

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL

LES BANDES RÉGULIÈRES À GAUCHE ET LEURS ALGÈBRES

MÉMOIRE

PRÉSENTÉ

COMME EXIGENCE PARTIELLE

DE LA MAÎTRISE EN MATHÉMATIQUES

PAR

HERMAN GOULET-OUELLET

AOÛT 2018

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL  
Service des bibliothèques

Avertissement

La diffusion de ce mémoire se fait dans le respect des droits de son auteur, qui a signé le formulaire *Autorisation de reproduire et de diffuser un travail de recherche de cycles supérieurs* (SDU-522 – Rév.10-2015). Cette autorisation stipule que «conformément à l'article 11 du Règlement no 8 des études de cycles supérieurs, [l'auteur] concède à l'Université du Québec à Montréal une licence non exclusive d'utilisation et de publication de la totalité ou d'une partie importante de [son] travail de recherche pour des fins pédagogiques et non commerciales. Plus précisément, [l'auteur] autorise l'Université du Québec à Montréal à reproduire, diffuser, prêter, distribuer ou vendre des copies de [son] travail de recherche à des fins non commerciales sur quelque support que ce soit, y compris l'Internet. Cette licence et cette autorisation n'entraînent pas une renonciation de [la] part [de l'auteur] à [ses] droits moraux ni à [ses] droits de propriété intellectuelle. Sauf entente contraire, [l'auteur] conserve la liberté de diffuser et de commercialiser ou non ce travail dont [il] possède un exemplaire.»



## REMERCIEMENTS

Mes premiers remerciements vont à mon directeur, Franco Saliola. Ta joie de vivre, ton écoute et tes grandes qualités de pédagogue ont fait de cette maîtrise une expérience plaisante et enrichissante.

Merci à mes deux parents, Joanne et Louis-Marie. Votre soutien inconditionnel et votre confiance éclairée sont des perles que je chéris depuis longtemps. Merci Joanne pour ton enthousiasme pétillant et pour les bons petits repas. Merci Louis-Marie pour toutes ces discussions philosophiques et pour ces matchs de badminton que j'ai perdus plus souvent qu'à mon tour. Vous êtes de formidables parents, et je n'en voudrais pas d'autres.

Un merci tout spécial à mes deux coloc, Ghyslain (l'officiel) et Charlie (l'officieux). Vous avez été, pour deux années, les bêtes féroces de mon bonheur domestique. Puissent vos crinières continuer de flotter dans la douce brise de vos folles envolées !

Je tiens aussi à remercier tous les gens qui font du LaCIM un laboratoire unique en son genre, où il fait bon faire des mathématiques. Son climat inclusif et convivial est une chose rare et précieuse. J'y ai rencontré des personnes d'une grande intelligence et sensibilité, et j'y ai noué de belles complicités qui, j'espère, ne disparaîtront pas trop vite. Merci, en particulier, aux collègues qui ont partagé mon quotidien : Pauline, Mélodie, Nadia, Émile, Nancy, Stéphanie, Florence, Nathan, Benjamin, Antoine, Aram, Véronique, Guillaume, Carole. . . J'en oublie sûrement, et je m'en excuse ! Mention spéciale à Ghyslain, Nancy et Florence qui ont eu la gentillesse de relire et commenter certaines sections de mon mémoire.



## TABLE DES MATIÈRES

LISTE DES FIGURES . . . . .	ix
RÉSUMÉ . . . . .	xi
INTRODUCTION . . . . .	1
CHAPITRE I	
STRUCTURE DE SEMI-GROUPE . . . . .	5
1.1 Notions préliminaires sur les semi-groupes . . . . .	5
1.1.1 Semigroupes, monoïdes, congruences et morphismes . . . . .	5
1.1.2 Relations de Green . . . . .	8
1.1.3 Idempotents, sous-groupes maximaux et monoïdes locaux . . . . .	10
1.1.4 Catégorie des semi-groupes et principe de dualité . . . . .	11
1.1.5 Pseudo-variétés de semi-groupes . . . . .	13
1.2 Les relations de Green dans les bandes régulières à gauche . . . . .	14
1.2.1 Définition des bandes régulières à gauche et à droite . . . . .	15
1.2.2 La relation $\mathcal{R}$ . . . . .	15
1.2.3 La relation $\mathcal{L}$ . . . . .	17
1.2.4 Les relations $\mathcal{D}$ et $\mathcal{J}$ . . . . .	18
1.2.5 Représentations régulières . . . . .	21
1.3 Support des bandes régulières à gauche . . . . .	22
1.3.1 Définition du support . . . . .	23
1.3.2 Propriété universelle et functorialité . . . . .	24
1.3.3 Restriction et contraction . . . . .	26
1.3.4 Chambres . . . . .	28
1.4 Bandes régulières à gauche libres . . . . .	30
1.4.1 Semi-groupes et monoïdes libres . . . . .	30

1.4.2	Construction des bandes régulières à gauche libres . . . . .	32
1.4.3	Relation $\mathcal{R}$ . . . . .	36
1.4.4	Structure récursive . . . . .	37
1.4.5	Support . . . . .	39
1.4.6	Présentations par générateurs et relations . . . . .	40
1.4.7	Bandes régulières à gauche libres partiellement commutatives	41
1.5	Arrangements d'hyperplans . . . . .	45
1.5.1	Définitions et propriétés élémentaires . . . . .	46
1.5.2	Bande régulière à gauche des faces . . . . .	47
1.5.3	Support . . . . .	51
1.5.4	Arrangement booléen . . . . .	53
1.5.5	Arrangements graphiques et arrangements de tresses . . . . .	54
CHAPITRE II		
REPRÉSENTATIONS . . . . .		57
2.1	Notions préliminaires sur les représentations des semi-groupes . . . . .	57
2.1.1	Représentations et algèbres des semi-groupes . . . . .	58
2.1.2	Correspondance entre les idéaux et les congruences . . . . .	60
2.1.3	Radical de Rhodes . . . . .	62
2.2	Représentations des bandes régulières à gauche finies . . . . .	63
2.2.1	Radical de Rhodes . . . . .	64
2.2.2	Semi-simplicité des algèbres de semi-treillis . . . . .	65
2.2.3	Radical de Jacobson et représentations irréductibles . . . . .	68
2.2.4	Familles eulériennes et sections homogènes . . . . .	69
2.2.5	Diagonalisation de l'action à gauche sur les chambres . . . . .	80
CHAPITRE III		
PROPRIÉTÉS HOMOLOGIQUES . . . . .		85
3.1	Notions préliminaires d'algèbre homologique . . . . .	85
3.1.1	Complexes et homologie . . . . .	85

3.1.2	Objets projectifs et injectifs . . . . .	90
3.1.3	Résolutions projectives et foncteur Ext . . . . .	91
3.2	Propriétés homologiques des arrangements d'hyperplans . . . . .	94
3.2.1	Orientations et fonctions d'incidence . . . . .	94
3.2.2	Le complexe de Brown-Diaconis . . . . .	97
3.2.3	Résolution projective des modules simples . . . . .	99
	CONCLUSION . . . . .	103
	ANNEXE A	
	ZONOTOPES POLAIRES . . . . .	107
A.1	Polytopes et zonotopes . . . . .	107
A.2	Zonotope polaire d'un arrangement d'hyperplans . . . . .	108
A.3	Bijection entre les faces d'un arrangement et de son zonotope polaire	109
A.4	Exemples . . . . .	112
	ANNEXE B	
	ALGÈBRES ASSOCIATIVES NON-UNITAIRES . . . . .	115
B.1	Définitions . . . . .	115
B.2	Algèbres unitaires et extension de Dorroh . . . . .	117
B.3	Soçle, radical et semi-simplicité . . . . .	118
B.4	Radical de Jacobson . . . . .	124
B.5	Éléments idempotents . . . . .	127
	ANNEXE C	
	CARACTÉRISATION DES MORPHISMES NILPOTENTS . . . . .	131
C.1	Semi-groupes simples et groupes locaux . . . . .	131
C.2	Énoncé et preuve du résultat principal . . . . .	133
C.3	Exemples . . . . .	136
	RÉFÉRENCES . . . . .	139



## LISTE DES FIGURES

Figure	Page
1.1 Inclusions entre les relations de Green d'un semi-groupe. . . . .	10
1.2 Inclusions entre les relations de Green d'une bande régulière à gauche.	21
1.3 Illustration de la structure récursive de $B_3^1$ . . . . .	37
1.4 Les relations de Green dans la bande régulière à gauche libre $B_3$ . .	39
1.5 La relation $\leq_{\mathcal{R}}$ dans le semi-groupe des faces de l'arrangement booléen $\mathcal{B}_2$ et de son support. . . . .	53
1.6 Essentialisation de l'arrangement de tresses $\mathcal{T}_4$ . . . . .	55
1.7 Bijection entre les faces de l'arrangement de tresses $\mathcal{T}_3$ et les partitions ordonnées de $\{1, 2, 3\}$ . . . . .	56
3.1 Les notions de modules projectifs et injectifs. . . . .	90
A.1 L'arrangement booléen $\mathcal{B}_3$ et son zonotope polaire. . . . .	112
C.1 Relations entre les idempotents $e_{a,b}, e_a, e_b$ dans la preuve de la proposition 2.7. . . . .	136



## RÉSUMÉ

Ce mémoire vise à donner une vue d'ensemble de la théorie des bandes régulières à gauche dans son état actuel. On y étudie les bandes régulières à gauche à partir de trois points de vue différents : la théorie des semi-groupes, la théorie de la représentation et l'algèbre homologique.

Afin d'élucider la structure de semi-groupe des bandes régulières à gauche, on introduit les relations de Green et on étudie comment les axiomes des bandes régulières à gauche déterminent la forme de ces relations, et vice-versa. On en déduit plusieurs constructions importantes, dont notamment celle du support. On étudie aussi plus spécifiquement certaines familles de bandes régulières à gauche : les bandes régulières à gauche libres, ainsi que les bandes régulières à gauche associées aux arrangements d'hyperplans.

L'étude des représentations des bandes régulières à gauche passe par l'interaction entre leurs congruences et les idéaux de leurs algèbres. On démontre au chapitre 2 que leur radical de Jacobson est complètement déterminé par la relation de Green  $\mathcal{L}$ , puis on utilise ce résultat pour déterminer leurs représentations irréductibles. On présente aussi une méthode pour construire des familles complètes d'idempotents orthogonaux dans les algèbres de bandes régulières à gauche, ce qui nous permet de décrire leurs modules projectifs indécomposables. On applique ces résultats pour calculer les valeurs propres de certains opérateurs sur leurs algèbres.

Le dernier chapitre présente quelques propriétés homologiques des bandes régulières à gauche, en se restreignant au cas particulier des arrangements d'hyperplans. On y construit une résolution projective des modules simples, qu'on utilise pour calculer le foncteur Ext.

**Mots-clés :** Bandes régulières à gauche, arrangements d'hyperplans, théorie des semi-groupes, théorie de la représentation, algèbre homologique, algèbre non-commutative, combinatoire.



## INTRODUCTION

Les axiomes qui définissent les bandes régulières à gauche apparaissent dans la littérature aussi tôt qu'en 1940, dans un article du mathématicien allemand Fritz Klein-Barmen (Klein-Barmen, 1940). Ces axiomes font alors partie intégrante d'un effort de classification des treillis gauches (maintenant appelés *bandes*), et sont repris par le français Marcel-Paul Schützenberger dans l'article (Schützenberger, 1947), où on voit aussi apparaître une ébauche des relations de Green (qui n'avaient pas encore été découvertes).

À l'aube des années 2000, les bandes régulières à gauche font une apparition étonnante en théorie des probabilités et en géométrie. Les mathématiciens américains Bidigare, Hanlon et Rockmore publient, dans l'article (Bidigare *et al.*, 1999), des formules combinatoires pour certaines chaînes de Markov liées aux arrangements d'hyperplans. Dans la même période, Brown et Diaconis (Brown et Diaconis, 1998) approfondissent ces résultats, notamment grâce à des outils d'algèbre homologique. Plusieurs de leurs démonstrations font intervenir la structure de semi-groupe des faces des arrangements d'hyperplans. Brown poursuit ces idées et développe, quelques années plus tard, des nouvelles preuves de ces résultats, à saveur davantage algébrique. Cette approche, qui rappelle les travaux de (Garsia et Reutenauer, 1989) et (Bergeron *et al.*, 1992) sur les algèbres de descentes des groupes de Coxeter, permet de généraliser les formules de (Bidigare *et al.*, 1999) au contexte plus large des bandes régulières à gauche.

Depuis, les bandes régulières à gauche ont fait l'objet d'une attention importante ; on peut déposer, comme pièces à conviction, les articles suivants qui s'intéressent

de près ou de loin aux bandes régulières à gauche : (Margolis *et al.*, 2015b), (Almeida *et al.*, 2009), (Ganyushkin *et al.*, 2009), (Ayyers *et al.*, 2015). En particulier, un travail colossal a été fait, non seulement pour généraliser le plus possible les résultats concernant les bandes régulières à gauche, mais aussi pour situer ces résultats dans le contexte plus large des théories qui les nourrissent, soit la théorie des semi-groupes, la théorie de la représentation et l'algèbre homologique.

L'objectif de ce mémoire est de présenter la théorie des bandes régulières à gauche dans son état actuel. Il est organisé en trois chapitres, où on examine les bandes régulières à gauche à partir de trois points de vue différents : la théorie des semi-groupes, la théorie de la représentation et l'algèbre homologique. Chaque chapitre débute par une introduction à la théorie correspondante.

Le premier chapitre étudie la structure de semi-groupe des bandes régulières à gauche. En particulier, les deux relations de Green  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{L}$  y jouent un rôle spécial. On présente aussi deux familles importantes de bandes régulières à gauche : les bandes régulières à gauche libres (et leurs petites sœurs partiellement commutatives) ; et le semi-groupe des faces des arrangements d'hyperplans réels.

Le deuxième chapitre porte sur les représentations des bandes régulières à gauche. On y calcule le radical de Jacobson de leurs algèbres, ainsi que leurs représentations irréductibles. Ces calculs s'appuient sur le chapitre 1, ainsi que sur deux résultats clés : un théorème d'Almeida *et al.* (Almeida *et al.*, 2009), ainsi qu'un théorème de Solomon (Solomon, 1967). On procède ensuite à une étude plus détaillée des algèbres de bandes régulières à gauche : en utilisant des formules introduites dans (Saliola, 2006), on est à même de calculer des systèmes complets d'idempotents primitifs orthogonaux. On explique aussi comment les formules obtenues dans (Brown, 2000) peuvent être retrouvées à partir de ces résultats.

Le troisième chapitre est de taille plus modeste. On y présente quelques rudiments

des propriétés homologiques des bandes régulières à gauche, en se restreignant au cas particulier des arrangements d'hyperplans. On discute d'abord de la construction d'un complexe, du à Brown et Diaconis (Brown et Diaconis, 1998), qui s'avère être une résolution projective du module associé au morphisme d'augmentation (Saliola, 2009). On en déduit, avec une facilité relative, des formules pour le foncteur  $\text{Ext}$  sur les modules simples.

Ce mémoire comporte aussi trois annexes, qui visent à détailler certaines parties de l'exposé qui ne sont pas strictement nécessaires à une compréhension d'ensemble du document. La première annexe porte sur la construction du zonotope polaire associé à un arrangement d'hyperplans, qui est notamment utile au chapitre 3. La deuxième annexe présente en détail la théorie des algèbres associatives non-unitaires. Enfin, la dernière annexe présente la preuve du théorème d'Almeida et al. utilisé au chapitre 2.

Le langage de la théorie des catégories est omniprésent dans ce mémoire. Les notions utilisées ne sont pas trop avancées, mais permettent tout de même d'avoir un point de vue plus conceptuel sur plusieurs résultats. On suppose donc que le lecteur ou la lectrice possède des connaissances de base dans cette théorie. On réfère au livre (Riehl, 2016) pour une introduction aux catégories.

Ce mémoire ne comporte aucun résultat nouveau, à l'exception peut-être d'une description des familles eulériennes au chapitre 2 qui ne semble apparaître nulle part dans la littérature. Pour aller plus loin sur les bandes régulières à gauche, l'ouvrage (Margolis *et al.*, 2015a) est une excellente référence. Il regroupe la plupart des résultats récents les concernant, et en particulier leurs propriétés homologiques y sont étudiées beaucoup plus en profondeur.



## CHAPITRE I

### STRUCTURE DE SEMI-GROUPE

L'objectif de ce chapitre est d'étudier la structure de semi-groupe des bandes régulières à gauche, principalement en utilisant les relations de Green. Le chapitre commence avec une introduction à la théorie des semi-groupes. Les deuxième et troisième sections portent sur les relations de Green des bandes régulières à gauche, en particulier sur les relations  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{L}$ , auxquelles toutes les autres relations de Green se ramènent. Les deux dernières sections sont consacrées respectivement aux bandes régulières à gauche libres et aux bandes régulières à gauche des faces d'arrangements d'hyperplans.

#### 1.1 Notions préliminaires sur les semi-groupes

On donne dans cette section une brève introduction à la théorie des semi-groupes. On fixe aussi plusieurs notations et résultats qui seront utiles pour la suite. Les ouvrages utilisés sont (Grillet, 1995) et (Lallement, 1979). On a aussi consulté l'article (Almeida *et al.*, 2009) pour notre introduction aux pseudo-variétés.

##### 1.1.1 Semigroupes, monoïdes, congruences et morphismes

Un *semi-groupe* est la donnée d'un ensemble  $S$  et d'une opération binaire associative sur  $S$  qu'on appelle son *produit*. S'il n'y a pas de confusion possible, on utilise la notation  $xy$  pour désigner le produit de deux éléments  $x, y \in S$ . Un semi-groupe

possédant un élément neutre pour son produit est appelé un *monoïde*.

Si  $X, Y$  sont des parties de  $S$ , on désigne par  $XY$  l'ensemble des produits  $xy$  où  $x \in X$  et  $y \in Y$ . Pour  $n \geq 2$ , on définit récursivement l'ensemble  $X^n$  par

$$X^2 = XX, \quad X^{n+1} = XX^n.$$

On exclut volontairement le cas  $n = 1$  de cette définition, puisque la notation  $S^1$  est réservée pour l'adjonction d'un élément neutre (c.f. §1.1.2).

Un *sous-semi-groupe* de  $S$  est un ensemble  $T \subseteq S$  tel que  $T^2 \subseteq T$ . Un *idéal à gauche* de  $S$  est un ensemble  $\mathfrak{m} \subseteq S$  tel que  $S\mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{m}$ . On définit les *idéaux à droite* de manière analogue et un *idéal bilatère* est une partie de  $S$  qui est à la fois un idéal à droite et un idéal à gauche.

Une *congruence à gauche* dans un semi-groupe  $S$  est une relation d'équivalence  $\mathcal{C}$  dans  $S$  qui est invariante à gauche :

$$\forall x, s, t \in S, \quad s\mathcal{C}t \implies xs\mathcal{C}xt.$$

On définit de manière analogue les *congruences à droite*, et on appelle *congruence* une relation d'équivalence qui est simultanément une congruence à gauche et à droite. L'ensemble des congruences d'un semi-groupe  $S$  est fermé par l'intersection, ordonné par l'inclusion, et forme un sous-treillis de l'ensemble des relations d'équivalence de  $S$  (Lallement, 1979).

Un *morphisme de semi-groupes* est une application  $\varphi : S \rightarrow T$  entre deux semi-groupes telle que

$$\forall x, y \in S, \quad \varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y).$$

Si  $\varphi$  est bijective, alors sa fonction inverse est aussi un morphisme de semi-groupes et on dit que  $\varphi$  et son inverses sont des *isomorphismes*. On dira que  $S$  et  $T$  sont *isomorphes* s'il existe un isomorphisme  $S \rightarrow T$ , et on notera  $S \cong T$ . Il s'agit, bien entendu, d'une relation d'équivalence.

Si  $\varphi : S \rightarrow T$  est un morphisme, alors on définit son *noyau* et son *image* respectivement par

$$\ker(\varphi) = \{(x, y) \in S \times S : \varphi(x) = \varphi(y)\}, \quad \text{im}(\varphi) = \{\varphi(s) : s \in S\}.$$

On vérifie que  $\text{im}(\varphi)$  est un sous-semi-groupe de  $T$  et que  $\ker(\varphi)$  est une congruence de  $S$ . On souligne, à titre d'avertissement, que notre définition de noyau diffère de la définition usuelle de la théorie des groupes. Le noyau d'un morphisme de groupes  $\varphi : G \rightarrow H$  (suivant notre définition) correspond à la préimage  $\varphi^{-1}(1)$  (la définition usuelle en théorie des groupes) par

$$(x, y) \in \ker(\varphi) \iff xy^{-1} \in \varphi^{-1}(1).$$

Une relation d'équivalence de  $S$  est une congruence si et seulement si le produit de  $S$  induit une structure de semi-groupe sur ses classes d'équivalence (Grillet, 1995). La surjection canonique de l'ensemble quotient est alors un morphisme de semi-groupes dont le noyau est précisément la congruence de départ. Si  $\mathcal{C}$  est une congruence de  $S$ , on appelle  $S/\mathcal{C}$  le *semi-groupe quotient de  $S$  par  $\mathcal{C}$* . Ainsi, les congruences d'un semi-groupe correspondent aux noyaux de ses morphismes. La proposition qui suit précise cette correspondance. Il s'agit d'une reformulation du théorème d'isomorphisme qu'on retrouve dans (Lallement, 1979).

**Proposition 1.1.** *Soit  $\varphi : S \rightarrow T$  un morphisme de semi-groupes et  $\mathcal{C}$  une congruence de  $S$ . Notons  $\pi : S \rightarrow S/\mathcal{C}$  la surjection canonique associée.*

1. *Il existe un morphisme  $\bar{\varphi} : S/\mathcal{C} \rightarrow T$  tel que  $\bar{\varphi} \circ \pi = \varphi$  si et seulement si  $\mathcal{C} \subseteq \ker(\varphi)$ .*
2. *Le morphisme  $\bar{\varphi}$  est injectif si et seulement si  $\mathcal{C} = \ker(\varphi)$ .*

■

La conséquence la plus importante du théorème d'isomorphisme est sans doute le fait qu'un morphisme  $\varphi : S \rightarrow T$  induit un isomorphisme  $S/\ker(\varphi) \cong \text{im}(\varphi)$ .

### 1.1.2 Relations de Green

Soit  $S$  un semi-groupe. Alors  $S$  peut naturellement être plongé dans un monoïde  $S^1$  de la manière suivante : on définit  $S^1$  comme la réunion disjointe  $S \cup \{1\}$  et on étend le produit de  $S$  en un produit de  $S^1$  par la règle  $s1 = s = 1s$ .  $S^1$  est un monoïde d'élément neutre 1 et l'inclusion  $\iota : S \rightarrow S^1$  est un morphisme injectif de semi-groupes.

On introduit maintenant les préordres et les relations de Green, qui jouent un rôle de premier plan dans la théorie des semi-groupes. Pour plus de détails concernant ces relations, voir par exemple (Grillet, 1995) ou (Lallement, 1979).

**Définition 1.2.** Soit  $S$  un semi-groupe ; on définit les quatre relations  $\leq_{\mathcal{A}}$ ,  $\leq_{\mathcal{L}}$ ,  $\leq_{\mathcal{H}}$ ,  $\leq_{\mathcal{J}}$  par :

$$\begin{aligned} x \leq_{\mathcal{L}} y &\iff x = uy, & u \in S^1 \\ x \leq_{\mathcal{A}} y &\iff x = yv, & v \in S^1 \\ x \leq_{\mathcal{H}} y &\iff x = uy = yv, & u, v \in S^1 \\ x \leq_{\mathcal{J}} y &\iff x = uyv, & u, v \in S^1 \end{aligned}$$

Ces quatre relations sont réflexives et transitives, c'est-à-dire que ce sont des préordres. On les appelle les *préordres de Green*. À partir des préordres de Green, on définit les quatre relations  $\mathcal{L}$ ,  $\mathcal{R}$ ,  $\mathcal{H}$  et  $\mathcal{J}$  :

$$\begin{aligned} x \mathcal{L} y &\iff x \leq_{\mathcal{L}} y \text{ et } y \leq_{\mathcal{L}} x, \\ x \mathcal{R} y &\iff x \leq_{\mathcal{A}} y \text{ et } y \leq_{\mathcal{A}} x, \\ x \mathcal{H} y &\iff x \leq_{\mathcal{H}} y \text{ et } y \leq_{\mathcal{H}} x, \\ x \mathcal{J} y &\iff x \leq_{\mathcal{J}} y \text{ et } y \leq_{\mathcal{J}} x. \end{aligned}$$

Ces relations sont appelées les *relations de Green*. On montre aisément qu'il s'agit de relations d'équivalence.

Il existe une cinquième relation de Green, notée  $\mathcal{D}$ , qui est définie dans la proposition suivante (voir (Grillet, 1995), proposition II.1.2).

**Proposition 1.3.** *Soit  $S$  un semi-groupe, alors les deux relations suivantes coïncident :*

$$\mathcal{L} \circ \mathcal{R} = \{(x, y) : \exists z \in S, x\mathcal{L}z\mathcal{R}y\},$$

$$\mathcal{R} \circ \mathcal{L} = \{(x, y) : \exists z \in S, x\mathcal{R}z\mathcal{L}y\}.$$

De plus, la relation  $\mathcal{D} = \mathcal{R} \circ \mathcal{L} = \mathcal{L} \circ \mathcal{R}$  est une relation d'équivalence. ■

La relation  $\mathcal{D}$  est en fait la plus petite relation d'équivalence contenant  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{L}$  (Lallement, 1979). De plus,  $\mathcal{H}$  est la plus grande relation d'équivalence contenue dans  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{L}$ . En particulier, les relations de Green satisfont les inclusions suivantes :

$$\mathcal{H} \subseteq \mathcal{L}, \mathcal{R} \subseteq \mathcal{D} \subseteq \mathcal{I}.$$

Les relations de Green peuvent aussi être décrites en termes des idéaux principaux du semi-groupe. En effet, l'idéal à gauche engendré par un élément  $x \in S$  est l'ensemble  $S^1x$ , et on voit aisément que

$$x \leq_{\mathcal{L}} y \iff S^1x \subseteq S^1y.$$

De manière analogue, la relation  $\leq_{\mathcal{R}}$  correspond à l'inclusion des idéaux principaux à droite, la relation  $\leq_{\mathcal{J}}$  à l'inclusion des idéaux principaux bilatères et la relation  $\leq_{\mathcal{H}}$  à l'inclusion simultanée des idéaux principaux à droite et à gauche.

On considère, pour des raisons de symétrie, la relation d'égalité  $\mathcal{E}$  comme la sixième relation de Green. On a illustré les inclusions entre les relations de Green d'un semi-groupe à la figure 1.1.

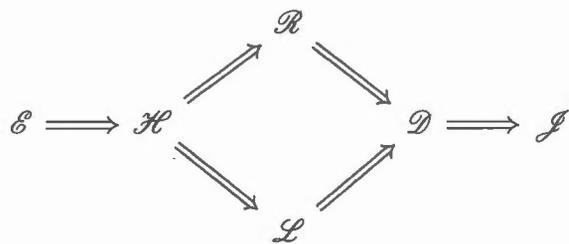


Figure 1.1 Inclusions entre les relations de Green d'un semi-groupe.

### 1.1.3 Idempotents, sous-groupes maximaux et monoïdes locaux

Soit  $S$  un semi-groupe, on dit qu'un élément  $e \in S$  est *idempotent* si  $e^2 = e$ . On note  $E(S)$  l'ensemble des idempotents de  $S$ . La structure des idempotents d'un semi-groupe est liée au préordre  $\leq_{\mathcal{H}}$ , comme le montre la proposition suivante (voir (Grillet, 1995), proposition II.1.1).

**Proposition 1.4.** *Soit  $S$  un semi-groupe. La relation  $\leq_{\mathcal{H}}$  définit sur  $E(S)$  un ordre partiel qui satisfait*

$$\forall e, f \in E(S), \quad e \leq_{\mathcal{H}} f \iff e = ef = fe.$$

■

L'ordre partiel induit par  $\leq_{\mathcal{H}}$  sur  $E(S)$  est parfois appelé *l'ordre de Rees*. On déduit immédiatement de ce qui précède qu'une classe d'équivalence de  $\mathcal{H}$  contient au plus un élément idempotent.

Les classes de  $\mathcal{H}$  sont aussi reliées à la notion de sous-groupe maximal. Un *sous-groupe* d'un semi-groupe  $S$  est un sous-semi-groupe de  $S$  qui est en particulier un groupe. Un sous-groupe est maximal s'il n'est proprement contenu dans aucun sous-groupe de  $S$ . On note que même si  $S$  est un monoïde, les sous-groupes de  $S$  ne possèdent pas toujours le même élément neutre que  $S$ ; c'est le cas par exemple

pour le monoïde multiplicatif de  $\mathbb{N}$  et son sous-groupe trivial  $\{0\}$ . Le lien entre les  $\mathcal{H}$ -classes et les sous-groupes maximaux est donné dans la proposition suivante (voir (Grillet, 1995), corollaire II.1.5).

**Proposition 1.5.** *Les sous-groupes maximaux d'un semi-groupe  $S$  coïncident avec les classes de  $\mathcal{H}$  qui contiennent un idempotent.* ■

Ainsi, chaque idempotent  $e \in E(S)$  donne lieu à un sous-groupe maximal de  $S$ . Les idempotents donnent aussi lieu à des sous-monoïdes de  $S$  qu'on appelle les *monoïde locaux* : le monoïde local en  $e \in E(S)$  est le sous-semi-groupe  $eSe$ , dont  $e = eee$  est l'élément neutre. Dans un semi-groupe fini  $S$ , le monoïde local d'un idempotent  $e \in E(S)$  est lié à son sous-groupe maximal par  $eSe \cap J_e = H_e$ , où  $J_e$  et  $H_e$  désigne respectivement la  $\mathcal{J}$ -classe et la  $\mathcal{H}$ -classe de  $e$  (Eilenberg et Tilson, 1974). En particulier, l'ensemble des éléments inversibles de  $eSe$  coïncide avec  $H_e$ .

On termine cette sous-section en mentionnant un résultat classique de la théorie des semi-groupes. Il jouera seulement un rôle mineur dans la suite, mais motive d'une certaine manière l'étude des bandes et des bandes régulières à gauche. Voir (Grillet, 1995), corollaire I.5.8 pour une preuve détaillée.

**Proposition 1.6.** *Si  $S$  est un semi-groupe fini et non-vide, alors  $E(S) \neq \emptyset$ . En particulier, tout élément  $s \in S$  a une puissance idempotente : il existe  $k \geq 1$  tel que  $s^k \in E(S)$ .* ■

#### 1.1.4 Catégorie des semi-groupes et principe de dualité

Les semi-groupes munis de leurs morphismes forment une catégorie qu'on notera  $\mathbf{Sg}$ . On note  $\mathbf{Mon}$  la catégorie des monoïdes munis des morphismes de semi-groupes préservant les éléments neutres.  $\mathbf{Mon}$  est une sous-catégorie de  $\mathbf{Sg}$  qui n'est pas

pleine : par exemple, la fonction  $n \mapsto 0$  est un morphisme de semi-groupes du monoïde multiplicatif de  $\mathbb{N}$  vers lui-même qui n'est pas un morphisme de monoïdes.

Le semi-groupe trivial, noté  $0$ , dont l'ensemble sous-jacent n'a qu'un seul élément, est l'objet terminal de  $\mathbf{Sg}$ . L'objet initial de  $\mathbf{Sg}$  est le semi-groupe vide. En particulier, la catégorie  $\mathbf{Sg}$  n'a pas d'objet nul. Dans la catégorie  $\mathbf{Mon}$ , au contraire, le semi-groupe trivial  $0$  est aussi initial, ce qui en fait un objet nul.

Soit  $S$  un semi-groupe; on peut vérifier que la construction du monoïde  $S^1$  (c.f. §1.1.2) donne lieu à un foncteur  $(-)^1 : \mathbf{Sg} \rightarrow \mathbf{Mon}$ . Ce foncteur admet une propriété remarquable :

**Proposition 1.7.** *Le foncteur  $(-)^1$  est adjoint à gauche du foncteur d'oubli. Plus précisément, pour tout objet  $S$  de  $\mathbf{Sg}$  et tout objet  $M$  de  $\mathbf{Mon}$ , il existe une bijection naturelle*

$$\mathrm{hom}_{\mathbf{Sg}}(S, M) \cong \mathrm{hom}_{\mathbf{Mon}}(S^1, M).$$

*Démonstration.* Soit  $S$  un semigroupe,  $M$  un monoïde, et notons  $1_M$  l'élément neutre de  $M$ . Soit  $\varphi \in \mathrm{hom}_{\mathbf{Sg}}(S, M)$ , on définit  $\bar{\varphi} : S^1 \rightarrow M$  par

$$\bar{\varphi}(x) = \begin{cases} \varphi(x) & \text{si } x \in S, \\ 1_M & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

On se convainc facilement que  $\bar{\varphi}$  est un morphisme dans  $\mathbf{Mon}$  et que la correspondance  $\varphi \mapsto \bar{\varphi}$  est naturelle. Son inverse est donnée par la restriction sur  $S$ . ■

Étant donné un semi-groupe  $(S, \cdot)$ , son *semi-groupe opposé*, noté  $S^{\mathrm{op}} = (S, \cdot^{\mathrm{op}})$ , est défini par

$$\forall s, t \in S, \quad s \cdot^{\mathrm{op}} t = t \cdot s.$$

La formation du semi-groupe opposé donne lieu à un foncteur  $\mathrm{op} : \mathbf{Sg} \rightarrow \mathbf{Sg}$ . Il s'agit même d'une équivalence de catégories, car  $\mathrm{op} \circ \mathrm{op}$  est naturellement iso-

morphe (en fait égal) au foncteur identité de  $\text{Sg}$ . Cette équivalence nous permet d'obtenir des versions duales des énoncés ; c'est ce que (Grillet, 1995) appelle le *principe de dualité*. L'un des intérêts de ce foncteur est qu'il échange les rôles de  $\leq_{\mathcal{O}}$  et  $\leq_{\mathcal{L}}$  dans les énoncés. On utilisera ce principe à plusieurs reprises.

### 1.1.5 Pseudo-variétés de semi-groupes

On présente dans cette section quelques définitions concernant les pseudo-variétés de semi-groupes. Les notations et définitions présentées proviennent de (Almeida *et al.*, 2009). Ces notions seront surtout utiles pour calculer le radical de Jacobson des algèbres de bandes régulières à gauche au chapitre 2.

Une *pseudo-variété de semi-groupes* est une classe  $\mathbf{V}$  de semi-groupes finis qui satisfait les trois conditions suivantes :

1. si  $S \in \mathbf{V}$  et  $f : S \rightarrow T$  est un morphisme surjectif de semi-groupes,  $T \in \mathbf{V}$  ;
2. si  $S \in \mathbf{V}$  et  $f : T \rightarrow S$  est un morphisme injectif de semi-groupes,  $T \in \mathbf{V}$  ;
3. si  $S, T \in \mathbf{V}$ ,  $S \times T \in \mathbf{V}$ .

On définit de manière analogue les *pseudo-variétés de monoïdes* : ce sont les classes de monoïdes qui satisfont les conditions analogues dans la catégorie des monoïdes. On note que toute pseudo-variété de semi-groupes contient le semi-groupe vide, et toute pseudo-variété de monoïdes contient le monoïde trivial.

On mentionne tout de suite quelques exemples importants de pseudo-variétés : la classe  $\mathbf{G}$  des groupes finis forment une pseudo-variété de monoïdes, de même que la classe  $\mathbf{G}_p$  des  $p$ -groupes, où  $p$  est un nombre premier. Ces classes forment aussi des pseudo-variétés de semi-groupes si on leur ajoute le semi-groupe vide. On notera  $\mathbf{1}$  la pseudo-variété qui ne contient que le monoïde trivial.

On introduit aussi la notion de *pseudo-variété locale*, associée à une pseudo-variété de monoïdes  $\mathbf{V}$ . Il s'agit de la classe  $\mathbf{LV}$  des semi-groupes dont tous les monoïdes

locaux sont dans  $V$ . La classe  $LV$  est une pseudo-variété de semi-groupes (Almeida *et al.*, 2009), qu'on appelle la *pseudo-variété locale associée à  $V$* . On introduit une terminologie spéciale pour les pseudo-variétés  $LG$  et  $LG_p$  : les semi-groupes dans  $LG$  seront appelés les *groupes locaux*, et ceux dans  $LG_p$  les  *$p$ -groupes locaux*.

Soit  $V$  une pseudo-variété et  $\varphi : S \rightarrow T$  un morphisme de semi-groupes. On dit que  $\varphi$  est un  *$V$ -morphisme* si pour tout idempotent  $e \in E(T)$ , la préimage  $\varphi^{-1}(e)$  est dans  $V$ . Les  $V$ -morphisms joueront un rôle important au chapitre 2.

À titre d'exemple, si  $\varphi : G \rightarrow H$  est un morphisme de groupes et que  $V = G_p$ , alors  $\varphi$  est un  $G_p$ -morphisme exactement lorsque la préimage  $\varphi^{-1}(1)$  (i.e. le noyau de  $\varphi$  au sens de la théorie des groupes) est un  $p$ -groupe. On s'intéressera plus loin au cas, un peu plus compliqué, où  $V = LG_p$  et où  $\varphi : S \rightarrow T$  est un morphisme entre deux semi-groupes qui satisfont  $S = E(S)$  et  $T = E(T)$ . On a alors que  $\varphi$  est un  $LG_p$ -morphisme exactement lorsque le monoïde local  $s\varphi^{-1}(t)s$  est dans  $G_p$  pour tout  $t \in T$  et  $s \in \varphi^{-1}(t)$ .

## 1.2 Les relations de Green dans les bandes régulières à gauche

La première tâche qui nous occupera est d'étudier les relations de Green dans les bandes régulières à gauche. Le fil conducteur de cette section est l'idée suivante : les deux propriétés qui définissent les bandes régulières à gauche interagissent avec les différentes relations de Green, ce qui restreint grandement leur forme. En retour, les relations de Green nous donnent des outils pour investiguer la structure des bandes régulières à gauche.

On verra que la relation  $\mathcal{R}$  définit un ordre partiel sur les bandes régulières à gauche, et que  $\mathcal{L}$  y définit une congruence. On démontrera aussi que les autres relations de Green, soit  $\mathcal{E}$ ,  $\mathcal{H}$ ,  $\mathcal{J}$  et  $\mathcal{D}$ , se réduisent à l'une des deux relations  $\mathcal{R}$  ou  $\mathcal{L}$ . On terminera la section en étudiant les représentations régulières dans

les bandes régulières à gauche, un avant-goût du chapitre 2.

### 1.2.1 Définition des bandes régulières à gauche et à droite

Intuitivement, les bandes régulières à gauche sont les semi-groupes dans lesquels la deuxième occurrence d'un facteur peut toujours être supprimée. Plus précisément :

**Définition 1.8.** Soit  $S$  un semi-groupe. On dit que  $S$  est une *bande* si  $S = E(S)$ , c'est-à-dire si

$$\forall x \in S, \quad x^2 = x.$$

On dit que  $S$  est *régulier à gauche* si

$$\forall x, y \in S, \quad xyx = xy.$$

Il existe une notion analogue de semi-groupes *réguliers à droite* : ce sont les semi-groupes dont tous les éléments satisfont l'équation  $xyx = yx$ .

Les bandes régulières à gauche forment une sous-catégorie pleine des semi-groupes. Le foncteur  $\text{op}$  est une équivalence entre cette catégorie et la catégorie des bandes régulières à droite. Un énoncé concernant les bandes régulières à gauche a donc une version duale concernant les bandes régulières à droite. Les bandes régulières à gauche finies (ainsi que les bandes régulières à droites finies) forment une pseudo-variété de semi-groupes.

### 1.2.2 La relation $\mathcal{R}$

La proposition suivante montre comment l'idempotence et la régularité à gauche déterminent le pré-ordre  $\leq_{\mathcal{R}}$ .

**Proposition 1.9.** Soit  $S$  un semi-groupe.

1.  $S$  est une bande si et seulement si  $x \leq_{\mathcal{R}} y \implies x = yx$ .

2.  $S$  est régulier à gauche si et seulement si  $x \leq_{\mathcal{R}} y \implies x = xy$ .

*Démonstration.* 1. Supposons que  $S$  est une bande et soit  $x, y \in S$  tels que  $x \leq_{\mathcal{R}} y$ . Par définition de la relation  $\leq_{\mathcal{R}}$ , il existe  $r \in S^1$  tel que  $x = yr$ . On a alors que  $x = yr = y^2r = yx$ . La réciproque est une conséquence immédiate de la réflexivité de  $\leq_{\mathcal{R}}$ .

2. Supposons que  $S$  est régulier à gauche et que  $x \leq_{\mathcal{R}} y$ . Alors il existe  $r \in S^1$  tel que  $x = yr$ , et  $x = yr = yry = xy$ . La réciproque est une conséquence immédiate du fait que  $xy \leq_{\mathcal{R}} x$  pour tout  $x, y \in S$ . ■

Cette proposition montre que le préordre  $\leq_{\mathcal{R}}$  d'une bande régulière à gauche coïncide avec l'ordre de Rees (c.f. §1.1.3). En particulier,  $\leq_{\mathcal{R}}$  et  $\leq_{\mathcal{H}}$  définissent un ordre partiel et  $\mathcal{R} = \mathcal{H} = \mathcal{E}$ . Les semi-groupes satisfaisant cette dernière propriété sont dits  $\mathcal{R}$ -triviaux. On obtient le corollaire suivant.

**Corollaire 1.10.** *Une bande  $B$  est  $\mathcal{R}$ -triviale si et seulement si elle est régulière à gauche.*

*Démonstration.* Comme on vient de le remarquer,  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{H}$  coïncident sur  $B$ , et  $\mathcal{H}$  est triviale sur  $B = E(B)$ . Réciproquement, supposons que  $\leq_{\mathcal{R}}$  est un ordre partiel. Puisque  $B$  est une bande, la relation  $xy\mathcal{R}xyx$  est satisfaite pour tout  $x, y \in B$ . En effet,

$$xyx = (xy)x \leq_{\mathcal{R}} xy = (xy)(xy) = (xyx)y \leq_{\mathcal{R}} xyx.$$

Comme  $\mathcal{R}$  coïncide avec l'égalité, on a  $xy = xyx$  pour tous  $x, y \in B$  et  $B$  est régulière à gauche. ■

### 1.2.3 La relation $\mathcal{L}$

Par le principe de dualité, la proposition 1.9 admet un analogue qui concerne les bandes régulières à droite. Cette proposition duale met en scène le pré-ordre  $\leq_{\mathcal{L}}$ , plutôt que  $\leq_{\mathcal{R}}$ , ce qui donne :

**Proposition 1.11.** *Soit  $S$  un semi-groupe.*

1.  *$S$  est une bande si et seulement si  $x \leq_{\mathcal{L}} y \implies x = xy$ .*
2.  *$S$  est régulier à droite si et seulement si  $x \leq_{\mathcal{L}} y \implies x = yx$ .*

■

Le corollaire suivant est une conséquence des propositions 1.9 et 1.11.

**Corollaire 1.12.** *Une bande  $B$  est régulière à gauche si et seulement si  $\leq_{\mathcal{R}}$  est contenue dans  $\leq_{\mathcal{L}}$ . Dualement,  $B$  est régulière à droite si et seulement si  $\leq_{\mathcal{L}}$  est contenue dans  $\leq_{\mathcal{R}}$ .*

*Démonstration.* Supposons d'abord que  $B$  est une bande régulière à gauche, et soit  $x, y \in B$ . Par la partie 2 de la proposition 1.9 et par définition du pré-ordre  $\leq_{\mathcal{L}}$ , on obtient

$$x \leq_{\mathcal{R}} y \implies x = xy \implies x \leq_{\mathcal{L}} y,$$

ce qui nous donne l'implication voulue.

Réciproquement, si  $B$  est une bande où la relation  $\leq_{\mathcal{R}}$  est contenue dans  $\leq_{\mathcal{L}}$ , alors la partie 1 de la proposition 1.11 nous donne

$$x \leq_{\mathcal{R}} y \implies x \leq_{\mathcal{L}} y \implies x = xy,$$

et donc  $B$  est régulière à gauche par la partie 2 de la proposition 1.9.

■

Une bande est commutative si et seulement si elle est régulière à droite et à gauche simultanément. En conséquence, une bande est commutative si et seulement si les deux pré-ordres  $\leq_{\mathcal{R}}$  et  $\leq_{\mathcal{L}}$  y coïncident, auquel cas  $\mathcal{R} = \mathcal{L} = \mathcal{E}$  par le corollaire 1.10. Par conséquent,  $\leq_{\mathcal{R}}$  et  $\leq_{\mathcal{L}}$  définissent sur une bande commutative un même ordre partiel, qu'on notera simplement  $\leq$ .

Il découle de sa définition que le préordre  $\leq_{\mathcal{L}}$  d'un semi-groupe est invariant à droite. La proposition suivante montre que, dans le cas particulier des bandes régulières à gauche,  $\leq_{\mathcal{L}}$  est aussi invariant à gauche, ce qui fait de  $\mathcal{L}$  une congruence.

**Proposition 1.13.** *Soit  $B$  une bande régulière à gauche et  $x, y, z \in B$ . Alors :*

$$x \leq_{\mathcal{L}} y \implies zx \leq_{\mathcal{L}} zy.$$

*Démonstration.* Supposons que  $x \leq_{\mathcal{L}} y$ . Par la partie 1 de la proposition 1.11, on a  $x = xy$ . Par régularité à gauche de  $B$ ,  $zx = zxy = zxzy$ , d'où  $zx \leq_{\mathcal{L}} zy$ . ■

Si  $B$  est une bande régulière à gauche, le quotient  $B/\mathcal{L}$  a donc une structure de bande régulière à gauche induite par le produit de  $B$ . Ce quotient sera fondamental dans notre étude des bandes régulières à gauche. On lui consacre la section 1.3.

#### 1.2.4 Les relations $\mathcal{D}$ et $\mathcal{J}$

Il nous reste, pour terminer notre étude des relations de Green dans les bandes régulières à gauche, à examiner les relations de Green  $\mathcal{J}$  et  $\mathcal{D}$ . Le but de cette sous-section est de démontrer que dans les bandes régulières à gauche, ces relations se réduisent à la relation  $\mathcal{L}$ . Afin de bien apprécier la symétrie des résultats, les énoncés rappellent aussi les liens entre  $\mathcal{H}$  et  $\mathcal{R}$ , qu'on a déjà élucidés à la section 1.2.2.

On commence notre travail par démontrer une caractérisation des bandes analogue aux propositions 1.9 et 1.11.

**Proposition 1.14.** *Pour tout semi-groupe  $S$ , les énoncés suivants sont équivalents :*

1.  $S$  est une bande ;
2.  $x \leq_{\mathcal{H}} y \implies x = xy = yx$  ;
3.  $x \leq_{\mathcal{J}} y \implies x = xyx$ .

*Démonstration.* Si  $S$  est une bande, alors la condition 2 est satisfaite par la proposition 1.4. La réciproque est une conséquence facile de la réflexivité de  $\leq_{\mathcal{H}}$ . Par conséquent, les conditions 1 et 2 sont équivalentes.

Il nous reste à démontrer l'équivalence des conditions 1 et 3. Supposons que  $S$  est une bande, et soit  $x, y \in S$  tels que  $x \leq_{\mathcal{J}} y$ . Par définition,  $x = uyv$  pour certains éléments  $u, v \in S^1$ . Puisque  $S$  est une bande, on a

$$x = uyv = (uy)(uy)v = (uy)(uyv) = uyx,$$

et, de manière analogue,

$$x = uyx = u(yx)(yx) = (uyx)(yx) = xyx.$$

Donc la condition 1 implique la condition 3.

Finalement, supposons que la condition 3 est satisfaite et fixons un élément  $x \in S$ .

On observe que la relation  $x \leq_{\mathcal{J}} x$  est satisfaite, et donc  $x = x^3$  par la condition 3. On remarque ensuite que  $x^2 \leq_{\mathcal{J}} x$ , ce qui nous donne

$$x^2 = x^2xx^2 = x^3x^2 = x^3 = x.$$

Donc  $S$  est une bande. ■

La proposition suivante est le résultat principal de cette sous-section.

**Proposition 1.15.** *Pour toute bande  $B$ , les énoncés suivants sont équivalents :*

1.  $B$  est une bande régulière à gauche ;
2.  $\leq_{\mathcal{R}}$  et  $\leq_{\mathcal{H}}$  coïncident dans  $B$  ;
3.  $\leq_{\mathcal{L}}$  et  $\leq_{\mathcal{J}}$  coïncident dans  $B$ .

*Démonstration.* L'équivalence des énoncés 1 et 2 est découle de la proposition 1.9.

Si  $B$  est une bande régulière à gauche, alors les propositions 1.14 et 1.11 entraînent que

$$x \leq_{\mathcal{J}} y \iff x = xyx = xy \iff x \leq_{\mathcal{L}} y,$$

ce qui montre que  $\leq_{\mathcal{J}}$  et  $\leq_{\mathcal{L}}$  coïncident dans  $B$ . Réciproquement, si  $\leq_{\mathcal{J}}$  coïncide avec  $\leq_{\mathcal{L}}$ , alors pour tout  $x, y \in B$  on a  $xyx \leq_{\mathcal{J}} y$ , d'où  $xyx \leq_{\mathcal{L}} y$  par hypothèse, d'où  $xyx = (xyx)y = xy$  par la partie 1 de la proposition 1.11. On a ainsi démontré l'équivalence entre les énoncés 1 et 3. ■

Le corollaire suivant résume nos conclusions des dernières sections. On l'a aussi illustré à la figure 1.2.

**Corollaire 1.16.** *Soit  $B$  une bande régulière à gauche ; alors les relations de Green satisfont les égalités suivantes :*

$$\mathcal{E} = \mathcal{R} = \mathcal{H} \quad \text{et} \quad \mathcal{L} = \mathcal{J} = \mathcal{D}.$$

*Démonstration.* Les égalités  $\mathcal{R} = \mathcal{H}$  et  $\mathcal{L} = \mathcal{J}$  découlent directement de la proposition 1.15. Les inclusions  $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{D} \subseteq \mathcal{J}$  entraînent alors que  $\mathcal{L} = \mathcal{D} = \mathcal{J}$ . Les égalités  $\mathcal{E} = \mathcal{H} = \mathcal{R}$  découlent de la proposition 1.4. ■

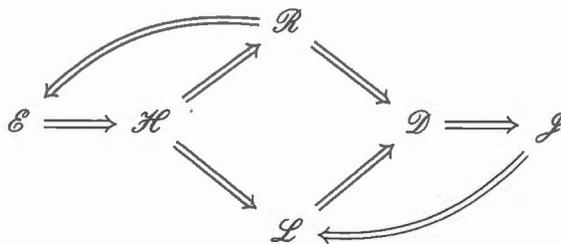


Figure 1.2 Inclusions entre les relations de Green d'une bande régulière à gauche.

### 1.2.5 Représentations régulières

On conclut cette section en discutant d'une première conséquence fondamentale de la  $\mathcal{R}$ -trivialité des bandes régulières à gauche. Plus précisément, on démontrera que toute bande régulière à gauche est isomorphe à un sous-semi-groupe de ses endomorphismes.

Un semi-groupe  $S$  agit naturellement sur son ensemble sous-jacent par multiplication à gauche. Cette action définit un morphisme de  $S$  vers son semi-groupe de transformations, qu'on appelle la *représentation régulière* de  $S$ , et on le note  $\lambda : x \mapsto \lambda_x$ .

Dans le cas des groupes, la représentation régulière est fidèle et son image est contenue dans l'ensemble des permutations du groupe. Au contraire, la représentation régulière d'un semi-groupe n'est pas toujours fidèle et on ne peut rien dire a priori sur les éléments de son image. On peut obtenir une représentation fidèle en considérant plutôt l'action d'un semi-groupe  $S$  sur le monoïde  $S^1$ , mais on ne peut toujours rien conclure sur l'image de cette représentation. La situation change radicalement pour les bandes régulières à gauche.

**Proposition 1.17.** *La représentation régulière d'une bande régulière à gauche  $B$  définit un morphisme injectif de  $B$  dans le semi-groupe de ses endomorphismes.*

*Démonstration.* Soit  $x \in B$ ; le calcul suivant montre que  $\lambda_x$  est un morphisme :

$$\lambda_x(yz) = xyz = xyxz = \lambda_x(y)\lambda_x(z).$$

Si  $x, y \in B$  satisfont  $\lambda_x = \lambda_y$ , alors on a

$$x = x^2 = \lambda_x(x) = \lambda_y(x) = yx,$$

et similairement  $y = xy$ . Donc  $x\mathcal{R}y$ , ce qui entraîne que  $x = y$ . Par conséquent,  $\lambda$  est injective. ■

Cette proposition admet une version duale : si  $B$  est une bande régulière à droite, sa représentation régulière à droite définit un *antimorphisme* injectif de  $B$  dans  $\text{End}(B)$ .

### 1.3 Support des bandes régulières à gauche

En vertu de la proposition 1.13, la relation  $\mathcal{L}$  d'une bande régulière à gauche  $B$  est une congruence et le quotient  $B/\mathcal{L}$  a donc une structure de bande régulière à gauche. L'objectif de cette section est d'étudier ce quotient, auquel on donnera le nom de *support*.

Après une définition formelle et quelques remarques, on discutera de la propriété universelle de ce quotient. On introduira ensuite les notions de *restriction* et de *contraction* d'une bande régulière à gauche, et on définira l'ensemble de ses chambres.

On mentionne que le support est défini plus généralement pour les bandes. Étant donné une bande  $B$ , on peut démontrer que  $\mathcal{J}$  est une congruence et que  $B/\mathcal{J}$  est une bande commutative. La plupart des propriétés du support qu'on démontre ici pour les bandes régulières à gauche sont valides plus généralement pour les bandes. Voir (Brown, 2004) à ce sujet.

On verra aussi que le support réalise simultanément deux constructions qui sont en général différentes en théorie des semi-groupes : l'abélianisation et le semi-treillis universel. Pour la définition du semi-treillis universel d'un semi-groupe, voir (Grillet, 1995).

### 1.3.1 Définition du support

On commence par définir formellement l'objet principal de la section.

**Définition 1.18.** Soit  $B$  une bande régulière à gauche. On appelle *support de  $B$* , et on note  $\text{supp}(B)$ , le semi-groupe quotient  $B/\mathcal{L}$ . On note aussi  $\text{supp}$  la surjection canonique de ce quotient. On appelle *support* d'un élément de  $B$  la  $\mathcal{L}$ -classe qui lui correspond.

Étant donné qu'il s'agit d'un morphisme,  $\text{supp}$  préserve la relation  $\leq_{\mathcal{L}}$ . Réciproquement,

$$\text{supp}(x) \leq_{\mathcal{L}} \text{supp}(y) \implies \text{supp}(x) = \text{supp}(xy) \implies x \leq_{\mathcal{L}} xy \leq_{\mathcal{L}} y.$$

Ainsi,  $\text{supp}(x)\mathcal{L}\text{supp}(y)$  entraîne  $x\mathcal{L}y$ . On en déduit la proposition suivante.

**Proposition 1.19.** *Le support d'une bande régulière à gauche est  $\mathcal{L}$ -trivial.* ■

La proposition 1.19 et le dual du corollaire 1.10 nous permettent de conclure que  $\text{supp}(B)$  est une bande commutative. En particulier,  $\text{supp}(B)$  est partiellement ordonné par l'ordre de Rees  $\leq$ , qui coïncide avec les deux préordres  $\leq_{\mathcal{R}}$  et  $\leq_{\mathcal{L}}$ . De plus, le morphisme  $\text{supp}$  définit un morphisme surjectif d'ensembles ordonnés  $(B, \leq_{\mathcal{R}}) \rightarrow (\text{supp}(B), \leq)$ . La proposition suivante montre que  $(\text{supp}(B), \leq)$  est un inf-semi-treillis.

**Proposition 1.20.** *Soit  $B$  une bande régulière à gauche et  $x, y \in B$ . Alors  $\text{supp}(xy)$  est le plus grand minorant de  $\text{supp}(x)$  et  $\text{supp}(y)$ .*

*Démonstration.* Comme  $\text{supp}(B)$  est commutative,

$$\text{supp}(xy) = \text{supp}(x) \text{supp}(y) = \text{supp}(y) \text{supp}(x).$$

Par conséquent,  $\text{supp}(xy) \leq \text{supp}(x)$  et  $\text{supp}(xy) \leq \text{supp}(y)$ . Ainsi,  $\text{supp}(xy)$  est bien un minorant de  $\text{supp}(x)$  et  $\text{supp}(y)$ .

Soit  $\text{supp}(z)$  un minorant de  $\text{supp}(x)$  et  $\text{supp}(y)$ . Comme on l'a déjà observé, cela entraîne que  $z \leq_{\mathcal{L}} x$  et  $z \leq_{\mathcal{L}} y$ . On conclut, en appliquant deux fois la proposition 1.11, que  $z = zy = zxy$ . Donc on a  $z \leq_{\mathcal{L}} xy$ , d'où  $\text{supp}(z) \leq \text{supp}(xy)$ . ■

Brown a observé que l'existence d'un tel morphisme caractérise les bandes régulières à gauche. Plus explicitement, un semi-groupe  $S$  est une bande régulière à gauche si et seulement s'il existe un inf-semi-treillis  $L$  et un morphisme surjectif  $\varphi : S \rightarrow L$  tel que  $\varphi(x) \leq \varphi(y) \implies x \leq_{\mathcal{L}} y$ . Brown utilise cette caractérisation pour définir les bandes régulières à gauche dans (Brown, 2000).

### 1.3.2 Propriété universelle et functorialité

La proposition suivante provient de l'appendice A de (Brown, 2004), où elle est démontrée dans le cas plus général des bandes.

**Proposition 1.21.** *Soit  $B$  une bande régulière à gauche,  $C$  une bande commutative et  $\varphi : B \rightarrow C$  un morphisme de semi-groupes. Alors il existe un unique morphisme  $\bar{\varphi}$  tel que le diagramme suivant commute :*

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{\text{supp}} & \text{supp}(B) \\ & \searrow \varphi & \downarrow \bar{\varphi} \\ & & C \end{array}$$

*Démonstration.* Par le théorème d'isomorphisme (proposition 1.1), il suffit de démontrer que  $\ker(\text{supp}) \subseteq \ker(\varphi)$ . Or  $x, y \in B$  satisfont  $\text{supp}(x) = \text{supp}(y)$  si et

seulement si  $x = xy$  et  $y = yx$ , auquel cas on doit avoir  $\varphi(x) = \varphi(x)\varphi(y) = \varphi(y)\varphi(x) = \varphi(y)$  puisque  $C$  est commutative. ■

La proposition précédente dit en substance que  $\text{supp}(B)$  est l'abélianisation de  $B$  dans la catégorie des bandes régulières à gauche. Par conséquent, le support définit un foncteur : si  $\varphi : B \rightarrow B'$  est un morphisme de bandes régulières à gauche, alors il existe un unique morphisme  $\text{supp}(\varphi)$  qui rend commutatif le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{\varphi} & B' \\ \downarrow \text{supp} & & \downarrow \text{supp} \\ \text{supp}(B) & \xrightarrow{\text{supp}(\varphi)} & \text{supp}(B') \end{array}$$

On déduit aussi de la proposition précédente que  $\text{supp}(B)$  est le semi-treillis universel de  $B$ , tel que défini dans (Grillet, 1995). Il s'agit d'une conséquence du fait que les bandes commutatives sont exactement les semi-treillis.

On démontre maintenant que le foncteur induit par le support préserve les morphismes injectifs.

**Proposition 1.22.** *Soit  $\varphi : B \rightarrow B'$  un morphisme injectif de bandes régulières à gauche, alors  $\text{supp}(\varphi)$  est injectif.*

*Démonstration.* Fixons deux éléments  $x, y \in B$  et soit  $X = \text{supp}(x)$ ,  $Y = \text{supp}(y)$ . On suppose que  $\text{supp}(\varphi)(X) = \text{supp}(\varphi)(Y)$  et on doit démontrer que  $X = Y$ . Par définition,

$$\text{supp}(\varphi(x)) = \text{supp}(\varphi)(X) = \text{supp}(\varphi)(Y) = \text{supp}(\varphi(y)),$$

d'où  $\varphi(x) \leq_{\mathcal{L}} \varphi(y)$ . On a donc les deux relations  $\varphi(x) \leq_{\mathcal{L}} \varphi(y)$  et  $\varphi(y) \leq_{\mathcal{L}} \varphi(x)$ . Par la partie 1 de la proposition 1.11, la première relation entraîne

$$\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y) = \varphi(x),$$

d'où, par injectivité de  $\varphi$ ,  $xy = x$ . Cela entraîne que  $x \leq_{\mathcal{L}} y$ . En renversant les rôles de  $x$  et  $y$ , le même argument nous donne  $y \leq_{\mathcal{L}} x$ , ce qui montre que  $x \mathcal{L} y$ . Par conséquent,  $X = \text{supp}(x) = \text{supp}(y) = Y$ , ce qui termine la preuve. ■

Ce résultat peut être interprété de manière un peu plus concrète : si  $B$  est une bande régulière à gauche et que  $B'$  est un sous-semi-groupe de  $B$ , alors le support de  $B'$  est isomorphe à l'image de  $B'$  par le morphisme  $\text{supp} : B \rightarrow B$ .

### 1.3.3 Restriction et contraction

Avant d'introduire les notions éponymes de cette section, on démontre que la relation  $\leq_{\mathcal{L}}$  détermine la structure de semi-groupe des idéaux à droite d'une bande régulière à gauche (corollaire 1.24).

**Proposition 1.23.** *Soit  $B$  une bande régulière à gauche et  $x, y \in B$ . Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

1.  $x \leq_{\mathcal{L}} y$  ;
2.  $\lambda_x \circ \lambda_y = id_{xB}$  ;
3.  $\lambda_y$  est un morphisme injectif  $xB \rightarrow yB$  ;
4.  $\lambda_x$  est un morphisme surjectif  $yB \rightarrow xB$  ;

*Démonstration.* Supposons d'abord que  $x \leq_{\mathcal{L}} y$ . Par la proposition 1.11 on a  $x = xy$ , et donc :

$$\forall u \in B, \quad \lambda_x \circ \lambda_y(xu) = xyxu = xyu = xu.$$

Par conséquent,  $\lambda_x \circ \lambda_y = id_{xB}$ . La condition 1 entraîne la condition 2.

La condition 2 entraîne immédiatement l'injectivité de  $\lambda_y$  et la surjectivité de  $\lambda_x$ , et les deux fonctions sont des morphismes par la proposition 1.17. On voit donc que la condition 2 entraîne les conditions 3 et 4.

Supposons que  $\lambda_y : xB \rightarrow yB$  est un morphisme injectif. On a

$$\lambda_y(x) = yx = yxy = \lambda_y(xy).$$

Par injectivité de  $\lambda_y$ , on a  $x = xy$ , d'où  $x \leq_{\mathcal{L}} y$ . La condition 3 entraîne donc la condition 1.

Finalement, supposons que  $\lambda_x : yB \rightarrow xB$  est une surjection. En particulier, il existe  $u \in B$  tel que  $xyu = \lambda_x(yu) = xx = x$ . Mais alors  $x = xyu = xyuy = xy$ , d'où  $x \leq_{\mathcal{L}} y$ . Donc la condition 4 entraîne la condition 1. ■

Le corollaire suivant est alors immédiat.

**Corollaire 1.24.** *Soit  $B$  une bande régulière à gauche et  $x, y \in B$  tels que  $x\mathcal{L}y$ . Alors  $\lambda_x$  et  $\lambda_y$  définissent des isomorphismes mutuellement inverses  $xB \cong yB$ . ■*

On remarque que pour tout  $x \in B$ ,  $xBx = xB$ , ce qui signifie que le corollaire précédent admet la reformulation suivante : les monoïdes locaux de  $B$  sont indexés, à isomorphismes près, par les éléments de  $\text{supp}(B)$ .

On définit maintenant les notions de restriction et de contraction.

**Définition 1.25.** Soit  $B$  une bande régulière à gauche,  $x, y \in B$ .

1. La *restriction de  $B$  en  $y$*  est le sous-semi-groupe de  $B$  défini par

$$yB = \{yb : b \in B\} = \{b \in B : b \leq_{\mathcal{L}} y\}.$$

2. La *contraction de  $B$  en  $x$*  est le sous-semi-groupe de  $B$  défini par

$$B_{\geq x} = \{b \in B : x \leq_{\mathcal{L}} b\}.$$

La contraction de  $B$  en  $x$  ne dépend que de  $\text{supp}(B)$  au sens fort : si  $x$  et  $x'$  sont de même support, alors  $B_{\geq x} = B_{\geq x'}$ . On notera parfois  $B_{\geq X}$  en lieu et place de

$B_{\geq x}$  lorsque  $\text{supp}(x) = X$ . Le corollaire précédent montre que la restriction de  $B$  en  $y$  ne dépend que de  $\text{supp}(y)$ , mais seulement à isomorphisme près. Autrement dit, si  $y$  et  $y'$  sont deux éléments distincts de même support, on aura  $yB \cong y'B$  bien que  $yB \neq y'B$ .

Si  $x, y \in B$  satisfont  $x \leq_{\mathcal{L}} y$ , alors les deux constructions sont compatibles :

$$y(B_{\geq x}) = \{b \in B : x \leq_{\mathcal{L}} b \leq_{\mathcal{R}} y\} = (yB)_{\geq x}.$$

On peut donc noter cet ensemble  $yB_{\geq x}$  sans ambiguïté. Cette opération est appelée la *restriction-contraction*, et son résultat ne dépend que de  $\text{supp}(y)$  et de  $\text{supp}(x)$ .

#### 1.3.4 Chambres

Soit  $S$  un semi-groupe et  $z \in S$ . On dit que  $z$  est un *zéro à gauche* si  $z = zs$  pour tout  $s \in S$ . L'ensemble des zéros à gauche d'un semi-groupe  $S$  est un idéal bilatère. En effet, si  $z \in S$  est un zéro à gauche, alors  $z = zs$  pour tout  $s \in S$ , et  $sz$  est aussi un zéro à gauche car pour tout  $t \in S$ ,  $(sz)t = s(z t) = sz$ . De plus, si  $\mathfrak{m}$  est un idéal bilatère de  $S$  et que  $z$  est un zéro à gauche, alors  $\{z\} = z\mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{m}$ , d'où  $z \in \mathfrak{m}$ . Ainsi, s'il est non-vidé, l'ensemble des zéros à gauche est l'unique idéal bilatère minimal de  $S$ .

À cause de leur rôle important, notamment dans la théorie des arrangements d'hyperplans, les zéros à gauche d'une bande régulière à gauche portent un nom spécial.

**Définition 1.26.** Soit  $B$  une bande régulière à gauche; un zéro à gauche de  $B$  est appelé une *chambre*. On note  $\mathcal{C}(B)$  l'ensemble des chambres de  $B$ .

La proposition suivante caractérise les chambres d'une bande régulière à gauche en fonction des relations  $\leq_{\mathcal{R}}$  et  $\leq_{\mathcal{L}}$ . Elle permet en particulier de conclure que l'ensemble des chambres d'une bande régulière à gauche finie est non-vidé.

**Proposition 1.27** ((Brown, 2000), proposition 9). *Soit  $B$  une bande régulière à gauche et  $c \in B$ . Alors les énoncés suivants sont équivalents :*

1.  $\text{supp}(c)$  est le minimum de  $(\text{supp}(B), \leq)$  ;
2.  $c$  est minimal dans  $(B, \leq_{\mathcal{A}})$  ;
3.  $c$  est une chambre de  $B$ .

*Démonstration.* Supposons que  $\text{supp}(c)$  est le minimum de  $(\text{supp}(B), \leq)$ . Soit  $x \in B$  tel que  $x \leq_{\mathcal{A}} c$ . Cela entraîne  $\text{supp}(x) \leq \text{supp}(c)$ , et donc  $c \mathcal{L} x$  par minimalité de  $\text{supp}(c)$ . Comme  $x \leq_{\mathcal{A}} c$ , on a  $x = cx$ , et comme  $c \leq_{\mathcal{A}} x$ , on a  $c = cx$ . Donc  $x = c$ . L'énoncé 1 entraîne l'énoncé 2.

Supposons maintenant que  $c$  est minimal dans  $(B, \leq_{\mathcal{A}})$ . Soit  $x \in B$  ; alors  $cx \leq_{\mathcal{A}} c$ , d'où  $c = cx$  par minimalité. L'énoncé 2 entraîne l'énoncé 3.

Finalement, supposons que  $c$  est une chambre de  $B$ . Alors pour tout  $x \in B$ , on a  $\text{supp}(c) = \text{supp}(c) \text{supp}(x) \leq \text{supp}(x)$ , et donc  $\text{supp}(c)$  est bien le minimum de  $(\text{supp}(B), \leq)$ . ■

On donne maintenant deux corollaires de la proposition précédente. Le premier concerne les monoïdes locaux d'une bande régulière à gauche.

**Corollaire 1.28.** *Soit  $B$  une bande régulière à gauche et  $e \in B$ . Alors les énoncés suivants sont équivalents :*

1. Le monoïde local en  $e$  est un groupe.
2. Le monoïde local en  $e$  est un groupe trivial.
3.  $e$  est une chambre.

*Démonstration.* Comme  $\mathcal{H} = \mathcal{E}$ , tous les sous-groupes maximaux de  $B$  sont triviaux par la proposition 1.5, ce qui montre que les énoncés 1 et 2 sont équiva-

lents. Par la partie 3 de la proposition 1.27,  $e$  est une chambre si et seulement si  $eBe = eB = \{e\}$ , ce qui montre l'équivalence entre les énoncés 2 et 3. ■

Le deuxième corollaire caractérise les bandes régulières à gauche qui sont des groupes locaux (c.f. §1.1.5). Il s'agit d'une conséquence immédiate du corollaire précédent, mais on peut aussi le démontrer grâce au lemme C.3.

**Corollaire 1.29.** *Une bande régulière à gauche finie est un groupe local si et seulement si  $B = C(B)$ .* ■

#### 1.4 Bandes régulières à gauche libres

Cette section est consacrée à l'étude d'une famille particulière de bandes régulières à gauche, à savoir les bandes régulières à gauche libres. Ces bandes régulières à gauche sont similaires aux objets libres qu'on retrouve dans d'autres catégories : groupes libres, monoïdes libres, semi-groupes libres, etc. Ils jouent donc un rôle fondamental en permettant de décrire les bandes régulières à gauche à l'aide de présentations par générateurs et relations.

La première partie de cette section est consacrée à la construction des bandes régulières à gauche libres et à leur propriété universelle. On étudiera ensuite leur structure d'ensemble ordonné (par la relation  $\leq_{\mathcal{Q}}$ ), ainsi que leur support. On terminera la section par une étude sommaire des bandes régulières à gauche libres partiellement commutatives.

##### 1.4.1 Semi-groupes et monoïdes libres

La construction des bandes régulières à gauche libres repose le monoïde libre. On prend donc le temps de préciser quelques notations et définitions qui seront utiles.

Fixons un ensemble  $A$  (possiblement infini), qu'on appelle *alphabet*. Les éléments de  $A$  seront appelés les *lettres*, et les suites finies de lettres seront appelées les

*mots*. L'unique suite vide de  $A$  est appelée le *mot vide* et sera notée  $\varepsilon$ . On note  $A^*$  l'ensemble des mots sur  $A$ , et  $A^+ = A^* \setminus \varepsilon$  désigne l'ensemble des mots non-vides.

Deux mots  $u, v \in A^*$  peuvent être concaténés pour former un mot qu'on note simplement  $uv$ . Muni de la concaténation, l'ensemble  $A^*$  forme un monoïde; il s'agit du *monoïde libre sur  $A$* . L'ensemble  $A^+$  en est un sous-semi-groupe, et il s'agit du *semi-groupe libre sur  $A$* .

À chaque lettre  $a \in A$  correspond la suite  $(a) \in A^+$  de longueur 1; afin d'alléger la notation, on désignera par  $a$  à la fois la lettre  $a \in A$  et la suite  $(a)$ . En utilisant cette notation, chaque mot peut s'écrire comme la concaténation de ses lettres, en sorte que le mot  $u = (a_1, \dots, a_n) \in A^*$  peut aussi être noté  $u = a_1 \dots a_n$ . On préférera cette seconde écriture.

Soit  $u, v \in A^*$ ; on dit que  $v$  est un *sous-mot de  $u$* , noté  $v \subseteq u$ , si  $v$  est une sous-suite de  $u$ . La relation  $\subseteq$  est un ordre partiel sur  $A^*$ . Un *facteur de  $u$*  est un mot  $f$  tel que  $u \leq_{\mathcal{J}} f$ , ou autrement dit tel que  $u = xfy$ ,  $x, y \in A^*$ . De même,  $f$  est un *préfixe de  $u$*  si  $u \leq_{\mathcal{L}} f$  (alternativement  $u = fx$ ,  $x \in A^*$ ), et un *suffixe de  $u$*  si  $u \leq_{\mathcal{R}} f$  (alternativement,  $u = xf$ ,  $x \in A^*$ ). On note que  $A^*$  est  $\mathcal{J}$ -triviale, et donc toutes ses relations de Green sont triviales et tous ses préordres de Green sont des relations d'ordre.

Soit  $u \in A^*$ , on désigne par  $|u|$  la longueur de  $u$  en tant que suite de lettres. On note que  $\varepsilon$  est l'unique mot de longueur 0. Si  $A' \subseteq A$ , alors le *nombre d'occurrences de  $A'$  dans  $u$* , noté  $|u|_{A'}$ , est la longueur du plus long sous-mot de  $u$  qui est un mot de  $A'$  :

$$|u|_{A'} = \max\{|v| : v \subseteq u \text{ et } v \in (A')^*\}.$$

Dans le cas particulier où  $A' = \{a\}$  est un singleton, on notera  $|u|_{\{a\}} = |u|_a$ .

Soit  $u \in A^*$ ; on appelle *l'alphabet de  $u$* , noté  $\text{alph}(u)$ , l'ensemble des lettres qui ap-

paraissent dans  $u$ . De manière équivalente,  $\text{alph}(u)$  est le plus petit sous-ensemble  $A' \subseteq A$  tel que  $u \in (A')^*$ . On peut aussi décrire  $\text{alph}(u)$  par la formule

$$\text{alph}(u) = \{a \in A : |u|_a \geq 1\}.$$

On observe que la surjection  $\text{alph} : A^* \rightarrow 2^A$  est le semi-treillis universel de  $A^*$  au sens de (Grillet, 1995). De même,  $\text{alph} : A^+ \rightarrow 2^A \setminus \{\emptyset\}$  donne le semi-treillis universel de  $A^+$ .

#### 1.4.2 Construction des bandes régulières à gauche libres

La bande régulière à gauche libre sur un ensemble  $A$  sera formée par l'ensemble des mots sans répétition de  $A^+$ , et son opération sera définie par la concaténation suivie de la suppression des répétitions de gauche à droite. Notre objectif est maintenant de rendre cette définition plus explicite et de démontrer la propriété universelle correspondante. À cette fin, on introduit l'opération suivante sur  $A^*$ .

**Définition 1.30.** Soit  $A$  un ensemble et  $u, v \in A^*$ . On appelle *différence de  $u$  et  $v$* , et on note  $u \setminus v$ , le sous-mot de  $u$  obtenu en supprimant toutes les occurrences des lettres de  $\text{alph}(v)$ .

Cette opération peut être décrite plus explicitement grâce à certains morphismes. Étant donné un ensemble  $A' \subseteq A$ , on note  $\kappa_{A'} : A^* \rightarrow (A \setminus A')^*$  l'unique morphisme qui préserve les lettres de  $A \setminus A'$  et qui envoie les lettres de  $A'$  sur le mot vide  $\varepsilon$ . Pour  $v \in A^*$ , notons  $\kappa_v = \kappa_{\text{alph}(v)}$ . La différence  $u \setminus v$  est alors décrite par la formule  $u \setminus v = \kappa_v(u)$ .

Le lemme suivant porte sur trois propriétés élémentaires de cette opération.

**Lemme 1.31.** Soit  $u, v, w \in A^*$ . Alors

1.  $uv \setminus w = (u \setminus w)(v \setminus w)$ ;

$$2. (u \setminus v) \setminus w = u \setminus vw;$$

$$3. u \setminus v = u \setminus w \iff \text{alph}(u) \cap \text{alph}(v) = \text{alph}(u) \cap \text{alph}(w).$$

*Démonstration.* La propriété 1 est une conséquence immédiate du fait que  $\kappa_w$  est un morphisme.

Pour la propriété 2, on remarque d'abord que

$$\kappa_w \circ \kappa_v = \kappa_{\text{alph}(w)} \circ \kappa_{\text{alph}(v)} = \kappa_{\text{alph}(w) \cup \text{alph}(v)} = \kappa_{\text{alph}(vw)} = \kappa_{vw}.$$

En conséquence,

$$(u \setminus v) \setminus w = \kappa_w \circ \kappa_v(u) = \kappa_{vw}(u) = u \setminus vw,$$

et la propriété 2 est démontrée.

Quant à la propriété 3, elle est équivalente à la formule

$$\kappa_v(u) = \kappa_w(u) \iff \text{alph}(\kappa_v(u)) = \text{alph}(\kappa_w(u)),$$

laquelle découle en fait immédiatement de la formule

$$\kappa_v(u) \subseteq \kappa_w(u) \iff \text{alph}(\kappa_v(u)) \subseteq \text{alph}(\kappa_w(u)).$$

Il nous suffit donc de vérifier les deux implications réciproques de la formule ci-dessus. Il est évident, à partir de la définition de sous-mot, que  $\kappa_v(u) \subseteq \kappa_w(u)$  entraîne  $\text{alph}(\kappa_v(u)) \subseteq \text{alph}(\kappa_w(u))$ . Supposons que  $\text{alph}(\kappa_v(u)) \subseteq \text{alph}(\kappa_w(u))$ . Cela implique que  $\kappa_v(u) \in (A \setminus \text{alph}(w))^*$ , d'où  $\kappa_w(\kappa_v(u)) = \kappa_v(u)$ . Or on a aussi  $\kappa_w(\kappa_v(u)) = \kappa_v(\kappa_w(u)) \subseteq \kappa_w(u)$ , ce qui démontre la seconde implication. ■

On dira qu'un mot  $u \in A^*$  est *injectif*, ou *sans répétition*, si  $|u|_a \leq 1$  pour tout  $a \in A$ . On peut voir un mot  $u \in A^*$  comme une fonction  $u : \{1, \dots, |u|\} \rightarrow A$ , où  $u(i)$  est simplement la  $i$ -ième lettre de  $u$ . On a alors que  $u$  est un mot injectif si et seulement si  $u$  est une fonction injective. On notera  $B_A$  l'ensemble des mots injectifs de  $A^+$ .

**Proposition 1.32.** *Soit  $\star$  l'opération définie sur  $A^*$  par  $u \star v = u(v \setminus u)$ . Alors  $(A^*, \star)$  est une bande régulière à gauche dont  $B_A$  est un sous-semi-groupe.*

*Démonstration.* Vérifions d'abord que  $(A^*, \star)$  est un semi-groupe. Fixons trois mots  $u, v, w \in A^*$ . Alors  $\text{alph}(u(v \setminus u)) = \text{alph}(u) \cup \text{alph}(v) = \text{alph}(uv)$ . Par la propriété 3 du lemme 1.31, on a donc  $w \setminus u(v \setminus u) = w \setminus uv$ . Par conséquent,

$$(u \star v) \star w = u(v \setminus u)(w \setminus u(v \setminus u)) = u(v \setminus u)(w \setminus uv).$$

De plus, par la propriété 1 du lemme 1.31,  $(v(w \setminus v)) \setminus u = (v \setminus u)((w \setminus v) \setminus u)$  et

$$u \star (v \star w) = u((v(w \setminus v)) \setminus u) = u((v \setminus u)((w \setminus v) \setminus u)).$$

Par la propriété 2 du lemme 1.31,  $(w \setminus v) \setminus u = w \setminus uv$ . On a donc

$$u \star (v \star w) = u(v \setminus u)(w \setminus uv) = (u \star v) \star w.$$

Donc  $\star$  est bien associative.

Montrons ensuite que  $(A^*, \star)$  est une bande régulière à gauche. On note que tout mot  $x$  tel que  $\text{alph}(x) \supseteq \text{alph}(u)$  satisfait aussi  $u \setminus x = \varepsilon$ . Par conséquent,

$$u \star v \star u = u(v \setminus u)(u \setminus uv) = u(v \setminus u)\varepsilon = u(v \setminus u) = u \star v.$$

Cela montre que  $(A^*, \star)$  est régulier à gauche. On montre que c'est une bande en remplaçant  $v$  par  $\varepsilon$  dans l'équation précédente.

Finalement, il nous reste à démontrer que  $B_A$  est stable sous  $\star$ . Soit  $u, v \in B_A$  et  $a \in A$ . Alors

$$|u \star v|_a = |u(v \setminus u)|_a = |u|_a + |v \setminus u|_a.$$

Les deux mots  $u$  et  $v \setminus u$  ayant un alphabet disjoint, au plus une des deux valeurs  $|u|_a$  et  $|v \setminus u|_a$  peut être non-nulle, d'où

$$|u \star v|_a \leq \max\{|u|_a, |v \setminus u|_a\} \leq \max\{|u|_a, |v|_a\} \leq 1.$$

Donc  $u \star v$  est un mot injectif. De plus,  $u \star v$  n'est jamais le mot vide car  $u$  en est un préfixe non-vide. ■

La proposition suivante montre que  $(B_A, \star)$  est bien la bande régulière à gauche libre sur  $A$ . La preuve consiste essentiellement à bien appliquer la propriété universelle de  $A^+$ .

**Proposition 1.33.** *Soit  $A$  un ensemble et  $\iota : A \rightarrow B_A$  l'inclusion. Alors pour toute bande régulière à gauche  $B$  et toute fonction  $\varphi : A \rightarrow B$ , il existe un unique morphisme  $\bar{\varphi} : B_A \rightarrow B$  qui satisfait  $\bar{\varphi} \circ \iota = \varphi$ .*

*Démonstration.* On note que  $A$  est une partie génératrice de  $B_A$ , et par conséquent l'unicité découle directement de la relation  $\bar{\varphi} \circ \iota = \varphi$ . Il nous suffit donc de démontrer l'existence de  $\bar{\varphi}$ .

Par la propriété universelle du semi-groupe libre  $A^+$ , la fonction  $\varphi$  s'étend en un morphisme de semi-groupes  $A^+ \rightarrow B$ . La restriction de ce morphisme à  $B_A$  nous donne une fonction  $\bar{\varphi} : B_A \rightarrow B$  qui satisfait  $\bar{\varphi} \circ \iota = \varphi$  par construction. Il nous suffit donc de montrer que  $\bar{\varphi}$  est un morphisme pour l'opération  $\star$ .

Soit  $a \in A$  et  $u \in B_A$ . Si  $a \notin \text{alph}(u)$ , alors  $u \star a = ua$  et l'égalité  $\bar{\varphi}(u \star a) = \bar{\varphi}(u)\bar{\varphi}(a)$  est simplement une conséquence du fait que  $\bar{\varphi}$  est la restriction d'un morphisme de  $A^+$ . Si au contraire  $a \in \text{alph}(u)$ , on a  $\bar{\varphi}(u \star a) = \bar{\varphi}(u)$  et il nous faut vérifier que  $\bar{\varphi}(u) = \bar{\varphi}(u)\bar{\varphi}(a)$ . Or  $a \in \text{alph}(u)$  entraîne que  $u = pas$ , où  $p, s \in B_A$ , et donc  $\bar{\varphi}(u) = \bar{\varphi}(p)\bar{\varphi}(a)\bar{\varphi}(s)$ . Comme  $B$  est une bande régulière à gauche,

$$\bar{\varphi}(u) = \bar{\varphi}(p)\bar{\varphi}(a)\bar{\varphi}(s) = \bar{\varphi}(p)\bar{\varphi}(a)\bar{\varphi}(s)\bar{\varphi}(a) = \bar{\varphi}(u)\bar{\varphi}(a).$$

Comme  $A$  engendre  $B_A$ , on conclut qu'à plus forte raison,  $\bar{\varphi}(u \star v) = \bar{\varphi}(u)\bar{\varphi}(v)$  pour tout  $v \in A^*$ . Donc  $\bar{\varphi}$  est bien un morphisme. ■

La bande régulière à gauche  $B_A$  ne dépend donc, à isomorphisme près, que de  $|A|$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on note  $B_n$  la bande régulière à gauche libre sur l'ensemble  $\{1, \dots, n\}$ . Par conséquent, si  $A$  est un ensemble fini,  $B_A$  est isomorphe à  $B_n$  pour un (unique) entier  $n$ .

### 1.4.3 Relation $\mathcal{R}$

On va maintenant démontrer que la relation  $\leq_{\mathcal{R}}$  d'une bande régulière à gauche libre sur un ensemble  $A$  est complètement déterminée par la relation correspondante dans  $A^*$ .

On observe d'abord que si  $u \in B_A$  s'écrit comme la concaténation de deux mots  $v_1, v_2$ , alors ces mots sont aussi sans répétition et satisfont  $\text{alph}(v_1) \cap \text{alph}(v_2) = \emptyset$ . Il découle de cette observation que  $v_1 \star v_2 = v_1 v_2 = u$ . En particulier, si  $v$  est un préfixe de  $u$ , alors il existe  $s \in A^*$  tel que  $u = vs = v \star s$ , et donc  $u \leq_{\mathcal{R}} v$  dans  $B_A$ . Réciproquement, si  $u \leq_{\mathcal{R}} v$ , alors  $u = v \star u = v(u \setminus v)$  et  $v$  est un préfixe de  $u$ , c'est-à-dire que  $u \leq_{\mathcal{R}} v$  dans le monoïde libre  $A^*$ .

Cette observation nous permet de décrire simplement les relations de couverture de  $\leq_{\mathcal{R}}$  dans la bande régulière à gauche libre : une relation  $u \leq_{\mathcal{R}} v$  est une relation de couverture si et seulement si  $u = va$ ,  $a \in A \setminus \text{alph}(u)$ .

En particulier, le dual de l'ensemble ordonné  $(B_A, \leq_{\mathcal{R}})$  est rangé par la fonction  $u \mapsto |\text{alph}(u)|$ . Dans le cas où  $A$  est fini, alors  $(B_A, \leq_{\mathcal{R}})$  est rangé par la fonction  $u \mapsto |A \setminus \text{alph}(u)|$  et l'ensemble des chambres de  $B_A$  est en bijection avec les permutations de  $A$ . Les éléments maximaux de  $B_A$  sont de rang  $|A| - 1$  et sont simplement les éléments de  $A$ . La bande régulière à gauche  $B_A^1$ , obtenue par adjonction d'un élément neutre (c.f. §1.2.1), a pour maximum le mot vide, dont le rang est  $|A|$ . De plus, chaque élément  $u \in B_A$  couvre exactement  $|A \setminus \text{alph}(u)|$  éléments.

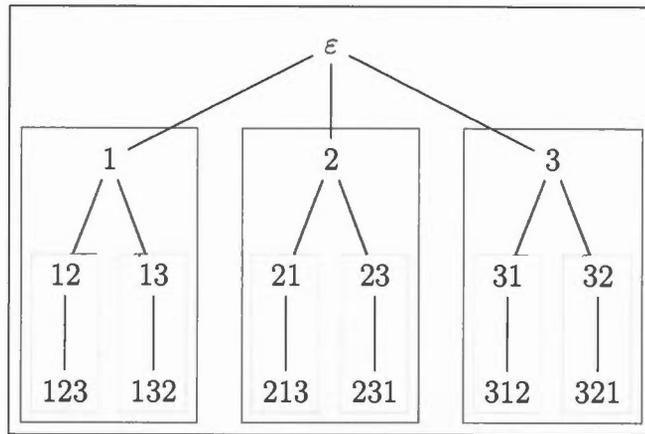


Figure 1.3 Illustration de la structure récursive de  $B_3^1$ .

#### 1.4.4 Structure récursive

Les bandes régulières à gauche libres ont, de manière naturelle, une structure récursive : la bande régulière à gauche libre sur un ensemble  $A$  est la réunion disjointe des bandes régulières à gauche libres sur  $A \setminus \{a\}$ ,  $a \in A$ . Si  $A$  est un ensemble fini, le processus se termine éventuellement avec  $B_1 = \{1\}$ , ce qui nous permet d'obtenir une formule explicite pour  $|B_n|$ .

Fixons une lettre  $a \in A$ . Alors la restriction  $a \star B_A$  est isomorphe à  $B_{A \setminus \{a\}}^1$ . En effet, tout élément de  $a \star B_A$  s'écrit, de manière unique, comme la concaténation de  $a$  et d'un mot  $u \in B_A^1$  qui satisfait  $a \notin \text{alph}(u)$ . La règle  $\varphi(au) = u$  définit donc une fonction  $\varphi : B_A \rightarrow B_{A \setminus \{a\}}^1$ . Il s'agit d'un morphisme car

$$\varphi(au \star av) = \varphi(a(u \star v)) = u \star v = \varphi(u) \star \varphi(v).$$

Son inverse est la fonction  $\psi : B_{A \setminus \{a\}}^1 \rightarrow B_A$  définie par  $\psi(u) = au$ , ce qui montre que  $\varphi$  est un isomorphisme.

Si  $A = \{1, \dots, n\}$ , la discussion qui précède nous donne une famille de morphismes  $\iota_i : B_{n-1}^1 \rightarrow B_n$ , où  $1 \leq i \leq n$  et  $B_n$  est alors la réunion disjointes des images

$\text{im}(\iota_i)$ . En particulier, on obtient une relation récursive pour la cardinalité des bandes régulières à gauche  $B_n^1$  :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |B_{n+1}^1| = n|B_n^1| + 1.$$

Une preuve par récurrence tout à fait standard nous permet alors d'obtenir le résultat suivant :

**Proposition 1.34.** *Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,*

$$|B_n^1| = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} k!$$

*Démonstration.* Notons  $a_n = |B_n^1|$ . Le cas de base est évident et si la formule est vérifiée pour  $a_{n-1}$ , on a

$$a_n - 1 = n \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} k! = \sum_{k=0}^{n-1} n \frac{(n-1)!}{(n-1-k)!} = \sum_{k=1}^n \frac{n!}{(n-k)!} = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} k!$$

ce qui termine la récurrence. ■

Une première conséquence de ce résultat est qu'une bande régulière à gauche finiment engendrée est finie. En effet, toute bande régulière à gauche finiment engendrée est l'image de  $B_n$  par un morphisme surjectif pour un certain  $n \in \mathbb{N}$ , et est donc finie. Les bandes régulières à gauche sont donc *localement finies*.

On donne une deuxième conséquence de ce fait dans le corollaire suivant, qui concerne le nombre de bandes régulières à gauche engendrées par un ensemble fini.

**Corollaire 1.35.** *Soit  $A$  un ensemble fini de cardinalité  $n \in \mathbb{N}$ . Le nombre de bandes régulières à gauche ayant  $A$  pour ensemble de générateurs est borné par le nombre de congruences de  $B_n$ .* ■

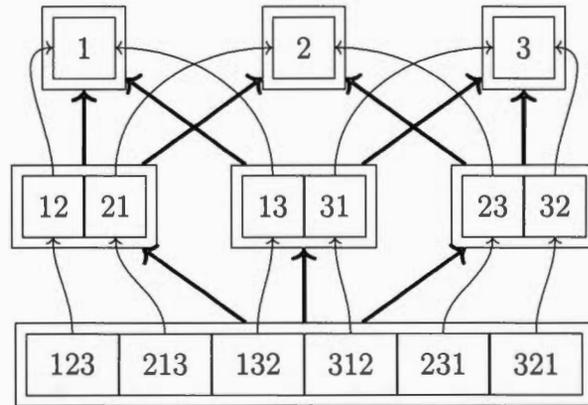


Figure 1.4 Les relations de Green dans la bande régulière à gauche libre  $B_3$ .

Sachant que le nombre de congruences sur  $B_n$  est borné par  $|B_n \times B_n| = |B_n|^2$ , on obtient une borne pour le nombre de bandes régulières à gauche engendrées par un ensemble de cardinalité fixée.

#### 1.4.5 Support

Soit  $A$  un ensemble. On a déjà mentionné que  $\text{alph} : A^* \rightarrow 2^A$  est le semi-treillis universel du monoïde libre  $A^*$ . On va démontrer dans cette section que la restriction de cette fonction à  $B_A$  nous donne aussi le support de  $B_A$  en tant que bande régulière à gauche. Plus précisément, on démontre le résultat suivant :

**Proposition 1.36.** *Soit  $A$  un ensemble. Alors la fonction  $\text{alph}$  induit un isomorphisme  $\varphi : \text{supp}(B_A) \cong (2^A, \cup)$  qui satisfait  $\varphi \circ \text{supp} = \text{alph}$ .*

*Démonstration.* On commence par remarquer que

$$\forall u, v \in A^*, \quad \text{alph}(u * v) = \text{alph}(uv) = \text{alph}(u) \cup \text{alph}(v).$$

Par conséquent,  $\text{alph} : B_A \rightarrow (2^A, \cup)$  est un morphisme. Puisque  $2^A$  est un semi-treillis, il existe par la propriété universelle de  $\text{supp}(B_A)$  (proposition 1.21) un

morphisme  $\varphi : \text{supp}(B_A) \rightarrow 2^A$  tel que  $\varphi \circ \text{supp} = \text{alph}$ . La surjectivité de  $\text{alph}$  entraîne immédiatement la surjectivité de  $\varphi$ .

Montrons que  $\varphi$  est injective. Supposons que deux éléments  $u, v \in B$  satisfont  $\text{alph}(u) = \text{alph}(v)$ . Alors  $u \setminus v = \varepsilon = v \setminus u$ , en sorte que  $u \star v = u$  et  $v \star u = v$ . Donc  $u \mathcal{L} v$  pour tout  $u, v \in \ker(\text{alph})$ , c'est-à-dire  $\ker(\text{alph}) \subseteq \ker(\text{supp})$ . La relation  $\varphi \circ \text{supp} = \text{alph}$  nous donne l'inclusion réciproque, d'où  $\ker(\text{supp}) = \ker(\text{alph})$ . Par le théorème d'isomorphisme (proposition 1.1), on conclut que  $\varphi$  est injectif. ■

Cette proposition nous permet de conclure que  $\text{alph} : B_A \rightarrow 2^A$  satisfait la propriété universelle du support de  $B_A$ . Pour la suite, on identifiera donc les deux semi-treillis  $\text{supp}(B_A)$  et  $2^A$ , et on se permettra de confondre les morphismes  $\text{supp}$  et  $\text{alph}$ .

#### 1.4.6 Présentations par générateurs et relations

De manière analogue aux groupes, aux monoïdes ou aux semi-groupes, il est possible de définir une notion de présentation par générateurs et relations dans la catégorie des bandes régulières à gauche. En fait, les définitions et résultats élémentaires concernant les présentations dans les catégories usuelles (semi-groupes, monoïdes, groupes) s'appliquent mutatis mutandis aux bandes régulières à gauche.

Fixons un ensemble  $A$  quelconque, et soit  $R \subseteq B_A \times B_A$ . Alors il existe une unique congruence  $\mathcal{C}$  de  $B_A$  qui contient  $R$  et qui est minimale pour cette propriété ; on l'appelle la *congruence engendrée par  $R$* . Le quotient  $B_A/\mathcal{C}$  sera noté  $\langle A|R \rangle$ .

**Définition 1.37.** Soit  $B$  une bande régulière à gauche. Une *présentation de  $B$  par générateurs et relations*, ou simplement *présentation de  $B$* , est un triplet  $(A, R, \varphi)$  tel que  $\varphi : \langle A|R \rangle \cong B$ . L'ensemble  $A$  est appelé *l'ensemble des générateurs* et  $R$  est appelé *l'ensemble des relations*.

Le résultat suivant motive les notions introduites. La preuve est standard et repose sur la propriété universelle de  $B_A$  et sur le théorème d'isomorphisme.

**Proposition 1.38.** *Soit  $B$  une bande régulière à gauche et  $A$  une partie génératrice de  $B$ . Alors  $B$  admet une présentation de générateurs  $A$ .*

*Démonstration.* Par la propriété universelle de  $B_A$ , il existe un morphisme surjectif  $\psi : B_A \rightarrow B$  qui satisfait  $\psi(a) = a$  pour tout  $a \in A$ . Par le théorème d'isomorphisme,  $\psi$  induit un isomorphisme  $\varphi : B_A / \ker(\psi) \cong B$ . On choisit ensuite un ensemble  $R$  qui engendre la congruence  $\ker(\psi)$ , ce qui est toujours possible quitte à prendre  $R = \ker(\psi)$ . On a alors que  $(A, R, \varphi)$  est une présentation de  $B$ . ■

#### 1.4.7 Bandes régulières à gauche libres partiellement commutatives

Les bandes régulières à gauche libres partiellement commutatives sont inspirées de la notion analogue de monoïdes libres partiellement commutatifs, aussi appelés monoïdes des traces (Cartier et Foata, 1969). Ces bandes régulières à gauche ont été introduites dans (Margolis *et al.*, 2015b) à cause de leurs liens avec certaines marches aléatoires ; voir par exemple (Chung et Graham, 2012).

Soit  $G$  un graphe (simple, non-orienté). On désigne par  $\mathcal{V}(G)$  l'ensemble des sommets de  $G$ , et par  $\mathcal{E}(G)$  l'ensemble de ses arêtes.

**Définition 1.39.** Soit  $G$  un graphe, on appelle *bande régulière à gauche libre partiellement commutative engendrée par  $G$*  la bande régulière à gauche

$$B_G = \langle \mathcal{V}(G) \mid \{(ab, ba) : \{a, b\} \in \mathcal{E}(G)\} \rangle.$$

Soit  $G$  et notons  $\mathcal{V}(G) = A$ . Le noyau de la surjection canonique  $\pi : B_A \rightarrow B_G$  est la congruence de  $B_A$  engendrée par les paires  $(ab, ba)$  où  $\{a, b\}$  est une arête de  $G$ . On va donner une description plus explicite de cette congruence. À cette

fin, on définit la relation  $\leftrightarrow_R$  sur  $B_A$  de la manière suivante : pour  $u, v \in B_A$ , on a  $u \leftrightarrow_R v$  si et seulement si  $u = p(xy)s, v = p(yx)s$  où  $p, s \in B_A^1$  et  $\{x, y\} \in \mathcal{E}(G)$ . Une relation de cette forme est appelée un *système de réécriture*, et il est bien connu que la fermeture transitive de  $\leftrightarrow_R$  coïncide avec la congruence engendrée par  $R$  (Grillet, 1995). Plus précisément, on a  $\pi(u) = \pi(v)$  si et seulement s'il existe une suite finie d'éléments  $s_0, \dots, s_k \in B_A$  tels que

$$s_0 = u, \quad s_k = v, \quad s_{i-1} \leftrightarrow_R s_i.$$

On voit aisément que la relation  $\leftrightarrow_R$  préserve le support, au sens où  $u \leftrightarrow_R v$  entraîne  $\text{supp}(u) = \text{supp}(v)$ . À plus forte raison, on conclut que  $\pi(u) = \pi(v)$  entraîne  $\text{supp}(u) = \text{supp}(v)$ . Par conséquent, le morphisme  $\text{supp} : B_A \rightarrow 2^A$  induit un morphisme surjectif  $\overline{\text{supp}} : B_G \rightarrow 2^A$  qui satisfait  $\overline{\text{supp}} \circ \pi = \text{supp}$ . En particulier, cela entraîne que  $\overline{\text{supp}} : B_G \rightarrow 2^A$  satisfait la propriété universelle du support de  $B_G$ . On se permettra donc de noter  $\text{supp}$  au lieu de  $\overline{\text{supp}}$ .

Ceci étant, on veut être capable de déterminer si deux éléments de  $B_G$ , donnés sous la forme d'un produit d'éléments de  $A$ , sont égaux ; autrement dit, on veut résoudre le problème du mot de  $B_G$ . La solution proposée dans (Margolis *et al.*, 2015b) repose sur une bijection entre les éléments de  $B_G$  et les orientations acycliques des sous-graphes induits du complémentaire de  $G$ . La discussion qui suit détaille cette bijection.

Le *complémentaire* de  $G$  est le graphe  $\overline{G}$  de mêmes sommets que  $G$ , et dont les arêtes sont données par

$$\mathcal{E}(\overline{G}) = \{\{a, a'\} : a \neq a', \{a, a'\} \notin \mathcal{E}(G)\}.$$

Le *sous-graphe induit* de  $\overline{G}$  par un sous-ensemble  $A' \subseteq \mathcal{V}(\overline{G})$ , noté  $\overline{G}[A']$ , est le graphe de sommets  $A'$  et d'arêtes  $\mathcal{E}(\overline{G}[A']) = \mathcal{E}(\overline{G}) \cap (A' \times A')$ .

Pour chaque mot  $u \in B_A$ , on définit une application  $p_u : A \rightarrow 2^A$  par

$$p_u(a) = \{a' \in A : \exists x, y, z \in A^*, u = xa'yz\} \cap \{a' \in A : \{a, a'\} \in \mathcal{E}(\overline{G})\}.$$

En d'autres mots,  $p_u(a)$  est l'ensemble des lettres qui apparaissent à gauche d'une occurrence de  $a$  dans  $u$  et qui ne commutent pas avec  $a$ . On observe que cet ensemble est préservé par la relation  $\leftrightarrow_R$ , et donc à plus forte raison par la congruence  $\ker(\pi)$ . En particulier, la fonction  $p_u$  ne dépend que de  $\pi(u)$ . Le lemme suivant montre que, réciproquement,  $\pi(u)$  ne dépend que de  $p_u$ .

**Lemme 1.40.** *Soit  $u, v \in B_A$  tels que  $\text{supp}(u) = \text{supp}(v)$  et  $p_u = p_v$ . Alors  $\pi(u) = \pi(v)$ .*

*Démonstration.* Notons  $A' = \text{supp}(u) = \text{supp}(v)$ . On fait la preuve par récurrence sur  $|u| = |v|$ . L'énoncé est évident lorsque  $|u| = |v| = 1$ , car la condition  $\text{supp}(u) = \text{supp}(v)$  suffit alors à assurer  $u = v$ .

Fixons  $a_0 \in A'$  et  $u' \in B_A^1$  tels que  $u = a_0u'$ . On a alors que  $p_u(a_0) = \emptyset = p_v(a_0)$ . Par conséquent, on peut écrire  $v = v'a_0v''$  où  $v', v'' \in B_A^1$  et  $\{a, a_0\} \in \mathcal{E}(G)$  pour tout  $a \in \text{supp}(v')$ . En particulier,  $\pi(v'a_0) = \pi(a_0v')$ . Les mots  $u'$  et  $v'v''$  ont le même support et satisfont de plus  $p_{u'} = p_{v'v''}$ ; on peut donc conclure, par récurrence, qu'ils sont congrus modulo  $\ker(\pi)$ . On a finalement les égalités suivantes :

$$\pi(u) = \pi(a_0u') = \pi(a_0v'v'') = \pi(v'a_0v'') = \pi(v).$$

■

Ainsi, deux mots  $u, v \in B_A$  définissent le même élément de  $B_G$  si et seulement si les fonctions  $p_u$  et  $p_v$  coïncident. Or, la fonction  $p_u$  nous permet aussi de construire une orientation acyclique du graphe induit  $\overline{G}[\text{supp}(u)]$ . Soit  $\mathcal{O}_u$  la relation définie sur les sommets par

$$a' \mathcal{O}_u a \iff a' \in p_u(a).$$

Cette relation donne une orientation des arêtes de  $\overline{G}[\text{supp}(u)]$ . En effet, si  $\{a, a'\}$  est une arête de  $\overline{G}[\text{supp}(u)]$ , alors on a soit  $a' \in p_u(a)$  ou  $a \in p_u(a')$ , et ces deux cas sont mutuellement exclusifs. De plus, l'existence d'un cycle dans le graphe orienté défini par  $\mathcal{O}_u$  entraînerait l'existence d'une lettre  $a \in A$  qui satisfait  $a \in p_u(a)$ , ce qui est absurde. On conclut que  $\mathcal{O}_u$  est une orientation acyclique de  $\overline{G}[\text{supp}(u)]$  qui ne dépend que de  $\pi(u)$ .

Soit  $A' \subseteq A$  et fixons une orientation acyclique  $\mathcal{O}$  du sous-graphe induit  $\overline{G}[A']$ . On va construire un mot  $u \in B_A$  tel que  $\mathcal{O}_u = \mathcal{O}$ . On propose la construction récursive suivante : soit  $A''$  l'ensemble des sommets  $a \in A'$  dont le degré entrant est nul, et  $u'$  un mot sans répétition tel que  $\text{supp}(u') = A''$ . Si le complément  $A' \setminus A''$  est vide, alors  $\mathcal{O}_{u'} = \mathcal{O}$  et on a terminé. Sinon, on considère la restriction de l'orientation  $\mathcal{O}$  sur le sous-graphe induit  $\overline{G}[A' \setminus A'']$ , qu'on notera  $\mathcal{O}'$ . Comme  $A''$  est non-vide, on peut trouver par récurrence un mot  $v$  tel que  $\mathcal{O}_v = \mathcal{O}'$ . Le mot  $u = u'v$  satisfait alors  $\text{supp}(u'v) = A'$ . De plus, pour toute arête  $\{a, a'\} \in \mathcal{E}(\overline{G}[A'])$ , on a  $a\mathcal{O}_{u'v}a'$  si et seulement si

$$a \in p_v(a') \quad \text{ou} \quad a \in \text{supp}(u), a' \in \text{supp}(v).$$

Or, par construction, on a aussi  $a\mathcal{O}a'$  si et seulement si

$$a\mathcal{O}'a' \quad \text{ou} \quad a \in A'', a' \notin A''.$$

Par conséquent,  $\mathcal{O} = \mathcal{O}_{u'v}$ . La proposition suivante résume ce qu'on vient de démontrer.

**Proposition 1.41.** *Soit  $G$  un graphe ; alors les éléments de  $B_G$  correspondent bijectivement aux orientations acycliques des sous-graphes induits de  $\overline{G}$  par l'application  $u \mapsto \mathcal{O}_u$ . ■*

La proposition qui précède nous permet de comprendre la structure des bandes

régulières à gauche libres partiellement commutatives engendrées par un graphe biparti complet.

**Proposition 1.42.** *Soit  $K_{m,n}$  le graphe biparti complet d'ordre  $(m, n)$ . Alors*

$$B_{K_{m,n}} \cong B_m \times B_n.$$

*Démonstration.* Comme  $\overline{K}_{m,n}$  est l'union disjointe des deux graphes complets  $K_m$  et  $K_n$ , ses orientations acycliques correspondent aux paires d'orientations acycliques de  $K_m$  et  $K_n$ . Or, les orientations acycliques des graphes complets  $K_m$  et  $K_n$  correspondent aux bandes régulières à gauche libres partiellement commutatives engendrées par les graphes discrets  $D_m$  et  $D_n$ . Ces bandes régulières à gauche sont isomorphes à  $B_n$  et  $B_m$  de manière évidente. Ces correspondances définissent un isomorphisme  $B_{K_{m,n}} \cong B_m \times B_n$ . ■

Mises à part quelques familles précises de graphes (comme les graphes bipartis complets, les graphes complets, ou les graphes discrets), la structure des bandes régulières à gauche libres partiellement commutatives semble avoir été assez peu étudiée. La conjecture suivante nous pousse à croire que certaines bandes régulières à gauche libres partiellement commutatives ont une structure intéressante du point de vue combinatoire.

**Conjecture 1.43.** *Soit  $C_n$  le graphe cyclique d'ordre  $n$  et  $P_n$  la chaîne à  $n$  sommets. Alors*

$$|B_{C_n}| = n!, \quad |B_{P_n}| = \sum_{k=1}^n k!.$$

## 1.5 Arrangements d'hyperplans

On étudie, dans cette section, certaines bandes régulières à gauche associées aux arrangements réels d'hyperplans. Ces bandes régulières à gauche constituent l'une

des principales motivations derrière les développements récents de la théorie des bandes régulières à gauche ; voir par exemple (Bidigare *et al.*, 1999), (Brown et Diaconis, 1998), (Brown, 2000).

### 1.5.1 Définitions et propriétés élémentaires

La définition suivante introduit la notion principale de cette section.

**Définition 1.44.** Soit  $V$  un espace vectoriel réel de dimension finie. Un *arrangement d'hyperplans dans  $V$*  est un ensemble fini  $\mathcal{A}$  d'hyperplans affines de  $V$ .

Un arrangement  $\mathcal{A}$  est dit *central* lorsque  $\bigcap_{H \in \mathcal{A}} H \neq \emptyset$ . Un arrangement central est *essentiel* si de plus  $\bigcap_{H \in \mathcal{A}} H = 0$ . Un arrangement central est, à translation près, un arrangement d'hyperplans vectoriels. Si  $\mathcal{A}$  est central et  $W = \bigcap_{H \in \mathcal{A}} H$ , alors l'ensemble  $\bar{\mathcal{A}} = \{H/W : H \in \mathcal{A}\}$  est un arrangement essentiel, qu'on appelle *l'essentialisation de  $\mathcal{A}$* .

Étant donné un arrangement d'hyperplans  $\mathcal{A}$ , on peut toujours fixer pour chaque  $H \in \mathcal{A}$  une forme affine  $\eta_H : V \rightarrow \mathbb{R}$  qui satisfait  $H = \ker(\eta_H)$  ; on dira alors que  $\mathcal{A}$  *provient des formes  $\eta_H$* .

Soit  $\text{sgn} : \mathbb{R} \rightarrow \{-, 0, +\}$  l'application définie par

$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} - & \text{si } x < 0, \\ 0 & \text{si } x = 0, \\ + & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Un arrangement  $\mathcal{A}$  provenant de formes affines  $\eta_H$  détermine alors une application  $\sigma : V \rightarrow \{-, 0, +\}^{\mathcal{A}}$  définie par

$$\sigma(v)(H) = \text{sgn}(\eta_H(v)).$$

On utilise cette application dans la définition suivante.

**Définition 1.45.** Soit  $\mathcal{A}$  un arrangement d'hyperplans dans un espace  $V$  provenant de formes  $\eta_H$ . Les fibres de la fonction  $\sigma : V \rightarrow \{-, 0, +\}^{\mathcal{A}}$  partitionnent  $V$ , et on appelle *face de  $\mathcal{A}$*  un membre de cette partition.

L'ensemble des faces de  $\mathcal{A}$  sera noté  $\mathcal{F}(\mathcal{A})$  et il ne dépend pas du choix initial des formes  $\eta_H$ . Si  $F$  est une face, alors tous les éléments de  $F$  sont envoyés par  $\sigma$  sur le même élément de  $\{-, 0, +\}^{\mathcal{A}}$ , qu'on appelle *covecteur de  $F$* . Une fois qu'on a fixé les formes  $\eta_H$ , chaque face est complètement déterminée par son covecteur. Néanmoins, il est possible que certains éléments de  $\{-, 0, +\}^{\mathcal{A}}$  ne soient pas le covecteur d'une face, c'est-à-dire que  $\sigma$  ne soit pas surjective.

Une face  $F$  d'un arrangement d'hyperplans est contenue dans l'espace affine

$$\mathcal{L}(F) = \bigcap_{\sigma_F(H)=0} H,$$

qu'on appelle l'*espace support* de  $F$ . Il s'agit du plus grand sous-espace affine de  $V$  qui contient  $F$  et qui est une intersection d'hyperplans de  $\mathcal{A}$ . Si  $F$  n'est contenue dans aucun hyperplan, on adopte la convention que  $\mathcal{L}(F) = V$ . On note qu'une face est toujours convexe et relativement ouverte dans son espace support. On définit aussi la *codimension* d'une face  $F$  par  $\text{codim}(F) = \text{codim}(\mathcal{L}(F))$ .

### 1.5.2 Bande régulière à gauche des faces

Soit  $\mathcal{F}$  l'ensemble des faces d'un arrangement d'hyperplans  $\mathcal{A}$ . On va maintenant définir un produit qui va faire de  $\mathcal{F}$  une bande régulière à gauche. Soit  $F, G \in \mathcal{F}$ , on définit à partir de  $\sigma_F$  et  $\sigma_G$  un nouvel élément  $\sigma_{FG} \in \{-, 0, +\}^{\mathcal{A}}$  par

$$\sigma_{FG}(H) = \begin{cases} \sigma_F(H) & \text{si } \sigma_F(H) \neq 0, \\ \sigma_G(H) & \text{si } \sigma_F(H) = 0. \end{cases}$$

Cette séquence de signes est en fait toujours le covecteur d'une certaine face, comme le montre le lemme suivant.

**Lemme 1.46.** *Soit  $\mathcal{A}$  un arrangement d'hyperplans et  $F, G \in \mathcal{F}(\mathcal{A})$ . Fixons deux éléments  $u \in F$  et  $v \in G$  avec  $u \neq v$ , et notons  $w_\delta = \delta v + (1 - \delta)u$  pour tout  $\delta > 0$ . Alors il existe  $\varepsilon > 0$  tel que*

$$0 < \delta \leq \varepsilon \implies \sigma(w_\delta) = \sigma_{FG}.$$

*Démonstration.* Soit  $V$  l'espace sous-jacent de  $\mathcal{A}$ , et supposons que  $\mathcal{A}$  provient de formes affines  $\eta_H$ . On rappelle que  $\sigma : V \rightarrow \{-, 0, +\}^{\mathcal{A}}$  est définie par  $\sigma(v)(H) = \text{sgn}(\eta_H(v))$ .

Pour chaque  $H \in \mathcal{A}$  tel que  $\eta_H(u) \neq 0$  il existe, par continuité de  $\eta_H$ , un certain  $\varepsilon_H > 0$  tel que

$$\|x - u\| \leq \varepsilon_H \|v - u\| \implies \text{sgn}(\eta_H(x)) = \text{sgn}(\eta_H(u)).$$

Soit  $\varepsilon = \min\{\varepsilon_H : \eta_H(u) \neq 0\}$  et fixons  $\delta > 0$  tel que  $\delta \leq \varepsilon$ . Pour tout  $H \in \mathcal{A}$  tel que  $\eta_H(u) \neq 0$ , on a

$$\|w_\delta - u\| = \delta \|v - u\| \leq \varepsilon_H \|v - u\|,$$

en sorte que  $\text{sgn}(\eta_H(w_\delta)) = \text{sgn}(\eta_H(u))$ . De plus, pour  $H \in \mathcal{A}$  tel que  $\eta_H(u) = 0$ ,

$$\eta_H(w_\delta) = \delta \eta_H(v) + (1 - \delta) \eta_H(u) = \delta \eta_H(v),$$

et donc  $\text{sgn}(\eta_H(w_\delta)) = \text{sgn}(\eta_H(v))$ . Par conséquent, pour tout  $H \in \mathcal{A}$ ,

$$\sigma(w_\delta)(H) = \text{sgn}(\eta_H(w_\delta)) = \begin{cases} \text{sgn}(\eta_H(u)) = \sigma_F(H) & \text{si } \sigma_F(H) \neq 0, \\ \text{sgn}(\eta_H(v)) = \sigma_G(H) & \text{si } \sigma_F(H) = 0. \end{cases}$$

On a donc bien  $\sigma(w_\delta) = \sigma_{FG}$ , ce qui termine la preuve. ■

Ainsi, la séquence  $\sigma_{FG}$  est le covecteur d'une face de  $\mathcal{A}$ , qu'on notera  $FG$ . Le lemme précédent permet de donner une interprétation géométrique au produit de

deux faces :  $FG$  est la première face qu'on rencontre lorsqu'on se déplace en ligne droite d'un point de  $F$  vers un point de  $G$ .

Étant donné trois faces  $F_1, F_2, F_3$  d'un arrangement  $\mathcal{A}$ , on vérifie que pour tout  $H \in \mathcal{A}$ ,

$$\sigma_{F_1(F_2F_3)}(H) = \sigma_{(F_1F_2)F_3}(H) = \begin{cases} \sigma_{F_1}(H) & \text{si } \sigma_{F_1}(H) \neq 0, \\ \sigma_{F_2}(H) & \text{si } \sigma_{F_1}(H) = 0 \neq \sigma_{F_2}(H), \\ \sigma_{F_3}(H) & \text{si } \sigma_{F_1}(H) = \sigma_{F_2}(H) = 0. \end{cases}$$

Comme une face est complètement caractérisée par son covecteur, on conclut que  $(F_1F_2)F_3 = F_1(F_2F_3)$ . En d'autres mots,  $\mathcal{F}(\mathcal{A})$  est un semi-groupe avec le produit défini ci-dessus. Le lemme suivant nous aidera à mieux comprendre les relations  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{L}$  dans ce semi-groupe. Il s'agit d'une conséquence immédiate de la définition du produit des covecteurs.

**Lemme 1.47.** *Soit  $F, G$  deux faces d'un arrangement d'hyperplans.*

1.  $F = GF$  si et seulement si

$$\forall H \in \mathcal{A}, \quad \sigma_G(H) \neq 0 \implies \sigma_G(H) = \sigma_F(H).$$

2.  $F = FG$  si et seulement si

$$\forall H \in \mathcal{A}, \quad \sigma_F(H) = 0 \implies \sigma_G(H) = 0.$$

En particulier,  $F = GF \implies F = FG$ . ■

La proposition suivante donne une interprétation géométrique au préordre  $\leq_{\mathcal{Q}}$  dans ce semi-groupe. Cette interprétation fait intervenir l'opérateur d'adhérence topologique, qu'on notera  $\text{ad}$ .

**Proposition 1.48.** *Soit  $F, G$  deux faces d'un arrangement d'hyperplans. Les énoncés suivants sont équivalents.*

1.  $F \leq_{\mathcal{R}} G$ ;
2.  $\text{ad}(F) \supseteq \text{ad}(G)$ ;
3.  $F = FG = GF$ .

*Démonstration.* Si  $F \leq_{\mathcal{R}} G$ , alors  $F = GX$  pour une certaine face  $X$ . Le lemme 1.46 permet alors de conclure que tout point de  $G$  est un point d'accumulation de  $F$ , ce qui montre que  $\text{ad}(G) \subseteq \text{ad}(F)$ . L'énoncé 1 entraîne l'énoncé 2.

Supposons que  $\text{ad}(F) \supseteq \text{ad}(G)$ . Fixons un hyperplan  $H$  de notre arrangement avec  $H = \ker(\eta_H)$  et un élément  $v \in G$ . Par hypothèse,  $v \in \text{ad}(F)$ , et donc il existe une suite  $(u_n)$  de points de  $F$  tels que  $\lim u_n = v$ . Puisque  $\eta_H$  est continue,

$$\eta_H(v) = \lim \eta_H(u_n).$$

On en déduit alors que

$$\sigma_G(H) = + \implies \eta_H(v) > 0 \implies \exists N \eta_H(u_N) > 0 \implies \sigma_F(H) = +.$$

De même, on a  $\sigma_G(H) = - \implies \sigma_F(H) = -$ , ce qui montre que

$$\sigma_G(H) \neq 0 \implies \sigma_G(H) = \sigma_F(H).$$

Le lemme 1.47 permet alors de conclure que  $F = GF = FG$ . Ainsi, l'énoncé 2 entraîne l'énoncé 3.

Enfin, le fait que l'énoncé 3 entraîne l'énoncé 1 est une conséquence évidente de la définition de  $\leq_{\mathcal{R}}$ . ■

Le corollaire suivant est alors immédiat en vertu de la proposition 1.9.

**Corollaire 1.49.** *Le semi-groupe des faces d'une arrangement d'hyperplans est une bande régulière à gauche.* ■

Enfin, on mentionne que le semi-groupe des faces d'un arrangement  $\mathcal{A}$  est un monoïde si et seulement si l'arrangement est central, auquel cas  $\bigcap_{H \in \mathcal{A}} H$  (la face de covecteur identiquement nul) en est l'élément neutre.

### 1.5.3 Support

On a vu que le semi-groupe des faces d'un arrangement d'hyperplans est une bande régulière à gauche et que la relation  $\leq_{\mathcal{A}}$  est équivalente à l'inclusion renversée des adhérences topologiques. On va maintenant établir une interprétation géométrique pour la relation  $\leq_{\mathcal{A}}$ , ce qui nous permettra de calculer le support de ces bandes régulières à gauche.

**Proposition 1.50.** *Soit  $F, G$  deux faces d'un arrangement d'hyperplans. Alors*

$$F \leq_{\mathcal{A}} G \iff \mathcal{L}(F) \supseteq \mathcal{L}(G).$$

*Démonstration.* Par la proposition 1.11 et le lemme 1.47, on a les équivalences :

$$F \leq_{\mathcal{A}} G \iff F = FG \iff \{H : \sigma_F(H) = 0\} \subseteq \{H : \sigma_G(H) = 0\}.$$

De plus, par la définition des espaces supports, il est clair que

$$\{H : \sigma_F(H) = 0\} \subseteq \{H : \sigma_G(H) = 0\} \iff \mathcal{L}(F) \supseteq \mathcal{L}(G),$$

ce qui termine la preuve. ■

Cela nous indique que l'ensemble des espaces supports est un candidat naturel pour le support d'une bande régulière à gauche de faces. La structure de semi-treillis des espaces supports est donnée dans la proposition suivante.

**Proposition 1.51** ((Orlik et Terao, 1992), définition 2.2). *Soit  $\mathcal{F}$  l'ensemble des faces d'un arrangement d'hyperplans ; on ordonne  $\mathcal{L}(\mathcal{F})$  par inclusion renversée. Pour tout  $X, Y \in \mathcal{L}(\mathcal{F})$ ,*

1.  $X \wedge Y = \bigcap \{Z \in \mathcal{L}(\mathcal{F}) : X \cup Y \subseteq Z\}$ .
2.  $X \vee Y = X \cap Y$  si  $X \cap Y \neq \emptyset$ .

■

On note que  $\mathcal{L}$  est un morphisme pour l'opération  $\wedge$  du semi-treillis  $\mathcal{L}(\mathcal{F})$ , car

$$\{H : \sigma_{FG}(H) = 0\} = \{H : \sigma_F(H) = 0\} \cap \{H : \sigma_G(H) = 0\}$$

La proposition suivante montre que ce morphisme satisfait la propriété universelle du support.

**Proposition 1.52.** *Soit  $\mathcal{F}$  le semi-groupe des faces d'un arrangement d'hyperplans. Alors la fonction  $\mathcal{L}$  induit un isomorphisme  $\varphi : \text{supp}(\mathcal{F}) \cong \mathcal{L}(\mathcal{F})$  qui satisfait  $\varphi \circ \text{supp} = \mathcal{L}$ .*

*Démonstration.* Puisque  $\mathcal{L}$  est un morphisme de  $\mathcal{F}$  vers un semi-treillis, la propriété universelle du support (proposition 1.21) nous permet de conclure qu'il existe un morphisme  $\varphi : \text{supp}(\mathcal{F}) \cong \mathcal{L}(\mathcal{F})$  qui satisfait  $\varphi \circ \text{supp} = \mathcal{L}$ . La surjectivité de  $\varphi$  découle de celle de  $\mathcal{L}$ . La proposition 1.50 nous permet de déduire que  $\ker(\varphi) = \ker(\text{supp})$ , et donc  $\varphi$  est injectif par le théorème d'isomorphisme (proposition 1.1). ■

On se permet donc de confondre  $\text{supp}$  et  $\mathcal{L}$ . La proposition suivante donne quelques propriétés supplémentaires du treillis  $\text{supp}(\mathcal{F})$ . En particulier, elle montre que la codimension joue un rôle clé dans les arrangements centraux.

**Proposition 1.53** ((Orlik et Terao, 1992), lemme 2.3). *Soit  $\mathcal{F}$  le semi-groupe des faces d'un arrangement d'hyperplans.*

1. *Toutes les chaînes saturées de  $\text{supp}(\mathcal{F})$  ont la même longueur (autrement dit,  $\text{supp}(\mathcal{F})$  est gradué).*

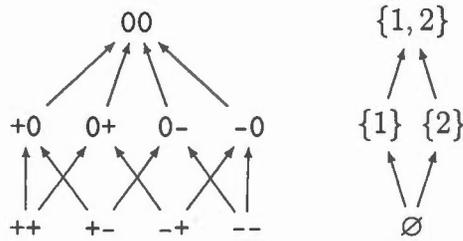


Figure 1.5 La relation  $\leq_a$  dans le semi-groupe des faces de l'arrangement booléen  $\mathcal{B}_2$  et de son support.

2. Soit  $r$  la fonction de rang du treillis  $\text{supp}(\mathcal{F})$ . Si l'arrangement est central,  $r(X) = \text{codim}(X)$  et  $r(X \wedge Y) + r(X \vee Y) \leq r(X) + r(Y)$ .

■

Si  $\mathcal{F}$  est le semi-groupe des faces d'un arrangement central, alors le treillis  $\text{supp}(\mathcal{F})$  est aussi *atomistique* (en anglais, *atomic*), ce qui en fait un treillis *géométrique* (Orlik et Terao, 1992).

#### 1.5.4 Arrangement booléen

Fixons  $n \in \mathbb{N}$  et notons  $\pi_i$  la projection de  $\mathbb{R}^n$  sur sa  $i$ -ième coordonnée. On définit l'arrangement booléen d'ordre  $n$  par

$$\mathcal{B}_n = \{\ker(\pi_i) : 1 \leq i \leq n\}.$$

$\mathcal{B}_n$  est un arrangement de  $n$  hyperplans et il satisfait  $\bigcap_{i=1}^n \ker(\pi_i) = 0$ . Il s'agit donc d'un arrangement essentiel. Son zonotope polaire est l'hypercube de dimension  $n$  (c.f. §A).

Étant donné  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ , le covecteur de la face  $F$  contenant  $x$  est donné par  $\sigma_F(\pi_i) = \text{sgn}(x_i)$ . Par conséquent, tout élément de  $\{-, 0, +\}$  détermine

une face de  $\mathcal{B}_n$ , et on a une bijection  $\mathcal{F}(\mathcal{B}_n) \cong \{-, 0, +\}^n$ . Il s'agit en fait d'un isomorphisme de semi-groupes, où  $\{-, 0, +\}^n$  est muni de l'opération définie sur chaque composante par

$$xy = \begin{cases} x & \text{si } x \neq 0; \\ y & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

En particulier, cela entraîne que le semi-groupe des faces d'un arrangement d'hyperplans quelconque peut toujours être vu comme un sous-semi-groupe de  $\mathcal{F}(\mathcal{B}_n)$  pour un certain  $n \in \mathbb{N}$ .

Le support d'une face  $F \in \mathcal{F}(\mathcal{B}_n)$  est  $\{x \in \mathbb{R}^n : \sigma_F(\pi_i) = 0 \implies \pi_i(x) = 0\}$ . La fonction  $H \mapsto \{i : \forall x \in H, \pi_i(x) = 0\}$  est un isomorphisme de semi-treillis  $\text{supp}(\mathcal{B}_n) \cong 2^n$ , où  $2^n$  est ordonné par inclusion. En particulier, l'arrangement booléen a pour support le treillis booléen, d'où son nom. On remarque au passage que  $\text{supp}(\mathcal{B}_n)$  est le semi-treillis dual (au sens de la théorie des ensembles ordonnés) du support de la bande régulière à gauche libre  $B_n^1$ .

### 1.5.5 Arrangements graphiques et arrangements de tresses

Soit  $G$  un graphe, on définit pour chaque arête  $a = \{s, t\} \in \mathcal{E}(G)$  un hyperplan  $H_a$  de  $\mathbb{R}^{\mathcal{V}(G)}$  par

$$H_a = \{x \in \mathbb{R}^{\mathcal{V}(G)} : x(s) = x(t)\}.$$

On définit *l'arrangement graphique* associé à  $G$  par

$$\mathcal{A}_G = \{H_a : a \in \mathcal{E}(G)\}.$$

L'arrangement graphique est toujours central mais jamais essentiel. En effet, si on désigne par  $\sim$  la relation de connexité sur les sommets de  $G$ , alors

$$\bigcap_{H \in \mathcal{A}_G} H = \{x \in \mathbb{R}^{\mathcal{V}(G)} : s \sim t \implies x(s) = x(t)\}.$$

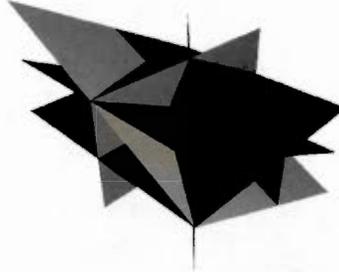


Figure 1.6 Essentialisation de l'arrangement de tresses  $\mathcal{T}_4$ .

On restreint maintenant notre attention au cas où  $G$  est le graphe complet  $K_n$ . L'arrangement  $\mathcal{A}_G$  est alors appelé *l'arrangement de tresses d'ordre  $n$*  (*braid arrangement* en anglais), et on le note  $\mathcal{T}_n$ . Il s'agit de l'arrangement de  $\mathbb{R}^n$  qui contient, pour chaque couple  $i < j \in \{1, \dots, n\}$ , l'hyperplan défini par

$$H_{i,j} = \{x \in \mathbb{R}^n : \pi_i(x) = \pi_j(x)\}.$$

L'arrangement de tresses  $\mathcal{T}_n$  contient donc  $\binom{n}{2}$  hyperplans, et il provient des formes  $\eta_{i,j} = \pi_i - \pi_j$ ,  $1 \leq i < j \leq n$ . L'intersection des hyperplans de  $\mathcal{T}_n$  est l'espace de dimension 1

$$\{x \in \mathbb{R}^n : \pi_1(x) = \pi_2(x) = \dots = \pi_n(x)\}.$$

Par conséquent, l'essentialisation  $\overline{\mathcal{T}}_n$  est un arrangement d'hyperplans de  $\mathbb{R}^{n-1}$ . On a illustré l'essentialisation de  $\mathcal{T}_4$  à la figure 1.6. Le zonotope polaire de  $\mathcal{T}_n$  est le permutaèdre (c.f. §A).

Une chambre de  $\mathcal{T}_n$  est complètement déterminée par le choix d'une permutation de  $\{1, \dots, n\}$ , et donc  $\mathcal{T}_n$  a  $n!$  chambres. Plus généralement, les éléments de  $\mathcal{F}(\mathcal{T}_n)$  sont en bijection avec les partitions ordonnées de  $\{1, \dots, n\}$  (Brown, 2004). La

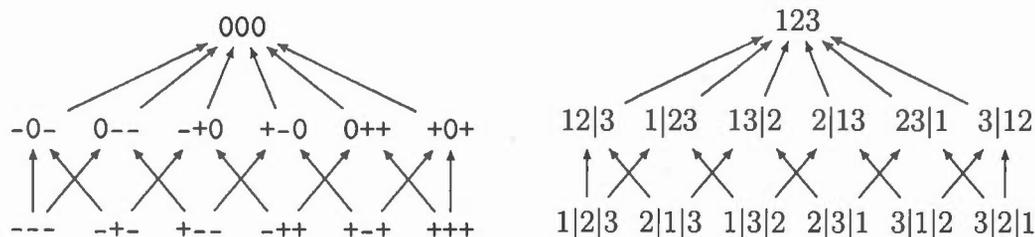


Figure 1.7 Bijection entre les faces de l'arrangement de tresses  $\mathcal{T}_3$  et les partitions ordonnées de  $\{1, 2, 3\}$ .

correspondance est assez simple à décrire : fixons une face  $F$  de  $\mathcal{B}_n$  et choisissons un point  $x = (x_1, \dots, x_n) \in F$ . Alors la relation  $i \sim j \iff x_i = x_j$  est une relation d'équivalence sur  $\{1, \dots, n\}$  qui ne dépend que de  $F$ . On ordonne les classes de  $\sim$  en disant que la classe de  $i$  est plus petite que la classe de  $j$  si  $x_i < x_j$ . On a illustré cette bijection à la figure 1.7.

## CHAPITRE II

### REPRÉSENTATIONS

Dans ce chapitre, on étudiera les représentations (linéaires) des bandes régulières à gauche. On verra notamment que le radical de Jacobson des algèbres de bandes régulières à gauche est déterminé par la relation  $\mathcal{L}$  (en d'autres mots, par le support), et on en déduira une formule explicite pour les représentations irréductibles. On discutera aussi des décompositions du module régulier, et on arrivera à déterminer ses sous-modules indécomposables grâce à la construction d'idempotents. On discutera finalement d'une des motivations derrière le développement de la théorie des bandes régulières à gauche, à savoir la diagonalisation de certains opérateurs sur le module des chambres.

Plusieurs résultats et définitions dans cette section reposent sur la théorie des algèbres non-unitaires et non-commutatives. L'annexe B donne des définitions détaillées ainsi que plusieurs résultats utiles de cette théorie.

#### 2.1 Notions préliminaires sur les représentations des semi-groupes

Dans cette section, on introduit les objets qui sont au centre de ce chapitre : les représentations des semi-groupes. Notre première tâche consiste à définir ces objets et à expliciter leur lien avec les algèbres. Cette connexion nous permettra de formuler les résultats sur les représentations des semi-groupes en terme de

modules et d'algèbres.

Dans les sections 2.1.2 et 2.1.3, on introduit des outils permettant de relier les propriétés d'un semi-groupe avec les propriétés de son algèbre. En particulier, on présente dans la section 2.1.3 un théorème qui nous permettra de calculer le radical de Jacobson des algèbres de bandes régulières à gauche en utilisant la structure de leurs monoïdes locaux.

### 2.1.1 Représentations et algèbres des semi-groupes

Commençons par définir ce qu'on entend par une représentation d'un semi-groupe.

**Définition 2.1.** Soit  $S$  un semi-groupe et  $R$  un anneau commutatif et unitaire. Une *représentation de  $S$  sur  $R$*  est la donnée d'un  $R$ -module  $\mathfrak{m}$  et d'un morphisme de semi-groupes  $S \rightarrow \text{End}_R(\mathfrak{m})$ .

Si  $S$  est un monoïde, on dit que la représentation  $S \rightarrow \text{End}_R(\mathfrak{m})$  est *unitaire* si elle envoie l'élément neutre de  $S$  sur  $id_{\mathfrak{m}}$ .

On note que la représentation régulière de la section 1.2.5 peut être vue comme une représentation au sens précédent en utilisant la propriété universelle du  $R$ -module libre sur  $S$ . On peut donc utiliser le terme *représentation* sans véritable confusion.

On notera  $RS$  le  $R$ -module libre sur un ensemble  $S$ . Formellement, ses éléments sont les fonctions  $S \rightarrow R$  qui s'annulent sur un sous-ensemble cofini de  $S$ , mais il sera souvent utile de confondre  $s \in S$  avec la fonction indicatrice  $\delta_s$ . Ces fonctions forment une  $R$ -base de  $RS$ , et on peut alors voir les éléments de  $RS$  comme des combinaisons linéaires formelles des éléments de  $S$ .

Si  $S$  est un semi-groupe le module  $RS$  est une  $R$ -algèbre avec le produit

$$(gh)(x) = \sum_{st=x} g(s)h(t),$$

appelé le *produit de convolution*. Les modules de cette algèbre correspondent aux représentations de  $S$ , comme le montre la proposition suivante.

**Proposition 2.2.** *Soit  $S$  un semi-groupe,  $R$  un anneau commutatif unitaire et  $\iota : S \rightarrow RS$  l'inclusion. Pour toute représentation  $\rho : S \rightarrow \text{End}_R(\mathfrak{m})$ , il existe une unique structure de  $RS$ -module sur  $\mathfrak{m}$ , qu'on note  $\bar{\rho} : RS \rightarrow \text{End}_R(\mathfrak{m})$ , qui satisfait  $\bar{\rho} \circ \iota = \rho$ . ■*

La situation est représentée par le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{\rho} & \text{End}_R(\mathfrak{m}) \\ \downarrow \iota & \nearrow \bar{\rho} & \\ RS & & \end{array}$$

Les notions usuelles de la théorie des algèbres se transportent à la théorie des représentations grâce à cette correspondance : on peut ainsi parler de représentations simples ou indécomposables, de sous-représentations, de sommes ou de quotients de représentations, etc. On note que les représentations simples sont souvent appelées *irréductibles*.

La construction des algèbres de semi-groupes est aussi fonctorielle : toute fonction  $\varphi : S \rightarrow T$  entre deux semi-groupes s'étend en un unique morphisme de  $R$ -modules  $R\varphi : RS \rightarrow RT$ , et cette extension est un morphisme d'algèbres si et seulement si  $\varphi$  est un morphisme de semi-groupes.

On termine cette section avec deux remarques :

1. Lorsque  $S$  est un monoïde, la correspondance de la proposition 2.2 envoie les représentations unitaires de  $S$  sur les modules unitaires de  $RS$ .

2. On peut plonger l'algèbre  $RS$  dans deux algèbres unitaires différentes : l'algèbre du monoïde  $S^1$  (c.f. §1.1.2), et l'extension de Dorroh de  $RS$  (c.f. §B.2). Il s'avère que ces deux algèbres sont isomorphes (Okninski, 1991), ce qui justifie l'usage de la notation  $RS^1$  pour désigner  $R(S^1)$  et  $(RS)^1$ .

### 2.1.2 Correspondance entre les idéaux et les congruences

Soit  $S$  un semi-groupe et  $\mathcal{C}$  une congruence à gauche de  $S$ . Alors le  $R$ -module  $R(S/\mathcal{C})$  est de manière naturelle un  $RS$ -module à gauche, et la surjection canonique  $\pi : S \rightarrow S/\mathcal{C}$  s'étend en un morphisme de  $RS$ -modules  $R\pi : RS \rightarrow R(S/\mathcal{C})$ . Le lemme suivant donne un ensemble de générateurs pour le noyau de ce morphisme ; voir (Okninski, 1991), lemme 4.1.

**Lemme 2.3.** *Soit  $\mathcal{C}$  une congruence à gauche d'un semi-groupe  $S$  et  $\pi : S \rightarrow S/\mathcal{C}$  la surjection canonique. Alors le noyau de  $R\pi : RS \rightarrow R(S/\mathcal{C})$  est engendré par l'ensemble  $\{r - s : r\mathcal{C}s\}$ . ■*

Si  $\mathcal{C}$  est une congruence de  $S$ , alors  $\pi$  devient un morphisme de semi-groupes, ce qui fait de  $R\pi$  un morphisme d'algèbres. En particulier, le noyau  $\ker(R\pi)$  est un idéal bilatère de  $RS$  qu'on appelle *l'idéal engendré par  $\mathcal{C}$* , et qu'on note  $\mathfrak{I}(\mathcal{C})$ .

Réciproquement, un idéal  $\mathfrak{m}$  de  $RS$  induit une congruence de  $S$  : en effet, notons  $\iota : S \rightarrow RS$  l'inclusion et  $\pi : RS \rightarrow RS/\mathfrak{m}$  la surjection canonique. Alors la composition  $\pi \circ \iota$  est un morphisme de semi-groupes. Par conséquent, la relation  $\ker(\pi \circ \iota)$  est une congruence de  $S$ , qu'on note  $\mathfrak{C}(\mathfrak{m})$  et qu'on appelle *la congruence engendrée par  $\mathfrak{m}$* . La proposition suivante regroupe le corollaire 4.2 et le lemme 4.5 de (Okninski, 1991).

**Proposition 2.4.** *Soit  $S$  un semi-groupe,  $\mathcal{C}$  une congruence de  $S$  et  $\mathfrak{m}$  un idéal bilatère de  $RS$ . Alors :*

1.  $\mathfrak{C}(\mathfrak{I}(\mathcal{C})) = \mathcal{C}$ .

2.  $\mathcal{I}(\mathcal{C}(\mathfrak{m})) \subseteq \mathfrak{m}$ .

De plus,  $\mathcal{I}$  et  $\mathcal{C}$  sont croissantes pour l'inclusion. ■

On en conclut que  $\mathcal{I}$  est injective, que  $\mathcal{C}$  est surjective et que  $\mathcal{C} \circ \mathcal{I} = id$ . La définition suivante introduit un cas important d'idéal engendré par un morphisme de semi-groupes. On rappelle que  $0$  désigne aussi le semi-groupe groupe trivial, qui est l'objet terminal de la catégorie  $\mathbf{Sg}$ .

**Définition 2.5.** Soit  $S$  un semi-groupe et  $R$  un anneau commutatif unitaire. On appelle *morphisme d'augmentation*, et on note  $\epsilon$ , le morphisme  $RS \rightarrow R$  qui étend l'unique morphisme de semi-groupes  $S \rightarrow 0$ . Le noyau  $\ker(\epsilon)$  est appelé *l'idéal d'augmentation* et on le note  $\omega RS$ .

Le morphisme d'augmentation est décrit plus explicitement par la formule

$$\epsilon(f) = \sum_{s \in S} f(s).$$

On peut aussi décrire l'idéal d'augmentation en terme de représentations : on munit  $R$  d'une structure de  $RS$ -module en faisant agir chaque  $s \in S$  comme l'identité, et l'annulateur de ce  $RS$ -module est précisément l'idéal  $\omega RS$ . Si  $R$  est simple (par exemple, lorsque  $R$  est un corps), alors  $\omega RS$  est l'annulateur d'un  $RS$ -module simple, ce qui montre que  $\omega RS$  contient le radical de Jacobson de  $RS$  (c.f. §B.4).

Soit  $\mathcal{C}$  une congruence de  $S$ . Comme  $\mathcal{C}$  est contenue dans la congruence totale, la proposition 2.4 entraîne que  $\mathcal{I}(\mathcal{C}) \subseteq \omega RS$ . En particulier,  $\mathcal{I}$  n'est pas une surjection puisque  $RS$  est un idéal de  $RS$  qui n'est pas contenu dans  $\omega RS$ . Pire encore, il existe parfois des idéaux de  $RS$  qui sont contenus dans  $\omega RS$  et qui malgré tout ne proviennent pas de congruences. On donne un exemple de ce phénomène à la fin de l'annexe C.

### 2.1.3 Radical de Rhodes

On introduit maintenant le radical de Rhodes  $J_R(S)$ , qui permet en quelque sorte d'approximer le radical de Jacobson d'une algèbre de semi-groupe. On y présente aussi un théorème qui rendra son calcul plus facile. La définition du radical de Jacobson d'une algèbre est donnée à la section B.4.

**Définition 2.6.** Soit  $S$  un semi-groupe,  $R$  un anneau commutatif unitaire. Le *radical de Rhodes de  $S$  sur  $R$* , noté  $J_R(S)$ , est la congruence de  $S$  engendrée par l'idéal  $J(RS)$ .

Dans les notations de la section précédente,  $J_R(S) = \mathfrak{C}(J(RS))$ . Par la proposition 2.4, l'idéal engendré par  $J_R(S)$  est contenu dans  $J(RS)$ , mais il ne lui est pas forcément égal; voir la dernière section de l'annexe C pour des exemples.

Si  $RS$  est artinien (par exemple si  $R$  est un corps et  $S$  est fini) alors le radical de Rhodes de  $S$  est aussi la plus grande congruence de  $S$  engendrée par un idéal bilatère nilpotent de  $RS$ . Par la proposition 2.4, une congruence provient d'un idéal nilpotent si et seulement si elle engendre elle-même un idéal nilpotent. Cette observation motive l'étude des morphismes de semi-groupes qui engendrent des idéaux nilpotents; on dira qu'un tel morphisme est  *$R$ -nilpotent*, ou simplement *nilpotent*.

La prochaine proposition donne une caractérisation des morphismes nilpotents (les morphismes de semi-groupes qui engendrent des idéaux nilpotents) en utilisant le langage des pseudo-variétés de semi-groupes. Elle nous servira notamment à calculer le radical de Rhodes des bandes régulières à gauche. Avant de l'énoncer, on rappelle quelques notations de la section 1.1.5. On désigne par  $G_p$  la pseudo-variété des  $p$ -groupes, où  $p$  est un nombre premier, et par  $I$  la pseudo-variété qui ne contient que le groupe trivial. Pour des raisons de commodité, on introduit

aussi la notation suivante : si  $K$  est un corps de caractéristique  $p$ , on note  $G_K$  la pseudo-variété de monoïdes définie par

$$G_K = \begin{cases} G_p & \text{si } p \neq 0, \\ 1 & \text{si } p = 0. \end{cases}$$

La proposition utilise aussi les notions de variétés locales et de  $V$ -morphisms, qu'on a définies à la section 1.1.5. Pour une présentation détaillée de ce résultat, voir l'article (Almeida *et al.*, 2009) ou l'annexe C de ce mémoire.

**Proposition 2.7** ((Almeida *et al.*, 2009), théorème 3.5). *Soit  $K$  un corps et  $\varphi$  un morphisme de semi-groupes finis. Alors  $\varphi$  est un  $LG_K$ -morphisme si et seulement s'il est  $K$ -nilpotent.* ■

## 2.2 Représentations des bandes régulières à gauche finies

On a maintenant tous les outils pour étudier les représentations des bandes régulières à gauche finies. On commencera par calculer leur radical de Rhodes, ce qui est rendu très aisé grâce aux résultats des sections précédentes. On s'intéressera ensuite au quotient d'une bande régulière à gauche par son radical de Rhodes, et on montrera, grâce à un théorème de Solomon (Solomon, 1967), que son algèbre est semi-simple. À partir de ces résultats, on montrera que le radical de Rhodes engendre le radical de Jacobson et on déduira une formule explicite pour les représentations irréductibles d'une bande régulière à gauche, valide sur n'importe quel corps. On retrouve ainsi un résultat de (Brown, 2000).

On s'attaquera ensuite à l'étude de la représentation régulière en donnant une méthode pour construire des systèmes complets d'idempotents primitifs orthogonaux dans les algèbres de bandes régulières à gauche, un résultat de (Saliola, 2006). On terminera la section en étudiant certains opérateurs sur le module des chambres.

### 2.2.1 Radical de Rhodes

On a vu à la section 1.3.4 qu'une bande régulière à gauche est un groupe local si et seulement si elle coïncide avec l'ensemble de ses chambres (corollaire 1.29). Comme les chambres sont exactement les éléments de support minimal, on conclut qu'une bande régulière à gauche  $B$  est un groupe local si et seulement si  $B$  est constitué d'une unique  $\mathcal{L}$ -classe. Dans ce cas, tous les monoïdes locaux de  $B$  sont triviaux (corollaire 1.28), en sorte que  $B \in \text{LI} \subseteq \text{LG}_p$  pour tout premier  $p$ . On en tire la caractérisation suivante des morphismes nilpotents de bandes régulières à gauche.

**Proposition 2.8.** *Un morphisme de bandes régulières à gauche finies est nilpotent si et seulement si son noyau est contenu dans  $\mathcal{L}$ .*

*Démonstration.* Soit  $K$  un corps et  $\varphi : B \rightarrow B'$  un morphisme de bandes régulières à gauche finies. Par le corollaire 1.28, les équivalences suivantes sont satisfaites pour tout  $e \in B'$  :

$$\varphi^{-1}(e) \in \text{LG}_K \iff \varphi^{-1}(e) \in \text{LI} \iff \{(s, t) : \varphi(s) = e = \varphi(t)\} \subseteq \mathcal{L}.$$

Puisque  $\ker(\varphi) = \bigcup_{e \in B'} \{(s, t) : \varphi(s) = e = \varphi(t)\}$ , on obtient

$$\varphi \text{ est un } \text{LG}_K\text{-morphisme} \iff \forall e \in B', \varphi^{-1}(e) \in \text{LG}_K \iff \ker(\varphi) \subseteq \mathcal{L}.$$

La caractérisation des morphismes nilpotents de semi-groupes (proposition 2.7) nous donne alors la conclusion voulue. ■

Par conséquent,  $\mathcal{L} = \ker(\text{supp})$  est la plus grande congruence de  $B$  qui engendre un idéal nilpotent de  $KB$ . On vient donc de démontrer :

**Corollaire 2.9.** *Le radical de Rhodes d'une bande régulière à gauche sur n'importe quel corps est la congruence  $\mathcal{L}$ .* ■

### 2.2.2 Semi-simplicité des algèbres de semi-treillis

L'objectif de cette section est de présenter le théorème de Solomon (Solomon, 1967) sur la structure des algèbres de semi-treillis. En fait, le résultat de Solomon est plus général, et on démontre ici une version simplifiée pour nos besoins. On mentionne du même souffle qu'il existe une autre généralisation, due à Steinberg, permettant d'appliquer ce résultat aux algèbres des semi-groupes inversifs (Steinberg, 2006).

Pour les besoins de ce théorème, on introduit quelques notions de la théorie des ensembles ordonnés. Les notions présentées sont tirés de (Stanley, 2012).

Soit  $P$  un ensemble ordonné. On dira que  $P$  est *localement fini* si tous les ensembles de la forme  $\{z \in P : x \leq z \leq y\}$  sont finis. On dira que  $P$  est *fortement localement fini* si tous les ensembles de la forme  $\{z \in P : z \leq y\}$  sont finis. Clairement, un ensemble ordonné fortement localement fini est aussi localement fini, mais la réciproque est fausse.

Soit  $P$  un ensemble ordonné localement fini et  $R$  un anneau commutatif unitaire. On définit *l'algèbre d'incidence de  $P$  sur  $R$* , noté  $\text{Inc}_R(P)$ , comme l'ensemble des fonctions  $\alpha : P \times P \rightarrow R$  qui satisfont  $\alpha(x, y) = 0$  si  $x \not\leq y$ . La structure de  $R$ -module est définie de la manière usuelle et le produit d'algèbre est défini par convolution :

$$(\alpha\beta)(x, y) = \sum_{z \in P} \alpha(x, z)\beta(z, y) = \sum_{z \in [x, y]} \alpha(x, z)\beta(z, y).$$

$\text{Inc}_R(P)$  est une algèbre associative et unitaire. L'élément neutre pour la multiplication est la fonction  $\delta$  de Kronecker, définie par  $\delta(x, x) = 1$  et  $\delta(x, y) = 0$  si  $x \neq y$ . Les éléments inversibles sont caractérisés dans le lemme suivant (voir (Stanley, 2012), proposition 3.6.2).

**Lemme 2.10.** *Un élément  $\alpha \in \text{Inc}_R(P)$  est inversible si et seulement si  $\alpha(x, x)$  est un élément inversible de  $R$  pour tout  $x \in P$ . Si  $\alpha$  est inversible, son inverse est donné par la formule*

$$\alpha^{-1}(x, y) = \begin{cases} \alpha(x, x)^{-1} & \text{si } x = y \\ -\alpha(y, y)^{-1} \sum_{x \leq t < y} \alpha(x, t) \alpha^{-1}(t, y) & \text{si } x < y. \end{cases}$$

■

En particulier, la fonction indicatrice de la relation  $\leq$  est un élément inversible de  $\text{Inc}_R(P)$ . On note  $\zeta$  cette fonction et son inverse, notée  $\mu$ , est appelée la *fonction de Möbius* de  $P$ . Le lemme suivant est essentiellement une reformulation de la classique formule d'inversion de Möbius, qu'on retrouve par exemple dans (Stanley, 2012). Sa preuve est une simple vérification de routine.

**Lemme 2.11.** *Si  $P$  est fortement localement fini, alors la règle*

$$(\alpha \cdot f)(x) = \sum_{y \geq x} \alpha(x, y) f(y)$$

*définit une action linéaire du semigroupe multiplicatif de  $\text{Inc}_R(P)$  sur le  $R$ -module des fonctions  $P \rightarrow R$ . En particulier,  $\zeta \cdot f = g \iff g = \mu \cdot f$ .* ■

Soit  $L$  un ensemble et  $R$  un anneau commutatif unitaire. L'ensemble des fonctions  $L \rightarrow R$ , vu comme un  $R$ -module, admet naturellement une structure de  $R$ -algèbre qu'on note  $R^L$ . Le produit de cette algèbre, noté  $\odot$ , est défini par  $(f \odot g)(x) = f(x)g(x)$ . On appelle  $\odot$  le *produit de Hadamard*. L'algèbre  $R^L$  est le produit direct indexé par  $L$  de copies de  $R$  dans la catégorie  $\text{Alg}_R$ .

Supposons maintenant que  $L$  est un semi-treillis fortement localement fini. On peut voir  $L$  comme un semi-groupe et considérer son algèbre de semi-groupe  $RL$ . Le lemme 2.11 nous permet alors de faire agir  $\text{Inc}_R(L)$  sur le  $R$ -module sous-jacent

de l'algèbre  $RL$ . Chaque élément de  $\text{Inc}_R(L)$  définit un morphisme de  $R$ -modules  $RL \rightarrow R^L$ . Si  $L$  est fini,  $RL$  et  $R^L$  ont le même  $R$ -module sous-jacent et  $\text{Inc}_R(L)$  agit sur ce module par endomorphismes. On vérifie aisément que cette action est unitaire, et qu'en particulier  $\mu$  et  $\zeta$  définissent des isomorphismes de  $R$ -modules mutuellement inverses. La proposition suivante montre que ces isomorphismes de  $R$ -modules sont en fait des isomorphismes d'algèbres.

**Proposition 2.12** ((Solomon, 1967)). *Soit  $L$  un semi-treillis fini et  $R$  un anneau commutatif unitaire. Alors  $\zeta : RL \rightarrow R^L$  et  $\mu : R^L \rightarrow RL$  sont des isomorphismes d'algèbres mutuellement inverses.*

*Démonstration.* Sous les hypothèses de la proposition,  $\zeta$  et  $\mu$  sont des isomorphismes entre les  $R$ -modules sous-jacents de  $RL$  et  $R^L$ . Il nous suffit donc de vérifier que  $\zeta$  est un morphisme d'algèbres. Soit  $f, g \in RL$  et  $s \in L$ . Alors

$$(\zeta \cdot f \odot \zeta \cdot g)(s) = (\zeta \cdot f(s))(\zeta \cdot g(s)) = \sum_{t, t' \geq s} f(t)g(t').$$

En regroupant les terme de la somme précédente selon la valeur de l'infimum  $tt'$ , on obtient

$$(\zeta \cdot f \odot \zeta \cdot g)(s) = \sum_{t \geq s} \sum_{t' t'' = t} f(t')g(t'') = \sum_{t \geq s} (fg)(t) = (\zeta \cdot fg)(s).$$

Comme cette formule est vérifiée pour tout  $s \in S$ , on a  $\zeta \cdot (fg) = (\zeta \cdot f) \odot (\zeta \cdot g)$ , ce qui termine la preuve. ■

Il s'agit d'un résultat riche en corollaires :

**Corollaire 2.13.** *Soit  $R$  un anneau commutatif unitaire et  $L$  un semi-treillis fini.*

1.  $RL$  est unitaire.
2. L'ensemble  $\{\mu \cdot s : s \in L\}$  est un ensemble complet d'idempotents orthogonaux de  $RL$ .

3. Si  $R$  est un corps, les idempotents  $\mu \cdot s$  sont primitifs,  $RL$  est artinienne semi-simple et tous ses modules simples sont de dimension 1 sur  $R$ . ■

Si  $R$  est un corps, alors l'algèbre  $RL$  est, dans la terminologie d'usage, une algèbre *semi-simple déployée* (Assem, 1997). On note que dans ce cas, les  $\mu \cdot s$  constituent l'unique famille complète d'idempotents primitifs orthogonaux. Notons  $e_s = \mu \cdot s$ ; dans la base naturelle de  $RL$ ,

$$e_s = \sum_{t \leq s} \mu(t, s)t.$$

Le corollaire précédent montre que  $RL = \bigoplus_{s \in L} e_s RL$  est une décomposition de  $RL$  comme somme directe d'idéaux simples. Les  $e_s$  forment une base de  $RL$  comme  $R$ -module, et les coordonnées d'un élément  $t \in L$  sont données par la formule  $t = \sum_{s \leq t} e_s$ . En particulier,  $e_s t = \zeta(s, t)e_s$  pour tout  $t \in L$ , d'où  $e_s RL = e_s R$ .

### 2.2.3 Radical de Jacobson et représentations irréductibles

Les résultats des sections précédentes nous permettent maintenant de calculer facilement le radical de Jacobson des bandes régulières à gauche finies.

**Proposition 2.14.** *Le radical de Jacobson de l'algèbre d'une bande régulière à gauche finie  $B$  sur un corps  $K$  est l'idéal engendré par la relation  $\mathcal{L}$ .*

*Démonstration.* D'une part,  $\mathfrak{J}(\mathcal{L}) = \mathfrak{J}(J_K(B)) \subseteq J(KB)$  par le corollaire 2.9. D'autre part, le morphisme  $K \text{ supp}$  est surjectif et donc par la proposition B.12,  $K \text{ supp}(J(KB)) \subseteq J(K \text{ supp}(B))$ . Or par le théorème de Solomon (proposition 2.12),  $K \text{ supp}(B)$  est artienne semi-simple, donc sans radical de Jacobson. Par conséquent,  $J(KB) \subseteq \ker(K \text{ supp}) = \mathfrak{J}(J_K(B)) = \mathfrak{J}(\mathcal{L})$ . ■

On sait, d'après la proposition B.12, que les  $KB$ -modules simples correspondent aux  $KB/\mathcal{J}(KB)$ -modules simples, et d'après la proposition précédente,

$$KB/\mathcal{J}(KB) = KB/\mathcal{J}(\mathcal{L}) \cong K \operatorname{supp}(B).$$

En particulier, on peut décrire les représentations irréductibles d'une bande régulière à gauche finie grâce au théorème de Solomon.

**Proposition 2.15** ((Brown, 2000), théorème 3). *Soit  $B$  une bande régulière à gauche finie et  $K$  un corps. Les représentations irréductibles de  $KB$  sont de dimension 1. Elles correspondent aux éléments  $X \in \operatorname{supp}(B)$  et sont décrites par*

$$\rho_X(b) = \begin{cases} id_K & \text{si } \operatorname{supp}(b) \geq X \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

■

#### 2.2.4 Familles eulériennes et sections homogènes

Le support d'une bande régulière à gauche  $B$  est un semi-treillis, et donc le théorème de Solomon nous donne, pour tout anneau commutatif unitaire  $R$ , une décomposition  $R \operatorname{supp}(B) \cong \bigoplus_{X \in \operatorname{supp}(B)} Re_X$  où

$$e_X = \sum_{Y \leq X} \mu(Y, X)Y.$$

Notre objectif dans cette section est de présenter la méthode de Saliola (Saliola, 2006) qui permet de relever les idempotents  $e_X$  le long du morphisme d'algèbres induit par  $\operatorname{supp}$ . Cette méthode nous permettra d'obtenir un ensemble complet d'idempotents orthogonaux de  $RB$ ; dans le cas où  $R$  est un corps, cette famille sera aussi primitive.

On réserve un terme spécial pour désigner certains ensembles d'idempotents orthogonaux de l'algèbre de  $B$ ; cette terminologie provient de (Aguilar et Mahajan, 2017).

**Définition 2.16.** Soit  $R$  un anneau commutatif unitaire et  $B$  une bande régulière à gauche finie. On appelle *famille eulérienne* une fonction  $f : \text{supp}(B) \rightarrow RB$  qui satisfait

1.  $f(X)(s) = 0$  si  $\text{supp}(s) \not\subseteq X$ .
2.  $f(X)(s) \neq 0$  pour au moins un  $s$  tel que  $\text{supp}(s) = X$ .
3.  $f(X)f(Y) = \delta(X, Y)f(X)$ .

Soit  $u : R\text{supp}(B) \rightarrow RB$  une section de  $R\text{supp}$  (i.e. un inverse à droite de cette fonction) qui est aussi linéaire. On dit que  $u$  est *homogène* si pour tout  $X \in \text{supp}(B)$ ,  $u(X)$  est une combinaison linéaire des éléments de la  $\mathcal{L}$ -classe  $X$ . Puisque  $R\text{supp}(B)$  est libre sur  $\text{supp}(B)$ , on peut spécifier une section homogène de  $R\text{supp}$  en choisissant, pour chaque  $X \in \text{supp}(B)$ , une combinaison  $u(X)$  des éléments de  $X$  qui satisfait  $\epsilon(u(X)) = 1$ . Le lemme suivant montre que les sections homogènes de  $R\text{supp}$  donnent lieu à des idempotents.

**Lemme 2.17.** Soit  $\Lambda$  une algèbre sur un anneau commutatif unitaire  $R$ ,  $E$  une famille d'idempotents telle que  $ef = e$  pour tout  $e, f \in E$  et  $v$  une combinaison non-nulle des éléments de  $E$ . Alors  $v$  est idempotent si et seulement si la somme de ses coefficients vaut 1.

*Démonstration.* Soit  $\alpha$  la somme des coefficients dans l'écriture de  $v$  comme combinaison linéaire des éléments de  $E$ . Pour toute combinaison  $R$ -linéaire d'éléments de  $E$ , la relation  $xv = \alpha x$  est vérifiée. En particulier  $v^2 = \alpha v$ , et donc  $v^2 = v$  si et seulement si  $\alpha = 1$ . ■

On va maintenant construire, avec la donnée d'une section homogène de  $R\text{supp}$ , une famille eulérienne de  $RB$ . Afin de procéder à notre construction, on introduit quelques notations. On appelle *chaîne* une suite finie non-vidée strictement croissante d'éléments d'un ensemble ordonné. La notation  $c : X \rightarrow Y$  signifie que  $c$  est

une chaîne d'origine  $X$  et de fin  $Y$ . La *longueur* d'une chaîne  $c$  sera notée  $\ell(c)$ . La notation  $\prod_{Z \in c}^\downarrow$  désigne un produit indexé par les éléments de  $c$  pris dans l'ordre décroissant.

**Définition 2.18.** Soit  $B$  une bande régulière à gauche finie,  $R$  un anneau commutatif unitaire et  $u$  une section homogène de  $R\text{supp}$ . On notera  $f_u : \text{supp}(B) \rightarrow RB$  la fonction définie par

$$f_u(X) = \sum_{Y \leq X} \sum_{c: Y \rightarrow X} (-1)^{\ell(c)} \prod_{Z \in c}^\downarrow u(Z).$$

On va démontrer que  $f_u$  forme une famille eulérienne, qu'on appellera la *famille eulérienne associée à  $u$* .

Par le lemme 2.17, les  $u(X)$  sont idempotents et par conséquent  $u(X)f_u(X) = f_u(X)$ . La proposition suivante montre que les  $f_u(X)$  satisfont une relation de récurrence.

**Proposition 2.19.** Soit  $B$  une bande régulière à gauche finie,  $R$  un anneau commutatif unitaire et  $u$  une section homogène de  $R\text{supp}$ . Pour tout  $X \in \text{supp}(B)$ ,

$$f_u(X) = u(X) - \sum_{Y < X} u(X)f_u(Y).$$

*Démonstration.* Fixons un  $X \in \text{supp}(B)$ . On note d'abord que

$$f_u(X) = u(X) + \sum_{Y < X} \sum_{c: Y \rightarrow X} (-1)^{\ell(c)} \prod_{Z \in c}^\downarrow u(Z)$$

Pour chaque  $Y < X$ , on a l'égalité

$$\sum_{c: Y \rightarrow X} (-1)^{\ell(c)} \prod_{Z \in c}^\downarrow u(Z) = -u(X) \sum_{Y \leq W < X} \sum_{c: Y \rightarrow W} (-1)^{\ell(c)} \prod_{Z \in c}^\downarrow u(Z).$$

En conséquence,

$$\begin{aligned}
\sum_{Y < X} \sum_{c: Y \rightarrow X} (-1)^{\ell(c)} \prod_{Z \in c} \downarrow u(Z) &= -u(X) \sum_{Y < X} \sum_{Y \leq W < X} \sum_{c: Y \rightarrow W} (-1)^{\ell(c)} \prod_{Z \in c} \downarrow u(Z) \\
&= -u(X) \sum_{W < X} \sum_{Y \leq W} \sum_{c: Y \rightarrow W} (-1)^{\ell(c)} \prod_{Z \in c} \downarrow u(Z) \\
&= -u(X) \sum_{W < X} f_u(W).
\end{aligned}$$

Donc,

$$f_u(X) = u(X) - u(X) \sum_{W < X} f_u(W).$$

■

Cette formule est en fait suffisante pour définir  $f_u$  ; c'est cette définition qui est utilisée dans (Saliola, 2006). On donne comme une conséquence de la définition récursive et de l'idempotence des  $u(X)$  la relation

$$\forall X \in \text{supp}(B), \quad u(X) = \sum_{Y \leq X} u(X) f_u(Y).$$

On observe, au passage, que la relation entre  $u$  et  $f_u$  présente une ressemblance frappante avec la formule d'inversion de Möbius.

Le lemme suivant, auquel on référera sous le nom de *lemme de Saliola*, porte sur une propriété essentielle des  $f_u(X)$ .

**Lemme 2.20** ((Saliola, 2006), lemme 4.1). *Soit  $B$  une bande régulière à gauche finie,  $R$  un anneau commutatif unitaire et  $u$  une section homogène de  $R \text{supp}$ . Soit  $X \in \text{supp}(B)$  et  $s \in B$  tels que  $\text{supp}(s) \not\geq X$ . Alors  $sf_u(X) = 0$ .*

*Démonstration.* La preuve est par induction sur  $X$ . Si  $X$  est le minimum de  $\text{supp}(B)$ , alors  $\text{supp}(s) \geq X$  est toujours vrai et l'énoncé est trivial. On fixe ensuite

$X \in \text{supp}(B)$  et on suppose que l'énoncé est vérifié lorsque  $Y < X$ . Fixons  $s \in B$  tel que  $\text{supp}(s) \not\leq X$ . Alors :

$$sf_u(X) = su(X) - \sum_{Y < X} su(X)f_u(Y) = su(X) - \sum_{Y < X} su(X)sf_u(Y).$$

Par hypothèse de récurrence,  $s f_u(Y) = 0$  lorsque  $\text{supp}(s) \not\leq Y$ , en sorte que

$$sf_u(X) = su(X) - \sum_{Y \leq Z} su(X)sf_u(Y) = su_X - su_X \sum_{Y \leq Z} f_u(Y),$$

où  $Z = X \wedge \text{supp}(s)$ . Par construction,  $\text{supp}(su(X)) = X \wedge \text{supp}(s) = Z$ , en sorte que  $su(X)u(Z) = su(X)$ . On a donc

$$sf_u(X) = su(X) - su(X) \sum_{Y \leq Z} u(Z)f_u(Y) = su(X) - su(X)u(Z) = 0.$$

■

Une conséquence immédiate du lemme de Saliola est le fait que  $u(Y)v f_u(X) = 0$  pour tout  $v \in RB^1$  lorsque  $Y \not\leq X$ . Par conséquent,

$$f_u(Y)f_u(X) = u(Y)f_u(X) - \sum_{Z < Y} u(Y)f_u(Z)f_u(X) = 0.$$

On est maintenant prêt à démontrer que  $f_u$  forme une famille eulérienne.

**Proposition 2.21.** *Soit  $B$  une bande régulière à gauche finie et  $R$  un anneau commutatif et unitaire. Pour toute section homogène  $u$  de  $R\text{supp}$ ,  $f_u$  est une famille eulérienne.*

*Démonstration.* Les conditions 1 et 2 de la définition de famille eulérienne (définition 2.16) découlent directement de la définition de  $f_u$ . Il nous reste à montrer que  $f_u(X)f_u(Y) = 0$  lorsque  $X \neq Y$  et que  $f_u(X)^2 = f_u(X)$ .

Tout d'abord, par le lemme de Saliola (lemme 2.20)

$$f_u(X)^2 = u(X)f_u(X) - \sum_{Y < X} u(X)f_u(Y)f_u(X) = u(X)f_u(X) = f_u(X).$$

Supposons ensuite que  $X, Y \in \text{supp}(B)$  et  $X \neq Y$ . On a déjà remarqué que  $f_u(Y)f_u(X) = 0$  lorsque  $Y \not\leq X$ , en sorte qu'on peut supposer que  $X < Y$ .

Écrivons

$$f_u(Y)f_u(X) = u(Y)f_u(X) - \sum_{W < Y} u(Y)f_u(W)f_u(X).$$

Si  $W < X$ , alors  $f_u(W)f_u(X) = 0$ , et donc l'expression précédente devient

$$f_u(Y)f_u(X) = u(Y)f_u(X) - \sum_{X \leq W < Y} u(Y)f_u(W)f_u(X).$$

On raisonne par récurrence : supposons que  $f_u(W)f_u(X) = 0$  pour tout  $W$  satisfaisant  $X < W < Y$ . Alors

$$\begin{aligned} f_u(Y)f_u(X) &= u(Y)f_u(X) - \sum_{X \leq W < Y} u(Y)f_u(W)f_u(X) \\ &= u(Y)f_u(X) - u(Y)f_u(X)^2 \\ &= u(Y)f_u(X) - u(Y)f_u(X) \\ &= 0. \end{aligned}$$

■

La proposition suivante porte sur une propriété surprenante des familles eulériennes associées aux sections homogènes.

**Proposition 2.22.** *Soit  $B$  une bande régulière à gauche finie,  $R$  un anneau commutatif unitaire,  $u$  une section homogène de  $R \text{supp}$ . La somme  $\sum_{X \in \text{supp}(B)} f_u(X)$  est un élément neutre à droite de  $RB$ .*

*Démonstration.* Notons  $f = \sum_{X \in \text{supp}(B)} f_u(X)$  et fixons un élément  $s \in B$ . On va démontrer que  $sf = s$ . Soit  $X = \text{supp}(s)$  et  $g$  la fonction de l'ensemble des chaînes de  $\text{supp}(B)$  vers  $RB$  définie par

$$g(c) = (-1)^{\ell(c)} \prod_{Z \in c} \downarrow su(Z).$$

En vertu du lemme 2.20,

$$sf = \sum_{Y \leq X} sf_u(Y) = \sum_{Y \leq X} \sum_{W \leq Y} \sum_{c: W \rightarrow Y} g(c).$$

On sépare la somme précédente en trois morceaux :

$$\mathcal{X}_0 = su(X) = s, \quad \mathcal{X}_1 = \sum_{W < X} \sum_{c: W \rightarrow X} g(c), \quad \mathcal{X}_2 = \sum_{Y < X} \sum_{W \leq Y} \sum_{c: W \rightarrow Y} g(c).$$

Étant donné une chaîne de la forme  $c : W \rightarrow Y$  où  $Y < X$ , on note  $cX$  la concaténation de la chaîne  $c$  avec l'unique chaîne  $Y \rightarrow X$  de longueur 1. La fonction  $c \mapsto cX$  donne une bijection entre les termes de  $\mathcal{X}_1$  et les termes de  $\mathcal{X}_2$ . De plus, pour toute chaîne  $c : W \rightarrow Y$  avec  $Y < X$ ,

$$g(cX) = (-1)^{\ell(c)+1} su(X) \prod_{Z \in c} \downarrow su(Z) = -su(X)g(c) = -g(c).$$

Par conséquent,  $\mathcal{X}_1 + \mathcal{X}_2 = 0$  et  $sf = \mathcal{X}_0 = s$ . ■

On démontre maintenant que  $f_u$  relève les idempotents donnés par le théorème de Solomon le long de  $R\text{supp}$ . L'argument est simple et purement combinatoire.

**Proposition 2.23.** *Soit  $B$  une bande régulière à gauche finie,  $R$  un anneau commutatif unitaire. La famille eulérienne associée à une section homogène  $u$  de  $R\text{supp}$  satisfait la relation suivante pour tout  $X \in \text{supp}(B)$  :*

$$R\text{supp}(f_u(X)) = \sum_{Y \leq X} \mu(Y, X)Y.$$

*Démonstration.* Fixons  $Y \in \text{supp}(B)$  avec  $Y \leq X$ . Comme  $u$  est une section homogène de  $R\text{supp}$ ,  $R\text{supp}(u(Y)) = Y$ , et à plus forte raison, pour tout chemin  $c : Y \rightarrow X$ ,

$$R\text{supp}\left(\prod_{Z \in c} \downarrow u(Z)\right) = Y.$$

Soit  $c_k(Y, X)$  le nombre de chemins  $c : Y \rightarrow X$  de longueur  $\ell(c) = k$ ; alors il découle de l'équation précédente que

$$R \operatorname{supp}(f_u(X)) = \sum_{Y \leq X} \sum_{k \geq 0} (-1)^k c_k(Y, X) Y.$$

Or, par le théorème de Philip Hall (Rota, 1964),

$$\sum_{k \geq 0} (-1)^k c_k(Y, X) = \mu(Y, X).$$

■

On a vu qu'une section homogène de  $R \operatorname{supp}$  donne lieu à une famille eulérienne. On donne maintenant la construction inverse, tirée de (Aguiar et Mahajan, 2017). Soit  $f$  une famille eulérienne de  $RB$ . Pour chaque  $X \in \operatorname{supp}(B)$ , notons  $u_f(X)$  la somme des termes de support  $X$  dans  $f(X)$ . Par la condition 2 de la définition 2.16,  $u_f(X)$  est non-nul. Mieux encore :

**Proposition 2.24** ((Aguiar et Mahajan, 2017), lemme 11.15). *Soit  $B$  une bande régulière à gauche finie,  $R$  un anneau commutatif unitaire et  $f$  une famille eulérienne de  $RB$ . Pour chaque  $X \in \operatorname{supp}(B)$ , notons  $u_f(X)$  la somme des termes de support  $X$  dans  $f(X)$ . Alors  $u_f$  est une section homogène de  $R \operatorname{supp}$ .*

*Démonstration.* Fixons  $X \in \operatorname{supp}(B)$ . Par construction,  $u_f(X)$  est une combinaison des éléments de  $\operatorname{supp}^{-1}(X)$ , et clairement  $R \operatorname{supp}(u_f(X)) = \epsilon(u_f(X))X$ . Écrivons  $f_u(X) = u_f(X) + v$ . Comme  $f_u$  est une famille eulérienne,  $v$  est une combinaison d'éléments de support strictement inférieur à  $X$ . De plus,  $f_u(X)$  est idempotent et donc

$$u_f(X) + v = (u_f(X) + v)^2 = u_f(X)^2 + u_f(X)v + vu_f(X) + v^2.$$

Tous les termes de  $u_f(X)v + vu_f(X) + v^2$  ont un support strictement inférieur à  $X$ , en sorte que l'équation précédente entraîne que  $u_f(X)$  est idempotent. Comme

$u_f(X)$  est non-nul (par la condition 1 de la définition 2.16), le lemme 2.17 entraîne que  $\epsilon(u_f(X)) = 1$ . Donc  $R \operatorname{supp}(u_f(X)) = X$ , ce qui termine la preuve. ■

On appelle la section  $u_f$  la *section homogène associée à  $f$* .

Les deux constructions  $u_f$  et  $f_u$  sont inverses l'une de l'autre.

**Proposition 2.25** ((Aguiar et Mahajan, 2017), proposition 11.9). *Soit  $B$  une bande régulière à gauche finie,  $R$  un anneau commutatif unitaire. Soit  $f$  une famille eulérienne de  $RB$  et  $u$  une section homogène de  $R \operatorname{supp}$ . Alors  $u$  est la section homogène associée à  $f$  si et seulement si  $f$  est la famille eulérienne associée à  $u$ .*

*Démonstration.* Fixons  $X \in \operatorname{supp}(B)$ . Si  $f$  est la famille eulérienne associée à  $u$ , on a par définition

$$f(X) = u(X) + \sum_{Y < X} \sum_{c: Y \rightarrow X} \prod_{Z \in c} \downarrow u(Z),$$

et on note que pour chaque  $Y < X$ , l'expression  $\sum_{c: Y \rightarrow X} \prod_{Z \in c} \downarrow u(Z)$  est une combinaison de termes de support  $Y$ . En particulier,  $u(X) = u_f(X)$  et  $u$  est la section homogène associée à  $f$ .

Réciproquement, supposons que  $u$  est la section homogène associée à  $f$ . Fixons  $X \in \operatorname{supp}(B)$  et supposons par récurrence que  $f(Y) = f_u(Y)$  lorsque  $Y < X$ . Notons  $e = f(X) - f_u(X)$ . L'hypothèse de récurrence entraîne que pour tout  $Y < X$ ,  $ef(Y) = 0$ . Pour  $s \in B$ , notons  $\delta_s$  la projection  $RB \rightarrow Rs$ . Soit  $t \in B$  tel que  $\operatorname{supp}(t) = Y < X$ ; si  $\delta_s(e) = 0$  pour tout  $s$  tel que  $\operatorname{supp}(s) > \operatorname{supp}(t)$ , alors le lemme de Saliola (lemme 2.20) permet de démontrer que

$$\delta_t(ef(Y)) = \delta_t(e).$$

En particulier, s'il existe un  $t$  tel que  $\operatorname{supp}(t) < X$  et  $\delta_t(e) \neq 0$ , alors on peut sans perte de généralité supposer qu'il est maximal et on a alors  $\delta_t(ef(Y)) \neq 0$ , une contradiction. ■

En conséquence, les sections homogènes de  $R \text{supp}$  sont en correspondance bijective avec les familles eulériennes, et les familles eulériennes donnent des ensembles complets d'idempotents orthogonaux. Ainsi, une section homogène  $u$  détermine une décomposition de  $RB$  par une famille eulérienne :

$$RB = \bigoplus_{X \in \text{supp}(B)} RBf_u(X).$$

Notre prochain objectif est d'étudier les modules  $RBf_u(X)$  afin de comprendre sous quelles conditions ils sont indécomposables. On commence calculer une base de ces modules dans la proposition suivante, qui est essentiellement une spécialisation du corollaire 4.4 dans (Margolis *et al.*, 2015a).

**Proposition 2.26.** *Soit  $B$  une bande régulière à gauche finie,  $R$  un anneau commutatif unitaire et  $u$  une section homogène de  $R \text{supp}$ . Pour tout  $X \in \text{supp}(B)$ , l'ensemble suivant est une base du  $R$ -module  $RBf_u(X)$  :*

$$\{bf_u(X) : b \in B, \text{supp}(b) = X\}.$$

*Démonstration.* Fixons  $X \in \text{supp}(B)$  et notons  $B_X = \{b \in B : \text{supp}(b) = X\}$ . On montre d'abord que  $RB_Xf_u(X) = RBf_u(X)$ . Soit  $a \in B$  tel que  $\text{supp}(a) \not\leq X$ . Alors par le lemme de Saliola (lemme 2.20),

$$af_u(X) = 0 \in RB_Xf_u(X).$$

De plus, si  $a \in B$  satisfait  $\text{supp}(a) \geq X$ , alors  $au(X) \in B_X$  et

$$af_u(X) = au(X)f_u(X) \in RB_Xf_u(X).$$

Cela démontre que  $RBf_u(X) \subseteq RB_Xf_u(X)$ , d'où  $RBf_u(X) = RB_Xf_u(X)$ .

Montrons ensuite que  $B_Xf_u(X)$  est linéairement indépendant sur  $R$ . Soit  $b \in B_X$  et  $\pi_b$  la projection  $\pi_b : RB \rightarrow Rb \cong R$ . On a d'abord que

$$bf_u(X) = bu(X) + \sum_{Y < X} bu(X)f_u(Y) = b + \sum_{Y < X} bf_u(Y).$$

On remarque ensuite que tous les termes de  $f_u(Y)$  ont un support plus petit ou égal à  $Y$ , et donc  $\pi_b(bf_u(Y)) = 0$  lorsque  $Y < X$ . En particulier,

$$\forall a, b \in B_X, \quad \pi_a(bf_u(X)) = \pi_a(b) = \delta(a, b),$$

ce qui entraîne immédiatement l'indépendance linéaire de  $B_X f_u(X)$  sur  $R$ . ■

On utilise maintenant la base de la proposition précédente pour étudier l'algèbre des endomorphismes du module  $RBf_u(X)$ .

**Proposition 2.27** ((Margolis et al., 2015a), proposition 4.5). *Soit  $B$  une bande régulière à gauche finie,  $R$  un anneau commutatif unitaire et  $u$  une section homogène de  $R$  supp. Alors :*

$$\text{End}_{RB}(RBf_u(X)) \cong R.$$

*Démonstration.* Fixons un élément  $\varphi \in \text{End}_{RB}(RBf_u(X))$ . Comme  $B_X f_u(X)$  est une base de  $RBf_u(X)$ , il existe un unique élément  $c_\varphi \in RB_X$  qui satisfait  $\varphi(f_u(X)) = c_\varphi f_u(X)$ . Soit  $\Phi : \text{End}_{RB}(RBf_u(X)) \rightarrow R$  la fonction définie par

$$\Phi(\varphi) = \epsilon(c_\varphi).$$

On vérifie aisément que  $\Phi$  est un morphisme de  $R$ -modules. Pour vérifier que c'est un morphisme d'algèbres, on fixe deux endomorphismes  $\varphi, \psi$  et on calcule que

$$\varphi \circ \psi(f_u(X)) = \varphi(c_\psi f_u(X)) = c_\psi \varphi(f_u(X)) = c_\psi c_\varphi f_u(X).$$

Par conséquent,

$$\Phi(\varphi \circ \psi) = \epsilon(c_\psi c_\varphi) = \epsilon(c_\varphi)\epsilon(c_\psi) = \Phi(\varphi)\Phi(\psi).$$

Afin de montrer que  $\Phi$  est un isomorphisme, on remarque d'abord que

$$\forall a \in B_X, \forall c \in RB_X, \quad acf_u(X) = \epsilon(c)af_u(X).$$

Par conséquent, pour tout  $a \in B_X$ ,

$$\varphi(af_u(X)) = a\varphi(f_u(X)) = ac_\varphi f_u(X) = \epsilon(c_\varphi)af_u(X) = \Phi(\varphi)af_u(X).$$

À plus forte raison,  $\varphi(x) = \Phi(\varphi)x$  pour tout  $x \in RBf_u(X)$ . La conclusion découle directement de cette observation. ■

Puisque les décompositions d'un module correspondent aux ensembles complets d'idempotents orthogonaux de ses endomorphismes (proposition B.15), la proposition précédente permet de conclure que  $RBf_u(X)$  est indécomposable si et seulement si  $R$  ne contient aucun idempotent non-trivial (i.e. distinct de 0 et 1). C'est le cas notamment lorsque  $R$  est un *anneau local*, c'est-à-dire lorsque  $R$  possède un unique idéal maximal, et en particulier lorsque  $R$  est un corps.

Dans (Aguiar et Mahajan, 2017), il est démontré que tous les ensembles complets d'idempotents primitifs orthogonaux de  $KB$  sont des familles eulériennes lorsque  $B$  est le semi-groupe des faces d'un arrangement central d'hyperplans et  $K$  est un corps. On conjecture que ce résultat se généralise de la manière suivante :

**Conjecture 2.28.** *Soit  $B$  une bande régulière à gauche finie,  $R$  un anneau commutatif unitaire. Alors tout élément neutre à droite de  $RB$  est la somme d'une famille eulérienne.*

### 2.2.5 Diagonalisation de l'action à gauche sur les chambres

On présente maintenant une série de résultats qui constituent l'une des motivations derrière l'étude des représentations des bandes régulières à gauche. Le résultat principal de cette sous-section donne des formules explicites pour les valeurs propres de certains endomorphismes du module des chambres d'une bande régulière à gauche. Il nous faudra travailler sur le corps  $\mathbb{R}$ , et nos résultats porteront sur l'action à gauche des éléments positifs de  $\mathbb{R}B$  sur  $\mathbb{R}\mathcal{C}(B)$ , où  $B$  est une

bande régulière à gauche finie. Le résultat, initialement démontré dans (Brown, 2000), a par la suite été étendu dans (Saliola, 2012) en utilisant les idempotents définis à la section précédente. On reprend ici les idées de la preuve proposée dans (Saliola, 2012).

On commence par quelques notions de base concernant les endomorphismes positifs. Les définitions suivantes nous seront utiles :

**Définition 2.29.** Soit  $V$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie et  $\mathbf{v}$  une base de  $V$ . On dit qu'un vecteur  $u$  est *positif relativement à  $\mathbf{v}$*  si ses coordonnées dans la base  $\mathbf{v}$  sont positives. Soit  $\varphi \in \text{End}_{\mathbb{R}}(V)$ , on dit que  $\varphi$  est *positif relativement à  $\mathbf{v}$*  si  $\varphi(x)$  est positif relativement à  $\mathbf{v}$  pour tout  $x \in \mathbf{v}$ .

On introduit aussi, pour énoncer le prochain résultat, les notations suivantes : soit  $\varphi$  un endomorphisme d'un  $\mathbb{R}$ -espace  $V$ , on désigne par  $\text{spect}(\varphi)$  l'ensemble de ses valeurs propres, et on note  $\rho(\varphi) = \max\{|\lambda| : \lambda \in \text{spect}(\varphi)\}$ . On appelle  $\rho(\varphi)$  le *rayon spectral* de  $\varphi$ .

La proposition qui suivante résume les propriétés des endomorphismes positifs dont on aura besoin. Il s'agit essentiellement du théorème de Perron-Frobenius généralisé aux endomorphismes positifs ; pour la démonstration, voir (Horn et Johnson, 1985), théorèmes 8.1.22 et 8.2.2.

**Proposition 2.30.** Soit  $V$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension fini,  $\mathbf{v}$  une base de  $V$  et  $\varphi$  un endomorphisme de  $V$  positif relativement à  $\mathbf{v}$ .

1.  $\rho(\varphi)$  est une valeur propre de  $\varphi$ .
2.  $\varphi$  admet un vecteur propre de valeur propre  $\rho(\varphi)$  positif relativement à  $\mathbf{v}$
3.  $\min_{x \in \mathbf{v}} s_x \leq \rho(\varphi) \leq \max_{x \in \mathbf{v}} s_x$ , où  $s_x$  est la somme des coordonnées de  $\varphi(x)$  dans la base  $\mathbf{v}$ .

■

On va maintenant démontrer le lemme suivant :

**Lemme 2.31** ((Saliola, 2012)). *Soit  $B$  une bande régulière à gauche finie et  $p \in \mathbb{R}B$  positif relativement à  $B$ . Alors il existe un vecteur  $u \in \mathbb{R}C(B)$  satisfaisant simultanément :*

1.  $pu = \epsilon(p)u$ .
2.  $\epsilon(u) = 1$ .
3.  $u$  est positif relativement à  $C(B)$ .

*Démonstration.* Notons  $\mathcal{C} = C(B)$ . Soit  $\varphi_p$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}C$  défini par  $\varphi_p : x \mapsto px$ . Alors  $\varphi_p$  est un endomorphisme positif relativement à la base  $\mathcal{C}$ . De plus, pour tout  $c \in \mathcal{C}$ , la somme des coordonnées de  $\varphi_p(c)$  dans la base  $\mathcal{C}$  est

$$\sum_{d \in \mathcal{C}} \sum_{sc=d} p(s) = \sum_{s \in B} p(s) = \epsilon(p).$$

Par la partie 3 de la proposition 2.30,  $\epsilon(p)$  est le rayon spectral de  $\varphi_p$ . Par les parties 1 et 2 de la proposition 2.30,  $\epsilon(p)$  est une valeur propre de  $\varphi_p$  qui admet un vecteur propre  $u \in \mathbb{R}C$  positif relativement à  $\mathcal{C}$ , et on peut supposer que  $\epsilon(u) = 1$  sans perte de généralité. Par construction,  $pu = \varphi_p(u) = \epsilon(p)u$ . ■

Ce lemme nous permet de démontrer la proposition suivante, de laquelle notre résultat principal découlera aisément.

**Proposition 2.32** ((Saliola, 2012), théorème 4). *Soit  $B$  une bande régulière à gauche finie et  $p \in \mathbb{R}B$  positif relativement à  $B$ . Pour tout  $X \in \text{supp}(B)$ , notons  $p_X$  la projection de  $p$  sur la contraction  $\mathbb{R}B_{\geq X}$ . Alors il existe une section homogène  $u$  de  $R\text{supp}$  qui satisfait*

$$\forall X \in \text{supp}(B), \quad p_X u(X) = \epsilon(p_X)u(X).$$

De plus, la famille eulérienne associée à  $u$  satisfait

$$p = \sum_{X \in \text{supp}(B)} \epsilon(p_X) f_u(X).$$

*Démonstration.* La section  $u$  est obtenue en appliquant le lemme précédent à  $p_X$  pour chaque  $X \in \text{supp}(B)$ . La somme des  $f_u(X)$  est un élément neutre à droite de  $\mathbb{R}B$  (proposition 2.22), en sorte que

$$p = \sum_{X \in \text{supp}(B)} p f_u(X).$$

Pour chaque  $X \in \text{supp}(B)$ , on a  $p f_u(X) = p_X f_u(X)$  par le lemme 2.20. Or on a aussi  $u(X) f_u(X) = f_u(X)$  en sorte que

$$p_X f_u(X) = p_X u(X) f_u(X) = \epsilon(p_X) u(X) f_u(X) = \epsilon(p_X) f_u(X),$$

car  $p_X u(X) = \epsilon(p_X) u(X)$ . ■

On est maintenant prêt à présenter le résultat principal de cette sous-section. La motivation derrière cette proposition provient de ses liens avec certaines marches aléatoires sur les chambres d'arrangements d'hyperplans, et plus généralement de bandes régulières à gauche (la matrice de transition de ces marches aléatoires coïncide avec la matrice de l'action à droite  $p$  dans la base naturelle de  $\mathbb{R}C(B)$ ); voir notamment (Brown, 2000), (Bidigare *et al.*, 1999), (Brown et Diaconis, 1998).

**Proposition 2.33.** *Soit  $B$  une bande régulière à gauche finie dont l'algèbre  $\mathbb{R}B$  est unitaire. Soit  $p \in \mathbb{R}B$  positif relativement à  $B$ . Pour tout  $X \in \text{supp}(B)$ , on note  $p_X$  la projection de  $p$  sur la contraction  $\mathbb{R}B_{\geq X}$ .*

1. *L'action à gauche de  $p$  sur  $\mathbb{R}C(B)$  est diagonalisable.*
2. *Les valeurs propres de l'action à gauche de  $p$  sur  $\mathbb{R}C(B)$  sont toutes de la forme  $\epsilon(p_X)$  pour un certain  $X \in \text{supp}(B)$ .*

3. Il existe une famille eulérienne  $f$  de  $\mathbb{R}B$  telle que la multiplicité de la valeur propre  $\epsilon(p_X)$  coïncide avec  $\dim_{\mathbb{R}}(f(X)\mathbb{R}C(B))$  pour tout  $X \in \text{supp}(B)$ .

*Démonstration.* Soit  $u$  la section homogène de  $R_{\text{supp}}$  donnée par la proposition 2.32. La somme de la famille eulérienne associée à  $u$  est un élément neutre à droite de  $\mathbb{R}B$  (proposition 2.22), mais comme  $\mathbb{R}B$  est unitaire, il s'agit aussi d'un élément neutre à gauche. Par conséquent, on a une décomposition du module  $\mathbb{R}C(B)$  :

$$\mathbb{R}C(B) = \bigoplus_{X \in \text{supp}(B)} f_u(X)\mathbb{R}C(B).$$

Comme  $p = \sum_{X \in \text{supp}(B)} \epsilon(p_X) f_u(X)$ , on conclut que  $f_u(X)\mathbb{R}C(B)$  est un espace propre de valeur propre  $\epsilon(p_X)$  pour tout  $X \in \text{supp}(B)$ . ■

On termine la section en mentionnant qu'il existe une formule plus élégante pour les multiplicités dans le cas des arrangements d'hyperplans. La preuve de cette formule est basée sur un théorème de Zaslavsky sur le nombre de chambres d'un arrangement d'hyperplans; voir (Saliola, 2012), corollaire 7, pour les détails.

**Proposition 2.34.** Soit  $\mathcal{F}$  l'ensemble des faces d'un arrangement d'hyperplans et  $p \in \mathbb{R}\mathcal{F}$  positif relativement à  $\mathcal{F}$ . Pour tout  $X \in \mathcal{L}(\mathcal{F})$ , la multiplicité de  $\epsilon(p_X)$  comme valeur propre de l'action à gauche de  $p$  sur  $\mathbb{R}C(\mathcal{F})$  est donnée par :

$$\sum_{\substack{Y \in \mathcal{L}(\mathcal{A}) \\ \epsilon(p_Y) = \epsilon(p_X)}} |\mu(\hat{0}, Y)|.$$

■

## CHAPITRE III

### PROPRIÉTÉS HOMOLOGIQUES

Ce chapitre vise à donner un avant-goût de l'étude des propriétés homologiques des bandes régulières à gauche. On commence par une introduction à l'algèbre homologique, qui culmine avec la définition (non-triviale) du foncteur  $\text{Ext}$ . On discute ensuite d'une résolution projective pour les modules simples des bandes régulières à gauche associées aux arrangements d'hyperplans. On sera en mesure, grâce à cette résolution, de calculer les valeurs du foncteur  $\text{Ext}$  sur ces modules.

#### 3.1 Notions préliminaires d'algèbre homologique

On introduit dans cette section les notions et résultats de base en algèbre homologique, afin de pouvoir étudier ces notions dans le contexte des bandes régulières à gauche. On suit en grande partie le traitement de (Assem, 1997). Les ouvrages (Benson, 1998), (Cartan et Eilenberg, 1956) et (Rotman, 2009) ont aussi été consultés et sont des références utiles sur ce sujet.

##### 3.1.1 Complexes et homologie

La première notion importante est celle de complexe descendant :

**Définition 3.1.** Soit  $\Lambda$  une algèbre. On appelle *complexe descendant*, ou simplement *complexe*, une paire  $(\mathfrak{c}_\bullet, \delta_\bullet)$  où

- $\mathbf{c}_\bullet$  est une suite indexée par  $\mathbb{Z}$  de  $\Lambda$ -modules ;
- $\delta_\bullet$  est une suite indexée par  $\mathbb{Z}$  de morphismes  $\delta_n : \mathbf{c}_n \rightarrow \mathbf{c}_{n-1}$  tels que

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad \delta_{n-1} \circ \delta_n = 0.$$

Les modules  $\mathbf{c}_n$  sont appelés les *composantes* du complexe et les morphismes  $\delta_n$  sont appelés ses *différentielles*.

Les différentielles d'un complexe satisfont  $\text{im}(\delta_n) \subseteq \text{ker}(\delta_{n-1})$ . On dit qu'un complexe est *exact en  $n$*  si  $\text{im}(\delta_n) = \text{ker}(\delta_{n-1})$ . Un complexe est dit *exact* s'il exact en tout  $n \in \mathbb{Z}$ .

Étant donné une algèbre  $\Lambda$ , les complexes de  $\Lambda$ -modules forment une catégorie qu'on notera  $\text{Comp}_\Lambda$ . Un morphisme entre deux complexes  $(\mathbf{c}_\bullet, \delta_\bullet)$  et  $(\mathbf{d}_\bullet, \gamma_\bullet)$  est une séquence de morphismes de  $\Lambda$ -modules  $\varphi_n : \mathbf{c}_n \rightarrow \mathbf{d}_n$  tels que  $\varphi_{n-1} \circ \delta_n = \gamma_n \circ \varphi_n$ . En d'autres mots, on demande que le diagramme suivant soit commutatif pour tout  $n \in \mathbb{Z}$  :

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{c}_n & \xrightarrow{\delta_n} & \mathbf{c}_{n-1} \\ \downarrow \varphi_n & & \downarrow \varphi_{n-1} \\ \mathbf{d}_n & \xrightarrow{\gamma_n} & \mathbf{d}_{n-1} \end{array}$$

On introduit maintenant les modules d'homologie d'un complexe :

**Définition 3.2.** Soit  $\Lambda$  une algèbre et  $(\mathbf{c}_\bullet, \delta_\bullet)$  un complexe de  $\Lambda$ -modules. On appelle  *$n$ -ième module d'homologie* de  $(\mathbf{c}_\bullet, \delta_\bullet)$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , le  $\Lambda$ -module

$$H_n(\mathbf{c}_\bullet, \delta_\bullet) = \text{ker}(\delta_n) / \text{im}(\delta_{n+1}).$$

On peut vérifier qu'un morphisme de complexes induit naturellement des morphismes au niveau des modules d'homologie. À partir de là, il n'est pas difficile de vérifier la proposition suivante (voir (Assem, 1997)) :

**Proposition 3.3.** *Soit  $\Lambda$  une algèbre. Alors pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ , l'application  $H_n : \text{Comp}_\Lambda \rightarrow {}_\Lambda\text{mod}$  définit un foncteur additif. ■*

Il existe aussi une notion duale de *complexe ascendant*, où les différentielles vont dans la direction opposée. On notera  $\text{Comp}_\Lambda^{\text{op}}$  la catégorie formée par les complexes ascendants. L'équivalent des modules d'homologie dans  $\text{Comp}_\Lambda^{\text{op}}$  sont les *modules de cohomologie* et on les note par  $H^n(\mathbf{c}_\bullet, \delta_\bullet)$ . Les résultats et définitions concernant les complexes descendants peuvent être aisément adaptés aux complexes ascendants.

Un endofoncteur additif de la catégorie des modules s'étend naturellement en un foncteur sur les complexes. Selon la variance du foncteur d'origine, cette extension préservera ou renversera l'orientation des complexes. On présente maintenant en détails un cas particulier de cette construction qui nous sera utile pour la suite.

Fixons un complexe descendant  $(\mathbf{c}_\bullet, \delta_\bullet)$  de modules sur une algèbre  $\Lambda$ . Étant donné un  $\Lambda$ -module  $\mathbf{n}$ , le foncteur  $\text{hom}_\Lambda(-, \mathbf{n})$  envoie  $(\mathbf{c}_\bullet, \delta_\bullet)$  sur le complexe

$$\text{hom}_\Lambda((\mathbf{c}_\bullet, \delta_\bullet), \mathbf{n}) = (\text{hom}_\Lambda(\mathbf{c}_\bullet, \mathbf{n}), \text{hom}_\Lambda(\delta_\bullet, \mathbf{n})).$$

Le fait que  $\text{hom}_\Lambda(-, \mathbf{n})$  est un foncteur additif sur les  $\Lambda$ -modules permet aisément de se convaincre qu'il s'agit bien d'un complexe. En effet, on a pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ ,

$$\text{hom}_\Lambda(\delta_{n+1}, \mathbf{n}) \circ \text{hom}_\Lambda(\delta_n, \mathbf{n}) = \text{hom}_\Lambda(\delta_n \circ \delta_{n+1}, \mathbf{n}) = \text{hom}_\Lambda(0, \mathbf{n}) = 0.$$

On se convainc ensuite, de manière analogue, qu'il s'agit d'un foncteur (contra-variant)  $\text{Comp}_\Lambda \rightarrow \text{Comp}_\Lambda^{\text{op}}$ . Le lemme suivant montre qu'il s'agit en fait d'un bi-foncteur.

**Lemme 3.4.** *Soit  $(\mathbf{c}_\bullet, \delta_\bullet)$  un complexe descendant. Alors  $\text{hom}_\Lambda((\mathbf{c}_\bullet, \delta_\bullet), -)$  définit un foncteur covariant  ${}_\Lambda\text{mod} \rightarrow \text{Comp}_\Lambda^{\text{op}}$ .*

*Démonstration.* On sait déjà comment ce foncteur est défini au niveau des objets ; il nous reste à le définir au niveau des morphismes. Étant donné un morphisme de modules  $\varphi : \mathfrak{n} \rightarrow \mathfrak{n}'$ , on pose

$$\mathrm{hom}_\Lambda((\mathfrak{c}_\bullet, \delta_\bullet), \varphi)_n = \mathrm{hom}_\Lambda(\mathfrak{c}_n, \varphi).$$

Il nous faut vérifier que  $\mathrm{hom}_\Lambda((\mathfrak{c}_\bullet, \delta_\bullet), \varphi)$  est bien un morphisme de complexes, ce qui revient à vérifier pour tout  $n \in \mathbb{Z}$  la commutativité du diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{hom}_\Lambda(\mathfrak{c}_n, \mathfrak{n}) & \xrightarrow{\mathrm{hom}_\Lambda(\delta_{n+1}, \mathfrak{n})} & \mathrm{hom}_\Lambda(\mathfrak{c}_{n+1}, \mathfrak{n}) \\ \downarrow \mathrm{hom}_\Lambda(\mathfrak{c}_n, \varphi) & & \downarrow \mathrm{hom}_\Lambda(\mathfrak{c}_{n+1}, \varphi) \\ \mathrm{hom}_\Lambda(\mathfrak{c}_n, \mathfrak{n}') & \xrightarrow{\mathrm{hom}_\Lambda(\delta_{n+1}, \mathfrak{n}')} & \mathrm{hom}_\Lambda(\mathfrak{c}_{n+1}, \mathfrak{n}') \end{array}$$

Or, une simple vérification montre que les deux compositions envoient un morphisme  $\psi \in \mathrm{hom}_\Lambda(\mathfrak{c}_n, \varphi)$  sur le morphisme  $\delta_{n+1} \circ \psi \circ \varphi \in \mathrm{hom}_\Lambda(\mathfrak{c}_{n+1}, \mathfrak{n}')$ .

Enfin, on vérifie que  $\mathrm{hom}_\Lambda((\mathfrak{c}_\bullet, \delta_\bullet), -)$  préserve la composition et les morphismes identités en utilisant la functorialité de  $\mathrm{hom}_\Lambda(\mathfrak{c}_n, -)$  sur chaque composante. ■

On montre maintenant que les morphismes de complexes induisent des transformations naturelles de ces foncteurs.

**Lemme 3.5.** *Soit  $\varphi_\bullet : (\mathfrak{c}_\bullet, \delta_\bullet) \rightarrow (\mathfrak{d}_\bullet, \gamma_\bullet)$  un morphisme de complexes descendants de  $\Lambda$ -modules. Alors  $\varphi_\bullet$  induit une transformation naturelle :*

$$\mathrm{hom}_\Lambda(\varphi_\bullet, -) : \mathrm{hom}_\Lambda((\mathfrak{d}_\bullet, \gamma_\bullet), -) \Longrightarrow \mathrm{hom}_\Lambda((\mathfrak{c}_\bullet, \delta_\bullet), -)$$

*Démonstration.* Soit  $\xi : \mathfrak{n} \rightarrow \mathfrak{n}'$  un morphisme de  $\Lambda$ -modules ; on doit vérifier que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{hom}(\mathfrak{p}_\bullet, \mathfrak{n}) & \xrightarrow{\mathrm{hom}(\psi_\bullet, \mathfrak{n})} & \mathrm{hom}(\mathfrak{q}_\bullet, \mathfrak{n}) \\ \downarrow \mathrm{hom}(\mathfrak{p}_\bullet, \xi) & & \downarrow \mathrm{hom}(\mathfrak{q}_\bullet, \xi) \\ \mathrm{hom}(\mathfrak{p}_\bullet, \mathfrak{n}') & \xrightarrow{\mathrm{hom}(\psi_\bullet, \mathfrak{n}')} & \mathrm{hom}(\mathfrak{q}_\bullet, \mathfrak{n}'). \end{array}$$

Comme la composition de morphismes de complexes se fait composante par composante, il suffit de montrer que le diagramme précédent est commutatif pour  $k \in \mathbb{Z}$  fixé. On termine donc la preuve en vérifiant que pour tout  $\chi \in \text{hom}(\mathfrak{p}_k, \mathfrak{n})$ ,

$$\text{hom}(\psi_k, \mathfrak{n}) \circ \text{hom}(\mathfrak{p}_k, \xi)(\chi) = \psi_k \circ \chi \circ \xi = \text{hom}(\mathfrak{q}_k, \xi) \circ \text{hom}(\psi_k, \mathfrak{n}')(\chi).$$

■

On termine cette sous-section en présentant la notion d'homotopie, qui est souvent utile pour comparer l'homologie de deux complexes.

**Définition 3.6.** Deux morphismes de complexes  $\varphi_\bullet, \psi_\bullet : (\mathfrak{c}_\bullet, \delta_\bullet) \rightarrow (\mathfrak{d}_\bullet, \gamma_\bullet)$  sont dits *homotopes*, noté  $\varphi_\bullet \simeq \psi_\bullet$ , s'il existe une séquence  $\xi_n : \mathfrak{c}_n \rightarrow \mathfrak{d}_{n+1}$  de morphismes tels que

$$\varphi_n - \psi_n = \delta_{n+1} \circ \xi_n + \xi_{n-1} \circ \gamma_n.$$

Le lemme suivant est l'une des propriétés les plus importantes de la relation d'homotopie ; il s'agit du lemme IX.1.6 de (Assem, 1997).

**Lemme 3.7.** Si  $\varphi_\bullet$  et  $\psi_\bullet$  sont des morphismes de complexes homotopes, alors  $H_n(\varphi_\bullet) = H_n(\psi_\bullet)$ . ■

Autrement dit, deux morphismes homotopes induisent les mêmes morphismes en homologie. On définit la relation d'homotopie pour les morphismes de complexes ascendants de manière analogue, et le lemme précédent a une version duale : deux morphismes homotopes de complexes ascendants induisent le même morphisme en cohomologie.

Suivant ces observations, on introduit aussi la terminologie suivante : on dira qu'un morphisme de complexes  $\varphi_\bullet$  est un *homotopisme* s'il existe un autre morphisme de complexes  $\psi_\bullet$  tel que  $\varphi_\bullet \circ \psi_\bullet \simeq id$  et  $\psi_\bullet \circ \varphi_\bullet \simeq id$ . Clairement, les

$$\begin{array}{ccc}
 & P & \\
 \exists \bar{\varphi} \swarrow & \downarrow \varphi & \\
 A & \xrightarrow{\psi} & B \longrightarrow 0
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccccc}
 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{\psi} & B \\
 & & \downarrow \varphi & & \swarrow \exists \bar{\varphi} \\
 & & I & & 
 \end{array}$$

Figure 3.1 Les notions de modules projectifs (à gauche) et injectifs (à droite).

foncteurs induits par l'homologie et la cohomologie envoient les homotopies sur des isomorphismes.

### 3.1.2 Objets projectifs et injectifs

On introduit maintenant la notion de module projectif.

**Définition 3.8.** Un module  $\mathfrak{p}$  est dit *projectif* si pour tout morphisme  $\varphi : \mathfrak{p} \rightarrow \mathfrak{b}$  et tout morphisme surjectif  $\psi : \mathfrak{a} \rightarrow \mathfrak{b}$ , il existe un morphisme  $\bar{\varphi} : \mathfrak{p} \rightarrow \mathfrak{a}$  tel que  $\bar{\varphi} \circ \psi = \varphi$ .

On peut montrer, en utilisant leur propriété universelle, que les modules libres sont projectifs. La proposition suivante donne un critère utile pour reconnaître les modules projectifs (voir (Assem, 1997), proposition IV.2.3)

**Proposition 3.9.** *Une somme directe de modules est projective si et seulement si chaque facteur de la somme est projectif.* ■

La notion duale, celle de module injectif, s'avérera moins importante pour nos besoins, mais on l'introduit tout de même par souci de symétrie.

**Définition 3.10.** Un module  $\mathfrak{i}$  est dit *injectif* si pour tout morphisme  $\varphi : \mathfrak{a} \rightarrow \mathfrak{i}$  et tout morphisme injectif  $\psi : \mathfrak{a} \rightarrow \mathfrak{b}$ , il existe un morphisme  $\bar{\varphi} : \mathfrak{b} \rightarrow \mathfrak{i}$  tel que  $\bar{\varphi} \circ \psi = \varphi$ .

La caractérisation des modules projectifs ci-dessus admet un analogue, dual, pour les modules injectifs : un produit de modules est injectif si et seulement si chaque facteur est injectif (Assem, 1997).

### 3.1.3 Résolutions projectives et foncteur Ext

L'objectif de cette sous-section est d'introduire le foncteur Ext. On peut construire ce foncteur à partir du foncteur hom en utilisant des résolutions projectives ; on commence par introduire la notion de résolution. Soit  $I \subseteq \mathbb{Z}$  ; on dit qu'un complexe  $(\mathbf{c}_\bullet, \delta_\bullet)$  est *concentré en  $I$*  lorsque  $c_n = 0$  pour tout  $n \notin I$ . Un complexe concentré en  $\mathbb{N}$  est dit *positif*.

**Définition 3.11.** Une *résolution* d'un module  $\mathbf{m}$  est un complexe positif  $(\mathbf{c}_\bullet, \delta_\bullet)$  tel que  $H_0(\mathbf{c}_\bullet, \delta_\bullet) = \mathbf{m}$ ,  $H_n(\mathbf{c}_\bullet, \delta_\bullet) = 0$  si  $n \neq 0$ . Une résolution est *projective* si toutes ses composantes le sont.

Une résolution projective est donc une suite d'objets projectifs de la forme

$$\dots \xrightarrow{\delta_{n+1}} \mathbf{p}_n \xrightarrow{\delta_n} \dots \xrightarrow{\delta_2} \mathbf{p}_1 \xrightarrow{\delta_1} \mathbf{p}_0 \longrightarrow 0.$$

qui satisfait  $\mathbf{p}_0 / \text{im}(\delta_1) \cong \mathbf{m}$ . La surjection canonique  $\pi : \mathbf{p}_0 \rightarrow \mathbf{m}$  nous permet alors d'obtenir un complexe exact

$$\dots \xrightarrow{\delta_{n+1}} \mathbf{p}_n \xrightarrow{\delta_n} \dots \xrightarrow{\delta_2} \mathbf{p}_1 \xrightarrow{\delta_1} \mathbf{p}_0 \xrightarrow{\pi} \mathbf{m} \longrightarrow 0.$$

On notera  $\mathbf{p}_\bullet \xrightarrow{\pi} \mathbf{m}$  pour indiquer que  $\pi$  est la surjection qui permet de prolonger la résolution en un complexe exact.

Le lemme suivant est un résultat fondamental connu sous le nom de *théorème de comparaison*. Il va nous permettre de montrer que les résolutions projectives

définissent un invariant homologique. On peut trouver une preuve dans (Assem, 1997), au théorème IX.2.1.

**Lemme 3.12.** *Soit  $\mathfrak{m}$  et  $\mathfrak{m}'$  deux modules avec des résolutions  $\mathfrak{p}_\bullet \xrightarrow{\pi} \mathfrak{m}$  et  $\mathfrak{p}'_\bullet \xrightarrow{\pi'} \mathfrak{m}'$ . Si  $\mathfrak{p}_\bullet$  est projective, alors pour tout morphisme de modules  $\varphi : \mathfrak{m} \rightarrow \mathfrak{m}'$ , il existe un morphisme de complexes  $\varphi_\bullet : \mathfrak{p}_\bullet \rightarrow \mathfrak{p}'_\bullet$  qui satisfait  $\pi' \circ \varphi_0 = \varphi \circ \pi$ . Le morphisme  $\varphi_\bullet$  est unique à homotopie près. ■*

Un morphisme de complexes  $\varphi_\bullet$  qui satisfait la propriété du lemme précédent est appelé un *relèvement de  $\varphi$* . Plus concrètement, un relèvement de  $\varphi$  prend la forme d'un diagramme commutatif dont les lignes sont des complexes exacts :

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} \dots & \xrightarrow{\delta_{n+1}} & \mathfrak{p}_n & \xrightarrow{\delta_n} & \dots & \xrightarrow{\delta_2} & \mathfrak{p}_1 & \xrightarrow{\delta_1} & \mathfrak{p}_0 & \xrightarrow{\pi} & \mathfrak{m} & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \varphi_n & & & & \downarrow \varphi_1 & & \downarrow \varphi_0 & & \downarrow \varphi & & \\ \dots & \xrightarrow{\delta_{n+1}} & \mathfrak{p}'_n & \xrightarrow{\delta_n} & \dots & \xrightarrow{\delta_2} & \mathfrak{p}'_1 & \xrightarrow{\delta_1} & \mathfrak{p}'_0 & \xrightarrow{\pi} & \mathfrak{m}' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

En résumé, le théorème de comparaison nous dit qu'un morphisme de modules admet un relèvement lorsque la résolution du domaine est projective, et que ce relèvement est unique à homotopie près. Les relèvements peuvent aussi être composés : si  $\varphi : \mathfrak{n} \rightarrow \mathfrak{n}'$  et  $\varphi' : \mathfrak{n}' \rightarrow \mathfrak{n}''$  sont des morphismes qui admettent des relèvements  $\varphi_\bullet$  et  $\varphi'_\bullet$ , alors  $\varphi'_\bullet \circ \varphi_\bullet$  est un relèvement de  $\varphi' \circ \varphi$ . En particulier, ces observations nous permettent de conclure que tout relèvement d'un isomorphisme est un homotopisme.

On est maintenant en mesure de définir le foncteur  $\text{Ext}$  ; sa définition exige une justification, qui prend forme dans la proposition suivante. Cette proposition démontre que les résolutions projectives d'un même module donnent lieu au même foncteur lorsqu'on passe aux modules d'homologie.

**Proposition 3.13.** *Soit  $\mathfrak{p}_\bullet \rightarrow \mathfrak{m}$  et  $\mathfrak{q}_\bullet \rightarrow \mathfrak{n}$  des résolutions projectives de  $\Lambda$ -modules. Alors un isomorphisme  $\varphi : \mathfrak{m} \cong \mathfrak{n}$  induit, pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ , un isomor-*

*phisme naturel entre les compositions de foncteurs :*

$$\Phi^n : H^n \circ \text{hom}_\Lambda(\mathfrak{p}_\bullet, -) \cong H^n \circ \text{hom}_\Lambda(\mathfrak{q}_\bullet, -).$$

*Démonstration.* Soit  $\psi$  l'inverse de  $\varphi$ . Par le théorème de comparaison (lemme 3.12),  $\varphi$  et  $\psi$  admettent des relèvements  $\varphi_\bullet$  et  $\psi_\bullet$ . Le fait que  $\varphi$  et  $\psi$  soient des isomorphismes mutuellement inverses entraîne que  $\varphi_\bullet$  et  $\psi_\bullet$  sont des homotopismes mutuellement inverses.

Par le lemme 3.5,  $\text{hom}_\Lambda(\varphi_\bullet, -)$  et  $\text{hom}_\Lambda(\psi_\bullet, -)$  définissent aussi des transformations naturelles entre les foncteurs  $\text{hom}_\Lambda(\mathfrak{q}_\bullet, -)$  et  $\text{hom}_\Lambda(\mathfrak{p}_\bullet, -)$ . Par conséquent, les compositions  $\Phi^n = H^n \circ \text{hom}_\Lambda(\varphi_\bullet, -)$  et  $\Psi^n = H^n \circ \text{hom}_\Lambda(\psi_\bullet, -)$  induisent aussi des transformations naturelles entre les foncteurs appropriés pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ .

Fixons un module  $\mathfrak{r}$  et vérifions que les composantes  $\Phi_\mathfrak{r}^n$  et  $\Psi_\mathfrak{r}^n$  sont des isomorphismes mutuellement inverses. Par définition,

$$\Phi_\mathfrak{r}^n = H^n \circ \text{hom}_\Lambda(\varphi_\bullet, \mathfrak{r}), \quad \Psi_\mathfrak{r}^n = H^n \circ \text{hom}_\Lambda(\psi_\bullet, \mathfrak{r}).$$

En vertu du lemme 3.7, il suffit de démontrer que  $\text{hom}_\Lambda(\varphi_\bullet, \mathfrak{r})$  et  $\text{hom}_\Lambda(\psi_\bullet, \mathfrak{r})$  sont des homotopismes mutuellement inverses. Or, on a déjà que  $\varphi_\bullet$  et  $\psi_\bullet$  sont des homotopismes mutuellement inverses. Comme  $\text{hom}_\Lambda(-, \mathfrak{r})$  est un foncteur additif, il préserve les homotopismes et obtient la conclusion voulue. ■

On est maintenant prêt à donner la définition des foncteurs  $\text{Ext}$ .

**Définition 3.14.** Soit  $\mathfrak{m}$  un module et  $\mathfrak{p}_\bullet$  une résolution projective de  $\mathfrak{m}$ . On définit le foncteur  $\text{Ext}^n(\mathfrak{m}, -) : \Lambda \text{mod} \rightarrow \Lambda \text{mod}$  par

$$\text{Ext}^n(\mathfrak{m}, -) = H^n \circ \text{hom}(\mathfrak{p}_\bullet, -).$$

Évidemment, des choix de résolutions projectives différentes peuvent très bien donner lieu à des foncteurs Ext différents, mais on sait maintenant que les foncteurs obtenus sont tous naturellement isomorphes.

Le foncteur Ext est un bi-foncteur, et on peut le construire sur son autre variable en remplaçant les résolutions projectives par des résolutions injectives. On peut se référer à (Rotman, 2009) pour les détails. On mentionne aussi que la construction du foncteur Ext découle d'une construction plus générale appelée *foncteur dérivé*. Cette construction fonctionne sur n'importe quel foncteur additif entre deux catégories abéliennes (pas seulement le foncteur hom). Voir par exemple (Benson, 1998) pour les détails de cette construction.

### 3.2 Propriétés homologiques des arrangements d'hyperplans

Grâce aux chapitres 1 et 2, on en sait maintenant beaucoup sur les bandes régulières à gauche associées aux arrangements d'hyperplans : on connaît à la fois leur structure de semi-groupe et la structure de leurs algèbres. On va aller un peu plus loin en déterminant les valeurs du foncteur Ext sur leurs modules simples.

La section commence par une brève introduction aux orientations dans les espaces vectoriels réels. Ces notions sont ensuite utilisées pour construire un complexe descendant de modules sur l'algèbre d'un semi-groupe de faces, appelé le complexe de Brown-Diaconis. On terminera la section en montrant que ce complexe permet d'obtenir des résolutions projectives des modules simples, et on l'utilisera pour calculer, avec une facilité relative, les valeurs du foncteur Ext sur ces modules.

#### 3.2.1 Orientations et fonctions d'incidence

Fixons un espace vectoriel réel  $V$  de dimension finie  $n > 0$  avec un choix d'application multilinéaire alternée non-nulle  $\det : V^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Une telle application

caractérise les bases de  $V$  : une suite de vecteurs  $\mathbf{v}$  est une base de  $V$  si et seulement si  $\det(\mathbf{v}) \neq 0$  (Bourbaki, 1958).

On dit que deux bases  $\mathbf{u}, \mathbf{v}$  de  $V$  définissent la même orientation de  $V$  si  $\det(\mathbf{u})$  et  $\det(\mathbf{v})$  sont dans la même composante connexe de  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Cette relation ne dépend pas du choix initial de la forme  $\det$ . De manière équivalente,  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{v}$  définissent la même orientation si la matrice de passage de  $\mathbf{u}$  vers  $\mathbf{v}$  a un déterminant positif.

On vérifie aisément que définir la même orientation est une relation d'équivalence sur l'ensemble des bases de  $V$ . Cette relation a deux classes d'équivalence, correspondant aux deux composantes connexes de  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ . On utilisera la notation  $GL(V)$  pour désigner l'ensemble des bases de  $V$ .

**Définition 3.15.** Soit  $V$  un espace vectoriel de dimension finie. On appelle *orientation de  $V$*  une fonction  $\tau : GL(V) \rightarrow \{-1, 1\}$  telle que

$$\tau(\mathbf{u}) = \tau(\mathbf{v}) \iff \mathbf{u} \text{ et } \mathbf{v} \text{ définissent la même orientation.}$$

Le fait d'être une orientation s'exprime aussi avec un diagramme commutatif. Soit  $\pi_0(\mathbb{R} \setminus \{0\})$  l'ensemble des composantes connexes de  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ; on note aussi  $\pi_0 : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \pi_0(\mathbb{R} \setminus \{0\})$  la projection associée (en d'autres mots,  $\pi_0$  est le 0-ième groupoïde d'homotopie de  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ). Alors  $\tau : GL(V) \rightarrow \{-1, 1\}$  est une orientation de  $V$  si et seulement s'il existe une bijection  $\varphi : \{-1, 1\} \rightarrow \pi_0(\mathbb{R} \setminus \{0\})$  qui rend commutatif le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} GL(V) & \xrightarrow{\det} & \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ \downarrow \tau & & \downarrow \pi_0 \\ \{-1, 1\} & \xrightarrow{\varphi} & \pi_0(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \end{array}$$

Prenons un arrangement central d'hyperplans  $\mathcal{A}$ . Rappelons que  $\mathcal{F}(\mathcal{A})$  désigne la bande régulière à gauche des faces de  $\mathcal{A}$  et que  $\text{supp}(\mathcal{F}(\mathcal{A}))$  désigne le support de  $\mathcal{F}(\mathcal{A})$ , qui correspond aussi au treillis des espaces supports (c.f. §1.5).

Pour chaque élément  $X \in \text{supp}(\mathcal{F}(\mathcal{A}))$ , on fixe une orientation  $\tau_X$  de  $X$ . On va utiliser ces orientations pour associer, à chaque relation de couverture de  $\mathcal{F}(\mathcal{A})$  un élément de  $\{-1, 1\}$ .

Fixons une relation de couverture  $F \prec_{\mathcal{A}} G$  dans  $\mathcal{F}(\mathcal{A})$ , et notons  $X = \text{supp}(F)$ ,  $Y = \text{supp}(G)$ . Soit  $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$  une base de  $Y$  telle que  $\tau_Y(\mathbf{u}) = 1$  (i.e.  $\mathbf{u}$  est positivement orientée). Si  $v \in F$ , alors  $(\mathbf{u}, v) = (u_1, \dots, u_n, v)$  est une base de  $X$ , et la quantité  $\tau_X(\mathbf{u}, v)$  ne dépend pas du choix de  $v$ . On peut donc définir

$$[G : F] = \tau_X(\mathbf{u}, v).$$

On appelle cette quantité le *nombre d'incidence de  $G$  dans  $F$* . On fait quelques observations sur cette définition.

1. Une fois qu'on a fixé une orientation pour chaque espace support, on obtient une fonction  $[- : -]$  sur l'ensemble des relations de couverture de  $\mathcal{F}(\mathcal{A})$ , à valeurs dans  $\{-1, 1\}$ . On appelle  $[- : -]$  une *fonction d'incidence*.
2. La définition d'une fonction d'incidence est compatible avec l'opération de contraction. Si on oriente chaque espace support de  $\mathcal{F}(\mathcal{A})$ , alors on oriente aussi chaque espace support des contractions  $\mathcal{F}(\mathcal{A})_{\geq X}$ , et les fonctions d'incidences obtenues sont compatibles.
3. Si  $F \in \mathcal{F}(\mathcal{A})$  est une face de codimension 1, alors il existe exactement deux éléments de codimension 0 (i.e. des chambres) couvrant  $F$ . Si on note  $C$  et  $C'$  ces deux éléments, alors quelle que soit la fonction d'incidence choisie, on a  $[F : C] = -[F : C']$ .

La relation de l'observation 3 ci-dessus découle du fait que si  $v \in C$ , alors la réflexion de  $v$  par l'hyperplan  $\text{supp}(F)$  est dans  $C'$ . Voir (Brown et Diaconis, 1998) pour les détails.

Ces observations permettent de démontrer le lemme suivant, qui s'avérera important dans la construction du complexe de Brown-Diaconis.

**Lemme 3.16** ((Brown et Diaconis, 1998), lemme 2). *Soit  $F, G$  deux faces d'un arrangement central  $\mathcal{A}$  telles que  $G$  est une face de codimension 2 de la contraction  $\mathcal{A}_{\geq \text{supp}(F)}$ . Alors l'intervalle ouvert  $(F, G)$  dans l'ensemble des faces contient exactement deux éléments  $H_1, H_2$  et*

$$[G : H_1][H_1 : F] = -[G : H_2][H_2 : F]$$

■

### 3.2.2 Le complexe de Brown-Diaconis

Soit  $\mathcal{F}$  l'ensemble des faces d'un arrangement central d'hyperplans. Pour tout  $X \in \text{supp}(\mathcal{F})$ , on note  $\mathcal{F}_X$  l'ensemble  $\{F \in \mathcal{F} : \text{supp}(F) = X\}$ . Soit  $R$  un anneau commutatif unitaire et  $p \geq 0$ , on considère le  $R$ -module

$$R\mathcal{F}_p = \bigoplus_{\text{codim}(X)=p} R\mathcal{F}_X.$$

En particulier,  $R\mathcal{F}_0$  est le  $R\mathcal{F}$ -module des chambres. En fait, chaque  $R\mathcal{F}_X$  est un  $R\mathcal{F}$ -module par

$$\forall F \in \mathcal{F}, A \in \mathcal{F}_X, \quad F \cdot A = \begin{cases} FA & \text{si } \text{supp}(F) \geq X \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On note que ces modules sont isomorphes aux modules  $R\mathcal{F}f(X)$ , où  $f$  est une famille eulérienne de  $R\mathcal{F}$  (c.f. §2.2.4). Puisque les  $R\mathcal{F}f(X)$  sont des facteurs directs de  $R\mathcal{F}$  (car les familles eulériennes forment des ensembles complets d'idempotents orthogonaux), on conclut que les modules  $R\mathcal{F}_X$ , et donc à plus forte raison les modules  $R\mathcal{F}_p$ , sont  $R\mathcal{F}$ -projectifs.

**Définition 3.17.** Soit  $\mathcal{F}$  l'ensemble des faces d'un arrangement central d'hyperplans,  $R$  un anneau commutatif unitaire et  $p \geq 1$ . La *différentielle d'ordre*

$p$  associée à une fonction d'incidence  $[- : -]$  est l'application  $R\mathcal{F}_p \rightarrow R\mathcal{F}_{p-1}$  définie par

$$\forall A \in \mathcal{F}_p, \quad \delta_p(A) = \sum_{B \triangleleft A} [A : B]B.$$

Le lemme 3.16 permet de démontrer par un calcul direct que  $\delta_p \circ \delta_{p+1} = 0$ . De plus, on peut vérifier que les  $\delta_p$  commutent avec l'action de  $\mathcal{F}$  sur  $R\mathcal{F}_p$  et  $R\mathcal{F}_{p-1}$ , en sorte que  $\delta_p$  est un morphisme de  $R\mathcal{F}$ -modules. On a donc :

**Proposition 3.18** ((Brown et Diaconis, 1998), lemme 3). *Soit  $\mathcal{F}$  l'ensemble des faces d'un arrangement central. Alors la suite suivante est un complexe de  $R\mathcal{F}$ -modules :*

$$\dots \xrightarrow{\delta_{p+1}} R\mathcal{F}_p \xrightarrow{\delta_p} \dots \longrightarrow R\mathcal{F}_1 \xrightarrow{\delta_1} R\mathcal{F}_0 \xrightarrow{\epsilon} R \longrightarrow 0$$

■

On appelle *complexe de Brown-Diaconis de  $\mathcal{A}$*  le complexe de la proposition précédente. On a déjà remarqué que ce complexe est composé de  $R\mathcal{F}$ -modules projectifs, ce qui nous pousse à soupçonner qu'il s'agit d'une résolution projective du module de dimension 1 défini par le morphisme d'augmentation. La proposition suivante le confirme en démontrant que le complexe de Brown-Diaconis est une résolution. L'argument présenté résume celui de (Brown et Diaconis, 1998).

**Proposition 3.19** ((Saliola, 2009), corollaire 7.3). *Soit  $\mathcal{F}$  le semi-groupe des faces d'un arrangement central  $\mathcal{A}$ . Le complexe de Brown-Diaconis est une résolution projective du  $R\mathcal{F}$ -module défini par le morphisme d'augmentation.* ■

*Démonstration.* Comme on sait déjà qu'il s'agit d'un complexe descendant de modules projectifs, il nous suffit donc de montrer qu'il s'agit d'une résolution. À cette fin, on utilise le zonotope polaire de l'arrangement  $\mathcal{A}$ . Il s'agit d'un zonotope

$Z_{\mathcal{A}}$  dont l'ensemble des faces, ordonnés par l'inclusion, est isomorphe à  $(\mathcal{F}, \leq_{\mathcal{A}})$ ; voir l'annexe A pour les détails.

L'isomorphisme entre  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{F}(Z_{\mathcal{A}})$  envoie la fonction d'incidence de  $\mathcal{F}$  sur une fonction d'incidence du CW-complexe déterminé par les faces de  $Z_{\mathcal{A}}$ , au sens de (Cooke et Finney, 1967). Par conséquent, le complexe de Brown-Diaconis est isomorphe au complexe augmenté des faces de  $Z_{\mathcal{A}}$ . Mais  $Z_{\mathcal{A}}$  est un espace topologique contractile et donc le complexe augmenté de ses faces est une résolution. ■

### 3.2.3 Résolution projective des modules simples

Le complexe de Brown-Diaconis nous permet d'en dire beaucoup sur les propriétés homologiques des faces d'un arrangement central  $\mathcal{A}$ . On rappelle (c.f. §2.2.3) que les représentations irréductibles d'une bande régulière à gauche  $B$  sur un corps  $K$  correspondent aux éléments de son support : la représentation correspondant à  $X \in \text{supp}(B)$  est l'application  $\rho_X : B \rightarrow K$ ,

$$\rho_X(b) = \begin{cases} id_K & \text{si } \text{supp}(b) \geq X \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

En particulier, les  $KB$ -modules simples sont obtenus en prenant l'extension linéaire de  $\rho_X$  à  $KB$  (proposition 2.2).

Soit  $R$  un anneau commutatif unitaire, on notera  $R_X$  le  $RB$ -module correspondant à la représentation  $\rho_X$  ci-dessus. Le complexe de Brown-Diaconis nous permet d'obtenir, par contraction, une résolution projective de ces modules (et donc des modules simples si  $R$  est un corps). L'essentiel pour le vérifier est contenu dans le lemme suivant :

**Lemme 3.20** ((Margolis *et al.*, 2015a), corollaire 4.8). *Soit  $B$  une bande régulière à gauche finie,  $R$  un anneau commutatif unitaire et  $f$  une famille eulérienne de*

*RB.* Pour tout  $X \in \text{supp}(B)$ , on a la décomposition

$$RB = RB_{\geq X} \oplus \left( \bigoplus_{Y \not\geq X} RBf(Y) \right).$$

■

On démontre maintenant :

**Proposition 3.21** ((Saliola, 2009), proposition 7.4). *Soit  $\mathcal{F}$  l'ensemble des faces d'un arrangement central et  $R$  un anneau commutatif unitaire. Pour tout  $X \in \text{supp}(\mathcal{F})$ , le complexe de Brown-Diaconis de la contraction  $\mathcal{F}_{\geq X}$  est une résolution projective du  $R\mathcal{F}$ -module  $R_X$ .*

■

*Démonstration.* Par la proposition 3.19, le complexe de Brown-Diaconis de  $\mathcal{F}_{\geq X}$  est une résolution projective de  $R_X$  comme  $R\mathcal{F}_{\geq X}$ -module. Il nous suffit donc de montrer que les  $R\mathcal{F}_{\geq X}$ -modules projectifs sont aussi des  $R\mathcal{F}$ -modules projectifs. Mais un  $R\mathcal{F}_{\geq X}$ -module est projectif si et seulement s'il est un facteur direct d'un  $R\mathcal{F}_{\geq X}$ -module libre, auquel cas il est aussi un facteur direct d'un  $R\mathcal{F}$ -module libre par le lemme précédent.

■

Avec cette résolution projective en main, on peut calculer les valeurs des foncteurs  $\text{Ext}$  sur les  $K\mathcal{F}$ -modules simples, où  $K$  est un corps. Il s'agit de notre dernier résultat pour ce chapitre.

**Corollaire 3.22** ((Saliola, 2009), lemme 8.3). *Soit  $\mathcal{F}$  le semi-groupe des faces d'un arrangement central et  $K$  un corps. Pour tout  $X, Y \in \text{supp}(\mathcal{F})$ ,*

$$\text{Ext}_{K\mathcal{F}}^p(K_X, K_Y) \cong \begin{cases} K_Y & \text{si } Y \geq X \text{ et } \text{codim}_X(Y) = p, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

*Démonstration.* Fixons un élément  $X \in \text{supp}(\mathcal{F})$ . Les composantes du complexe de Brown-Diaconis de la contraction  $K\mathcal{F}_{\geq X}$  sont données par

$$K(\mathcal{F}_{\geq X})_p = \bigoplus_{\text{codim}_X(Z)=p} K\mathcal{F}_Z$$

Ainsi, les modules  $\text{Ext}_{K\mathcal{F}}^p(K_X, K_Y)$  sont les modules de cohomologie du complexe de composantes

$$\text{hom}_{K\mathcal{F}}(K(\mathcal{F}_{\geq X})_p, K_Y) = \bigoplus_{\text{codim}_X(Z)=p} \text{hom}_{K\mathcal{F}}(K\mathcal{F}_Z, K_Y).$$

On verra qu'il est en fait suffisant de calculer les modules  $\text{hom}_{K\mathcal{F}}(K\mathcal{F}_Z, K_Y)$ .

Soit  $f$  une famille eulérienne de  $K\mathcal{F}$  et  $u$  la section homogène de  $R\text{supp}$  associée à  $f$ . Alors on a un isomorphisme  $K\mathcal{F}_Z \cong K\mathcal{F}f(Z)$ . Par conséquent, un morphisme  $\varphi \in \text{hom}_{K\mathcal{F}}(K\mathcal{F}f(Z), K_Y)$  est complètement déterminé par son image sur  $u(Z)f(Z) = f(Z)$ . Comme  $\varphi(f(Z)) = \varphi(f(Z)^2) = f(Z)\varphi(f(Z))$ , on obtient un isomorphisme de  $R$ -modules  $\text{hom}_{K\mathcal{F}}(K\mathcal{F}f(Z), K_Y) \cong f(Z)K_Y$ .

Pour tout élément  $W \in \text{supp}(\mathcal{F})$ ,  $f(W)$  est une combinaison de termes de support au plus  $W$ . En particulier,  $f(W)K_Y = 0$  lorsque  $W < Y$ . En utilisant la formule récursive pour les familles eulériennes (proposition 2.19), on a donc

$$f(Y)K_Y = \left( u(Y) - \sum_{W < Y} u(Y)f(W) \right) K_Y = u(Y)K_Y = K_Y.$$

Comme les familles eulériennes déterminent des idempotents orthogonaux, on conclut que

$$\text{hom}_{K\mathcal{F}}(K\mathcal{F}f(Z), K_Y) \cong f(Z)f(Y)K_Y \cong \begin{cases} 0 & \text{si } Z \neq Y \\ K_Y & \text{si } Z = Y. \end{cases}$$

Par conséquent, le complexe des  $\text{hom}_{K\mathcal{F}}(K(\mathcal{F}_{\geq X})_p, K_Y)$  est nul si  $Y \not\geq X$ , et est concentré en  $p = \text{codim}_X(Y)$  sinon. La conclusion est alors immédiate. ■



## CONCLUSION

On a vu dans ce mémoire que les relations de Green déterminent la structure de semi-groupe des bandes régulières à gauche. Puis, on a montré comment, à son tour, la structure de semi-groupe des bandes régulières à gauche nous aide à comprendre leurs représentations et, en particulier, nous permettent de décomposer leurs algèbres. Enfin, on a expliqué comment ces décompositions peuvent être utilisées pour calculer des invariants homologiques de certaines bandes régulières à gauche.

Dans le premier chapitre, on a d'abord étudié en détail les relations de Green dans les bandes régulières à gauche et on a vu que celles-ci donnent lieu à plusieurs constructions utiles. En particulier, le préordre  $\leq_{\mathcal{R}}$  définit un ordre partiel et la relation  $\mathcal{L}$  est une congruence. Le quotient d'une bande régulière à gauche par cette congruence est un semi-treillis, appelé le support, qui satisfait plusieurs propriétés importantes. On a aussi étudié en détail les bandes régulières à gauche libres, ainsi que les bandes régulières à gauche associées aux arrangements d'hyperplans.

Au chapitre 2, on a démontré que le radical de Jacobson de l'algèbre d'une bande régulière à gauche était complètement déterminé par la relation  $\mathcal{L}$ . Pour ce faire, on a d'abord étudié les idéaux de l'algèbre engendrés par les congruences de la bande régulière à gauche, notamment grâce à un résultat d'Almeida et al. On a ensuite présenté un théorème de Solomon qui montre que les algèbres de semi-treillis sont semi-simples, et donc sans radical. On a utilisé ces résultats pour calculer les représentations irréductibles des bandes régulières à gauche. On a ensuite poussé

un peu plus loin notre étude des algèbres de bandes régulières à gauche en donnant une méthode pour construire des familles complètes d'idempotents primitifs orthogonaux. Ces familles, appelées les familles eulériennes, nous ont aussi permis de retrouver des résultats de diagonalisation sur certains opérateurs du module des chambres.

Enfin, on a vu au chapitre 3 comment les résultats des deux chapitres précédents peuvent être utilisés pour calculer certains invariants homologiques des bandes régulières à gauche associées aux arrangements centraux. Plus précisément, on a présenté la construction d'un complexe de modules qui s'avère être une résolution projective des modules simples, puis on a utilisé ce complexe pour calculer les valeurs du foncteur Ext sur ces modules. Ces quelques calculs homologiques sont à l'orée des connaissances actuelles sur ce sujet : on peut non seulement tirer beaucoup plus du complexe de Brown-Diaconis, mais aussi généraliser ce complexe en étudiant l'action des bandes régulières à gauche sur les CW-complexes.

On mentionne, en terminant, quelques questions ouvertes.

1. Même si on comprend assez bien comment les relations de Green se comportent dans les bandes régulières à gauche, on en sait assez peu sur les bandes régulières à gauche elles-mêmes. En particulier, il n'existe, à ma connaissance, aucune véritable classification des bandes régulières à gauche finies. Un bon point de départ pour établir une telle classification serait d'étudier les congruences des bandes régulières à gauche libres.
2. Les bandes régulières à gauche libres partiellement commutatives semblent avoir une structure combinatoire intéressante. On a énoncé dans le chapitre 1 une conjecture sur la cardinalité des bandes régulières à gauche déterminées par les graphes cycles et les graphes chaînes, qui suggère des relations combinatoires avec des ensembles de permutations. Il n'existe à ma connaissance aucune explication de ces phénomènes.

3. Un résultat étonnant de Margolis et al. (Margolis *et al.*, 2015a) montre que l'algèbre d'une bande régulière à gauche est unitaire si et seulement si toutes ses contractions sont  $\mathcal{A}$ -connexes. La preuve actuelle utilise beaucoup de machineries de la théorie de la représentation et est assez peu transparente. Il serait intéressant d'en trouver une preuve plus élémentaire, peut-être en utilisant les familles eulériennes de la section 2.2.4.
4. Les résultats de la section 2.2.5, qui concernent les valeurs propres de certains opérateurs sur les algèbres de bandes régulières à gauche, reposent en partie sur le théorème de Perron-Frobenius. L'apparition de ce théorème semble incongrue et limite la portée des formules. Des calculs effectués sur les bandes régulières à gauche libres  $B_2$  et  $B_3$  me poussent à croire qu'il serait possible de remplacer le théorème de Perron-Frobenius par des arguments combinatoires.
5. Comme on l'a déjà mentionné, les résultats obtenus au chapitre 3 se généralisent aux bandes régulières à gauche qui agissent sur des CW-complexes. De manière générale, les valeurs du foncteur Ext sont déterminées par la topologie de l'ensemble ordonné associé à la relation  $\leq_{\mathcal{A}}$  (Margolis *et al.*, 2015a). Ces résultats présentent une ressemblance frappante avec des résultats classiques de Gerstenhaber et Schack sur la cohomologie de Hochschild (Gerstenhaber et Schack, 1986). Personne, à ma connaissance, n'a encore trouvé d'explication à cette ressemblance.



## ANNEXE A

### ZONOTOPES POLAIRES

Cette annexe vise à donner un exposé détaillé de la construction du zonotope polaire à un arrangement d'hyperplans. Cette construction est notamment utilisée dans le chapitre 3 pour démontrer qu'un certain complexe de modules est acyclique. La référence principale pour cette annexe est (Ziegler, 1998). Le livre (Björner *et al.*, 1999) et l'article (McMullen, 1971) ont aussi été consultés.

#### A.1 Polytopes et zonotopes

Soit  $V$  un espace vectoriel réel de dimension fini. On appelle *polytope* un sous-ensemble  $P \subseteq V$  qui est l'enveloppe convexe d'un ensemble fini de points. En d'autres mots,  $P$  est de la forme  $P = \text{Conv}(S)$  pour un certain ensemble fini  $S$ .

Soit  $H$  un hyperplan affine de  $V$  et  $P \subseteq V$  un polytope. On dit que  $H$  est un *hyperplan valide* de  $P$  si  $P$  est contenu dans l'un des deux demi-espaces fermés déterminés par  $H$ . Une *face* de  $P$  est une intersection de la forme  $P \cap H$  où  $H$  un hyperplan valide de  $P$ . Par convention,  $P$  est aussi une face de  $P$ . On notera  $\mathcal{F}(P)$  l'ensemble des faces non-vides de  $P$ . Le choix d'exclure la face vide de cette notation sera justifié un peu plus loin lorsqu'on donnera une bijection entre les faces d'un arrangement central d'hyperplans et les faces non-vides de son zonotope polaire.

On note qu'un sous-ensemble non-vide de  $P$  est une face si et seulement s'il maximise une forme linéaire. En effet, si  $F$  maximise une forme linéaire  $\eta : V \rightarrow \mathbb{R}$ , ou bien  $\eta = 0$  et alors  $F = P$  est bien une face ; ou alors  $\eta \neq 0$  et  $F$  est l'intersection de  $P$  avec l'hyperplan valide

$$H = \{v : \eta(v) = \max(\eta(P))\}.$$

Cette définition sera pratique pour nos besoins, et on l'utilisera fréquemment.

On va maintenant introduire une classe de polytopes qui sera pour nous d'un intérêt particulier. Avant d'arriver à leur définition, on commence par introduire une opération sur les polytopes. Étant donné deux sous-ensembles  $X, Y \subseteq V$ , on note  $X + Y$  l'ensemble  $\{x + y : x \in X, y \in Y\}$ . Cette opération est appelée la *somme de Minkowski*, et on peut vérifier qu'elle préserve les polytopes. En fait, si  $S_1, S_2$  sont deux sous-ensembles de  $V$ , alors on a  $\text{Conv}(S_1 + S_2) = \text{Conv}(S_1) + \text{Conv}(S_2)$ .

On appellera *zonotope* un sous-ensemble de  $V$  qui est une somme de Minkowski d'un nombre fini de segments. Comme un segment est l'enveloppe convexe de ses extrémités, un zonotope est une somme finie de polytopes ; il est donc à son tour un polytope. On peut aussi caractériser les zonotopes comme les projections linéaires d'hypercubes (Ziegler, 1998).

## A.2 Zonotope polaire d'un arrangement d'hyperplans

Pour cette section, on fixe un arrangement central d'hyperplans  $\mathcal{A}$  dans un espace vectoriel réel  $V$  (c.f. §1.5). Notre prochain objectif est de définir le zonotope polaire associé à l'arrangement  $\mathcal{A}$ .

Supposons que l'arrangement  $\mathcal{A}$  provient de formes linéaires  $\eta_H, H \in \mathcal{A}$ . Alors la somme de Minkowski des segments  $[-\eta_H, \eta_H]$  est un zonotope de l'espace dual  $V^*$ . Comme il s'agit de l'objet central dans cet annexe, on lui consacre une définition :

**Définition A.1.** Soit  $\mathcal{A}$  un arrangement central d'hyperplans réels provenant de formes linéaire  $\eta_H, H \in \mathcal{A}$ . Le *zonotope polaire* de  $\mathcal{A}$  est

$$Z_{\mathcal{A}} = \sum_{H \in \mathcal{A}} [-\eta_H, \eta_H].$$

Les éléments de  $Z_{\mathcal{A}}$  sont donc les formes linéaires  $\eta$  qui s'écrivent sous la forme

$$\eta = \sum_{H \in \mathcal{A}} \alpha_H \eta_H, \quad \text{où } -1 \leq \alpha_H \leq 1.$$

Le zonotope polaire étant un polytope du dual  $V^*$ , ses faces non-vides sont déterminées par les formes linéaires  $V^* \rightarrow \mathbb{R}$ , c'est-à-dire les éléments du double-dual  $V^{**}$ . Comme  $V$  est un espace de dimension finie, on a un isomorphisme canonique  $V \cong V^{**}$ . On convient de noter  $ev_u$  l'image de  $u \in V$  sous cet isomorphisme. On rappelle que  $ev_u$  est décrit par la formule

$$\forall \eta \in V^*, \quad ev_u(\eta) = \eta(u).$$

Ainsi, un vecteur  $u \in V$  détermine à la fois une face de  $\mathcal{A}$  (de covecteur  $\sigma(H) = \text{sgn}(\eta_H(u))$ ) et une face de  $Z_{\mathcal{A}}$  (le sous-ensemble de  $Z_{\mathcal{A}}$  qui maximise  $ev_u$ ).

### A.3 Bijection entre les faces d'un arrangement et de son zonotope polaire

On va maintenant construire une bijection entre  $\mathcal{F}(Z_{\mathcal{A}})$  et  $\mathcal{F}(\mathcal{A})$ . La première étape de cette construction consiste à mieux comprendre la face de  $Z_{\mathcal{A}}$  qui correspond à un vecteur  $u \in V$ . Pour des raisons de commodité, on identifiera  $\{-, 0, +\}$  avec  $\{-1, 0, 1\}$ .

**Lemme A.2.** Soit  $\mathcal{A}$  un arrangement central d'hyperplans qui provient de formes linéaires  $\eta_H$ . Fixons  $u \in V$  et soit la séquence  $\sigma_u \in \{-, 0, +\}^{\mathcal{A}}$  définie par  $\sigma_u(H) = \text{sgn}(\eta_H(x))$ . Soit  $\alpha_H, H \in \mathcal{A}$ , des scalaires qui satisfont  $-1 \leq \alpha_H \leq 1$ . Alors l'inégalité suivante est satisfaite :

$$ev_u \left( \sum_{H \in \mathcal{A}} \alpha_H \eta_H \right) \leq \sum_{H \in \mathcal{A}} \sigma_u(H) \eta_H(u),$$

avec égalité si et seulement si :

$$\forall H \in \mathcal{A}, \quad \sigma_u(H) = 0 \text{ ou } \sigma_u(H) = \alpha_H.$$

*Démonstration.* Soit  $\alpha_u = \sum_{H \in \mathcal{A}} \sigma_u(H) \eta_H(u)$  et considérons

$$\alpha_u - \text{ev}_u(\eta) = \sum_{H \in \mathcal{A}} (\sigma_u(H) - \alpha_H) \eta_H(u) = \sum_{\sigma_u(H) \neq 0} (\sigma_u(H) - \alpha_H) \eta_H(u).$$

Cette dernière somme n'a que des termes positifs. En particulier, elle est nulle si et seulement si chaque terme est nul, ce qui revient précisément à dire que  $\sigma_u(H) = \alpha_H$  dès que  $\sigma_u(H) \neq 0$ . ■

Avec les notations du lemme précédent, l'unique face  $F$  de  $\mathcal{A}$  qui contient le vecteur  $u \in V$  a pour covecteur  $\sigma_F = \sigma_u$ . On en déduit alors facilement la proposition suivante :

**Proposition A.3.** *Pour toute face  $F$  d'un arrangement central d'hyperplans  $\mathcal{A}$ , l'ensemble suivant est une face du zonotope polaire  $Z_{\mathcal{A}}$  :*

$$\Phi(F) = \left\{ \sum_{\sigma_F(H)=0} \alpha_H \eta_H + \sum_{\sigma_F(H) \neq 0} \sigma_F(H) \eta_H : -1 \leq \alpha_H \leq 1 \right\}$$

*Démonstration.* Fixons une face  $F \in \mathcal{F}(\mathcal{A})$  et soit  $u \in F$ . Alors le lemme précédent montre que  $\Phi(F)$  est précisément le sous-ensemble de  $Z_{\mathcal{A}}$  qui maximise  $\text{ev}_u$ , et donc  $\Phi(F) \in \mathcal{F}(Z_{\mathcal{A}})$ . ■

On va démontrer que  $\Phi$  est en fait une bijection, et même un isomorphisme d'ensembles ordonnés.

Commençons par nous débarrasser de la surjectivité, qui n'est pas trop difficile à déduire de ce qui précède. Fixons une face  $G \in \mathcal{F}(Z_{\mathcal{A}})$ . Alors  $G$  est l'ensemble qui maximise une certaine forme linéaire  $\text{ev}_u$ . Mais on a vu dans la preuve de la

dernière proposition que cet ensemble est précisément  $\Phi(F)$  lorsque  $F$  est la face contenant  $u$ . Par conséquent,  $\Phi(F) = G$  et on a la surjectivité.

La proposition suivante achève de démontrer que  $\Phi$  est un isomorphisme d'ensembles ordonnés. Sa preuve repose sur le lemme 1.47, qui caractérise les faces qui satisfont  $F = FG$  ou  $F = GF$ .

**Proposition A.4.** *Soit  $\mathcal{A}$  un arrangement central d'hyperplans et deux faces  $F, G \in \mathcal{F}(\mathcal{A})$ . Alors*

$$F \leq_{\mathcal{Q}} G \iff \Phi(F) \subseteq \Phi(G).$$

*Démonstration.* D'abord, supposons que  $F \leq_{\mathcal{Q}} G$ , et soit  $\eta \in \Phi(F)$ . Écrivons

$$\eta = \sum_{\sigma_F(H)=0} \alpha_H \eta_H + \sum_{\sigma_F(H) \neq 0} \sigma_F(H) \eta_H, \quad \text{où } -1 \leq \alpha_H \leq 1$$

Comme  $F \leq_{\mathcal{Q}} G$ , on a que  $\sigma_G(H) = \sigma_F(H)$  lorsque  $\sigma_G(H) \neq 0$  (lemme 1.47) en sorte que

$$\eta = \sum_{\sigma_F(H)=0} \alpha_H \eta_H + \sum_{\substack{\sigma_F(H) \neq 0 \\ \sigma_G(H)=0}} \sigma_F(H) \eta_H + \sum_{\sigma_G(H) \neq 0} \sigma_G(H) \eta_H \in \Phi(G).$$

Donc  $\Phi(F) \subseteq \Phi(G)$ .

Réciproquement, supposons que  $\Phi(F) \subseteq \Phi(G)$ . Fixons  $u \in G$  et considérons l'élément suivant de  $\Phi(F)$  :

$$\eta = \sum_{H \in \mathcal{A}} \sigma_F(H) \eta_H.$$

Puisque  $\Phi_F(H) \subseteq \Phi_G(H)$ ,  $\eta$  maximise  $ev_u$  sur  $Z_{\mathcal{A}}$ . De plus,  $\text{sgn}(\eta_H(u)) = \sigma_G(H)$  pour tout  $H \in \mathcal{A}$ , et donc par le lemme A.2, on conclut que

$$\sigma_G(H) = 0 \text{ ou } \sigma_G(H) = \sigma_F(H).$$

Le lemme 1.47 entraîne alors  $F \leq_{\mathcal{Q}} G$ . ■

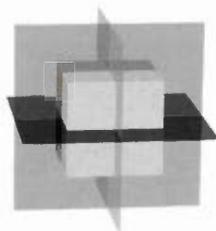


Figure A.1 L'arrangement booléen  $\mathcal{B}_3$  et son zonotope polaire.

Le corollaire suivant est alors immédiat.

**Corollaire A.5.** *Soit  $\mathcal{A}$  un arrangement central d'hyperplans, alors l'application  $\Phi$  définit un isomorphisme d'ensembles ordonnés  $(\mathcal{F}(\mathcal{A}), \leq_{\mathcal{A}}) \cong (\mathcal{F}(Z_{\mathcal{A}}), \subseteq)$ . ■*

On note que  $(\mathcal{F}(\mathcal{A}), \leq_{\mathcal{A}})$  et  $(\mathcal{F}(Z_{\mathcal{A}}), \subseteq)$  sont en particulier des treillis, et  $\Phi$  est donc un isomorphisme de treillis.

#### A.4 Exemples

On calcule dans cette section les zonotopes polaires des arrangements booléens et des arrangements de tresses (c.f. §1.5).

On rappelle que l'arrangement booléen  $\mathcal{B}_n$  provient des formes linéaires de  $\mathbb{R}^n$  définies par la projection sur chaque coordonnée. En notant  $\{e_1, \dots, e_n\}$  la base canonique de  $\mathbb{R}^n$ , on peut donc voir ces projections comme les éléments de la base duale standard, et le zonotope polaire est alors donné par

$$Z_{\mathcal{B}_n} = \{\eta \in (\mathbb{R}^n)^* : -1 \leq \eta(e_i) \leq 1\}.$$

En particulier,  $Z_{\mathcal{B}_n}$  est simplement l'hypercube dans  $(\mathbb{R}^n)^*$ .

Le zonotope polaire de l'arrangement de tresses  $\mathcal{T}_n$  est un polytope bien connu appelé le permutaèdre. On définit souvent le permutaèdre d'ordre  $n$  comme l'enve-

loppe convexe de l'orbite de  $(1, \dots, n)$  dans  $\mathbb{R}^n$  sous l'action du groupe symétrique  $\mathfrak{S}_n$ . Plus généralement, on appelle *permutaèdre* un polytope qui est l'enveloppe convexe dans  $\mathbb{R}^n$  d'un point à coordonnées distinctes sous l'action du groupe symétrique.

On rappelle que  $\mathcal{T}_n$  est l'arrangement de  $\mathbb{R}^n$  qui provient des formes linéaires  $\eta_{i,j}(x) = x_i - x_j$ , une pour chaque  $i < j$ . Un vecteur  $x \in \mathbb{R}^n$  appartient à une chambre de  $\mathcal{T}_n$  si et seulement si toutes ses coordonnées sont distinctes. Par conséquent, l'action de  $\mathfrak{S}_n$  sur les coordonnées de  $\mathbb{R}^n$  induit une action fidèle et transitive sur les chambres de  $\mathcal{T}_n$ .

Le groupe symétrique  $\mathfrak{S}_n$  agit aussi sur  $(\mathbb{R}^n)^*$  par permutation des coordonnées de la base duale, et on voit aisément que le zonotope polaire  $Z_{\mathcal{T}_n}$  est stable sous cette action. De plus, si on fixe  $u \in \mathbb{R}^n$ ,  $\eta \in (\mathbb{R}^n)^*$  et  $\tau \in \mathfrak{S}_n$ , on voit que

$$(\tau \cdot \eta)(\tau \cdot u) = \eta(u).$$

On en déduit que si  $G$  est la face de  $Z_{\mathcal{T}_n}$  qui maximise  $ev_u$ ,  $u \in \mathbb{R}^n$ , alors  $\tau \cdot G$  est la face de  $Z_{\mathcal{T}_n}$  qui maximise  $ev_{\tau \cdot u}$ . En d'autres mots, on vient de démontrer que pour toute face  $F \in \mathcal{F}(\mathcal{T}_n)$ , on a

$$\tau \cdot \Phi(F) = \Phi(\tau \cdot F),$$

où  $\Phi$  est la bijection entre  $\mathcal{F}(\mathcal{T}_n)$  et  $\mathcal{F}(Z_{\mathcal{T}_n})$  décrite à la section précédente. Par conséquent,  $\mathfrak{S}_n$  agit fidèlement et transitivement sur les sommets de  $Z_{\mathcal{T}_n}$  par permutation des coordonnées, ce qui revient à dire que  $Z_{\mathcal{T}_n}$  est un permutaèdre.



## ANNEXE B

### ALGÈBRES ASSOCIATIVES NON-UNITAIRES

L'objectif de cette annexe est de présenter la théorie des algèbres non-unitaires et non-commutatives. Plusieurs résultats présentés ici sont utiles au chapitre 2. Le traitement proposé suit essentiellement (Bourbaki, 1958), bien que les algèbres soient supposées unitaires dans cet ouvrage. Une autre source importante est (Herstein, 1968), qui traite des anneaux non-commutatifs et non-unitaires. Les ouvrages (Anderson et Fuller, 1992), (Benson, 1998) et (Wisbauer, 1991) sont aussi des références pertinentes pour cette annexe.

#### B.1 Définitions

Fixons un anneau commutatif unitaire  $R$ . On appelle *algèbre sur  $R$*  un  $R$ -module  $\Lambda$  muni d'une application  $R$ -bilinéaire associative  $\Lambda \times \Lambda \rightarrow \Lambda$  qu'on appelle son *produit*. Cette application fait en particulier de  $\Lambda$  un semi-groupe, et on désignera par  $xy$  le produit de  $x, y \in \Lambda$ .

Soit  $\Lambda, \Gamma$  des  $R$ -algèbres. Un *morphisme d'algèbres* est une application  $\varphi : \Lambda \rightarrow \Gamma$  qui est à la fois un morphisme de  $R$ -modules et un morphisme de semi-groupes. Le *noyau* d'un morphisme  $\varphi$  est la préimage  $\ker(\varphi) = \varphi^{-1}(0)$ . On note que cette définition diffère de celle donnée au chapitre 1 pour les morphismes de semi-groupes ; il nous faudra donc être prudent lorsque les deux définitions auront à se côtoyer

(c'est le cas par exemple au chapitre 2). Pour une algèbre  $\Lambda$  donnée, les noyaux de morphismes  $\Lambda \rightarrow \Gamma$  sont en fait précisément les sous- $R$ -modules  $\mathfrak{m}$  de  $\Lambda$  qui satisfont  $\mathfrak{m}\Lambda \subseteq \mathfrak{m}$  et  $\Lambda\mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{m}$ . On appelle ces ensembles les *idéaux bilatères* de  $\Lambda$ . Si  $\mathfrak{m}$  est un sous- $R$ -module de  $\Lambda$ , alors le produit de  $\Lambda$  induit une structure de  $R$ -algèbre sur le quotient  $\Lambda/\mathfrak{m}$  si et seulement si  $\mathfrak{m}$  est un idéal bilatère (Herstein, 1968).

L'ensemble des endomorphismes d'un  $R$ -module  $\mathfrak{m}$ , noté  $\text{End}_R(\mathfrak{m})$ , constitue un exemple important de  $R$ -algèbre. Si  $\Lambda$  est une  $R$ -algèbre, un  $R$ -module à gauche  $\mathfrak{m}$  avec un morphisme d'algèbres  $\Lambda \rightarrow \text{End}_R(\mathfrak{m})$  est appelé un  $\Lambda$ -module à gauche. En d'autres mots,  $\mathfrak{m}$  est un  $\Lambda$ -module à gauche si

1.  $\mathfrak{m}$  est un  $R$ -module à gauche ;
2.  $\Lambda$  agit à gauche sur  $\mathfrak{m}$  par des applications  $R$ -linéaires.

On utilisera la notation  $xm$  pour désigner l'action de  $x \in \Lambda$  sur  $m \in \mathfrak{m}$ . On définit de manière analogue la notion de  $\Lambda$ -module à droite. Sauf mention contraire, un  $\Lambda$ -module est toujours un module à gauche.

Un *morphisme de  $\Lambda$ -modules*, entre deux  $\Lambda$ -modules  $\mathfrak{m}$  et  $\mathfrak{n}$ , est un morphisme de  $R$ -modules  $\varphi : \mathfrak{m} \rightarrow \mathfrak{n}$  qui commute avec l'action à gauche de  $\Lambda$ , c'est-à-dire

$$\forall \alpha \in \Lambda, \quad \forall m \in \mathfrak{m}, \quad \varphi(\alpha m) = \alpha \varphi(m).$$

Les  $\Lambda$ -modules à gauche et leurs morphismes forment une catégorie qu'on note  ${}_{\Lambda}\text{mod}$ . Il existe une catégorie analogue pour les modules à droite qu'on note  $\text{mod}_{\Lambda}$ . Les notions usuelles de sous-module, module quotient, produit et somme direct, noyaux, etc. sont définies dans ces catégories. Le foncteur opposé (c.f. §1.1.4) appliqué au semi-groupe sous-jacent d'une algèbre  $\Lambda$  définit un isomorphisme de catégories  ${}_{\Lambda}\text{mod} \cong \text{mod}_{\Lambda^{\text{op}}}$ .

La représentation régulière du semi-groupe de  $\Lambda$  (c.f. §1.2.5) définit un morphisme  $\Lambda \rightarrow \text{End}_R(\Lambda)$ , ce qui fait de  $\Lambda$  un  $\Lambda$ -module à gauche, appelé le *module régulier*,

qu'on note  ${}_{\Lambda}\Lambda$ . De manière analogue, on peut faire de  $\Lambda$  un  $\Lambda$ -module à droite qu'on note  $\Lambda_{\Lambda}$ . Les sous-modules de  ${}_{\Lambda}\Lambda$  sont appelés les *idéaux à gauche* de  $\Lambda$ , et ceux de  $\Lambda_{\Lambda}$  sont les *idéaux à droite*. L'isomorphisme de catégories  ${}_{\Lambda}\text{mod} \cong \text{mod}_{\Lambda^{\text{op}}}$  a aussi pour effet d'échanger les idéaux à droite et les idéaux à gauche.

On fait quelques remarques concernant les définitions précédentes :

1. Les anneaux (non-commutatifs et non-unitaires) sont en fait exactement les  $\mathbb{Z}$ -algèbres.
2. Soit  $\Lambda$  une  $R$ -algèbre et  $\varphi : Q \rightarrow R$  un morphisme d'anneaux commutatifs unitaires. Alors  $\varphi$  fait de  $\Lambda$  une  $Q$ -algèbre par la règle  $q\alpha = \varphi(q)\alpha$ .
3. Comme  $\mathbb{Z}$  est initial dans la catégorie des anneaux commutatifs unitaires, la remarque précédente permet de conclure que toute algèbre a une structure sous-jacente d'anneau.

Ces remarques justifient en quelque sorte le fait d'exiger que  $R$  soit commutatif et unitaire.

## B.2 Algèbres unitaires et extension de Dorroh

Une algèbre est dite *unitaire* si elle contient un élément neutre pour son produit. On notera  $\text{Alg}_R$  la catégorie des  $R$ -algèbres et de leurs morphismes, et  $\text{Alg}_R^1$  la catégorie formée par les  $R$ -algèbres unitaires avec les morphismes préservant les éléments neutres.

La relation entre  $\text{Alg}_R$  et  $\text{Alg}_R^1$  est tout à fait analogue celle entre  $\text{Sg}$  et  $\text{Mon}$ . En effet,  $\text{Alg}_R^1$  est une sous-catégorie non-pleine de  $\text{Alg}_R$  et le foncteur d'oubli de  $\text{Alg}_R^1$  vers  $\text{Alg}_R$  admet un adjoint à gauche. Ce foncteur porte parfois le nom d'*extension de Dorroh* (Dorroh, 1932). On construit cette extension de la manière suivante : étant donné une  $R$ -algèbre  $\Lambda$ , on considère le  $R$ -module  $R \times \Lambda$  que l'on muni du produit  $(r, \alpha)(s, \beta) = (rs, s\alpha + r\beta + \alpha\beta)$ .  $R \times \Lambda$  est alors une  $R$ -

algèbre unitaire qu'on notera  $\Lambda^1$ . Le foncteur  $(-)^1 : \text{Alg}_R \rightarrow \text{Alg}_R^1$  défini par cette extension satisfait la propriété suivante.

**Proposition B.1.** *Le foncteur  $(-)^1$  est adjoint à gauche du foncteur d'oubli. Plus précisément, pour tout objet  $\Lambda$  de  $\text{Alg}_R$  et tout objet  $\Gamma$  de  $\text{Alg}_R^1$ , il existe une bijection naturelle*

$$\text{hom}_{\text{Alg}_R}(\Lambda, \Gamma) \cong \text{hom}_{\text{Alg}_R^1}(\Lambda^1, \Gamma).$$

■

La preuve de cette proposition est tout à fait analogue à celle de la proposition 1.7. En termes plus concrets, cette proposition dit que tout morphisme  $\Lambda \rightarrow \Gamma$  est prolongé de manière unique en un morphisme unitaire  $\Lambda^1 \rightarrow \Gamma$ .

Un module  $\mathfrak{m}$  sur une algèbre unitaire  $\Lambda$  est dit *unitaire* si  $1x = x$  pour tout  $x \in \mathfrak{m}$ . On note  ${}^1_\Lambda \text{mod}$  la catégorie des  $\Lambda$ -modules unitaires. Alternativement, un  $\Lambda$ -module est unitaire si et seulement si le morphisme d'algèbres  $\Lambda \rightarrow \text{End}_R(\mathfrak{m})$  est un morphisme dans  $\text{Alg}_R^1$ . En particulier, l'adjonction de la proposition précédente définit une correspondance entre les catégories  ${}_\Lambda \text{mod}$  et  ${}^1_{\Lambda^1} \text{mod}$ .

### B.3 Socle, radical et semi-simplicité

Fixons un module  $\mathfrak{m}$  d'une algèbre  $\Lambda$ . On dit qu'un sous-module  $\mathfrak{n}$  de  $\mathfrak{m}$  est *simple* si  $\mathfrak{n}$  est minimal pour l'ordre d'inclusion sur les modules non-triviaux et si  $\Lambda\mathfrak{n} \neq 0$ . On dit que  $\mathfrak{n}$  est *cosimple* si le module quotient  $\mathfrak{m}/\mathfrak{n}$  est simple. Enfin, un module est dit *indécomposable* s'il n'admet aucun facteur direct propre et non-trivial. Un module simple est nécessairement indécomposable et un module semi-simple est indécomposable si et seulement s'il est simple. Le  $\mathbb{Z}$ -module  $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$  est un exemple de module indécomposable qui n'est pas simple.

Afin d'investiguer ces différentes notions, on introduit deux sous-modules particuliers de  $\mathfrak{m}$  :

1. le *socle* de  $\mathfrak{m}$ , noté  $\text{Soc}(\mathfrak{m})$ , est la somme des sous-modules simples de  $\mathfrak{m}$  ;
2. le *radical* de  $\mathfrak{m}$ , noté  $\text{Rad}(\mathfrak{m})$ , est l'intersection des sous-modules cosimples de  $\mathfrak{m}$ .

Les sous-modules simples de  $\mathfrak{m}$  sont caractérisés dans la proposition suivante ; pour les détails de la preuve, voir (Herstein, 1968), lemme 1.1.3.

**Proposition B.2.** *Un sous-module  $\mathfrak{n}$  de  $\mathfrak{m}$  est simple si et seulement si  $\mathfrak{n} = \Lambda n$  pour tout  $n \in \mathfrak{n}$  tel que  $n \neq 0$ .* ■

Afin d'obtenir une caractérisation des modules cosimples, on introduit la notion suivante : on dit qu'un sous-module  $\mathfrak{n}$  de  $\mathfrak{m}$  est *régulier* si  $(m - \Lambda m) \cap \mathfrak{n} \neq \emptyset$  pour tout  $m \in \mathfrak{m}$ .

**Proposition B.3.** *Un sous-module  $\mathfrak{n}$  de  $\mathfrak{m}$  est cosimple si et seulement s'il est maximal et régulier.*

*Démonstration.* On note d'abord que les sous-modules de  $\mathfrak{m}/\mathfrak{n}$  sont en correspondance bijective avec les sous-modules de  $\mathfrak{m}$  contenant  $\mathfrak{n}$ . Si  $\mathfrak{n}$  est cosimple, il en découle donc immédiatement que  $\mathfrak{n}$  est maximal. Montrons que  $\mathfrak{n}$  est régulier. À cette fin, fixons un élément  $m \in \mathfrak{m}$  ; si  $m + \mathfrak{n} = 0$ , alors  $m = m - 0m \in \mathfrak{n}$  et on a terminé. Autrement, la proposition B.2 entraîne que  $\Lambda(m + \mathfrak{n}) = \mathfrak{m}/\mathfrak{n}$ , et donc  $\alpha(m + \mathfrak{n}) = m + \mathfrak{n}$  pour un certain  $\alpha \in \Lambda$ . Cela revient à dire que  $m - \alpha m \in \mathfrak{n}$ , ce qui montre que  $\mathfrak{n}$  est bien régulier.

Réciproquement, supposons que  $\mathfrak{n}$  est maximal et régulier. Alors le quotient  $\mathfrak{m}/\mathfrak{n}$  n'a aucun sous-module propre non-trivial. Fixons un élément  $m \in \mathfrak{m} \setminus \mathfrak{n}$ . Certainement,  $m + \mathfrak{n} \neq 0$  et par régularité de  $\mathfrak{n}$  il existe un  $\alpha \in \Lambda$  tel que  $\alpha m - m \in \mathfrak{n}$ . Par conséquent,

$$0 \neq m + \mathfrak{n} = \alpha(m + \mathfrak{n}) \subseteq \Lambda(\mathfrak{m}/\mathfrak{n}),$$

et  $\mathfrak{m}/\mathfrak{n}$  est bien un  $\Lambda$ -module simple. ■

On remarque que si  $\mathfrak{m}$  est unitaire, tous ses sous-modules sont réguliers (car tous les sous-modules contiennent  $0 = m - 1m$ ). Ainsi, les sous-modules cosimples de  $\mathfrak{m}$  sont exactement ses sous-modules maximaux. De manière analogue, les sous-modules simples d'un module unitaire sont ses sous-modules minimaux.

La proposition suivante provient de (Bourbaki, 1958), §3, théorème 1. Il s'agit d'un résultat un peu technique, mais néanmoins très utile. La preuve dans (Bourbaki, 1958) repose sur le lemme de Zorn et ne nécessite pas l'existence d'un élément neutre dans  $\Lambda$ .

**Proposition B.4.** *Soit  $\mathfrak{m}$  un  $\Lambda$ -module et  $\mathfrak{n} \leq \text{Soc}(\mathfrak{m})$ . Alors il existe une collection  $\mathfrak{s}_i, i \in I$ , de sous-modules simples de  $\mathfrak{m}$  telle que*

$$\text{Soc}(\mathfrak{m}) = \mathfrak{n} \oplus \left( \bigoplus_{i \in I} \mathfrak{s}_i \right)$$

■

La notion de sous-module régulier est aussi utile pour caractériser le socle. Avant d'arriver à cette caractérisation, on a besoin de démontrer quelques propriétés des modules réguliers. On commence par le lemme suivant :

**Lemme B.5.** *Soit  $\mathfrak{m}$  un module, les énoncés suivants sont équivalents :*

1.  $\mathfrak{n}$  est un sous-module régulier de  $\mathfrak{m}$  ;
2.  $\mathfrak{n}$  est un sous-module de  $\mathfrak{m}$  et tout sous-module régulier de  $\mathfrak{n}$  est un sous-module régulier de  $\mathfrak{m}$ .

*Démonstration.* L'énoncé 2 implique trivialement l'énoncé 1 car  $\mathfrak{n}$  est toujours un sous-module régulier de lui-même. Réciproquement, supposons que  $\mathfrak{n}$  est un sous-module régulier de  $\mathfrak{m}$  et soit  $\mathfrak{p}$  un sous-module régulier de  $\mathfrak{n}$ . Fixons  $m \in \mathfrak{m}$ . Par régularité de  $\mathfrak{n}$  dans  $\mathfrak{m}$ , il existe un  $\alpha_1 \in \Lambda$  tel que  $m - \alpha_1 m \in \mathfrak{n}$ . Par régularité

de  $\mathfrak{p}$  dans  $\mathfrak{n}$ , il existe un  $\alpha_2 \in \Lambda$  tel que

$$m - (\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_1\alpha_2)m = (m - \alpha_1 m) - \alpha_2(m - \alpha_1 m) \in \mathfrak{p}$$

Cela démontre que  $\mathfrak{p}$  est régulier dans  $\mathfrak{m}$ . ■

Le lemme précédent nous permet de démontrer le lemme suivant.

**Lemme B.6.** *Soit  $\mathfrak{m}$  un  $\Lambda$ -module. Tout sous-module de  $\text{Soc}(\mathfrak{m})$  est régulier.*

*Démonstration.* Soit  $\mathfrak{n} \leq \text{Soc}(\mathfrak{m})$  et  $m \in \mathfrak{m}$ . Par la proposition B.4, chaque élément  $m \in \text{Soc}(\mathfrak{m})$  est contenu dans une somme directe de la forme  $\mathfrak{n} \oplus \bigoplus_{i=1}^k \mathfrak{s}_i$ , où les  $\mathfrak{s}_i$  sont des sous-modules simples. Il suffit donc de démontrer que  $\mathfrak{n}$  est régulier dans tout sous-module de cette forme.

Posons, pour  $l \in \{0, \dots, k\}$ ,  $\mathfrak{n}_l = \mathfrak{n} \oplus \bigoplus_{i=1}^l \mathfrak{s}_i$ . Pour  $l \in \{0, \dots, k-1\}$ ,  $\mathfrak{n}_l$  est cosimple, et donc régulier, dans  $\mathfrak{n}_{l+1}$ . En conséquence, le lemme B.5 permet de montrer par récurrence que  $\mathfrak{n} = \mathfrak{n}_0$  est simple dans  $\mathfrak{n}_l$  quel que soit  $l \in \{0, \dots, k\}$ . Donc  $\mathfrak{n}$  est régulier dans  $\mathfrak{n}_k$ , ce qui termine la preuve. ■

On est maintenant en mesure de démontrer la proposition suivante, qui étend aux algèbres non-unitaires la caractérisation de  $\text{Soc}(\mathfrak{m})$  dans (Bourbaki, 1958).

**Proposition B.7.** *Soit  $\mathfrak{m}$  un  $\Lambda$ -module ; les énoncés suivants sont équivalents :*

1.  $\mathfrak{m} = \text{Soc}(\mathfrak{m})$ .
2.  $\mathfrak{m}$  est une somme directe de sous-modules simples.
3. Tout sous-module de  $\mathfrak{m}$  est un facteur direct régulier de  $\text{Soc}(\mathfrak{m})$ .

*Démonstration.* L'équivalence entre les énoncés 1 et 2 est évidente en regard de la proposition B.4. La même proposition montre aussi que tout sous-module de

$\text{Soc}(\mathfrak{m})$  en est un facteur direct et on sait que chaque sous-module de  $\text{Soc}(\mathfrak{m})$  régulier par le lemme précédent. Donc l'énoncé 1 entraîne l'énoncé 3.

Supposons maintenant que la condition 3 est vérifiée ; on commence par démontrer que tout sous-module non-trivial de  $\mathfrak{m}$  contient un sous-module simple ou, de manière équivalente, que tout sous-module monogène de  $\mathfrak{m}$  contient un sous-module simple. Soit  $\mathfrak{n}$  un sous-module monogène de  $\mathfrak{m}$  ; un argument simple montre que les sous-modules propres de  $\mathfrak{n}$  sont inductivement ordonnés par inclusion, et donc qu'il existe un sous-module propre maximal  $\mathfrak{n}_0$  de  $\mathfrak{n}$  par le lemme de Zorn. Ce module est alors cosimple dans  $\mathfrak{n}$  par la proposition B.3, car il est maximal par construction et régulier par hypothèse. De plus,  $\mathfrak{n}_0$  est un facteur direct de  $\mathfrak{m}$ , en sorte que  $\mathfrak{m} = \mathfrak{n}_0 \oplus \mathfrak{p}$  avec  $\mathfrak{p} \cong \mathfrak{m}/\mathfrak{n}_0$ . Par conséquent,  $\mathfrak{n} \cap \mathfrak{p} \cong \mathfrak{n}/\mathfrak{n}_0$  est un sous-module simple de  $\mathfrak{n}$ .

On est maintenant en mesure de terminer la preuve. En effet, on sait par hypothèse qu'il existe un sous-module  $\mathfrak{p}$  de  $\mathfrak{m}$  tel que  $\mathfrak{m} = \text{Soc}(\mathfrak{m}) \oplus \mathfrak{p}$ . Or si  $\mathfrak{p} \neq 0$ ,  $\mathfrak{p}$  contient un sous-module simple, ce qui contredit le fait que  $\mathfrak{p} \cap \text{Soc}(\mathfrak{m}) = 0$ . On a donc  $\mathfrak{m} = \text{Soc}(\mathfrak{m})$ , ce qui montre que l'énoncé 3 entraîne l'énoncé 1. ■

Les modules qui satisfont l'une des trois conditions équivalentes du lemme précédent sont dits *semi-simples*. Ils jouent un rôle important dans la théorie des algèbres, particulièrement dans l'étude des algèbres artiniennes.

Parallèlement au socle d'un module, on a introduit la notion duale de *radical*. Alors que le socle d'un module mesure la place qu'y occupent ses sous-modules simples, le radical mesure l'obstruction à la simplicité de ses quotients. En regard de ce qui précède, un module semi-simple est somme directe de sous-modules simples, qui en sont aussi des quotients. Comme 0 est le seul élément qui est annulé par toutes les projections d'une somme directe, on arrive à la conclusion suivante :

**Proposition B.8.** *Le radical d'un module semi-simple est l'idéal nul.* ■

Un module qui satisfait  $\text{Rad}(\mathfrak{m}) = 0$  est dit *sans radical*. Bien que tout module semi-simple soit sans radical, il existe des modules sans radical qui ne sont pas semi-simples. Par exemple, le  $\mathbb{Z}$ -module régulier  ${}_Z\mathbb{Z}$  a un radical nul (ses idéaux maximaux sont les  $p\mathbb{Z}$  avec  $p$  premier, et l'intersection de ces idéaux est triviale), mais aussi un socle nul (car il ne contient aucun idéal minimal). La définition suivante donne les conditions sous lesquelles on saura démontrer la réciproque de la proposition précédente.

**Définition B.9.** Un  $\Lambda$ -module  $\mathfrak{m}$  est artinien (respectivement noethérien) si toute collection de sous-modules admet un élément minimal (respectivement maximal).

De manière équivalente, un module est artinien (noethérien) si et seulement si toute chaîne décroissante (croissante) de sous-modules est stationnaire (Bourbaki, 1958).

Le résultat suivant est une version simplifiée de la proposition 10.15 dans (Anderson et Fuller, 1992). On a aussi adapté leur preuve afin de s'assurer qu'elle ne nécessite pas d'élément neutre.

**Proposition B.10.** *Pour tout module  $\mathfrak{m}$ , les énoncés suivants sont équivalents :*

1.  $\mathfrak{m}$  est semi-simple et noethérien.
2.  $\mathfrak{m}$  est sans radical et artinien.

*Démonstration.* Si  $\mathfrak{m}$  est noethérien et semi-simple, alors il s'écrit comme une somme directe finie de sous-modules simples. Comme une somme finie de modules artiniens est un module artinien (voir (Bourbaki, 1958), §2, proposition 2),  $\mathfrak{m}$  est artinien. Il est sans radical par la proposition B.8.

Réciproquement, supposons que  $\mathfrak{m}$  est sans radical et artinien. La collection des intersections finies de sous-modules cosimples de  $\mathfrak{m}$  admet alors un élément minimal  $\mathfrak{n}$ . Par construction,  $\mathfrak{n} = \bigcap_{i=1}^k \mathfrak{n}_i$  où  $\mathfrak{n}_i$  est cosimple. La minimalité de  $\mathfrak{n}$  entraîne  $\mathfrak{n} \subseteq \text{Rad}(\mathfrak{m})$ , et  $\text{Rad}(\mathfrak{m}) = 0$  par hypothèse. Par conséquent, l'application  $\mathfrak{m} \rightarrow \prod_{i=1}^n (\mathfrak{m}/\mathfrak{n}_i)$  est injective. Notons  $\mathfrak{p} = \prod_{i=1}^n (\mathfrak{m}/\mathfrak{n}_i)$ ; alors  $\mathfrak{p}$  est un produit fini de modules simples, et les produits finis coïncident avec les sommes directes finies. Donc  $\mathfrak{p}$  est semi-simple; comme  $\mathfrak{m}$  en est un sous-module, on conclut qu'il est aussi semi-simple. Comme il est aussi artinien, il s'écrit à son tour comme une somme directe finie de modules simples, de quoi il découle que  $\mathfrak{m}$  est aussi artinien. ■

Dans les algèbres unitaires, la semi-simplicité du module régulier  ${}_{\Lambda}\Lambda$  entraîne ipso facto la semi-simplicité pour tous les  $\Lambda$ -modules (Bourbaki, 1958). En particulier, le cas des algèbres unitaires artiniennes est très agréable, puisque le module  $\text{Rad}({}_{\Lambda}\Lambda)$  caractérise à lui seul la semi-simplicité de tous les  $\Lambda$ -modules.

#### B.4 Radical de Jacobson

Les observations de la section précédente montrent que le module régulier  ${}_{\Lambda}\Lambda$  joue un rôle spécial. On va maintenant introduire le radical de Jacobson, qui s'avérera être un bon outil pour investiguer la semi-simplicité de ce module.

Soit  $\mathfrak{m}$  un module sur une algèbre  $\Lambda$ . Par définition,  $\mathfrak{m}$  est un  $R$ -module avec un morphisme d'algèbres  $\Lambda \rightarrow \text{End}_R(\mathfrak{m})$ . Le noyau de ce morphisme est appelé *l'annulateur* de  $\mathfrak{m}$ , et on le note  $\text{Ann}_{\Lambda}(\mathfrak{m})$ . Plus concrètement,  $\text{Ann}_{\Lambda}(\mathfrak{m})$  est l'ensemble des  $\alpha \in \Lambda$  tels que  $\alpha m = 0$  pour tout  $m \in \mathfrak{m}$ . L'intersection des annulateurs de tous les  $\Lambda$ -modules simples est appelé le *radical de Jacobson de  $\Lambda$* ; il sera noté  $J(\Lambda)$ . Le radical de Jacobson est un idéal bilatère de  $\Lambda$ , et il est naturellement lié à  $\text{Rad}({}_{\Lambda}\Lambda)$  par la proposition suivante :

**Proposition B.11.** *Pour toute algèbre  $\Lambda$ ,  $\text{Rad}({}_\Lambda\Lambda) \subseteq J(\Lambda)$ . Si  $\Lambda$  admet un élément neutre à droite, l'inclusion réciproque est vérifiée.*

*Démonstration.* Fixons  $\alpha \in \text{Rad}({}_\Lambda\Lambda)$  et soit  $\mathfrak{s}$  un module simple. Pour tout  $s \in \mathfrak{s}$ , l'application  $\varphi_s(x) = xs$  définit un morphisme de  $\Lambda$ -modules  ${}_\Lambda\Lambda \rightarrow \mathfrak{s}$ . Puisque  $\alpha \in \text{Rad}({}_\Lambda\Lambda)$ , il est annulé par tous les morphismes  $\varphi_s$ . En particulier,  $\alpha\mathfrak{s} = 0$  et donc  $\alpha \in \text{Ann}_\Lambda(\mathfrak{s})$ , et ce pour tout module simple  $\mathfrak{s}$ . Donc  $\alpha \in J(\Lambda)$ .

Supposons ensuite que  $\Lambda$  admet un élément neutre à droite  $\eta$ , et fixons  $\alpha \in J(\Lambda)$ . Soit  $\mathfrak{s}$  un module simple et  $\varphi : {}_\Lambda\Lambda \rightarrow \mathfrak{s}$  un morphisme de  $\Lambda$ -modules. Comme  $\alpha \in J(\Lambda)$ , on a que  $\varphi(\alpha) = \alpha\varphi(\eta) = 0$ . Donc  $\alpha$  est annulé par tous les morphismes dont l'image est simple, ce qui montre que  $\alpha \in \text{Rad}({}_\Lambda\Lambda)$ . ■

La proposition suivante investigate le comportement du radical de Jacobson relativement aux morphismes d'algèbres.

**Proposition B.12.** *Soit  $\varphi : \Lambda \rightarrow \Gamma$  un morphisme surjectif d'algèbres*

1.  $\ker(\varphi) \subseteq J(\Lambda)$  si et seulement si  $\text{hom}_R(\varphi, \Gamma)$  définit une bijection entre les  $\Lambda$ -modules simples et les  $\Gamma$ -modules simples.
2.  $\varphi(J(\Lambda)) \subseteq J(\Gamma)$ , et en particulier

$$J(\Gamma) = 0 \implies J(\Lambda) \subseteq \ker(\varphi).$$

*Démonstration.* Le morphisme  $\text{hom}_R(\varphi, \Gamma)$  envoie un  $\Gamma$ -module  $\Gamma \rightarrow \text{End}_R(\mathfrak{m})$  sur le  $\Lambda$ -module  $\Lambda \xrightarrow{\varphi} \Gamma \rightarrow \text{End}_R(\mathfrak{m})$ . La surjectivité de  $\varphi$  entraîne que cette correspondance est injective (les morphismes surjectifs d'algèbres sont des épimorphismes) et qu'elle préserve les modules simples. Un  $\Lambda$ -module  $\mathfrak{m}$  provient d'un  $\Gamma$ -module de cette manière exactement lorsque  $\ker(\varphi) \subseteq \text{Ann}_\Lambda(\mathfrak{m})$ . En particulier, la précomposition par  $\varphi$  admet une section sur les  $\Gamma$ -modules simples exactement lorsque

$\ker(\varphi)$  est contenu dans les anneaux des modules simples, ce qui complète la preuve de l'énoncé 1.

Supposons maintenant que  $J(\Gamma) = 0$ . Comme tous les  $\Gamma$ -modules simples sont en particulier des  $\Lambda$ -modules simples via  $\varphi$ , on voit que  $\varphi(J(\Lambda)) \subseteq J(\Gamma)$ . En particulier,  $J(\Gamma) = 0$  entraîne  $\varphi(J(\Lambda)) = 0$ , d'où  $J(\Lambda) \subseteq \ker(\varphi)$  ■

Cette proposition est intéressante lorsqu'on réfléchit en termes de quotients plutôt qu'en terme de morphismes. En fait, elle nous dit que  $\Lambda/J(\Lambda)$  est le seul quotient de  $\Lambda$  qui ait à la fois un radical de Jacobson nul et les mêmes modules simples que  $\Lambda$ . Puisque  $\text{Rad}(\Lambda) \subseteq J(\Lambda)$ , le quotient  $\Lambda/J(\Lambda)$  est de plus sans radical, ce qui est très utile dans le cas artinien.

Le cas artinien est d'ailleurs l'objet de notre prochaine proposition. Avant d'y arriver, on introduit un peu de terminologie : on dit qu'un idéal  $\mathfrak{m} \subseteq \Lambda$  est *nilpotent* s'il existe un entier  $n$  tel que tout produit de  $n$  éléments de  $\mathfrak{m}$  soit nul. Dans les notations du chapitre 1,  $\mathfrak{m}$  est nilpotent s'il existe un entier  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $\mathfrak{m}^n = 0$ . Les idéaux nilpotents sont intimement liés au radical de Jacobson. La proposition suivante résume le lemme 1.2.2 et le théorème 1.3.1 de (Herstein, 1968).

**Proposition B.13.** *Tous les idéaux bilatères nilpotents d'une algèbre sont contenus dans son radical de Jacobson. Le radical de Jacobson d'une algèbre artinienne est son idéal bilatère nilpotent maximal.* ■

On termine ce survol du radical de Jacobson en mentionnant l'une de ses propriétés importante : la notion de radical est symétrique, au sens où  $J(\Lambda) = J(\Lambda^{\text{op}})$ . La preuve passe par la notion d'idéal modulaire (qui porte aussi parfois le nom de *régulier*, ce à quoi il faut faire attention) ; voir (Herstein, 1968) pour les détails.

## B.5 Éléments idempotents

Le résultat suivant montre que les éléments idempotents sont omniprésents dans les algèbres artiniennes. Pour plus de détails, voir (Herstein, 1968), théorème 1.4.2.

**Proposition B.14.** *Soit  $\Lambda$  une algèbre artinienne dont le radical de Jacobson est nul.*

1. *Tout idéal à gauche non-nul de  $\Lambda$  est de la forme  $\Lambda e$  où  $e \in \Lambda$  est idempotent.*
2. *Tout idéal bilatère non-nul de  $\Lambda$  est de la forme  $e\Lambda = \Lambda e$  pour un unique idempotent central de  $\Lambda$ .*
3.  *$\Lambda$  est unitaire.*

■

On introduit maintenant un peu de terminologie concernant les idempotents d'une algèbre : on dit que deux idempotents  $e, f \in \Lambda$  sont *orthogonaux* si  $ef = fe = 0$ . Un simple calcul permet de montrer que la somme d'idempotents deux à deux orthogonaux est à nouveau un idempotent. Un idempotent qui n'est pas une somme non-triviale d'idempotents deux à deux orthogonaux est dit *primitif*. Un ensemble d'idempotents est dit *complet* si sa somme est une identité à droite de  $\Lambda$ .

On s'intéressera plus particulièrement aux familles complètes d'idempotents orthogonaux des algèbres d'endomorphismes. On montrera dans la prochaine proposition une propriété remarquable de ces familles. Pour énoncer cette proposition, il nous faut introduire une nouvelle notion : on dira qu'une famille d'endomorphismes d'un module  $\mathfrak{m}$  est *localement finie* si tout élément de  $\mathfrak{m}$  s'annule sur une partie cofini de cette famille. En d'autres mots,  $E \subseteq \text{End}_{\Lambda}(\mathfrak{m})$  est localement fini si pour tout  $m \in \mathfrak{m}$ ,  $\varphi(m) \neq 0$  seulement pour un nombre fini de  $\varphi \in E$ . On donne maintenant la proposition qui nous intéresse.

**Proposition B.15.** *Les décompositions en somme directe d'un  $\Lambda$ -module  $\mathfrak{m}$  sont en bijection avec les familles complètes et localement finies d'idempotents primitifs orthogonaux de l'algèbre  $\text{End}_\Lambda(\mathfrak{m})$ . Un facteur d'une telle décomposition est indécomposable si et seulement si l'idempotent correspondant est primitif. ■*

La bijection de la proposition précédente est assez simple à décrire : il s'agit simplement d'associer à chaque décomposition l'ensemble de ses projecteurs ; et d'associer à chaque famille complète d'idempotents orthogonaux la décomposition formée par ses images. On laisse le soin au lecteur de se convaincre lui-même que tout fonctionne bien. On trouve plus de détails dans (Bourbaki, 1958), §1, proposition 2.

Le résultat précédent présente un intérêt particulier dans le cas du module régulier  ${}_\Lambda\Lambda$ , via le morphisme de la proposition suivante :

**Proposition B.16.** *La multiplication à droite d'une algèbre  $\Lambda$  définit un morphisme d'algèbres  $\rho : \Lambda^{\text{op}} \rightarrow \text{End}_\Lambda({}_\Lambda\Lambda)$  qui satisfait :*

1.  *$\rho$  est surjectif si et seulement si  $\Lambda$  contient une identité à droite.*
2.  *$\rho$  est bijectif si et seulement si  $\Lambda$  est unitaire.*

*Démonstration.* Pour tout  $\alpha \in \Lambda$ , l'application  $\rho(\alpha) : x \mapsto x\alpha$  est un endomorphisme du  $\Lambda$ -module  ${}_\Lambda\Lambda$ , et l'application  $\rho$  est elle-même un morphisme de  $R$ -modules. De plus,  $\rho$  satisfait  $\rho(\alpha\beta) = \rho(\beta) \circ \rho(\alpha)$ , de quoi on déduit que  $\rho : \Lambda^{\text{op}} \rightarrow \text{End}_\Lambda({}_\Lambda\Lambda)$  est un morphisme d'algèbres.

Pour prouver l'énoncé 1, on remarque que  $\rho^{-1}(id)$  est précisément l'ensemble des identités à droite de  $\Lambda$ , et que si  $\Lambda$  contient une unité à droite  $\eta$ , alors tout élément de  $\psi \in \text{End}_\Lambda({}_\Lambda\Lambda)$  est de la forme  $\rho(\psi(\eta))$ . Pour prouver l'énoncé 2, on remarque que  $\rho$  est bijectif si et seulement si  $\Lambda$  contient une unique identité à droite, ce qui est équivalent à dire que  $\Lambda$  est unitaire. ■

En combinant les deux propositions précédentes, on obtient le corollaire suivant :

**Corollaire B.17.** *Soit  $\Lambda$  une algèbre contenant une identité à droite. Il existe une surjection des ensembles complets d'idempotents orthogonaux de  $\Lambda$  vers les décompositions de  $\Lambda$  en somme directe d'idéaux à gauche. Si  $\Lambda$  est unitaire, il s'agit d'une bijection. ■*

On appellera *unitaire à droite* une algèbre qui possède une identité à droite. Le corollaire précédent dit donc que les décompositions d'une algèbre unitaire à droite en somme directe d'idéaux à gauche proviennent toutes des ensembles complets d'idempotents orthogonaux de  $\Lambda$ .

Ces résultats sont, encore une fois, particulièrement utiles dans le cas artinien, puisque les décompositions en somme directe sont forcément finies. Ainsi, on ramène l'étude des décompositions du module régulier à l'étude des familles complètes d'idempotents orthogonaux, forcément finies.



## ANNEXE C

### CARACTÉRISATION DES MORPHISMES NILPOTENTS

L'objectif de cette annexe est de présenter la preuve de la proposition 2.7. Il s'agit d'un théorème de (Almeida *et al.*, 2009) qui permet de caractériser les morphismes de semi-groupes qui engendrent des idéaux d'algèbres nilpotents. Ce résultat est utilisé à la section 2.2 afin de calculer le radical de Jacobson des algèbres de bandes régulières à gauche.

La première section de cette annexe concerne les semi-groupes simples et les groupes locaux. On y présente plusieurs résultats qui seront nécessaires à la preuve en question. Dans la deuxième section, on énonce et démontre notre résultat principal. La troisième section contient des applications de ce théorème à la théorie des groupes. Cette annexe suit de très près l'article original (Almeida *et al.*, 2009) pour les deux premières sections.

#### C.1 Semi-groupes simples et groupes locaux

Un semi-groupe  $S$  est dit *simple* s'il n'admet aucun idéal bilatère propre. Si  $S$  est un semi-groupe fini simple, tous ses idéaux principaux doivent coïncider avec  $S$ , puisqu'ils sont non-vides, et cela entraîne que  $S$  n'est formé que d'une seule  $\mathcal{J}$ -classe (ou, indifféremment, d'une seule  $\mathcal{D}$ -classe). Cette unique  $\mathcal{J}$ -classe est partitionnée par ses  $\mathcal{H}$ -classes, et au moins une de ces classes contient un idem-

potent (car, par la proposition 1.6,  $S$  contient un idempotent). Mais cela entraîne que toutes les  $\mathcal{H}$ -classes doivent contenir un idempotent, ce qui nous donne le résultat suivant (pour les détails, voir (Grillet, 1995), corollaire II.4.6).

**Lemme C.1.** *Un semi-groupe fini simple est la réunion disjointe de ses sous-groupes maximaux.* ■

Le lemme suivant, du à Bret Tilson, permet de conclure que les monoïdes locaux d'un semi-groupe simple coïncident avec ses sous-groupes maximaux.

**Lemme C.2** ((Eilenberg et Tilson, 1974), proposition XI.1.2). *Soit  $S$  un semi-groupe fini et  $e$  un idempotent de  $S$ . Soit  $J_e$  la  $\mathcal{J}$ -classe de  $e$  et  $H_e$  sa  $\mathcal{H}$ -classe. Alors  $eSe \cap J_e = H_e$ .* ■

On donne ensuite une caractérisation des groupes locaux. À cette fin, on introduit le *noyau* d'un semi-groupe fini  $S$  : il s'agit de son idéal bilatère minimal, qui correspond à sa  $\mathcal{J}$ -classe minimale. On note que le noyau d'un semi-groupe est en particulier un semi-groupe simple. La proposition suivante est une version simplifiée de la proposition 2.3 de (Almeida *et al.*, 2009).

**Lemme C.3.** *Soit  $S$  un semi-groupe de cardinalité  $n \geq 2$ . Alors  $S$  est un groupe local si et seulement si  $S^n$  coïncide avec le noyau de  $S$ .* ■

Fixons un semi-groupe fini et simple  $S$ . Comme les relations  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{L}$  sont contenues dans  $\mathcal{J}$ ,  $S$  est aussi la réunion disjointe de ses  $\mathcal{R}$ -classes et de ses  $\mathcal{L}$ -classes. Soit  $e \in E(S)$ , et notons respectivement  $R_e, L_e, H_e$  la  $\mathcal{R}$ ,  $\mathcal{L}$  et  $\mathcal{H}$ -classe de  $e$ . Alors  $R_e \cap L_e = H_e$ , et de plus, si  $e'$  est un autre idempotent de  $S$ , l'intersection  $R_e \cap L_{e'}$  est aussi une  $\mathcal{H}$ -classe de  $S$  qui contient un unique idempotent (Grillet, 1995). Le lemme suivant résume ces quelques observations.

**Lemme C.4.** *Soit  $S$  un semi-groupe simple et  $e_1, e_2 \in E(S)$ . Alors il existe un idempotent  $e \in E(S)$  tel que  $e_1 \mathcal{L} e \mathcal{R} e_2$ .* ■

Plus concrètement, l'idempotent  $e$  du lemme précédent satisfait les quatre relations suivantes :

$$e_1e = e_1, \quad ee_1 = e, \quad e_2e = e, \quad ee_2 = e_2.$$

## C.2 Énoncé et preuve du résultat principal

Avant de procéder avec l'énoncé et la démonstration de notre résultat principal, on a besoin d'énoncer un dernier lemme. Il s'agit d'un résultat de (Wedderburn, 1937) qui concerne les algèbres de dimension finie engendrées par des éléments nilpotents. La version originale du résultat demande que l'algèbre soit unitaire, mais on trouve une preuve qui évite cette hypothèse dans (Herstein, 1968) au théorème 2.3.1.

**Lemme C.5.** *Soit  $K$  un corps. Une  $K$ -algèbre engendrée sur  $K$  par une famille finie d'éléments nilpotents est nilpotente.* ■

On rappelle brièvement, pour la convenance du lecteur, quelques notations. Soit  $K$  un corps et  $\varphi : S \rightarrow T$  un morphisme de semi-groupes. Alors  $\varphi$  est dit  $K$ -nilpotent si le noyau du morphisme induit  $K\varphi : KS \rightarrow KT$  est un idéal nilpotent de  $KS$ . La notation  $\mathbf{G}_p$  désigne la pseudo-variété des  $p$ -groupes,  $p$  premier, et  $\mathbf{1}$  désigne la variété triviale. De plus,  $\mathbf{G}_K$  désigne la variété  $\mathbf{G}_p$  si  $\text{car}(K) = p \neq 0$ , et  $\mathbf{1}$  si  $\text{car}(K) = 0$ . La proposition 2.7 est reproduite ici :

**Proposition C.6** ((Almeida et al., 2009), théorème 3.5). *Soit  $K$  un corps et  $\psi : S \rightarrow T$  un morphisme de semi-groupes finis. Alors  $\psi$  est un  $\mathbf{LG}_K$ -morphisme si et seulement s'il est  $K$ -nilpotent.* ■

*Démonstration.* Supposons d'abord que  $\psi$  est nilpotent, et soit  $e_0 \in E(T)$  et  $U = \psi^{-1}(e_0)$ . Fixons un idempotent  $e \in E(U)$ ; on vérifie d'abord que le monoïde local en  $e$  est bien un groupe. Soit  $g = eue \in eUe$ . Comme  $eUe$  est un semi-groupe

fini, il existe un entier naturel  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $g^n = f$  est un idempotent de  $eUe$  (proposition 1.6). Il nous suffit de vérifier que  $f = e$ . Or,  $\psi(f) = e_0 = \psi(e)$ , en sorte que  $e - f \in \ker(K\psi)$ . De plus, on a

$$(e - f)^2 = e^2 - ef - fe + f^2 = e - f.$$

Comme  $\ker(K\psi)$  est nilpotent, on a  $e - f = (e - f)^m = 0$  pour un certain  $m \in \mathbb{N}$ , d'où  $e = f$  et  $g$  est inversible. On a démontré que  $eUe$  est un groupe. Si  $\text{car}(K) = p \neq 0$ , alors pour  $k \in \mathbb{N}$  assez grand,  $(g - e)^{p^k} = 0$  et

$$(g - e)^{p^k} = g^{p^k} - e = 0.$$

Cela démontre que l'ordre de  $g$  est une puissance de  $p$  et que  $eUe \in \mathbf{G}_p = \mathbf{G}_K$ . Si  $\text{car}(K) = 0$ , alors  $K(eUe)$  est une algèbre semi-simple par le théorème de Maschke (Herstein, 1968), et comme elle est aussi artinienne, 0 est son seul idéal nilpotent. Or, pour tout  $g \in eUe$ , on a que  $g - e$  est dans l'idéal nilpotent  $\ker(K\psi) \cap KeUe$ , d'où  $g - e = 0$  et  $g = e$ . Donc  $eUe = \{e\} \in \mathbf{I}$ . On a bien  $U \in \mathbf{LG}_K$  dans tous les cas, et la première implication est démontrée.

Pour l'implication réciproque, on suppose que  $\psi$  est un  $\mathbf{LG}_K$ -morphisme. L'idéal  $\ker(K\psi)$  est engendré par les  $s - t$  tels que  $(s, t) \in \ker(\psi)$  (lemme 2.3). Par le lemme de Wedderburn ci-dessus, il suffit donc de démontrer que  $s - t$  est nilpotent pour tout  $(s, t) \in \ker(\psi)$ .

Fixons  $(s, t) \in \ker(\psi)$  et soit  $u = \psi(s) = \psi(t)$ . Par la proposition 1.6, il existe un  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $u^n$  soit un idempotent  $f \in E(T)$ . On considère  $U = \psi^{-1}(f)$ ; comme  $\psi$  est un  $\mathbf{LG}_K$ -morphisme,  $U$  est un groupe local. Par le lemme C.3,  $U^m$  est donc un semi-groupe simple pour  $m$  assez grand. De plus, le produit  $(s - t)^{mn}$  est une somme d'éléments de  $U^m$ , et donc il est dans l'intersection  $\ker(K\psi) \cap KU^m$ . Soit  $\varphi$  la restriction de  $\psi$  à  $U^m$ . Alors  $\ker(K\psi) \cap KU^m = \ker(K\varphi)$ , et il est donc suffisant de démontrer que  $\varphi$  est nilpotent.

Par construction,  $\varphi$  envoie tous les éléments de  $U^m$  sur  $f^m = f$ . Par conséquent,  $\ker(K\varphi)$  est en fait l'idéal d'augmentation  $\omega KU^m$  (définition 2.5). Il s'agit simplement de l'idéal engendré par les  $a - b$  avec  $a, b \in U^m$ . Par une nouvelle application du lemme de Wedderburn, il suffit de démontrer que cet idéal est engendré par un ensemble fini d'éléments nilpotents. Fixons  $a, b \in U^m$  et soit  $H_a, H_b$  leur  $\mathcal{H}$ -classe respective. Par le lemme C.1,  $H_a$  et  $H_b$  sont des sous-groupes maximaux de  $U^m$ ; ils contiennent donc chacun un idempotent  $e_a \in H_a$  et  $e_b \in H_b$ . Par le lemme C.4, il existe un idempotent  $e_{a,b} \in E(U^m)$  qui satisfait  $e_a \mathcal{L} e_{a,b} \mathcal{R} e_b$ .

J'affirme maintenant que les quatre éléments suivants sont nilpotents :

$$e_{a,b} - e_b, \quad e_{a,b} - e_a, \quad a - e_a, \quad b - e_b.$$

Pour les deux premiers éléments, on peut montrer aisément que  $(e_{a,b} - e_b)^2 = 0 = (e_{a,b} - e_a)$  en utilisant le fait que  $e_a \mathcal{L} e_{a,b} \mathcal{R} e_b$ . Pour les deux derniers, on doit distinguer les deux cas  $\text{car}(K) = 0$  ou  $\text{car}(K) \neq 0$ . Si  $\text{car}(K) = 0$ , alors tous les monoïdes locaux de  $U^m$  sont triviaux. Mais par le lemme C.2, les monoïdes locaux coïncident avec les sous-groupes maximaux, ce qui entraîne que  $H_a = \{e_a\}$  et  $H_b = \{e_b\}$ . En particulier  $a - e_a$  et  $b - e_b$  sont nuls, donc nilpotents. Si  $\text{car}(K) = p \neq 0$ , alors  $H_a$  et  $H_b$  sont des  $p$ -groupes par hypothèse. En particulier, il existe des entiers  $i, j \in \mathbb{N}$  tels que  $a^{p^i} = e_a$  et  $b^{p^j} = e_b$ , et on a

$$(a - e_a)^{p^i} = e_a - e_a = 0 = e_b - e_b = (b - e_b)^{p^j},$$

et notre affirmation est démontrée. De plus, les quatre éléments qu'on a choisis satisfont l'équation

$$a - b = (a - e_a) - (e_{a,b} - e_a) + (e_{a,b} - e_b) - (b - e_b).$$

Par conséquent, l'ensemble suivant engendre  $\omega KU^m$  :

$$\bigcup_{a,b \in U^m} \{e_{a,b} - e_b, e_{a,b} - e_a, a - e_a, b - e_b\}.$$

	$R_b$	$R_a$
$L_a$	$e_{a,b}$	$e_a$
$L_b$	$e_b$	

Figure C.1 Relations entre les idempotents  $e_{a,b}, e_a, e_b$  dans la preuve de la proposition 2.7.

Le lemme de Wedderburn montre alors que  $\omega KU^m$  est bien nilpotent, ce qui termine la preuve de la seconde implication. ■

### C.3 Exemples

On va maintenant présenter des applications de la proposition 2.7 à la théorie des groupes.

Soit  $G$  un groupe fini d'élément neutre 1 et  $p$  un nombre premier; les  $p$ -sous-groupes de  $G$  qui sont maximaux pour cette propriété sont appelés les *sous-groupes  $p$ -Sylow* de  $G$ , et on note  $\text{Syl}_p(G)$  l'ensemble de ces sous-groupes. Le théorème de Sylow dit que tous les sous-groupes de  $\text{Syl}_p(G)$  sont conjugués, et donc  $\text{Syl}_p(G)$  est un singleton si et seulement si  $G$  admet un sous-groupe  $p$ -Sylow normal (Isaacs, 1994).

Fixons un corps  $K$  de caractéristique  $p \neq 0$ , et soit  $\varphi : G \rightarrow H$  un  $\text{LG}_K$ -morphisme entre deux groupes finis. Alors  $\varphi^{-1}(1)$  est un  $p$ -sous-groupe de  $G$ , et il est donc contenu dans un sous-groupe  $p$ -Sylow de  $G$ . Comme  $\varphi^{-1}(1)$  est normal, il aussi

est contenu dans tous les conjugués de ce sous-groupe  $p$ -Sylow. Par le théorème de Sylow,  $\ker(\varphi)$  est donc contenu dans l'intersection  $O_p(G) = \bigcap_{H \in \text{Syl}_p(G)} H$ , qu'on appellera le  $p$ -cœur de  $G$ . Le  $p$ -cœur est lui-même un  $p$ -sous-groupe normal, ce qui montre que la surjection canonique  $\pi_p : G \rightarrow G/O_p(G)$  est un  $\text{LG}_K$ -morphisme. Par la proposition 2.7, la congruence  $\ker(\pi_p)$  est donc la plus grande congruence qui engendre un idéal nilpotent, ce qui revient à dire qu'il s'agit du radical de Rhodes de  $G$  (c.f. §2.1.3). Plus explicitement :

$$J_K(G) = \ker(\pi_p) = \{(g, h) : gh^{-1} \in O_p(G)\}.$$

Le  $p$ -cœur de  $G$  est aussi son plus grand  $p$ -sous-groupe normal. Par le théorème de Maschke,  $K(G/O_p(G))$  est semi-simple si et seulement si  $O_p(G)$  est l'unique  $p$ -sous-groupe maximal, ce qui revient à dire que  $\text{Syl}_p(G) = \{O_p(G)\}$ . On en déduit le résultat suivant :

**Proposition C.7.** *Soit  $G$  un groupe fini et  $K$  un corps de caractéristique  $p \neq 0$ .*

*Alors :*

$$\mathfrak{J}(J_K(G)) = J(KG) \iff \text{Syl}_p(G) = \{O_p(G)\}.$$

■

Ainsi, si  $G$  est un groupe fini avec un seul sous-groupe  $p$ -Sylow, le radical de Rhodes donne directement le radical de Jacobson de l'algèbre  $KG$ , et on sait en donner une description très explicite.

On va maintenant construire des exemples où, au contraire, le radical de Rhodes s'avère complètement inutile. Soit  $K$  un corps de caractéristique  $p \neq 0$  et  $G$  un groupe simple (i.e. ses seuls sous-groupes normaux sont 1 et  $G$ ) qui n'est pas un  $p$ -groupe. Alors  $O_p(G)$  est le groupe trivial. La congruence qui correspond à  $O_p(G)$  est donc la relation d'égalité, c'est-à-dire que  $J_K(G) = \mathcal{E}$ . Par conséquent,

$\mathfrak{J}(J_K(G))$  est l'idéal nul. Si de plus  $p$  divise l'ordre de  $G$ , l'algèbre  $KG$  n'est pas semi-simple par le théorème de Maschke, ce qui entraîne que  $J(KG) \neq 0$ .

Ce qui précède peut aussi être utilisé pour donner un exemple de groupe dont l'algèbre possède un idéal bilatère contenu dans l'idéal d'augmentation, mais qui n'est pas engendré par une congruence. On considère le groupe alterné de rang 5,  $A_5$ , et le corps fini d'ordre 2,  $\mathbb{F}_2$ . Le groupe  $A_5$  est de cardinalité  $5!/2 = 60$ . Il est bien connu que  $A_n$  est simple pour tout  $n \geq 5$  (Isaacs, 1994), et visiblement  $A_5$  n'est pas un 2-groupe bien que 2 divise  $|A_5|$ . On peut donc appliquer ce qui précède pour conclure que  $J_{\mathbb{F}_2}(A_5) = \mathcal{E}$  et  $J(\mathbb{F}_2 A_5) \neq 0$ . De plus, on sait que  $J(\mathbb{F}_2 A_5) \subseteq \omega \mathbb{F}_2 A_5$ . Afin de démontrer que cette inclusion est stricte, il suffit de montrer que  $\omega \mathbb{F}_2 A_5$  n'est pas un idéal nilpotent. On peut y arriver par exemple en vérifiant, avec un logiciel de calcul formel, que les deux permutations  $w_1 = (1, 2, 3)$  et  $w_2 = (1, 2, 3, 4, 5)$  de  $A_5$  satisfont  $0 \neq (w_1 - w_2)^{20} = (w_1 - w_2)^{10}$ . En particulier,  $\omega \mathbb{F}_2 A_5$  contient un idempotent non-nul, ce qui montre qu'il n'est pas nilpotent. Par conséquent,  $J(\mathbb{F}_2 A_5)$  satisfait les deux inclusions strictes

$$0 \subsetneq J(\mathbb{F}_2 A_5) \subsetneq \omega \mathbb{F}_2 A_5.$$

Mais comme  $A_5$  est simple, 0 et  $\omega \mathbb{F}_2 A_5$  sont les seuls idéaux bilatères engendrés par des congruences.

## RÉFÉRENCES

- Aguiar, M. et Mahajan, S. (2017). *Topics in Hyperplane Arrangements*. Mathematical Surveys and Monographs. American Mathematical Society.
- Almeida, J., Margolis, S., Steinberg, B. et Volkov, M. (2009). Representation theory of finite semigroups, semigroup radicals and formal language theory. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 361(3), 1429–1461.
- Anderson, F. W. et Fuller, K. R. (1992). *Rings and Categories of Modules*, 2nd ed. Springer.
- Assem, I. (1997). *Algèbres et modules*. Les Presses de l'Université d'Ottawa.
- Ayyers, A., Schilling, A., Steinberg, B. et Thiéry, N. (2015). Markov chains, R-trivial monoids and representation theory. *Internat. J. Algebra Comput.*, 25, 169–231.
- Benson, D. J. (1998). *Representations and cohomology vol. 1*. Cambridge studies in advanced mathematics. Cambridge University Press.
- Bergeron, F., Bergeron, N., Howlett, R. B. et Taylor, D. E. (1992). A decomposition of the descent algebra of a finite Coxeter group. *J. Algebraic Combin.*, 1, 23–42.
- Bidigare, P., Hanlon, P. et Rockmore, D. (1999). A combinatorial description of the spectrum for the Tsetlin library and its generalization to hyperplane arrangements. *Duke Math. J.*, 99(1), 135–174.
- Björner, A., Ziegler, G. M., Sturmfels, B., Vergnas, M. L. et White, N. (1999). *Oriented Matroids*. Cambridge University Press.
- Bourbaki, N. (1958). *Algèbre*. Éléments de mathématiques. Hermann.
- Brown, K. S. (2000). Semigroups, rings, and Markov chains. *J. Theoret. Probab.*, 13(3).

- Brown, K. S. (2004). Semigroup and ring theoretical methods in probability. In *Representations of Finite Dimensional Algebras and Related Topics in Lie Theory and Geometry*, volume 40 de *Fields Inst. Commun.* 3–26. American Mathematical Society.
- Brown, K. S. et Diaconis, P. (1998). Random walks and hyperplane arrangements. *Ann. Probab.*, 26(4), 1813–1854.
- Cartan, H. et Eilenberg, S. (1956). *Homological Algebra*. Princeton mathematical series. Princeton University Press.
- Cartier, P. et Foata, D. (1969). *Problèmes combinatoires de commutation et réarrangements*. Lecture notes in mathematics. Springer.
- Chung, F. et Graham, R. (2012). Edge flipping in graphs. *Adv. in Appl. Math.*, 48, 37–63.
- Cooke, G. E. et Finney, R. L. (1967). *Homology of Cell Complexes*. Princeton University Press.
- Dorroh, J. L. (1932). Concerning adjunctions to algebras. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 38(2), 85–88.
- Eilenberg, S. et Tilson, B. (1974). *Automata, Languages, and Machines, vol. B*. New York Academic Press.
- Ganyushkin, O., Mazorchuk, V. et Steinberg, B. (2009). On the irreducible representations of a finite semigroup. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 3585–3592.
- Garsia, A. M. et Reutenauer, C. (1989). A decomposition of Solomon’s descent algebra. *Adv. Math.*, 77, 189–262.
- Gerstenhaber, M. et Schack, S. D. (1986). Simplicial cohomology is Hochschild cohomology. *J. Pure Appl. Algebra*, 30, 143–156.
- Grillet, P. A. (1995). *Semigroups an introduction to the structure theory*. Monographs and textbooks in pure and applied mathematics. Marcel Dekker.
- Herstein, I. N. (1968). *Noncommutative rings*. Carus mathematical monographs. The Mathematical Association of America.
- Horn, R. A. et Johnson, C. R. (1985). *Matrix analysis*. Cambridge University Press.
- Isaacs, I. M. (1994). *Algebra, A Graduate Course*. Brooks/Cole.

- Klein-Barmen, F. (1940). Über eine weitere verallgemeinerung des verbandsbegriffes. *Math. Z.*, 46, 472–480.
- Lallement, G. (1979). *Semigroups and combinatorial applications*. Pure and applied mathematics. John Wiley.
- Margolis, S., Saliola, F. et Steinberg, B. (2015a). Cell complexes, poset topology and the representation theory of algebras arising in algebraic combinatorics and discrete geometry. *ArXiv e-prints*.
- Margolis, S., Saliola, F. et Steinberg, B. (2015b). Combinatorial topology and the global dimension of algebras arising in combinatorics. *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)*, 17(12), 3037–3080.
- McMullen, P. (1971). On zonotope. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 159, 91–109.
- Okninski, J. (1991). *Semigroup algebras*. Monographs and textbooks in pure and applied mathematics. Marcel Dekker.
- Orlik, P. et Terao, H. (1992). *Arrangements of hyperplanes*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer.
- Riehl, E. (2016). *Category Theory in Context*. Aurora : Dover Modern Math Originals. Dover Publications.
- Rota, G.-C. (1964). On the foundations of combinatorial theory i. theory of möbius functions. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie*, 2, 340–368.
- Rotman, J. J. (2009). *An introduction to homological algebra* (2e ed. éd.). Universitext. Springer.
- Saliola, F. (2006). The quiver of the semigroup algebra of a left regular band. *Internat. J. Algebra Comput.*, 17.
- Saliola, F. (2009). The face semigroup algebra of a hyperplane arrangement. *Canad. J. Math.*, 61(4), 904–929.
- Saliola, F. (2012). Eigenvectors for a random walk on a left-regular band. *Adv. in Appl. Math.*, 48(2), 306–311.
- Schützenberger, M.-P. (1947). Sur certains treillis gauches. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 224, 776–778.
- Solomon, L. (1967). The Burnside algebra of a finite group. *J. Combin. Theory*, 2, 603–615.

- Stanley, R. P. (2012). *Enumerative combinatorics vol. 1* (2e éd.). Cambridge studies in advanced mathematics. Cambridge University Press.
- Steinberg, B. (2006). Möbius functions and semigroup representation theory. *J. Combin. Theory Ser. A*, 113(5), 866–881.
- Wedderburn, J. H. M. (1937). Note on algebras. *Ann. of Math. (2)*, 38(4), 854–856.
- Wisbauer, R. (1991). *Foundations of Module and Ring Theory*. Gordon and Breach Science Publishers.
- Ziegler, G. M. (1998). *Lectures on Polytopes*. Graduate Texts in Mathematics. Springer.