slice-ribbon conjectures. *Geometry & Topology*, 14(4), 2305–2347. <http://dx.doi.org/10.2140/gt.2010.14.2305>
- Gompf, R.-E. et Stipsicz, A.-I. (1999). *4-manifolds and Kirby calculus*. Providence, RI : American Mathematical Society.
- Gordon, C.-M. (1981). Ribbon concordance of knots in the 3-sphere. *Mathematische Annalen*, 257(1), 157–170. <http://dx.doi.org/10.1007/BF01458281>
- Hass, J. (1983). The geometry of the slice-ribbon problem. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 94(1), 101–108. <http://dx.doi.org/10.1017/S030500410006093X>
- Hatcher, A. (2000). Notes on basic 3-manifold topology. [document électronique]. Récupéré le 21 août 2017 de <https://www.math.cornell.edu/~hatcher/3M/3M.pdf>
- Hatcher, A. ([s.d]). *Algebraic topology*. « s. l. : n. é. ».
- Hedden, M. (2010). Notions of positivity and the ozsváth-szabó concordance invariant. *Journal of Knot Theory and its Ramifications*, 19(5). <http://dx.doi.org/10.1142/S0218216510008017>
- Hempel, J. (1972). Residual finiteness of surface groups. [document électronique]. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 32(1), 323. Récupéré le 21 août 2017 de <http://www.ams.org/journals/proc/1972-032-01/S0002-9939-1972-0295352-2/S0002-9939-1972-0295352-2.pdf>
- Hempel, J. (1987). Residual finiteness for 3-manifolds. Dans *Combinatorial group theory and topology*. Princeton, NJ : Princeton University Press.
- Hempel, J. (2004). *3-manifolds*. Providence, RI : American Mathematical Society.
- Hirsch, M.-W. (1976). *Differential topology*. New York, NY : Springer-Verlag New York.
- Jaco, W.-H. et Shalen, P.-B. (1979). *Seifert fibered spaces in 3-manifolds*. Provi-

- dence, RI : American Mathematical Society.
- Johannson, K. (1979). *Homotopy equivalences of 3-manifolds with boundaries*. New York, NY : Springer-Verlag New York, Inc.
- Kosinski, A.-A. (1993). *Differential manifolds*. San Diego, CA : Academic Press Inc.
- Lang, S. (1985). *Differential manifolds*. New York, NY : Springer-Verlag New York, Inc.
- Litherland, R.-A. (1979). Signatures of iterated torus knots. Dans *Topology of Low-Dimensional Manifolds : Proceedings of the Second Sussex Conference*. Acte du colloque, University of Sussex, Angleterre, 8-11 juillet 1977 (p.71-84). Récupéré le 21 août 2017 de <http://www.maths.ed.ac.uk/~aar/papers/litherland.pdf>
- Livingston, C. (2004). Computations of the ozsváth–szabó knot concordance invariant. *Geometry & Topology*, 8(2), 735–742. <http://dx.doi.org/10.2140/gt.2004.8.735>
- Luecke, J. et Gordon, C.-M. (1989). Knots are determined by their complements. *Journal of the American Mathematical Society*, 2(2), 371–415. <http://dx.doi.org/10.1090/S0894-0347-1989-0965210-7>
- Milnor, J.-W. (1959). Differentiable manifolds which are homotopy spheres. [document électronique]. *Collected papers of John Milnor, III. Differential topology*, 65–88. Récupéré le 13 août 2017 de <http://faculty.tcu.edu/gfriedman/notes/milnor1.pdf>
- Milnor, J.-W. (1965). *Lectures on the h-cobordism theorem*. Princeton, NJ : Princeton University Press.
- Milnor, J.-W. (1968a). Infinite cyclic coverings. *Conference on the Topology of Manifolds*, 13, 115–133. Récupéré le 13 août 2017 de <http://www.maths.ed.ac.uk/~aar/papers/milncycl.pdf>
- Milnor, J.-W. (1968b). *Morse theory*. Princeton, NJ : Princeton university press.
- Milnor, J.-W. (1968c). *Singular points of complex hypersurfaces*. Princeton, NJ : Princeton University Press.
- Milnor, J.-W. (1997). *Topology from the differentiable viewpoint*. Princeton, NJ : Princeton University Press.
- Miyazaki, K. (1994). Nonsimple, ribbon fibered knots. *Transactions of the American Mathematical Society*, 341(1), 1–44. <http://dx.doi.org/10.1090/>

S0002-9947-1994-1176509-4

- Morgan, J. (2005). Recent progress on the Poincaré conjecture and the classification of 3-manifolds. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 42(1), 57–78. <http://dx.doi.org/10.1090/S0273-0979-04-01045-6>
- Munkres, J. (1960a). Differentiable isotopies on the 2-sphere. *The Michigan Mathematical Journal*, 7(3), 193–197. <http://dx.doi.org/10.1307/mmj/1028998426>
- Munkres, J. (1960b). Obstructions to the smoothing of piecewise-differentiable homeomorphisms. *Annals of Mathematics*, 72(3), 521–554. <http://dx.doi.org/10.2307/1970228>
- Ozsváth, P. et Szabó, Z. (2003). Knot Floer homology and the four-ball genus. *Geometry & Topology*, 7(2), 615–639. <http://dx.doi.org/10.2140/gt.2003.7.615>
- Rolfsen, D. (2003). *Knots and links*. Providence, RI : American Mathematical Society.
- Rudolph, L. (1983). Algebraic functions and closed braids. *Topology*, 22(2), 191–202. [http://dx.doi.org/10.1016/0040-9383\(83\)90031-9](http://dx.doi.org/10.1016/0040-9383(83)90031-9)
- Rudolph, L. (1989). Quasipositivity and new knot invariants. [document électronique]. *Revista Matemática de la Universidad Complutense de Madrid*, 2(1), 85–109. Récupéré le 13 août 2017 de <https://eudml.org/doc/43291>
- Spivak, M. (1965). *Calculus on manifolds : a modern approach to classical theorems of advanced calculus*. Boulder, CO : Westview Press.
- Spivak, M. (1999). *A comprehensive introduction to differential geometry*. Houston, TEX : Publish or Perish, Inc.
- Thom, R. (1954). Quelques propriétés globales des variétés différentiables. [document électronique]. *Commentarii Mathematici Helvetici*, 28(1), 17–86. Récupéré le 13 août 2017 de <https://eudml.org/doc/139072>
- Trang, L.-D. (1972). Sur les noeuds algébriques. [document électronique]. *Composition mathematica*, 25(3), 281–321. Récupéré le 13 août 2017 de http://www.numdam.org/item/CM_1972__25_3_281_0
- Waldhausen, F. (1968). On irreducible 3-manifolds which are sufficiently large. [document électronique]. *Annals of Mathematics*, 87(1), 56–88. <http://dx.doi.org/10.2307/1970594>