UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL

BASE CANONIQUE DES ALGÈBRES DE HECKE

MÉMOIRE

PRÉSENTÉ

COMME EXIGENCE PARTIELLE

DE LA MAÎTRISE EN MATHÉMATIQUES

PAR

AMIR GHOWIL

MAI 2018

REMERCIEMENTS

je ne peux pas mettre le point final à ce mémoire sans remercier mon directeur de recherche, Robert Bédard, Ph. D., professeur à l'université du Québec à Montréal, qui m'a proposé ce sujet important, qui m'a aidé à formuler ses étapes et qui m'a encadré avec beaucoup de patience.

De même, je n'oublie pas de remercier tous mes professeurs du département de combinatoire, qui ont répondu à toutes mes questions avec gentillesse et patience et m'ont aidé de manière indirecte à formuler les différentes parties de ma recherche.

Sûrement, je vais compléter mes recherches dans ce domaine, afin d'acquérir plus de connaissances.

J'ai passé un temps extraordinaire durant les recherches et la rédaction de mon mémoire grâce à vous.

TABLE DES MATIÈRES

RÉSUMÉ

Cette recherche discute l'algèbre de Hecke, et plus spécifiquement l'algèbre de Hecke associée aux groupes de réflexions, comme le groupe symétrique,par exemple. Lors de l'étude de ces algèbres, nous considérerons deux bases dont les éléments sont indexés par les permutations du groupe symétrique S_n : une base standard et une autre canonique. Les éléments de chacune de ces bases sont reliés entre eux par les polynômes de Kazhdan-Lusztig.
Le mémoire commence par l'introduction de la notion d'algèbre de Hecke. Il s'agit de l'algèbre des opérateurs d'entrelacement de la représentation induite de la représentation triviale du sous-groupe B des matrices triangulaires supérieures de $GL_n(\mathbb{K})$ à $GL_n(\mathbb{K})$.
Cette représentation induite peut être réalisée comme espace vectoriel complexe ayant une base indexée par les drapeaux complets de l'espace vectoriel $\mathbb{K}^n$. La représentation induite dans ce cas est la représentation par permutation sur ces drapeaux complets par l'action naturelle de $GL_n(\mathbb{K})$.
Le mémoire va étudier l'algèbre de Hecke associée au groupe symétrique S_n en définissant une involution i sur cette algèbre. Cette involution permet de définir algébriquement l'ordre de Bruhat, ainsi que des polynômes $R_{x,y}$ pour chaque paire de permutations (x, y).
Finalement, nous allons définir une nouvelle base $\{C_w \mid w \in S_n\}$ de l'algèbre de Hecke telle que chacun des C_w est invariant sous l'involution. Cette base est appelée la base de Kazhdan-Lusztig et elle permet de définir les polynômes de Kazhdan-Lusztig. Nous calculons ces polynômes pour les groupes S_n lorsque n est petit.

MOTS CLÉS : groupe de coxeter, algèbre de Hecke,groupe linéaire,un corps fini, drapeaux complets, ordre de Bruhat, base T, base C, polynôme R, involution, polynôme de Kazhdan-Lusztig.

INTRODUCTION

Ce mémoire met l'accent sur l'algèbre de Hecke associée au groupe général linéaire $GL_n(\mathbb{K})$. Ici $\mathbb{K}$ est un corps fini de caractéristique p et ayant q éléments. Lors de l'étude de ces algèbres, nous considérerons deux bases dont les éléments sont indexés par les permutations du groupe symétrique S_n : une base standard et une autre canonique. Les éléments de chacune de ces bases sont reliés entre eux par les polynômes de Kazhdan-Lusztig.

Le mémoire commence au chapitre 1 par l'introduction de la notion d'algèbre de Hecke. Il s'agit de l'algèbre des opérateurs d'entrelacement de la représentation induite de la représentation triviale du sous-groupe B des matrices triangulaires supérieures de $GL_n(\mathbb{K})$ à $GL_n(\mathbb{K})$.

Cette représentation induite peut être réalisée comme espace vectoriel complexe ayant une base indexée par les drapeaux complets de l'espace vectoriel $\mathbb{K}^n$. La représentation induite dans ce cas est la représentation par permutation sur ces drapeaux complets par l'action naturelle de $GL_n(\mathbb{K})$. Maintenant l'algèbre de Hecke est l'algèbre des opérateurs d'entrelacement de cette représentation et ceci nous mène directement à étudier l'action diagonale de $GL_n(\mathbb{K})$ sur les paires de drapeaux complets de $\mathbb{K}^n$. L'algèbre de Hecke a une base indexée par l'ensemble de ces orbites. Au chapitre 2, nous allons étudier ces orbites et montrer comment associer à chaque orbite : une permutation de S_n au moyen de la notion de position de drapeaux. Ainsi l'algèbre de Hecke aura une base $\{T_w \mid w \in S_n\}$ indexée par les permutations de S_n et il est possible de lui donner une présentation au moyen des permutations de S_n.

Nous allons poursuivre notre étude de l'algèbre de Hecke associée au groupe symétrique S_n en définissant une involution i sur cette algèbre. Ceci est le sujet du chapitre 3. Cette involution permet de définir algébriquement l'ordre de Bruhat, ainsi que des polynômes $R_{x,y}$ pour chaque paire de permutations (x, y).

Finalement au chapitre 4, nous allons définir une nouvelle base $\{C_w \mid w \in S_n\}$ de l'algèbre de Hecke telle que chacun des C_w est invariant sous l'involution i définie au chapitre 3. Cette base est appelée la base de Kazhdan-Lusztig et elle permet de définir les polynômes de Kazhdan-Lusztig. Nous calculons ces polynômes pour les groupes S_n lorsque n est petit.

Il est à noter que les démonstrations sont prises des deux références :

1- "Reflection Groups and Coxeter Groups", rédigée par HUMPHREYS, J. E. en 1992.

2-"On some geometric aspects of Bruhat orderings. I. A finer decomposition of Bruhat cells", rdígée par DEODHAR, V. V. en 1985.

CHAPITRE I

DÉFINITION DE L'ALGÈBRE DE HECKE

1.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous allons introduire la notion d'algèbre de Hecke. Nous commencerons par définir la notion de drapeau complet d'un espace vectoriel V et l'action du groupe linéaire $GL(V)$ sur l'espace des drapeaux complets. Une autre notion importante est la construction d'une représention induite pour le groupe $GL(V)$, où V est un espace vectoriel de dimension finie sur un corps fini. L'espace de cette représentation induite est un espace vectoriel complexe ayant une base indexée par les drapeaux complets de V . En utilisant cette représentation induite, nous définirons l'algèbre de Hecke.

1.2 Drapeaux et groupe linéaire

Définition 1.1. Soit un corps $\mathbb{K}$ et un espace vectoriel V sur $\mathbb{K}$ de dimension $\dim_{\mathbb{K}} V = n$. Un **drapeau complet** $\mathcal{F}$ de V est une suite de sous-espaces vectoriels de V :

$$\mathcal{F} : V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_n = V, \quad \text{où } \dim_{\mathbb{K}}(V_i) = i.$$

Nous noterons par $\mathfrak{F}(V)$: l 'ensemble de tous les drapeaux complets de V.

Exemple 1.1. Si V est un espace vectoriel de dimension $n = 3$, tout drapeau complet de V est de la forme $L \subset P \subset V$, où L est une droite vectorielle de V et P est un plan vectoriel de V.

Définition 1.2. Soit le groupe linéaire $G = GL(V)$ sur l'espace vectoriel V. Si $g \in G$ et $\mathcal{F} : V_1 \subset V_2 \subset ... \subset V_n = V \in \mathfrak{F}(V)$, $g \cdot \mathcal{F}$ désignera le drapeau complet

$$g \cdot \mathcal{F} : g(V_1) \subset g(V_2) \subset \cdots \subset g(V_i) \subset \cdots \subset g(V_n).$$

En effet, $g \cdot \mathcal{F}$ est un drapeau parce que $g(V_i)$ est un sous-espace vectoriel de dimension i pour tout $g \in G$ et tout i. Nous obtenons ainsi une fonction

$$\Psi : G \times \mathfrak{F}(V) \longrightarrow \mathfrak{F}(V), \quad (g, \mathcal{F}) \longmapsto g \cdot \mathcal{F}$$

et il est facile de vérifier que cette fonction Ψ est une action du groupe G sur $\mathfrak{F}(V)$, c'est-à-dire que

$$(g_1 g_2) \cdot \mathcal{F} = g_1 \cdot (g_2 \cdot \mathcal{F})$$

pour tout $g_1, g_2 \in G$ et $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}(V)$

Pour le reste de ce chapitre, $\mathbb{K}$ désignera un corps fini $\mathbb{F}_q$ ayant $q = p^e$ éléments, où p est un nombre premier, et V désignera un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{K}$.

Lemme 1.1. *Soit un espace vectoriel V sur le corps $\mathbb{K}$ de dimension $n \geq 1$.*

(a) *La cardinalité de $G = GL(V)$ est égale à*

$$|G| = (q^n - 1)(q^n - q) \ldots (q^n - q^{n-1}) = \prod_{i=0}^{n-1} (q^n - q^i)$$

(b) *La cardinalité de $\mathfrak{F}(V)$ est égale à*

$$|\mathfrak{F}(V)| = \frac{(q^n - 1)}{(q-1)} \frac{(q^{(n-1)} - 1)}{(q-1)} \cdots \frac{(q^{(n-i)} - 1)}{(q-1)} \cdots \frac{(q-1)}{(q-1)} = \prod_{i=1}^{n} \left[\frac{q^i - 1}{q - 1} \right]$$

Démonstration. (a) Il est bien connu que les éléments de G sont en correspondance biunivoque avec les bases de V. Ainsi la cardinalité de G est égale au nombre de bases de V. Il nous faut donc compter le nombre de bases $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ de V.

Il y a $(q^n - 1)$ choix pour le premier vecteur v_1 de la base, car ce vecteur v_1 ne peut pas être nul, c'est-à-dire $v_1 \neq 0$. Il y a $(q^n - q)$ choix pour le deuxième vecteur v_2 de la base, car ce vecteur v_2 ne peux pas être un multiple de v_1. Il y a $(q^n - q^2)$ choix pour le troisième vecteur v_3 de la base, car ce vecteur v_3 ne peut pas être un vecteur du plan engendré par les deux premiers vecteurs : v_1 et v_2 et ce plan contient q^2 vecteurs. Nous poursuivons ainsi. Il y a $(q^n - q^{(i-1)})$ choix pour le $i^{\text{ième}}$-vecteur v_i de la base, car ce vecteur v_i ne peut pas être un vecteur du sous-espace engendré par les $(i-1)$ premiers vecteurs : $v_1, v_2, \dots, v_{i-1}$. Donc la cardinalité de G est

$$|G| = (q^n - 1)(q^n - q)\dots(q^n - q^{n-1}) = \prod_{i=0}^{n-1}(q^n - q^i).$$

(b) Un élément de $\mathfrak{F}(V)$ est de la forme $V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_i \subset \cdots \subset V_n = V$. Nous pouvons partionner l'ensemble $\mathfrak{F}(V)$ en considérant les droites vectorielles de V. Ainsi

$$\mathfrak{F}(V) = \coprod_L \{V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_i \subset \cdots \subset V_n = V \in \mathfrak{F}(V) \mid V_1 = L\}$$

où L parcourt l'ensemble des droites vectorielles de V. Le sous-ensemble correspondant à la droite vectorielle L :

$$\{V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_i \subset \cdots \subset V_n = V \in \mathfrak{F}(V) \mid V_1 = L\}$$

est en bijection avec $\mathfrak{F}(V/L)$ en utilisant la fonction

$$\{V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_i \subset \cdots \subset V_n = V \in \mathfrak{F}(V) \mid V_1 = L\} \longrightarrow \mathfrak{F}(V/L)$$

définie par

$$V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_i \subset \cdots \subset V_n = V \longmapsto V_2/L \subset \cdots \subset V_i/L \subset \cdots \subset V_n/L = V/L.$$

Pour compléter la preuve, nous procédons par induction. Si $n = 1$, il y a un seul drapeau complet et la formule est vraie dans ce cas, car

$$\frac{(q-1)}{(q-1)} = 1.$$

Le nombre de droites vectorielles de V est $(q^n - 1)/(q-1)$. En effet, il y a $(q^n - 1)$ vecteurs non nuls dans V et, étant donné un de ces vecteurs v_1 non-nuls, nous obtenons une droite vectorielle $L = \mathbb{K}v_1$. Mais cette droite L est obtenue par $(q-1)$ vecteurs non-nuls distincts. Donc le nombre de droites vectorielles de V est $(q^n - 1)/(q-1)$. Par récurrence, nous connaissons la cardinalité de $\mathfrak{F}(V/L)$, parce que V/L est un espace vectoriel de dimension $(n-1)$ sur $\mathbb{K}$. Ainsi

$$|\mathfrak{F}(V/L)| = \frac{(q^{(n-1)} - 1)}{(q-1)} \frac{(q^{(n-2)} - 1)}{(q-1)} \cdots \frac{(q^{(n-i)} - 1)}{(q-1)} \cdots \frac{(q-1)}{(q-1)}$$

et nous obtenons

$$|\mathfrak{F}(V)| = \frac{(q^n - 1)}{(q-1)} \frac{(q^{(n-1)} - 1)}{(q-1)} \frac{(q^{(n-2)} - 1)}{(q-1)} \cdots \frac{(q^{(n-i)} - 1)}{(q-1)} \cdots \frac{(q-1)}{(q-1)}.$$

□

1.3 Représentation induite

Nous allons maintenant décrire une représentation complexe de $GL(V)$. Il s'agit d'une représentation induite.

Notation 1.1. Soit l'espace vectoriel $\mathbb{I}$ sur le corps $\mathbb{C}$ ayant une base

$$\mathcal{B} = \{e_{\mathcal{F}} \mid \mathcal{F} \in \mathfrak{F}(V)\}$$

indexée par les éléments de $\mathfrak{F}(V)$. Ainsi la dimension de $\mathbb{I}$ est égale à

$$= \prod_{i=1}^{n} \left[\frac{q^i - 1}{q-1}\right].$$

Pour tout $g \in GL(V)$, nous noterons par $\rho(g) : \mathbb{I} \longrightarrow \mathbb{I}$: l'unique transformation linéaire définie sur la base $\mathcal{B}$ est $\rho(g)(e_{\mathcal{F}}) = e_{g \cdot \mathcal{F}}$ pour tout $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}(V)$. Il est facile de vérifier que $\rho(g)$ est une transformation linéaire inversible pour tout $g \in GL(V)$ et la fonction

$$\rho : GL(V) \longrightarrow GL(\mathbb{I}) \quad \text{définie par } g \longmapsto \rho(g)$$

est un homomorphisme de groupes. Ici nous utilisons le fait que Ψ est une action de groupes. $\mathbb{I}$ est l'espace de la réprésentation ρ.

Exemple 1.2. Soit le corps fini $\mathbb{K} = \mathbb{F}_5$ et l'espace vectoriel $V = \mathbb{K}^2$ de dimension $n = 2$. Indexons les droites vectorielles de V de la façon suivante :

$$L_i = \begin{cases} \mathbb{F}_5 \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}, & \text{si } i \in \mathbb{F}_5 \\ \\ \mathbb{F}_5 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} & \text{si } i = \infty \end{cases}$$

Dans ce cas, la cardinalité de de $\mathfrak{F}(V)$ est $|\mathfrak{F}(V)| = 6$ et un drapeau complet de $\mathfrak{F}(V)$ est

$$\mathcal{F}_i : L_i \subset V, \qquad \text{où } i \in \mathbb{F}_5 \cup \{\infty\},$$

Si $g = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, nous pouvons facilement déterminer l'action de g sur $\mathfrak{F}(V)$. Nous obtenons

$$\begin{aligned} g \cdot \mathcal{F}_0 &= \mathcal{F}_0, & g \cdot \mathcal{F}_1 &= \mathcal{F}_3, & g \cdot \mathcal{F}_2 &= \mathcal{F}_\infty, \\ g \cdot \mathcal{F}_3 &= \mathcal{F}_1, & g \cdot \mathcal{F}_4 &= \mathcal{F}_4, & g \cdot \mathcal{F}_\infty &= \mathcal{F}_2. \end{aligned}$$

Ainsi, la matrice $[\rho(g)]_{\mathcal{B}}$ de la transformation linéaire $\rho(g) : \mathbb{I} \longrightarrow \mathbb{I}$ relativement à la base $\mathcal{B} = \{e_{\mathcal{F}} \mid \mathcal{F} \in \mathfrak{F}(V)\}$ est la matrice de permutation

$$[\rho(g)]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

1.4 Algèbre de Hecke

Nous allons maintenant définir l'objet de ce mémoire : l'algèbre de Hecke de $GL(V)$.

Définition 1.3. Soit un nombre naturel $n \geq 1$. **L'algèbre de Hecke $\mathcal{H}_n$** est l'ensemble des transformations linéaires $T : \mathbb{I} \longrightarrow \mathbb{I}$ sur $\mathbb{C}$ telles que $T\rho(g) = \rho(g)T$ pour tout $g \in GL(V)$, c'est-à-dire que

$$\mathcal{H}_n = End_G(\mathbb{I}) = \{T : \mathbb{I} \longrightarrow \mathbb{I} \in End(\mathbb{I}) \mid T\rho(g) = \rho(g)T, \quad \forall g \in GL(V)\}$$

Nous disons aussi qu'une transformation linéaire $T \in \mathcal{H}_n$ est un **opérateur d'entrelacements**.

Vérifions qu'il s'agit bien d'une algèbre avec la multiplication de transformations linéaires. Essentiellement il faut noter le lemme suivant.

Lemme 1.2. *Soit un nombre naturel $n \geq 1$. Si T_1, $T_2 \in \mathcal{H}_n$ et $\alpha \in \mathbb{C}$:*

$$T_1 + T_2, \quad \alpha T_1, \quad T_1 T_2 \quad \textit{sont des transformations linéaires} \in \mathcal{H}_n.$$

Démonstration. Il est bien connu que T_1+T_2, αT_1 et T_1T_2 sont des transformations linéaires. Il suffit d'étudier leurs relations avec $\rho(g)$ pour tout $g \in GL(V)$. Nous avons

$$(T_1 + T_2)\rho(g) = (T_1\rho(g)) + (T_2\rho(g)) = (\rho(g)T_1) + (\rho(g)T_2) = \rho(g)(T_1 + T_2)$$

pour tout $g \in GL(V)$, car T_1, $T_2 \in \mathcal{H}_n$.

$$(\alpha T_1)\rho(g) = \alpha(T_1\rho(g)) = \alpha(\rho(g)T_1) = \rho(g)(\alpha T_1)$$

pour tout $g \in GL(V)$, car $T_1 \in \mathcal{H}_n$.

$$(T_1T_2)\rho(g) = T_1(T_2\rho(g)) = T_1(\rho(g)T_2) = (T_1\rho(g))T_2 = (\rho(g)T_1)T_2 = \rho(g)(T_1T_2)$$

pour tout $g \in GL(V)$, car T_1, $T_2 \in \mathcal{H}_n$.

□

Nous allons maintenant décrire l'algèbre de Hecke $\mathcal{H}_2$ dans la cas où $n = 2$.

Proposition 1.1. *Soit les deux transformations linéaires suivantes sur l'espace complexe* $\mathbb{I}$ *:*

$$I : \mathbb{I} \longrightarrow \mathbb{I} \quad et \quad S : \mathbb{I} \longrightarrow \mathbb{I}$$

définies sur la base $\mathcal{B} = \{e_{\mathcal{F}} \mid \mathcal{F} \in \mathfrak{F}(V)\}$ *par*

$$I(e_{\mathcal{F}}) = e_{\mathcal{F}} \quad et \quad S(e_{\mathcal{F}}) = \sum_{\mathcal{F}'} e_{\mathcal{F}'}$$

où, dans cette dernière somme, les drapeaux parcourus $\mathcal{F}'$ *sont tous les drapeaux de* $\mathfrak{F}(V)$ *sauf* $\mathcal{F}$*, dans ce cas :*

(a) *Les deux transformations linéaires : I et S appartiennent à $\mathcal{H}_2$*

(b) *$\mathcal{H}_2$ est une algèbre de dimension 2 sur $\mathbb{C}$ pour laquelle $\{I, S\}$ est une base, c'est-à-dire que tout élément de $\mathcal{H}_2$ est de la forme $\alpha I + \beta S$, où α et β sont des nombres complexes uniques.*

(c) *S satisfait la relation suivante : $S^2 = qI + (q-1)S$. Ici rappelons que $q = |\mathbb{K}|$.*

Démonstration. (a) Le cas de la transformation linéaire I est évident, car I est la transformation identité. Il suffit seulement de montrer que $\rho(g)S = S\rho(g)$ pour tout $g \in GL(V)$. Nous vérifierons ceci sur la base $\mathcal{B}$.

$$S\rho(g)(e_{\mathcal{F}}) = S(e_{g \cdot \mathcal{F}}) = \sum_{\mathcal{F}'} e_{\mathcal{F}'}$$

où, dans cette dernière somme, $\mathcal{F}'$ parcourt l'ensemble des drapeaux complets $\neq g \cdot \mathcal{F}$.

Pour tout drapeau complet $\mathcal{F}'$ in $\mathfrak{F}(V)$, il existe un drapeau complet $\mathcal{F}'' \in \mathfrak{F}(V)$ telle que $\mathcal{F}' = g \cdot \mathcal{F}''$. En effet, il suffit de prendre $\mathcal{F}'' = g^{-1} \cdot \mathcal{F}'$. Donc

$$\begin{aligned}\{\mathcal{F}' \in \mathfrak{F}(V) \mid \mathcal{F}' \neq g \cdot \mathcal{F}\} &= \{g \cdot \mathcal{F}'' \in \mathfrak{F}(V) \mid g \cdot \mathcal{F}'' \neq g \cdot \mathcal{F}\} \\ &= \{g \cdot \mathcal{F}'' \in \mathfrak{F}(V) \mid \mathcal{F}'' \neq \mathcal{F}\}\end{aligned}$$

De ce qui précède

$$S\rho(g)(e_{\mathcal{F}}) = \sum_{\mathcal{F}''} e_{g \cdot \mathcal{F}''} = \sum_{\mathcal{F}''} \rho(g) e_{\mathcal{F}''} = \rho(g) S(e_{\mathcal{F}})$$

où, dans cette dernière somme, $\mathcal{F}''$ parcourt l'ensemble des drapeaux complets $\neq \mathcal{F}$. Donc $S \in \mathcal{H}_2$.

(b) Soit $T \in \mathcal{H}_2$. Nous voulons montrer qu'il existe des nombres complexes α, β tels que $T = \alpha I + \beta S$. Pour tout vecteur $e_{\mathcal{F}} \in \mathcal{B}$, nous noterons les entrées de la matrice $[T]_{\mathcal{B}}$ de T relativement à la base $\mathcal{B}$ par $c_{\mathcal{F}',\mathcal{F}} \in \mathbb{C}$, c'est-à-dire que

$$T(e_{\mathcal{F}}) = \sum_{\mathcal{F}' \in \mathfrak{F}(V)} c_{\mathcal{F}',\mathcal{F}}\, e_{\mathcal{F}'}$$

où $c_{\mathcal{F}',\mathcal{F}} \in \mathbb{C}$. Du fait que $T\rho(g) = \rho(g)T$ pour tout $g \in GL(V)$, nous pouvons décrire des relations pour les entrées de $[T]_{\mathcal{B}}$.

$$(T\rho(g))(e_{\mathcal{F}}) = T(e_{g \cdot \mathcal{F}}) = \sum_{\mathcal{F}' \in \mathfrak{F}(V)} c_{\mathcal{F}',g \cdot \mathcal{F}}\, e_{\mathcal{F}'}$$

et

$$(\rho(g)T)(e_{\mathcal{F}}) = \rho(g) \sum_{\mathcal{F}'' \in \mathfrak{F}(V)} c_{\mathcal{F}'',\mathcal{F}}\, e_{\mathcal{F}''} = \sum_{\mathcal{F}'' \in \mathfrak{F}(V)} c_{\mathcal{F}'',\mathcal{F}}\, e_{g \cdot \mathcal{F}''}$$

En comparant les entrées pour le vecteur $e_{g \cdot \mathcal{F}''}$ de $\mathcal{B}$ dans ces deux sommes, nous obtenons $c_{\mathcal{F}'',\mathcal{F}} = c_{g \cdot \mathcal{F}'', g \cdot \mathcal{F}}$ pour tout $g \in GL(V)$ et toute paire de drapeaux $\mathcal{F}'', \mathcal{F} \in \mathfrak{F}(V)$. En d'autres mots, si nous considérons l'action diagonale de $GL(V)$ sur $\mathfrak{F}(V) \times \mathfrak{F}(V)$ définie par $g \cdot (\mathcal{F}'', \mathcal{F}) = (g \cdot \mathcal{F}'', g \cdot \mathcal{F})$, la fonction suivante

$$\Gamma : \mathfrak{F}(V) \times \mathfrak{F}(V) \longrightarrow \mathbb{C} \quad \text{définie par} \quad (\mathcal{F}'', \mathcal{F}) \longmapsto c_{\mathcal{F}'',\mathcal{F}}$$

est constant sur les orbites de cette action.

Cette dernière action a exactement deux orbites :

$$\mathcal{O}_0 = \{(\mathcal{F}'', \mathcal{F}) \in \mathfrak{F}(V) \times \mathfrak{F}(V) \mid \mathcal{F}'' = \mathcal{F}\}$$

et

$$\mathcal{O}_1 = \{(\mathcal{F}'', \mathcal{F}) \in \mathfrak{F}(V) \times \mathfrak{F}(V) \mid \mathcal{F}'' \neq \mathcal{F}\}$$

lorsque la dimension de V est égale à 2. En effet, il est évident que ces deux sous-ensembles $\mathcal{O}_0$ et $\mathcal{O}_1$ sont stables par l'action de $GL(V)$. Prenons maintenant $(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_1)$, $(\mathcal{F}_2, \mathcal{F}_2) \in \mathcal{O}_0$. Dans ce cas, $\mathcal{F}_1 : L_1 \subset V$ et $\mathcal{F}_2 : L_2 \subset V$, où L_1 et L_2 sont des droites vectorielles de V. Il est bien connu qu'il existe une transformation linéaire $g \in GL(V)$ telle que $g(L_1) = L_2$. Il suffit de prendre une base $\mathcal{B}_1$ de V dont le premier vecteur appartient à L_1 et une seconde base $\mathcal{B}_2$ de V dont le premier vecteur appartient à L_2. Ensuite il suffit de prendre une transformation linéaire g transportant la première base $\mathcal{B}_1$ sur la seconde $\mathcal{B}_2$. Pour cette transformation g, nous avons $g \cdot (\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_1) = (\mathcal{F}_2, \mathcal{F}_2)$ et ceci montre que $\mathcal{O}_0$ est une orbite.

Pour $\mathcal{O}_1$, prenons maintenant $(\mathcal{F}_1'', \mathcal{F}_1)$, $(\mathcal{F}_2'', \mathcal{F}_2) \in \mathcal{O}_1$. Donc, $\mathcal{F}_1'' : L_1'' \subset V$, $\mathcal{F}_1 : L_1 \subset V$, $\mathcal{F}_2'' : L_2'' \subset V$ et $\mathcal{F}_2 : L_2 \subset V$, où L_1'', L_1, L_2'' et L_2 sont des droites vectorielles de V. De plus comme $(\mathcal{F}_1'', \mathcal{F}_1)$, $(\mathcal{F}_2'', \mathcal{F}_2) \in \mathcal{O}_1$, alors $L_1'' \neq L_1$

et $L_2'' \neq L_2$. Il est bien connu qu'il existe une transformation linéaire $g \in GL(V)$ telle que $g(L_1'') = L_2''$ et $g(L_1) = L_2$. Il suffit de prendre une base $\mathcal{B}_1$ de V dont le premier vecteur appartient à L_1'' et le second vecteur appartient à L_1 et une seconde base $\mathcal{B}_2$ de V dont le premier vecteur appartient à L_2'' et le second vecteur à L_2. Ceci est possible parce que $L_1'' \neq L_1$ et $L_2'' \neq L_2$. Ensuite il suffit de prendre une transformation linéaire g transportant la première base $\mathcal{B}_1$ sur la seconde $\mathcal{B}_2$. Pour cette transformation g, nous avons $g \cdot (\mathcal{F}_1'', \mathcal{F}_1) = (\mathcal{F}_2'', \mathcal{F}_2)$ et ceci montre que $\mathcal{O}_1$ est une orbite.

Posons $\alpha = c_{\mathcal{F}',\mathcal{F}}$ si $(\mathcal{F}', \mathcal{F}) \in \mathcal{O}_0$ et $\beta = c_{\mathcal{F}',\mathcal{F}}$ si $(\mathcal{F}', \mathcal{F}) \in \mathcal{O}_1$. Ceci est bien défini parce que Γ est constante sur les orbites de $GL(V)$. Pour tout $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}(V)$,

$$T(e_{\mathcal{F}}) = \sum_{\mathcal{F}' \in \mathfrak{F}(V)} c_{\mathcal{F}',\mathcal{F}}\, e_{\mathcal{F}'} = \alpha \sum_{\substack{\mathcal{F}' \in \mathfrak{F}(V) \\ (\mathcal{F}',\mathcal{F}) \in \mathcal{O}_0}} e_{\mathcal{F}'} + \beta \sum_{\substack{\mathcal{F}' \in \mathfrak{F}(V) \\ (\mathcal{F}',\mathcal{F}) \in \mathcal{O}_1}} e_{\mathcal{F}'} = \alpha I(e_{\mathcal{F}}) + \beta S(e_{\mathcal{F}})$$

à cause de notre description ci-dessus des orbites. Donc $T = \alpha I + \beta S$.

Comme $n = 2$ et $S \neq \gamma I$ pour tout $\gamma \in \mathbb{C}$, alors I et S sont des transformations linéaires linéairement indépendantes. De ceci, nous pouvons conclure que les nombres complexes α et β sont uniques.

(c) Rappelons que la cardinalité de $\mathfrak{F}(V)$ est $(q+1)$. Nous avons

$$S^2(e_{\mathcal{F}}) = S\left(\sum_{\substack{\mathcal{F}' \in \mathfrak{F}(V) \\ \mathcal{F}' \neq \mathcal{F}}} e_{\mathcal{F}'}\right) = \left(\sum_{\substack{\mathcal{F}' \in \mathfrak{F}(V) \\ \mathcal{F}' \neq \mathcal{F}}} S(e_{\mathcal{F}'})\right) = \sum_{\substack{\mathcal{F}' \in \mathfrak{F}(V) \\ \mathcal{F}' \neq \mathcal{F}}} \left(\sum_{\substack{\mathcal{F}'' \in \mathfrak{F}(V) \\ \mathcal{F}'' \neq \mathcal{F}'}} e_{\mathcal{F}''}\right).$$

Dans la somme intérieure ci-dessus, le drapeau $\mathcal{F}$ apparait q fois, une fois pour chacun des drapeaux $\mathcal{F}' \neq \mathcal{F}$ et le drapeau $\mathcal{F}''' \neq \mathcal{F}$ apparait $(q-1)$ fois, une fois pour chacun des drapeaux $\mathcal{F}' \neq \mathcal{F}, \mathcal{F}'''$. Donc

$$S^2(e_{\mathcal{F}}) = qe_{\mathcal{F}} + (q-1)\left(\sum_{\substack{\mathcal{F}' \in \mathfrak{F}(V) \\ \mathcal{F}' \neq \mathcal{F}}} e_{\mathcal{F}'}\right) = qI(e_{\mathcal{F}}) + (q-1)S(e_{\mathcal{F}})$$

et nous obtenons bien la relation voulue $S^2 = qI + (q-1)S$.

$\square$

Nous pouvons décrire une base de $\mathcal{H}_n$ lorsque $n \geq 2$ en procédant de façon analogue à ce que nous avons fait pour $n = 2$.

Notation 1.2. Si $\mathcal{O}$ est une orbite de $GL(V)$ pour l'action diagonale de $GL(V)$ sur $\mathfrak{F}(V) \times \mathfrak{F}(V)$ définie par $g \cdot (\mathcal{F}'', \mathcal{F}) = (g \cdot \mathcal{F}'', g \cdot \mathcal{F})$, notons par $T_{\mathcal{O}} : \mathbb{I} \longrightarrow \mathbb{I}$: la transformation linéaire sur $\mathbb{I}$ définie sur la base $\mathcal{B} = \{e_{\mathcal{F}} \mid \mathcal{F} \in \mathfrak{F}(V)\}$ par

$$T_{\mathcal{O}}(e_{\mathcal{F}}) = \sum_{\mathcal{F}'} e_{\mathcal{F}'}$$

où, dans cette dernière somme, $\mathcal{F}'$ parcourt l'ensemble des drapeaux de $\mathfrak{F}(V)$ tel que $(\mathcal{F}', \mathcal{F}) \in \mathcal{O}$. Nous noterons par $\mathfrak{O}$: l'ensemble des orbites de $GL(V)$ sur $(\mathfrak{F}(V) \times \mathfrak{F}(V))$.

Proposition 1.2. *Avec les notations ci-dessus, nous avons*

(a) *Pour toute orbite $\mathcal{O} \in \mathfrak{O}$, $T_{\mathcal{O}} \in \mathcal{H}_n$.*

(b) *$\mathcal{H}_n$ est une algèbre de dimension $|\mathfrak{O}|$ sur $\mathbb{C}$ et $\{T_{\mathcal{O}} \mid \mathcal{O} \in \mathfrak{O}\}$ est une base de l'algèbre $\mathcal{H}_n$, c'est-à-dire que tout élément T de $\mathcal{H}_n$ est de la forme*

$$\sum_{\mathcal{O}} \alpha_{\mathcal{O}}\, T_{\mathcal{O}}$$

où, dans cette somme, $\mathcal{O}$ parcourt l'ensemble des orbites de $\mathfrak{O}$ et les nombres complexes $\alpha_{\mathcal{O}}$ sont uniques.

(c) *Soit un entier i, $1 \leq i < n$. L'ensemble $\mathcal{O}(i)$ des paires de drapeaux $(\mathcal{F}', \mathcal{F}) \in \mathfrak{F}(V)$ telles que*

$$\mathcal{F}' : V_1' \subset V_2' \subset \cdots \subset V_i' \subset \cdots \subset V_{n-1}' \subset V_n' = V,$$

$$\mathcal{F} : V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_i \subset \cdots \subset V_{n-1} \subset V_n = V$$

et $V'_j = V_j$ *pour tout* $1 \leq j < n$, $j \neq i$ *et* $V'_i \neq V_i$, *est une orbite de* $GL(V)$ *sur* $(\mathfrak{F}(V) \times \mathfrak{F}(V))$, *c'est-à-dire que* $\mathcal{O}(i) \in \mathfrak{O}$ *et nous avons que*

$$T^2_{\mathcal{O}(i)} = qI + (q-1)T_{\mathcal{O}(i)}$$

où $I : \mathbb{I} \longrightarrow \mathbb{I}$ *est la transformation linéaire identité.*

Démonstration. (a) Il sufffit seulement de montrer que $\rho(g)T_{\mathcal{O}} = T_{\mathcal{O}}\rho(g)$ pour tout $g \in GL(V)$ et $\mathcal{O} \in \mathfrak{O}$. Nous vérifierons ceci sur la base $\mathcal{B}$.

$$(T_{\mathcal{O}}\ \rho(g))(e_{\mathcal{F}}) = T_{\mathcal{O}}(e_{g \cdot \mathcal{F}}) = \sum_{\mathcal{F}'} e_{\mathcal{F}'}$$

où, dans cette dernière somme, $\mathcal{F}'$ parcourt l'ensemble des drapeaux complets tels que $(\mathcal{F}', g \cdot \mathcal{F}) \in \mathcal{O}$.

Pour tout drapeau complet $\mathcal{F}'$ in $\mathfrak{F}(V)$, il existe un drapeau complet $\mathcal{F}'' \in \mathfrak{F}(V)$ telle que $\mathcal{F}' = g \cdot \mathcal{F}''$. En effet, il suffit de prendre $\mathcal{F}'' = g^{-1} \cdot \mathcal{F}'$. Donc

$$\begin{aligned}\{\mathcal{F}' \in \mathfrak{F}(V) \mid (\mathcal{F}', g \cdot \mathcal{F}) \in \mathcal{O}\} &= \{g \cdot \mathcal{F}'' \in \mathfrak{F}(V) \mid (g \cdot \mathcal{F}'', g \cdot \mathcal{F}) \in \mathcal{O}\} \\ &= \{g \cdot \mathcal{F}'' \in \mathfrak{F}(V) \mid (\mathcal{F}'', \mathcal{F}) \in \mathcal{O}\}\end{aligned}$$

De ce qui précède

$$(T_{\mathcal{O}}\rho(g))(e_{\mathcal{F}}) = \sum_{\mathcal{F}''} e_{g \cdot \mathcal{F}''} = \sum_{\mathcal{F}''} \rho(g) e_{\mathcal{F}''} = \rho(g) T_{\mathcal{O}}(e_{\mathcal{F}})$$

où, dans ces dernières sommes, $\mathcal{F}''$ parcourt l'ensemble des drapeaux complets tels que $(\mathcal{F}'', \mathcal{F}) \in \mathcal{O}$. Donc $T_{\mathcal{O}} \in \mathcal{H}_n$.

(b) Soit une transformation linéaire $T : \mathbb{I} \longrightarrow \mathbb{I}$ appartenant à $\mathcal{H}_n$. Écrivons

$$T(e_{\mathcal{F}}) = \sum_{\mathcal{F}' \in \mathfrak{F}(V)} c_{\mathcal{F}', \mathcal{F}}\ e_{\mathcal{F}'}$$

où $c_{\mathcal{F}', \mathcal{F}} \in \mathbb{C}$. Du fait que $T\rho(g) = \rho(g)T$ pour tout $g \in GL(V)$, nous obtenons comme dans la preuve de (b) de la proposition 1.1 que $c_{\mathcal{F}'', \mathcal{F}} = c_{g \cdot \mathcal{F}'', g \cdot \mathcal{F}}$ pour tout $g \in GL(V)$ et toute paire de drapeaux $\mathcal{F}'', \mathcal{F} \in \mathfrak{F}(V)$. En d'autres mots, la fonction suivante

$$\Gamma : \mathfrak{F}(V) \times \mathfrak{F}(V) \longrightarrow \mathbb{C} \quad \text{définie par} \quad (\mathcal{F}'', \mathcal{F}) \longmapsto c_{\mathcal{F}'',\mathcal{F}}$$

est constant sur les orbites $\mathcal{O} \in \mathfrak{O}$.

Posons $\alpha_{\mathcal{O}} = c_{\mathcal{F}',\mathcal{F}}$ si $(\mathcal{F}', \mathcal{F}) \in \mathcal{O}$. Ceci est bien défini par notre observation à propos de Γ. Pour tout $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}(V)$,

$$T(e_{\mathcal{F}}) = \sum_{\mathcal{F}' \in \mathfrak{F}(V)} c_{\mathcal{F}',\mathcal{F}}\, e_{\mathcal{F}'} = \sum_{\mathcal{O} \in \mathfrak{O}} \sum_{\substack{\mathcal{F}' \in \mathfrak{F}(V) \\ (\mathcal{F}',\mathcal{F}) \in \mathcal{O}}} c_{\mathcal{F}',\mathcal{F}}\, e_{\mathcal{F}'} = \sum_{\mathcal{O} \in \mathfrak{O}} \alpha_{\mathcal{O}} \sum_{\substack{\mathcal{F}' \in \mathfrak{F}(V) \\ (\mathcal{F}',\mathcal{F}) \in \mathcal{O}}} e_{\mathcal{F}'}.$$

Donc $T = \sum_{\mathcal{O}} \alpha_{\mathcal{O}}\, T_{\mathcal{O}}$.

Il nous reste à vérifier que l'ensemble des transformations linéaires $T_{\mathcal{O}}$, où $\mathcal{O} \in \mathfrak{O}$, est linéairement indépendant. Supposons que $\sum_{\mathcal{O} \in \mathfrak{O}} \alpha_{\mathcal{O}}\, T_{\mathcal{O}} = 0$, nous voulons montrer que $\alpha_{\mathcal{O}} = 0$ pour toute orbite $\mathcal{O} \in \mathfrak{O}$. Soit une orbite $\mathcal{O}_1 \in \mathfrak{O}$ et considérons deux drapeaux $\mathcal{F}', \mathcal{F} \in \mathfrak{F}(V)$ tels que $(\mathcal{F}', \mathcal{F}) \in \mathcal{O}_1$ et calculons la composante $c_{\mathcal{F}',\mathcal{F}}$ au vecteur de base $e_{\mathcal{F}'}$ de $\sum_{\mathcal{O} \in \mathfrak{O}} \alpha_{\mathcal{O}} T_{\mathcal{O}}(e_{\mathcal{F}})$. Comme $\sum_{\mathcal{O} \in \mathfrak{O}} \alpha_{\mathcal{O}} T_{\mathcal{O}} = 0$, nous avons que cette composante est $c_{\mathcal{F}',\mathcal{F}} = 0$. Mais aussi parce que

$$\sum_{\mathcal{O} \in \mathfrak{O}} \alpha_{\mathcal{O}}\, T_{\mathcal{O}}(e_{\mathcal{F}}) = \sum_{\mathcal{O} \in \mathfrak{O}} \alpha_{\mathcal{O}} \left(\sum_{\substack{\mathcal{F}'' \in \mathfrak{F}(V) \\ (\mathcal{F}'',\mathcal{F}) \in \mathcal{O}}} e_{\mathcal{F}''} \right) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \alpha_{\mathcal{O}_1} = c_{\mathcal{F}',\mathcal{F}} = 0,$$

car $(\mathcal{F}', \mathcal{F})$ appartient seulement à l'orbite $\mathcal{O}_1$. Nous obtenons que $\alpha_{\mathcal{O}_1} = 0$ pour tout $\mathcal{O}_1 \in \mathfrak{O}$ et l'ensemble des transformations linéaires $T_{\mathcal{O}}$, où $\mathcal{O} \in \mathfrak{O}$, est linéairement indépendant.

(c) Pour montrer que $\mathcal{O}(i)$ est une orbite, nous procédons comme nous l'avons fait à la proposition 1.1. Il est facile de voir que $\mathcal{O}(i)$ est stable pour l'action de $GL(V)$. En effet, si nous considérons une paire de drapeaux $(\mathcal{F}', \mathcal{F}) \in \mathcal{O}(i)$ telles que

$$\mathcal{F}' : V_1' \subset V_2' \subset \cdots \subset V_i' \subset \cdots \subset V_{n-1}' \subset V_n' = V,$$

$$\mathcal{F} : V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_i \subset \cdots \subset V_{n-1} \subset V_n = V$$

et $V_j' = V_j$ pour tout $1 \leq j < n$, $j \neq i$ et $V_i' \neq V_i$, et si $g \in GL(V)$, $g \cdot (\mathcal{F}', \mathcal{F}) = (g \cdot \mathcal{F}', g \cdot \mathcal{F})$ sera une paire de drapeaux telle que

$$g \cdot \mathcal{F}' : g(V_1') \subset g(V_2') \subset \cdots \subset g(V_i') \subset \cdots \subset g(V_{n-1}') \subset V_n' = V,$$

$$g \cdot \mathcal{F} : g(V_1) \subset g(V_2) \subset \cdots \subset g(V_i) \subset \cdots \subset g(V_{n-1}) \subset V_n = V$$

et $g(V_j') = g(V_j)$ pour tout $1 \leq j < n$, $j \neq i$ et $g(V_i') \neq g(V_i)$. Ceci signifie que $g \cdot (\mathcal{F}', \mathcal{F}) \in \mathcal{O}(i)$.

Soit maintenant deux paires de drapeaux $(\mathcal{F}_1', \mathcal{F}_1), (\mathcal{F}_2', \mathcal{F}_2) \in \mathcal{O}(i)$ où

$$\mathcal{F}_1' : V_1' \subset V_2' \subset \cdots \subset V_i' \subset \cdots \subset V_{n-1}' \subset V_n' = V,$$

$$\mathcal{F}_1 : V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_i \subset \cdots \subset V_{n-1} \subset V_n = V$$

et $V_j' = V_j$ pour tout $1 \leq j < n$, $j \neq i$ et $V_i' \neq V_i$, ainsi que

$$\mathcal{F}_2' : U_1' \subset U_2' \subset \cdots \subset U_i' \subset \cdots \subset U_{n-1}' \subset U_n' = V,$$

$$\mathcal{F}_2 : U_1 \subset U_2 \subset \cdots \subset U_i \subset \cdots \subset U_{n-1} \subset U_n = V$$

et $U_j' = U_j$ pour tout $1 \leq j < n$, $j \neq i$ et $U_i' \neq U_i$. Nous avons facilement que $V_i' \cap V_i = V_{i-1}$, $V_i' + V_i = V_{i+1}' = V_{i+1}$, $U_i' \cap U_i = U_{i-1}$ et $U_i' + U_i = U_{i+1}' = U_{i+1}$. Si $i = 1$, nous notons $V_0 = \{0\}$ et $U_0 = \{0\}$. De cette observation, nous pouvons maintenant conclure qu'il existe une base $\mathcal{B}_1$ de V telle que

$$\mathcal{B}_1 = \{v_1, v_2, \ldots, v_{i-1}, v_i', v_i, v_{i+2}, \ldots, v_n\}$$

où $\{v_1, v_2, \ldots, v_j\}$ est une base de $V_j' = V_j$ pour $1 \leq j < i$, $\{v_1, v_2, \ldots, v_{i-1}, v_i'\}$ est une base de V_i', $\{v_1, v_2, \ldots, v_{i-1}, v_i\}$ est une base de V_i, $\{v_1, v_2, \ldots, v_{i-1}, v_i', v_i\}$ est une base de V_{i+1} et $\{v_1, v_2, \ldots, v_{i-1}, v'_i, v_i, \ldots, v_j\}$ est une base de $V'_j = V_j$ pour $i+1 < j \leq n$. Pour la même raison, il existe une base $\mathcal{B}_2$ de V telle que

$$\mathcal{B}_2 = \{u_1, u_2, \ldots, u_{i-1}, u'_i, u_i, u_{i+2}, \ldots, u_n\}$$

où $\{u_1, u_2, \ldots, u_j\}$ est une base de $U'_j = U_j$ pour $1 \leq j < i$, $\{u_1, u_2, \ldots, u_{i-1}, u'_i\}$ est une base de U'_i, $\{u_1, u_2, \ldots, u_{i-1}, u_i\}$ est une base de U_i, $\{u_1, u_2, \ldots, u_{i-1}, u'_i, u_i\}$ est une base de U_{i+1} et $\{u_1, u_2, \ldots, u_{i-1}, u'_i, u_i, \ldots, u_j\}$ est une base de $U'_j = U_j$ pour $i+1 < j \leq n$. Considérons l'unique transformation linéaire $g : V \longrightarrow V$ définie sur les bases par

$$g(v_j) = u_j \quad \text{si } 1 \leq j \leq n,\ j \neq i, i+1, \quad g(v'_i) = u'_i \quad \text{et} \quad g(v_i) = u_i.$$

Par ce choix, nous obtenons que $g \cdot (\mathcal{F}'_1, \mathcal{F}_1) = (\mathcal{F}'_2, \mathcal{F}_2)$ et $\mathcal{O}(i)$ est une orbite.

Nous voulons maintenant montrer que $T^2_{\mathcal{O}(i)} = qI + (q-1)T_{\mathcal{O}(i)}$. Nous avons

$$T^2_{\mathcal{O}(i)}(e_{\mathcal{F}}) = T_{\mathcal{O}(i)}\left(\sum_{\substack{\mathcal{F}' \in \mathfrak{F}(V) \\ (\mathcal{F}',\mathcal{F}) \in \mathcal{O}(i)}} e_{\mathcal{F}'}\right) = \left(\sum_{\substack{\mathcal{F}' \in \mathfrak{F}(V) \\ (\mathcal{F}',\mathcal{F}) \in \mathcal{O}(i)}} T_{\mathcal{O}(i)}(e_{\mathcal{F}'})\right)$$

et conséquemment

$$T^2_{\mathcal{O}(i)}(e_{\mathcal{F}}) = \sum_{\substack{\mathcal{F}' \in \mathfrak{F}(V) \\ (\mathcal{F}',\mathcal{F}) \in \mathcal{O}(i)}} \sum_{\substack{\mathcal{F}'' \in \mathfrak{F}(V) \\ (\mathcal{F}'',\mathcal{F}') \in \mathcal{O}(i)}} e_{\mathcal{F}''}$$

Si $\mathcal{F} : V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_i \subset \cdots \subset V_{n-1} \subset V_n = V$, le drapeau $\mathcal{F}'$ dans la somme ci-dessus est de la forme :

$$\mathcal{F}' : V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_{i-1} \subset V'_i \subset V_{i+1} \subset \cdots \subset V_{n-1} \subset V_n = V$$

où V'_i est un sous-espace compris entre les deux sous-espaces fixes V_{i-1} et V_{i+1} du drapeau $\mathcal{F}$ et $V'_i \neq V_i$. Les sous-espaces V'_i compris entre les deux sous-espaces fixes V_{i-1} et V_{i+1} du drapeau $\mathcal{F}$ sont en bijection avec les droites vectorielles de l'espace quotient V_{i+1}/V_{i-1}. Comme cet espace quotient est de dimension 2 sur $\mathbb{K}$, il y a conséquemment $(q+1)$ droites vectorielles, c'est-à-dire qu'il y a $(q+1)$ sous-espace V_i' compris entre les deux sous-espaces fixes V_{i-1} et V_{i+1} du drapeau $\mathcal{F}$. Comme $V_i' \neq V_i$, il y a q drapeaux $\mathcal{F}'$ dans la somme ci-dessus. Pour chacun de ces drapeaux $\mathcal{F}'$, le drapeau $\mathcal{F}$ sera un des termes dans la somme intérieure sur les drapeaux $\mathcal{F}''$. Si $\mathcal{F}''' \neq \mathcal{F}$,. ce drapeau apparait $(q-1)$ fois, une fois pour chacun des drapeaux $\mathcal{F}' \neq \mathcal{F}, \mathcal{F}'''$.

Ainsi nous avons

$$T^2_{\mathcal{O}(i)}(e_{\mathcal{F}}) = qe_{\mathcal{F}} + (q-1)\left(\sum_{\substack{\mathcal{F}' \in \mathfrak{F}(V) \\ (\mathcal{F}',\mathcal{F}) \in \mathcal{O}(i)}} e_{\mathcal{F}'}\right) = qI(e_{\mathcal{F}}) + (q-1)T_{\mathcal{O}(i)}(e_{\mathcal{F}})$$

et nous obtenons la relation $T^2_{\mathcal{O}(i)} = qI + (q-1)T_{\mathcal{O}(i)}$ □

Nous verrons au chapitre suivant une façon de paramétriser les orbites de $GL(V)$ sur $(\mathfrak{F}(V) \times \mathfrak{F}(V))$, ainsi que d'autres relations pour les éléments $T_{\mathcal{O}(i)}$ de $\mathcal{H}_n$ entre eux.

CHAPITRE II

ALGÈBRE DE HECKE SUR LE GROUPE SYMÉTRIQUE

2.1 Introduction

Nous avons vu dans le premier chapitre les notions de drapeau complet, d'action du groupe linéaire $GL(V)$ sur l'espace $\mathfrak{F}(V)$ des drapeaux complets d'un espace vectoriel V, de représentation induite $\mathbb{I}$ du groupe linéaire fini $GL_n(\mathbb{F}_q)$ et finalement la définition de l'algèbre de Hecke $\mathcal{H}_n$. Pour cette algèbre, nous avons aussi montré que celle-ci avait une base indexée par l'ensemble des orbites pour l'action diagonale de $GL(V)$ sur $\mathfrak{F}(V) \times \mathfrak{F}(V)$.

Dans le présent chapitre, nous allons poursuivre notre étude de l'algèbre de Hecke $\mathcal{H}_n$ associée au groupe symétrique S_n en utilisant le fait que S_n est un groupe fini de réflexion engendré par les transposition $s_i = (i, i+1)$ pour i, $1 \leq i \leq (n-1)$. Nous commencerons par étudier la bijection entre les orbites de $GL(V)$ sur $\mathfrak{F}(V) \times \mathfrak{F}(V)$ avec les matrices de permutation, c'est-à-dire avec les éléments de S_n via la position relative entre deux drapeaux complets. Après cela, nous allons utiliser le fait que $\{ T_{\mathcal{O}} \mid \mathcal{O}$ est une orbite de $GL(V)$ sur $\mathfrak{F}(V) \times \mathfrak{F}(V)\}$ forme une base de $\mathcal{H}_n$ pour prouver que l'algèbre de Hecke sur le groupe symétrique S_n est engendrée par : $\{ T_1, T_2, T_3 \dots , T_{n-1} \}$, avec, pour $1 \le i, j \le (n-1)$,

$$\begin{cases} T_i^2 = qT_e + (q-1)T_i; & \\ T_iT_j = T_jT_i, & \text{si } |i-j| > 1\,; \\ T_iT_jT_i = T_jT_iT_j, & \text{si } |i-j| = 1\,; \end{cases}$$

où l'élément T_i correspond à l'élément $T_{O(i)} \in \mathcal{H}_n$ défini à la proposition 1.2 du chapitre 1 et T_e est l'élément unité de $\mathcal{H}_n$.

2.2 La position relative de deux drapeaux complets

À une paire $(\mathcal{F}, \mathcal{F}')$ de drapeaux complets d'un espace vectoriel V de dimension n sur le corps $\mathbb{K}$, nous allons associer une matrice de permutation $w(\mathcal{F}, \mathcal{F}') \in S_n$. Cette matrice représentera l'orbite de $GL(V)$ sur $\mathfrak{F}(V) \times \mathfrak{F}(V)$ contenant la paire $(\mathcal{F}, \mathcal{F}')$.

Définition 2.1. Étant donné deux drapeaux complets $\mathcal{F} : V_1 \subset V_2 \subset \dots \subset V_n = V$ et $\mathcal{F}' : V_1' \subset V_2' \subset \dots \subset V_n' = V$, nous définissons la **position relative de la paire de drapeaux** $(\mathcal{F}, \mathcal{F}')$ comme étant la matrice $w(\mathcal{F}, \mathcal{F}')$ de format $n \times n$ définie par

$$w(\mathcal{F}, \mathcal{F}') = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

où

$$a_{ij} = \dim \left[\frac{V_i \cap V_j'}{(V_{i-1} \cap V_j') + (V_i \cap V_{j-1}')} \right].$$

Ci-dessus nous avons convenu que $V_0 = V_0' = \{0\}$.

Lemme 2.1. (a) *Pour toute paire $(\mathcal{F}, \mathcal{F}')$ de drapeaux complets de l'espace vectoriel V, $w(\mathcal{F}, \mathcal{F}') \in S_n$.*

(b) *Pour toute paire $(\mathcal{F}, \mathcal{F}')$ de drapeaux complets de l'espace vectoriel V et $g \in GL(V)$, $w(g \cdot \mathcal{F}, g \cdot \mathcal{F}') = w(\mathcal{F}, \mathcal{F}')$.*

(c) *Pour toute paire $(\mathcal{F}, \mathcal{F}')$ de drapeaux complets de l'espace vectoriel V, $w(\mathcal{F}', \mathcal{F}) = w(\mathcal{F}, \mathcal{F}')^{-1}$.*

Démonstration. (a) Dénotons la matrice $w(\mathcal{F}, \mathcal{F}')$ par

$$w(\mathcal{F}, \mathcal{F}') = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

Il est clair que les entrées de cette matrice sont des entiers $a_{ij} \geq 0$. Montrons maintenant que

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 1 \quad \text{pour tout } j,\ 1 \leq j \leq n$$

et

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1 \quad \text{pour tout } i,\ 1 \leq i \leq n.$$

Soit $b_{ij} = \dim(V_i \cap V'_j)$ pour $0 \leq i, j \leq n$. Rappelons que nous avons convenu que $V_0 = V'_0 = \{0\}$. Comme $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ sont des drapeaux complets, nous avons que $(V_{i-1} \cap V'_j) \cap (V_i \cap V'_{j-1}) = V_{i-1} \cap V'_{j-1}$ et la dimension $\dim((V_{i-1} \cap V'_j) + (V_i \cap V'_{j-1}))$ de $(V_{i-1} \cap V'_j) + (V_i \cap V'_{j-1})$ est égale à

$$\dim(V_{i-1} \cap V'_j) + \dim(V_i \cap V'_{j-1}) - \dim(V_{i-1} \cap V'_{j-1}) = b_{(i-1)j} + b_{i(j-1)} - b_{(i-1)(j-1)}$$

Nous obtenons

$$a_{ij} = b_{ij} - b_{(i-1)j} - b_{i(j-1)} + b_{(i-1)(j-1)} \quad \text{pour tout } 1 \leq i, j \leq n.$$

Nous allons maintenant montrer que $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 1$ pour tout j, $1 \leq j \leq n$. Si

$j = 1$, nous avons que

$$a_{i1} = \begin{cases} b_{11}, & \text{si } i = 1\,; \\ b_{i1} - b_{(i-1)1}, & \text{si } 1 < i \leq n. \end{cases}$$

Ainsi

$$\sum_{i=1}^{n} a_{i1} = b_{11} + \sum_{i=2}^{n} (b_{i1} - b_{(i-1)1}) = b_{n1} = 1$$

car $\dim(V_n \cap V_1') = 1$ et que la somme se télescope. Si $j > 1$, nous obtenons

$$a_{ij} = \begin{cases} b_{1j} - b_{1(j-1)}, & \text{si } i = 1\,; \\ b_{ij} - b_{(i-1)j} - b_{i(j-1)} + b_{(i-1)(j-1)}, & \text{si } 1 < i \leq n. \end{cases}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} a_{i1} &= (b_{1j} - b_{1(j-1)}) + \sum_{i=2}^{n} (b_{ij} - b_{(i-1)j} - b_{i(j-1)} + b_{(i-1)(j-1)}) \\ &= b_{nj} - b_{n(j-1)} = \dim(V_j') - \dim(V_{j-1}') = 1 \end{aligned}$$

car $\dim(V_n \cap V_j') = j$, $\dim(V_n \cap V_{j-1}') = (j-1)$ et que la somme se télescope. Ceci complète la preuve que $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 1$ pour tout j, $1 \leq j \leq n$. La preuve que $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1$ pour tout i, $1 \leq i \leq n$ est similaire.

Parce que les entrées a_{ij} sont des entiers ≥ 0 et que les sommes des entrées sur chacune des lignes et des colonnes sont égales à 1, nous obtenons que $w(\mathcal{F}, \mathcal{F}') \in S_n$ et (a) est démontré.

(b) Parce que $g \in GL(V)$, nous avons $\dim(g(U)) = \dim(U)$ pour tout sous-espace vectoriel de V et ainsi

$$\begin{aligned} \dim\left[\frac{g(V_i) \cap g(V_j')}{(g(V_{i-1}) \cap g(V_j')) + (g(V_i) \cap g(V_{j-1}'))}\right] &= \dim\left[\frac{g(V_i \cap V_j')}{g((V_{i-1} \cap V_j') + (V_i \cap V_{j-1}'))}\right] \\ &= \dim\left[\frac{(V_i \cap V_j')}{(V_{i-1} \cap V_j') + (V_i \cap V_{j-1}')}\right] \end{aligned}$$

De cette observation, nous obtenons que $w(g \cdot \mathcal{F}, g \cdot \mathcal{F}') = w(\mathcal{F}, \mathcal{F}')$ pour toute paire $(\mathcal{F}, \mathcal{F}')$ de drapeaux complets.

(c) De la définition de la position relative, il est clair que $w(\mathcal{F}', \mathcal{F})$ est la transposée $w(\mathcal{F}, \mathcal{F}')^T$ de $w(\mathcal{F}, \mathcal{F}')$. Comme $w(\mathcal{F}, \mathcal{F}')$ est une matrice de permutation et conséquemment une matrice orthogonale, nous avons $w(\mathcal{F}', \mathcal{F}) = w(\mathcal{F}, \mathcal{F}')^{-1}$. $\square$

Proposition 2.1. *Soit un espace vectoriel V de dimension finie n sur le corps $\mathbb{K}$ et l'ensemble $\mathfrak{O}$ des orbites de $GL(V)$ sur $\mathfrak{F}(V) \times \mathfrak{F}(V)$. Dans ce cas*

$$\mathfrak{O} \longrightarrow S_n, \qquad \mathcal{O} \longmapsto w(\mathcal{F}, \mathcal{F}') \qquad \text{où } (\mathcal{F}, \mathcal{F}') \in \mathcal{O}$$

est une bijection bien définie.

Démonstration. Montrons premièrement que $\mathcal{O} \longmapsto w(\mathcal{F}, \mathcal{F}')$ où $(\mathcal{F}, \mathcal{F}') \in \mathcal{O}$ est bien définie, c'est-à-dire que si $(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_1'), (\mathcal{F}_2, \mathcal{F}_2') \in \mathcal{O}$, $w(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_1') = w(\mathcal{F}_2, \mathcal{F}_2')$. Comme $(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_1'), (\mathcal{F}_2, \mathcal{F}_2') \in \mathcal{O}$, il existe $g \in GL(V)$ tel que $(\mathcal{F}_2, \mathcal{F}_2') = g \cdot (\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_1')$ et par le lemme précédent, nous avons que $w(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_1') = w(\mathcal{F}_2, \mathcal{F}_2')$ et la fonction est bien définie. Il nous faut maintenant montrer que la fonction est surjective et injective.

Commençons par la surjectivité. Soit une permutation

$$w = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & (n-1) & n \\ w(1) & w(2) & \dots & w(n-1) & w(n) \end{pmatrix}$$

et une base $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ de V. Considérons les drapeaux complets suivants :

$$\mathcal{F} : V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_{n-1} \subset V_n = V,$$

où V_i est le sous-espace linéaire de V engendré par $\{v_1, v_2, \dots, v_i\}$ pour $1 \leq i \leq n$ et

$$\mathcal{F}' : V_1' \subset V_2' \subset \cdots \subset V_{n-1}' \subset V_n' = V$$

où V_i' est le sous-espace linéaire de V engendré par $\{v_{w(1)}, v_{w(2)}, \dots, v_{w(i)}\}$ pour $1 \leq i \leq n$. Il nous suffit maintenant de montrer que $w(\mathcal{F}, \mathcal{F}') = w$. Par notre construction, nous avons pour tout $1 \leq i, j \leq n$ que

$$\dim(V_i \cap V'_j) = \Big|\{1, 2, \ldots, i\} \cap \{w(1), w(2), \ldots, w(j)\}\Big|.$$

Posons comme dans la preuve du lemme précédent

$$w(\mathcal{F}, \mathcal{F}') = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

et $b_{ij} = \dim(V_i \cap V'_j)$ pour tout $1 \leq i, j \leq n$. Rappelons que

$$a_{ij} = \begin{cases} b_{11}, & \text{si } i = 1 \text{ et } j = 1\,; \\ b_{i1} - b_{(i-1)1}, & \text{si } i > 1 \text{ et } j = 1\,; \\ b_{1j} - b_{1(j-1)}, & \text{si } i = 1 \text{ et } j > 1\,; \\ b_{ij} - b_{(i-1)j} - b_{i(j-1)} + b_{(i-1)(j-1)}, & \text{si } i > 1 \text{ et } j > 1. \end{cases}$$

Nous voulons maintenant montrer que

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } i = w(j) \text{ pour tout } 1 \leq j \leq n\,; \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Nous avons

$$a_{11} = b_{11} = \Big|\{1\} \cap \{w(1)\}\Big| = \begin{cases} 1, & \text{si } w(1) = 1\,; \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour $i > 1$ et $j = 1$, nous avons

$$\begin{aligned} a_{i1} = b_{i1} - b_{(i-1)1} &= \Big|\{1, 2, \ldots, i\} \cap \{w(1)\}\Big| - \Big|\{1, 2, \ldots, (i-1)\} \cap \{w(1)\}\Big| \\ &= \begin{cases} 1, & \text{si } w(1) = i\,; \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

car

$$b_{k1} = \begin{cases} 0, & \text{si } k < w(1)\,; \\ 1, & \text{si } k \geq w(1). \end{cases}$$

Pour $i = 1$ and $j > 1$, nous avons

$$\begin{aligned} a_{1j} &= b_{1j} - b_{1(j-1)} \\ &= \Big|\{1\} \cap \{w(1), w(2), \ldots, w(j)\}\Big| - \Big|\{1\} \cap \{w(1), w(2), \ldots, w(j-1)\}\Big| \\ &= \begin{cases} 1, & \text{si } w(j) = 1\,; \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

car

$$b_{1k} = \begin{cases} 0, & \text{si } w(k) < 1\,; \\ 1, & \text{si } w(k) \geq 1. \end{cases}$$

Pour $i > 1$ et $j > 1$, nous avons cinq cas à considérer :

1) $i = w(k)$ pour $k < j$ et $w(j) < i$;

2) $i = w(k)$ pour $k < j$ et $w(j) > i$;

3) $i = w(j)$;

4) $i = w(k)$ pour $k > j$ et $w(j) < i$;

5) $i = w(k)$ pour $k > j$ et $w(j) > i$.

Pour chacun de ces cas, nous pouvons déterminer chacun des termes de la formule de $a_{ij} = b_{ij} - b_{(i-1)j} - b_{i(j-1)} + b_{(i-1)(j-1)}$ Nous avons respectivement pour chacun de ces cas :

1) $b_{ij} = b_{(i-1)(j-1)} + 2$, $b_{(i-1)j} = b_{(i-1)(j-1)} + 1$, $b_{i(j-1)} = b_{(i-1)(j-1)} + 1$ et $a_{ij} = 0$;

2) $b_{ij} = b_{(i-1)(j-1)} + 1$, $b_{(i-1)j} = b_{(i-1)(j-1)}$, $b_{i(j-1)} = b_{(i-1)(j-1)} + 1$ et $a_{ij} = 0$;

3) $b_{ij} = b_{(i-1)(j-1)} + 1$, $b_{(i-1)j} = b_{(i-1)(j-1)}$, $b_{i(j-1)} = b_{(i-1)(j-1)}$ et $a_{ij} = 1$;

4) $b_{ij} = b_{(i-1)(j-1)} + 1$, $b_{(i-1)j} = b_{(i-1)(j-1)} + 1$, $b_{i(j-1)} = b_{(i-1)(j-1)}$ et $a_{ij} = 0$;

5) $b_{ij} = b_{(i-1)(j-1)}$, $b_{(i-1)j} = b_{(i-1)(j-1)}$, $b_{i(j-1)} = b_{(i-1)(j-1)}$ et $a_{ij} = 0$.

Ceci complète la preuve de la surjectivité.

Nous voulons maintenant montrer l'injectivité. Soit deux drapeaux complets $\mathcal{F}$: $V_1 \subset V_2 \subset ... \subset V_n = V$ et $\mathcal{F}'$: $V_1' \subset V_2' \subset ... \subset V_n' = V$, tels que la position relative $w(\mathcal{F}, \mathcal{F}')$ de la paire $(\mathcal{F}, \mathcal{F}') \in \mathfrak{F}(V) \times \mathfrak{F}(V)$ est la matrice de permutation correspondant à

$$w = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & (n-1) & n \\ w(1) & w(2) & \dots & w(n-1) & w(n) \end{pmatrix}.$$

Nous allons premièrement construire une base $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ bien adaptée à cette paire de drapeaux complets et à leur position relative. Plus précisément, soit un vecteur v_1 non nul de $V_1 \cap V'_{w^{-1}(1)}$. Donc $\{v_1\}$ est une base de V_1. Supposons que, pour $1 \leq k \leq m$, les vecteurs $v_1, v_2, \dots, v_k$ sont construits tels que $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ est une base de V_k et v_k est un vecteur de $V_k \cap V'_{w^{-1}(k)}$ dont l'image dans l'espace vectoriel quotient

$$\frac{(V_k \cap V'_{w^{-1}(k)})}{((V_{k-1} \cap V'_{w^{-1}(k)}) + (V_k \cap V'_{w^{-1}(k)-1}))}$$

est non-nulle. Noter que cet espace quotient est de dimension 1 par notre définition de position relative. Considérons maintenant un vecteur v_{m+1} dont l'image dans l'espace vectoriel quotient

$$\frac{(V_{m+1} \cap V'_{w^{-1}(m+1)})}{((V_m \cap V'_{w^{-1}(m+1)}) + (V_{m+1} \cap V'_{w^{-1}(m+1)-1}))}$$

est non-nulle. Cet espace quotient est de dimension 1 par notre définition de position relative. Noter que $v_{m+1} \notin V_m$, sinon nous aurions que l'image de v_{m+1} serait nulle dans l'espace quotient. Ainsi l'ensemble $\{v_1, v_2, \dots, v_{m+1}\}$ est une base de V_{m+1}. En procédant jusqu'à la dimension n de V, nous obtenons la base désirée. Par construction, celle-ci est telle que $\{v_{w(1)}, v_{w(2)}, \dots, v_{w(k)}\}$ est une base de V_k' pour tout $1 \leq k \leq n$.

Nous pouvons maintenant démontrer l'injectivité. Soit deux paires de drapeaux complets : $(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}'_1)$ et $(\mathcal{F}_2, \mathcal{F}'_2)$ dont les positions relatives $w(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}'_1)$ et $w(\mathcal{F}_2, \mathcal{F}'_2)$ sont égales, nous voulons montrer qu'il existe au moins un élément $g \in GL(V)$ tel que $(\mathcal{F}_2, \mathcal{F}'_2) = g \cdot (\mathcal{F}_1, \mathcal{F}'_1)$. Considérons une base $\mathcal{B}_1 = \{v_1^1, v_2^1, \ldots, v_n^1\}$ de V adaptée à la paire de drapeaux complets $(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}'_1)$ et à leur position relative, ainsi qu'une base $\mathcal{B}_2 = \{v_1^2, v_2^2, \ldots, v_n^2\}$ de V adaptée à la paire de drapeaux complets $(\mathcal{F}_2, \mathcal{F}'_2)$ et à leur position relative. Comme ces deux paires ont la même position relative et considérons l'unique élément $g \in GL(V)$ tel que $g(v_k^1) = v_k^2$, alors nous avons que $(\mathcal{F}_2, \mathcal{F}'_2) = g \cdot (\mathcal{F}_1, \mathcal{F}'_1)$ par notre construction des bases $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$. La preuve de l'injectivité est complète. □

Notation 2.1. Si $w \in S_n$, nous noterons l'orbite de $GL(V)$ sur $(\mathfrak{F}(V) \times \mathfrak{F}(V))$ correspondant à w par la bijection de la proposition 2.1 par $\mathcal{O}(w)$. Nous noterons aussi la **longueur de** w par $\ell(w)$. Rappelons que la longueur $\ell(w)$ est définie par

$$\ell(w) = \Big|\{(i,j) \mid 1 \leq i < j \leq n,\ w(i) > w(j)\}\Big|.$$

Exemple 2.1. Si V est de dimension finie $n = 2$ sur le corps $\mathbb{K}$, l'ensemble $\mathfrak{F}(V)$ des drapeaux complets de V est

$$\mathfrak{F}(V) = \{\mathcal{F} : L \subset V \mid \text{où } L \text{ est une droite vectorielle}\}$$

Le groupe symétrique S_2 a deux éléments :

$$S_2 = \left\{ e = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, s = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

De la proposition 2.1, nous savons que $\mathfrak{F}(V) \times \mathfrak{F}(V)$ se décomposera en deux orbites : $\mathcal{O}_e$ et $\mathcal{O}_s$ sous l'action de $GL(V)$. Les orbites peuvent être décrites de la façon suivante.

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_e &= \{(L \subset V, L' \subset V) \in \mathfrak{F}(V) \times \mathfrak{F}(V) \mid w(L \subset V, L' \subset V) = e\} \\ &= \{(L \subset V, L' \subset V) \in \mathfrak{F}(V) \times \mathfrak{F}(V) \mid L = L'\} \end{aligned}$$

car la matrice de permutation correspondant à e est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et nous devons avoir $\dim(L \cap L') = 1$.

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_s &= \{(L \subset V, L' \subset V) \in \mathfrak{F}(V) \times \mathfrak{F}(V) \mid w(L \subset V, L' \subset V) = s\} \\ &= \{(L \subset V, L' \subset V) \in \mathfrak{F}(V) \times \mathfrak{F}(V) \mid L \neq L'\} \end{aligned}$$

car la matrice de permutation correspondant à s est

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et nous devons avoir $\dim(L \cap L') = 0$.

Exemple 2.2. Si V est de dimension finie $n = 3$ sur le corps $\mathbb{K}$, l'ensemble $\mathfrak{F}(V)$ des drapeaux complets de V est

$$\mathfrak{F}(V) = \left\{ \mathcal{F} : L \subset P \subset V \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{où } L \text{ est une droite vectorielle} \\ \text{et } P \text{ est un plan vectoriel} \end{array} \right\}$$

Le groupe symétrique S_3 a six éléments :

$$S_3 = \left\{ \begin{array}{ccc} e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, & s = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, & t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \\ st = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, & ts = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, & sts = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \right\}$$

De la proposition 2.1, nous savons que $\mathfrak{F}(V) \times \mathfrak{F}(V)$ se décomposera en six orbites : $\mathcal{O}_e$, $\mathcal{O}_s$, $\mathcal{O}_t$, $\mathcal{O}_{st}$, $\mathcal{O}_{ts}$ et $\mathcal{O}_{sts}$ sous l'action de $GL(V)$. Pour $\sigma \in S_n$, alors l'orbite correspondante à σ est

$$\mathcal{O}_\sigma = \{(L \subset P \subset V, L' \subset P' \subset V) \mid w(L \subset P \subset V, L' \subset P' \subset V) = \sigma\}$$

et ces orbites peuvent être décrites plus explicitement de la façon suivante.

$$\mathcal{O}_e = \{(L \subset P \subset V, L' \subset P' \subset V) \in \mathfrak{F}(V) \times \mathfrak{F}(V) \mid L = L', P = P'\}$$

car la matrice de permutation correspondante à e est

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{O}_s = \{(L \subset P \subset V, L' \subset P' \subset V) \in \mathfrak{F}(V) \times \mathfrak{F}(V) \mid L \neq L', P = P' = L \oplus L'\}$$

car la matrice de permutation correspondante à s est

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{O}_t = \{(L \subset P \subset V, L' \subset P' \subset V) \in \mathfrak{F}(V) \times \mathfrak{F}(V) \mid P \neq P', L = L' = P \cap P'\}$$

car la matrice de permutation correspondante à t est

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{O}_{st} = \{(L \subset P \subset V, L' \subset P' \subset V) \in \mathfrak{F}(V) \times \mathfrak{F}(V) \mid P \cap P' = L', L \oplus L' = P\}$$

car la matrice de permutation correspondante à st est

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{O}_{ts} = \{(L \subset P \subset V, L' \subset P' \subset V) \in \mathfrak{F}(V) \times \mathfrak{F}(V) \mid P \cap P' = L, L \oplus L' = P'\}$$

car la matrice de permutation correspondante à ts est

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{O}_{sts} = \{(L \subset P \subset V, L' \subset P' \subset V) \in \mathfrak{F}(V) \times \mathfrak{F}(V) \mid L \cap P' = L' \cap P = \{0\}\}$$

car la matrice de permutation correspondante à sts est

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2.3 Relations dans l'algèbre de Hecke $\mathcal{H}_n$

Soit un espace vectoriel V de dimension finie n sur le corps fini $\mathbb{K} = \mathbb{F}_q$. À la proposition 1.2 du premier chapitre, nous avons défini pour chaque entier i, $1 \leq i \leq (n-1)$ une orbite : $\mathcal{O}(i)$ de $GL(V)$ sur $\mathfrak{F}(V) \times \mathfrak{F}(V)$ et nous avons étudié l'élément $T_{\mathcal{O}(i)} \in \mathcal{H}_n$. Nous allons poursuivre notre étude de ces éléments $T_{\mathcal{O}(i)} \in \mathcal{H}_n$ et démontrer dans cette section différentes relations entre eux. Il est facile de vérifier que cette orbite $\mathcal{O}(i)$ correspond dans notre bijection de la proposition 2.1 à la réflexion simple

$$s_i = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & (i-1) & i & (i+1) & (i+2) & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & (i-1) & (i+1) & i & (i+2) & \dots & n \end{pmatrix}$$

à savoir la transposition $(i,(i+1))$ de i et $(i+1)$.

Notation 2.2. Dans ce qui suivra $\mathbb{K}$ désignera le corps fini $\mathbb{F}_q$ et V sera un espace vectoriel de dimension finie n sur le corps $\mathbb{K}$. Nous dénoterons l'élément $T_{\mathcal{O}(i)}$ de l'algèbre de Hecke $\mathcal{H}_n$ par T_i pour $1 \leq i \leq (n-1)$. Nous noterons l'ensemble des réflexions simples du groupe symétrique S_n par $S = \{s_1, s_2, \dots, s_{n-1}\}$.

Lemme 2.2. *Soit $w \in S_n$ et $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}(V)$. Alors le nombre de drapeaux complets $\mathcal{F}'' \in \mathfrak{F}(V)$ tels que $(\mathcal{F}'', \mathcal{F}) \in \mathcal{O}(w)$ est $q^{\ell(w)}$, où $\ell(w)$ est la longueur de w.*

Démonstration. Soit $\mathcal{F} : V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_{n-1} \subset V_n = V$. Fixons un drapeau complet $\mathcal{F}' : V_1' \subset V_2' \subset \cdots \subset V_{n-1}' \subset V_n' = V$ tel que $(\mathcal{F}', \mathcal{F}) \in \mathcal{O}(w)$. Si

$$B = \{g \in GL(V) \mid g(V_i) = V_i \text{ pour tout } i,\ 1 \leq i \leq n\} = \{g \in GL(V) \mid g{\cdot}\mathcal{F} = \mathcal{F}\},$$

alors

$$\{(\mathcal{F}'' \in \mathfrak{F}(V) \mid (\mathcal{F}'', \mathcal{F}) \in \mathcal{O}(w)\} = \{b \cdot \mathcal{F}' \mid b \in B\}.$$

En effet, si $(\mathcal{F}'', \mathcal{F}) \in \mathcal{O}(w)$, alors il existe $g \in GL(V)$ tel que $(\mathcal{F}'', \mathcal{F}) = g{\cdot}(\mathcal{F}', \mathcal{F})$. Mais $g \cdot \mathcal{F} = \mathcal{F}$ signifie que $g \in B$. Donc $\mathcal{F}'' = b \cdot \mathcal{F}'$ pour un $b \in B$.

Comme nous l'avons vu à la proposition 2.1 et parce que $w(\mathcal{F}', \mathcal{F}) = w \in S_n$, alors $w(\mathcal{F}, \mathcal{F}') = w^{-1}$ et il existe une base $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \dots v_n\}$ de V telle que $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ est une base de V_k et $\{v_{w^{-1}(1)}, v_{w^{-1}(2)}, \dots, v_{w^{-1}(k)}\}$ est une base de V_k' pour tout k, $1 \leq k \leq n$. Fixons une telle base $\mathcal{B}$, alors les éléments de B sont représentés lorsque nous considérons les matrices correspondates relativement à la base $\mathcal{B}$ par les matrices triangulaires supérieures inversibles. Ainsi la cardinalité de B est

$$|B| = (q-1)^n q^{n(n-1)/2}$$

et celle de $\{b \cdot \mathcal{F}' \mid b \in B\}$ est

$$|\{b \cdot \mathcal{F}' \mid b \in B\}| = \frac{|B|}{|B \cap M_w^{-1} B M_w|}$$

où M_w est la matrice de permutation correspondant à la permutation $w \in S_n$. $B \cap M_w^{-1} B M_w$ est le sous-groupe des matrices triangulaires supérieures de la forme

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1(n-1)} & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2(n-1)} & s_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3(n-1)} & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{(n-1)(n-1)} & a_{(n-1)n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

où $a_{ij} \in \mathbb{F}_q$ pour tout $1 \leq i \leq j \leq n$ avec $a_{kk} \neq 0$ pour $1 \leq k \leq n$ et $a_{ij} = 0$ lorsque $1 \leq i < j \leq n$ et $w(i) > w(j)$. Donc

$$|B \cap M_w^{-1} B M_w| = (q-1)^n q^{n(n-1)/2} q^{-\ell(w)}.$$

Donc

$$|\{b \cdot \mathcal{F}' \mid b \in B\}| = \frac{|B|}{|B \cap M_w^{-1} B M_w|} = \frac{(q-1)^n q^{n(n-1)/2}}{(q-1)^n q^{n(n-1)/2} q^{-\ell(w)}} = q^{\ell(w)}.$$

$\square$

Proposition 2.2. *Dans l'algèbre de Hecke $\mathcal{H}_n$, les éléments $T_1, T_2, \dots, T_{n-1}$ satisfont les relations suivantes : Pour tout i, j tels que $1 \leq i, j \leq (n-1)$, nous avons*

a) $T_i^2 = qI + (q-1)T_i$, *où I est l'élément neutre de $\mathcal{H}_n$;*

b) $T_iT_j = T_jT_i$, *si* $|i-j| > 1$;

c) $T_iT_jT_i = T_jT_iT_j$, *si* $|i-j| = 1$.

Démonstration. a) a été démontré à la proposition 1.2.

b) Nous allons supposer que $i < j$. Soit $\mathcal{O}(i)$ et $\mathcal{O}(j)$: les deux orbites correspondantes à i et j respectivement. Par notre notation 1.2, nous avons que

$$T_i(e_{\mathcal{F}}) = \sum_{(\mathcal{F}',\mathcal{F})\in\mathcal{O}(i)} e_{\mathcal{F}'} \quad \text{et} \quad T_jT_i(e_{\mathcal{F}}) = \sum_{(\mathcal{F}',\mathcal{F})\in\mathcal{O}(i)} \sum_{(\mathcal{F}'',\mathcal{F}')\in\mathcal{O}(j)} e_{\mathcal{F}''}$$

Il nous faut décrire les drapeaux complets apparaissant dans cette dernière somme. Si nous dénotons le drapeau complet $\mathcal{F}$ par

$$\mathcal{F} : V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_{i-1} \subset V_i \subset V_{i+1} \subset \cdots \subset V_{n-1} \subset V_n = V$$

alors les drapeaux $\mathcal{F}'$ apparaissant dans la première somme sont de la forme

$$\mathcal{F}' : V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_{i-1} \subset V_i' \subset V_{i+1} \subset \cdots \subset V_{n-1} \subset V_n = V$$

avec $V_i' \neq V_i$. Il y a q tels drapeaux complets. En effet ils sont en bijection avec les droites vectorielles du plan V_{i+1}/V_{i-1} différentes de la droite V_i/V_{i-1}. Pour chacun de ces drapeaux complets $\mathcal{F}'$, alors les drapeaux $\mathcal{F}''$ apparaissant dans la seconde somme sont de la forme

$$\mathcal{F}'' : V_1 \subset \cdots \subset V_{i-1} \subset V_i' \subset V_{i+1} \subset \cdots \subset V_{j-1} \subset V_j' \subset V_{j+1} \subset \cdots \subset V_n = V$$

avec $V_j' \neq V_j$. Il y a q tels drapeaux complets. En effet ils sont en bijection avec les droites vectorielles du plan V_{j+1}/V_{j-1} différentes de la droite V_j/V_{j-1}. Ces q^2 drapeaux complets $\mathcal{F}''$ sont en position relative la matrice de permutation $w(\mathcal{F}'',\mathcal{F})$ correspondant à s_is_j. De plus, chacun des drapeaux complets $\mathcal{F}'''$ en position relative $w(\mathcal{F}''',\mathcal{F}) = s_is_j$ apparait avec un coefficient égal à 1 dans $T_jT_i(e_{\mathcal{F}})$, c'est-à-dire

$$T_jT_i(e_{\mathcal{F}}) = \sum_{\mathcal{F}'''\in\mathfrak{F}(V)} e_{\mathcal{F}'''} \quad \text{où } (\mathcal{F}''',\mathcal{F}) \in \mathcal{O}(s_js_i)$$

De façon similaire, nous obtenons que

$$T_iT_j(e_{\mathcal{F}}) = \sum_{\mathcal{F}''' \in \mathfrak{F}(V)} e_{\mathcal{F}'''} \quad \text{où } (\mathcal{F}''', \mathcal{F}) \in \mathcal{O}(s_is_j)$$

Comme $s_is_j = s_js_i$, alors $T_jT_i(e_{\mathcal{F}}) = T_iT_j(e_{\mathcal{F}})$ pour tout drapeau complet $\mathcal{F}$ et b) est démontré.

c) Nous avons

$$T_iT_{i+1}T_i(e_{\mathcal{F}}) = \sum_{(\mathcal{F}_1,\mathcal{F}) \in \mathcal{O}(i)} \sum_{(\mathcal{F}_2,\mathcal{F}_1) \in \mathcal{O}(i+1)} \sum_{(\mathcal{F}_3,\mathcal{F}_2) \in \mathcal{O}(i)} e_{\mathcal{F}_3}$$

Il nous faut déterminer les drapeaux complets $\mathcal{F}_3$ apparaissant dans la dernière somme. Si le drapeau complet $\mathcal{F}$ est

$$\mathcal{F} : V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_{i-1} \subset V_i \subset V_{i+1} \subset V_{i+2} \subset \cdots \subset V_{n-1} \subset V_n = V$$

alors les drapeaux complets $\mathcal{F}_1$ sont de la forme

$$\mathcal{F}_1 : V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_{i-1} \subset V_i' \subset V_{i+1} \subset V_{i+2} \subset \cdots \subset V_{n-1} \subset V_n = V$$

où V_i' est un sous-espace vectoriel tel que V_i'/V_{i-1} est une droite vectorielle de l'espace vectoriel de dimension 2 : V_{i+1}/V_{i-1} et cette droite est différente de la droite V_i/V_{i-1} . Il y a ainsi q sous-espaces vectoriels V_i'. Nous avons que $V_i \cap V_i' = V_{i-1}$ et $V_{i+1} = V_i + V_i'$.

Pour ce qui est des drapeaux complets $\mathcal{F}_2$, ceux-ci sont de la forme

$$\mathcal{F}_2 : V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_{i-1} \subset V_i' \subset V_{i+1}' \subset V_{i+2} \subset \cdots \subset V_{n-1} \subset V_n = V$$

où V_{i+1}' est un sous-espace vectoriel tel que V_{i+1}'/V_i' est une droite vectorielle de l'espace vectoriel de dimension 2 : V_{i+2}/V_i' et cette droite est différente de la droite V_{i+1}/V_i' . Nous avons $V_{i+1} \cap V_{i+1}' = V_i'$ et $V_{i+2} = V_{i+1} + V_{i+1}'$. Pour un drapeau $\mathcal{F}_1$ fixé, il y a ainsi q sous-espaces vectoriels V_{i+1}'. En laissant varier les drapeaux complets $\mathcal{F}_1$, nous voyons qu'il y a q^2 tels drapeaux complets $\mathcal{F}_2$ au total. Plus précisément, il ne peut pas y avoir deux drapeaux complets distincts $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_1'$ tels que $(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}), (\mathcal{F}_1', \mathcal{F}) \in \mathcal{O}(i)$ et qu'il existe un drapeau complet $\mathcal{F}_2$ avec $(\mathcal{F}_2, \mathcal{F}_1), (\mathcal{F}_2, \mathcal{F}_1') \in \mathcal{O}(j)$.

Il nous reste maintenant à considérer les drapeaux complets $\mathcal{F}_3$. Ces drapeaux sont de la forme

$$\mathcal{F}_3 : V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_{i-1} \subset V_i'' \subset V_{i+1}' \subset V_{i+2} \subset \cdots \subset V_{n-1} \subset V_n = V$$

où V_i'' est un sous-espace vectoriel tel que V_i''/V_{i-1} est une droite vectorielle de l'espace vectoriel de dimension 2 : V_{i+1}'/V_{i-1} et cette droite est différente de la droite V_i'/V_{i-1} . Il y a ainsi q sous-espaces vectoriels V_i''. Nous avons $V_i'' \cap V_i' = V_{i-1}$ et $V_i'' + V_i' = V_{i+1}'$

Nous allons maintenant montrer que la position relative $w(\mathcal{F}_3, \mathcal{F})$ est la matrice de permutation correspondant à l'élément $s_i s_{i+1} s_i \in S_n$. Il faut étudier les intersections entre les sous-espaces de ces drapeaux complets.

Premièrement $V_i'' \neq V_i$, sinon nous aurions que $V_i \subset V_{i+1}'$. Ainsi

$$V_{i+1} = (V_i + V_i') \subset V_{i+1} \cap V_{i+1}' \quad \Longrightarrow \quad V_{i+1}' = V_{i+1},$$

mais ceci est impossible par nos constructions.

Deuxièmement $V_{i+1} \cap V_i'' = V_{i-1}$. En effet, $V_{i-1} \subset V_{i+1} \cap V_i''$ et ainsi $\dim(V_{i+1} \cap V_i'') \geq (i-1)$. Si $\dim(V_{i+1} \cap V_i'') = i$, alors

$$V_i'' \subset V_{i+1} \quad \Longrightarrow \quad V_i' = V_{i+1} \cap V_{i+1}' = V_i'',$$

mais ceci est impossible par nos constructions. Nous obtenons l'égalité en comparant les dimensions de ces sous-espaces.

Troisièmement $V_i \cap V'_{i+1} = V_{i-1}$. En effet $V_{i-1} \subset V_i \cap V'_{i+1}$ et si nous n'avons pas l'égalité, alors

$$V_i \subset V'_{i+1} \quad \Longrightarrow \quad V'_i = V'_{i+1} \cap V_{i+1} = V_i,$$

mais ceci est impossible.

En notant que $V'_{i+1} \cap V_{i+1} = V'_i$, $V_{i+1} \cap V_i = V_i$ et nos trois observations ci-dessus, nous obtenons que la position relative $w(\mathcal{F}_3, \mathcal{F})$ est bien la matrice de permutation correspondant à l'élément $s_i s_{i+1} s_i \in S_n$.

Il nous faut maintenant compter combien de drapeaux $\mathcal{F}_3$ différents nous obtenons dans cette somme. Nous avons au plus q^3 tels drapeaux distincts. En laissant varier la paire de drapeaux complets $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ satisfaisant nos conditions ci-dessus, alors il y aura q^3 drapeaux complets distincts $\mathcal{F}_3$. Plus précisément il ne peut pas y avoir deux paires distinctes de drapeaux complets : $(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$ et $(\mathcal{F}'_1, \mathcal{F}'_2)$ tels que $(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}) \in \mathcal{O}(i)$, $(\mathcal{F}_2, \mathcal{F}_1) \in \mathcal{O}(i+1)$, $(\mathcal{F}_3, \mathcal{F}_2) \in \mathcal{O}(i)$, $(\mathcal{F}'_1, \mathcal{F}) \in \mathcal{O}(i)$, $(\mathcal{F}'_2, \mathcal{F}'_1) \in \mathcal{O}(i+1)$, $(\mathcal{F}_3, \mathcal{F}'_2) \in \mathcal{O}(i)$. En effet, nous avons

$$\mathcal{F} : V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_{i-1} \subset V_i \subset V_{i+1} \subset V_{i+2} \subset \cdots \subset V_{n-1} \subset V_n = V$$

$$\mathcal{F}_1 : V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_{i-1} \subset V'_i \subset V_{i+1} \subset V_{i+2} \subset \cdots \subset V_{n-1} \subset V_n = V$$

$$\mathcal{F}'_1 : V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_{i-1} \subset V''_i \subset V_{i+1} \subset V_{i+2} \subset \cdots \subset V_{n-1} \subset V_n = V$$

$$\mathcal{F}_2 : V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_{i-1} \subset V'_i \subset V'_{i+1} \subset V_{i+2} \subset \cdots \subset V_{n-1} \subset V_n = V$$

$$\mathcal{F}'_2 : V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_{i-1} \subset V''_i \subset V''_{i+1} \subset V_{i+2} \subset \cdots \subset V_{n-1} \subset V_n = V$$

$$\mathcal{F}_3 : V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_{i-1} \subset V'''_i \subset V'''_{i+1} \subset V_{i+2} \subset \cdots \subset V_{n-1} \subset V_n = V$$

avec, à cause de positions relatives des drapeaux, les égalités suivantes :

$$V_i \cap V'_i = V_{i-1}, \quad V_i \cap V''_i = V_{i-1}, \quad V_{i+1} \cap V'_{i+1} = V'_i, \quad V_{i+1} \cap V''_{i+1} = V''_i,$$

ainsi que $V'_{i+1} = V'''_{i+1} = V''_{i+1}$. De tout ceci, nous avons facilement que $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}'_1$ et $\mathcal{F}_2 = \mathcal{F}'_2$.

Comme pour chacune des q^2 paires de drapeaux complets $(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$, nous avons q drapeaux complets distincts $\mathcal{F}_3$ et à cause du lemme 2.2, nous obtenons que

$$T_i T_{i+1} T_i(e_{\mathcal{F}}) = \sum_{(\mathcal{F}',\mathcal{F}) \in \mathcal{O}(s_i s_{i+1} s_i)} e_{\mathcal{F}'} = T_{\mathcal{O}(s_i s_{i+1} s_i)}(e_{\mathcal{F}}).$$

En procédant de façon similaire, nous obtenons que

$$T_{i+1} T_i T_{i+1}(e_{\mathcal{F}}) = \sum_{(\mathcal{F}',\mathcal{F}) \in \mathcal{O}(s_{i+1} s_i s_{i+1})} e_{\mathcal{F}'} = T_{\mathcal{O}(s_{i+1} s_i s_{i+1})}(e_{\mathcal{F}}).$$

Comme $s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1}$ dans S_n et $\mathcal{O}(s_i s_{i+1} s_i) = \mathcal{O}(s_{i+1} s_i s_{i+1})$, nous obtenons que

$$T_i T_{i+1} T_i(e_{\mathcal{F}}) = T_{i+1} T_i T_{i+1}(e_{\mathcal{F}}) \quad \text{pour tout } \mathcal{F} \in \mathfrak{F}(V).$$

c) est ainsi démontré. □

2.4 Règles récursives pour la multiplication dans $\mathcal{H}_n$

Nous voulons maintenant décrire la multiplication récursivement en utilisant la longueur des éléments de S_n.

Proposition 2.3. *Soit un élément $w \in S_n$ et une réflexion simple $s \in S$. Alors*

$$T_s T_w = \begin{cases} T_{sw}, & si\ \ell(sw) > \ell(w)\,; \\ qT_{sw} + (q-1)T_w, & si\ \ell(sw) < \ell(w). \end{cases}$$

Démonstration. Soit $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}(V)$. Par définition, nous avons

$$T_w(e_{\mathcal{F}}) = \sum_{(\mathcal{F}',\mathcal{F}) \in \mathcal{O}(w)} e_{\mathcal{F}'}$$

Comme conséquence du lemme 2.2, nous avons qu'il y a $q^{\ell(w)}$ drapeaux complets distincts apparaissant dans cette dernière somme. Nous allons considérer premièrement le cas où $s = s_i$, où $1 \leq i \leq (n-1)$ et $\ell(s_i w) > \ell(w)$ et nous voulons vérifier que $T_sT_w = T_{sw}$. Nous allons esquisser cette preuve. Nous avons

$$T_sT_w(e_{\mathcal{F}}) = \sum_{(\mathcal{F}',\mathcal{F})\in\mathcal{O}(w)} T_s(e_{\mathcal{F}'}) = \sum_{(\mathcal{F}',\mathcal{F})\in\mathcal{O}(w)} \sum_{(\mathcal{F}'',\mathcal{F}')\in\mathcal{O}(s_1)} e_{\mathcal{F}''}.$$

En laissant varier les drapeaux complets $\mathcal{F}'$, nous voyons qu'il y a au plus $q^{\ell(w)+1}$ drapeaux complets distincts $\mathcal{F}''$ au total dans cette dernière somme. Plus précisément, il ne peut pas y avoir deux drapeaux complets distincts $\mathcal{F}_1'$ et $\mathcal{F}_2'$ tels que $(\mathcal{F}_1',\mathcal{F}),(\mathcal{F}_2',\mathcal{F}) \in \mathcal{O}(w)$ et qu'il existe un drapeau complet $\mathcal{F}''$ tel que nous ayons aussi $(\mathcal{F}'',\mathcal{F}_1'),(\mathcal{F}'',\mathcal{F}_2') \in \mathcal{O}(s_i)$. La preuve de ceci dépend du fait que $\ell(s_iw) = \ell(w)+1$. De plus, chacun des drapeaux $\mathcal{F}''$ apparaissant dans la somme ci-dessus est tel que $(\mathcal{F}'',\mathcal{F}) \in \mathcal{O}(sw)$. Nous obtenons donc lorsque $\ell(sw) > \ell(w)$ que

$$T_sT_w(e_{\mathcal{F}}) = \sum_{(\mathcal{F}'',\mathcal{F})\in\mathcal{O}(s_iw)} e_{\mathcal{F}''} \quad \text{et} \quad T_sT_w = T_{sw}.$$

Pour ce qui est du cas où $\ell(sw) < \ell(w)$, il suffit de noter qu'il existe un élément $v \in S_n$ tel que $w = sv$ avec $\ell(w) = \ell(v)+1$. Ainsi $T_w = T_{sv} = T_sT_v$ et

$$T_sT_w = T_s^2T_v = (qI + (q-1)T_s)T_v = qT_v + (q-1)T_sT_v = qT_{sw} + (q-1)T_w$$

par la première partie de la preuve et la proposition 2.2. □

Nous pouvons constater notre relation quadratique pour T_s comme cas particulier.

Exemple 2.3. Soit une réflexion simple $s \in S$ et $w = s$. Alors $\ell(sw) = \ell(e) = 0 < \ell(w) = \ell(s) = 1$. Par la proposition précédente, nous avons la relation quadratique :

$$T_sT_s = T_s^2 = qT_e + (q-1)T_s.$$

Exemple 2.4. Soit le groupe symétrique S_3 et les réflexions simples s, t définies à l'exemple 2.2.

a) Si $w = t$, alors $\ell(sw) = \ell(st) = 2 > \ell(w) = \ell(t) = 1$ et $T_sT_t = T_{st}$.

b) Si $w = st$, alors $\ell(sw) = \ell(s^2t) = \ell(t) = 1 < \ell(w) = 2$ et $T_sT_{st} = qT_t+(q-1)T_{st}$.

c) Si $w = ts$, alors $\ell(sw) = \ell(sts) = 3 > \ell(w) = 2$ et $T_sT_{ts} = T_{sts}$.

CHAPITRE III

LES POLYNÔMES R

3.1 Introduction

Nous avons vu que $\{T_w \mid w \in S_n\}$ est une base de l'algèbre de Hecke $\mathcal{H}$ du groupe symétrique S_n sur n éléments. Grâce à cette base, nous allons définir dans ce chapitre une involution $i : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ de l'algèbre $\mathcal{H}$ et, pour chaque paire d'éléments $x, w \in W$, un polynôme $R_{x,w}(q) \in \mathbb{Z}[q]$. Il sera possible de calculer ces polynômes par récurrence sur la longueur $\ell(w)$ en utilisant les relations

$$T_sT_w = \begin{cases} qT_{sw} + (q-1)T_w, & \text{si } \ell(sw) = \ell(w) - 1; \\ T_{sw}, & \text{si } \ell(sw) = \ell(w) + 1. \end{cases} \tag{1}$$

Ces polynômes permettent de définir autrement l'ordre de Bruhat du groupe de Coxeter (W, S).

Jusqu'à présent, q désignait une puissance d'un nombre premier $q = p^e$. Pour ce chapitre, q sera un paramètre et nous allons considérer l'algèbre de Hecke $\mathcal{H}$ comme une algèbre sur l'anneau des polynômes de Laurent $\mathbb{Z}[q, q^{-1}]$ ayant $\{T_w \mid w \in W\}$ comme base et avec les mêmes relations pour les éléments de cette base. Dans d'autres textes, souvent pour décrire ceci, les auteurs utilisent une nouvelle variable v et ce que nous considérions aux deux chapitres précédents est tout simplement la spécialisation de v à q.

3.2 L'inversibilité des éléments T_w.

Lemme 3.1. a) *Pour tout $s \in S$, T_s est inversible et*

$$T_s^{-1} = q^{-1}T_s - (1 - q^{-1})T_e.$$

b) *Pour tout $w \in W$, T_w est inversible.*

Démonstration. a) Considérons $(q^{-1}T_s - (1 - q^{-1})T_e)$ et multiplions ce terme par T_s.

$$\begin{aligned}\Big(q^{-1}T_s - (1 - q^{-1})T_e\Big)T_s &= q^{-1}T_s^2 - (1 - q^{-1})T_s \\ &= q^{-1}\Big(qT_e + (q-1)T_s\Big) - (1 - q^{-1})T_s \\ &= T_e.\end{aligned}$$

Ainsi T_s est inversible et $(q^{-1}T_s - (1 - q^{-1})T_e)$ est son inverse.

b) Soit une expression réduite $s_1s_2\dots s_n$ de w. À cause des équations (1), nous avons que $T_w = T_{s_1}T_{s_2}\dots T_{s_n}$ est un produit d'éléments inversibles. Conséquemment T_w est inversible. □

3.3 L'involution i.

Dans cette section, nous allons définir une involution d'algèbres $i : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$. Cette involution permettra de définir une nouvelle base pour l'algèbre de Hecke au prochain chapitre.

Définition 3.1. Soit la fonction $i : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ étant l'unique prolongement linéaire de la fonction telle que

$$i(T_w) = T_{w^{-1}}^{-1} \quad \text{et} \quad i\Big(\sum_i a_i\, q^i\Big) = \sum_i a_i\, q^{-i} \quad \text{pour tout } \sum_i a_i q^i \in \mathbb{Z}[q, q^{-1}].$$

Nous écrirons aussi $i(h) = \bar{h}$ pour tout $h \in \mathcal{H}$.

Lemme 3.2. *i est une involution d'algèbres de Hecke.*

Démonstration. Par définition, i est linéaire. Il suffit donc de montrer que $i(T_sT_w) = i(T_s)i(T_w)$ pour tout $s \in S$ et $w \in W$ pour compléter la preuve que i est un homomorphisme d'algèbres. Nous avons deux cas possibles : soit $\ell(sw) > \ell(w)$ ou $\ell(sw) < \ell(w)$.

Si $\ell(sw) > \ell(w)$, alors nous avons que

$$\begin{aligned} i(T_sT_w) &= i(T_{sw}) = (T_{(sw)^{-1}})^{-1} = (T_{w^{-1}s^{-1}})^{-1} \\ &= (T_{w^{-1}}T_{s^{-1}})^{-1} = (T_{s^{-1}})^{-1}(T_{w^{-1}}^{-1}) \\ &= i(T_s)i(T_w) \end{aligned}$$

Si $\ell(sw) < \ell(w)$, alors, en posant $v = (sw)^{-1}$, nous avons $w^{-1} = vs$, $\ell(vs) > \ell(v)$, ainsi que

$$\begin{aligned} i(T_sT_w) &= i(qT_{sw} + (q-1)T_w) = q^{-1}T_v^{-1} + (q^{-1}-1)(T_{w^{-1}})^{-1} \\ &= q^{-1}T_v^{-1} + (q^{-1}-1)T_{vs}^{-1} = q^{-1}T_v^{-1} + (q^{-1}-1)(T_vT_s)^{-1} \\ &= q^{-1}T_v^{-1} + (q^{-1}-1)T_s^{-1}T_v^{-1} \\ &= q^{-1}T_v^{-1} + (q^{-1}-1)\Big(q^{-1}T_s - (1-q^{-1})T_e\Big)T_v^{-1} \\ &= q^{-2}(q^2-q+1)T_v^{-1} - q^{-2}(q-1)T_sT_v^{-1} \end{aligned}$$

Mais nous avons aussi

$$\begin{aligned} i(T_s)i(T_w) &= T_s^{-1}(T_{w^{-1}})^{-1} = T_s^{-1}(T_{vs})^{-1} = T_s^{-1}(T_vT_s)^{-1} = T_s^{-1}T_s^{-1}T_v^{-1} \\ &= \Big(q^{-1}T_s - (1-q^{-1})T_e\Big)\Big(q^{-1}T_s - (1-q^{-1})T_e\Big)T_v^{-1} \\ &= \Big[q^{-2}\Big((q-1)T_s + qT_e\Big) - 2q^{-1}(1-q^{-1})T_s + (1-q^{-1})^2T_e\Big]T_v^{-1} \\ &= \Big[\Big(q^{-2}(q-1) - 2q^{-1}(1-q^{-1})\Big)T_s + \Big(q^{-1} + (1-q^{-1})^2\Big)T_e\Big]T_v^{-1} \\ &= q^{-2}(q^2-q+1)T_v^{-1} - q^{-2}(q-1)T_sT_v^{-1} \end{aligned}$$

Ce qui précède, nous obtenons que i est un homomorphisme d'algèbres.

Pour vérifier que i est bien une involution, il suffit de noter que $i^2(T_s) = i(T_s^{-1}) = (T_s^{-1})^{-1} = T_s$ pour tout $s \in S$ et comme $\{T_s \mid s \in S\}$ engendre $\mathcal{H}$, alors i^2 est l'identité sur la base $\{T_w \mid w \in W\}$. Clairement i^2 sur $\mathbb{Z}[q, q^{-1}]$ est l'identité. Finalement nous obtenons que i^2 est l'identité sur $\mathcal{H}$. $\square$

Exemple 3.1. Soit le groupe symétrique S_3 sur l'ensemble $\{1, 2, 3\}$ et s, t les transpositions

$$s = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Nous allons maintenant calculer $i(T_{st})$, $i(T_{ts})$, $i(T_{sts})$.

$$\begin{aligned} i(T_{st}) &= T^{-1}_{(st)^{-1}} = (T_t T_s)^{-1} = T_s^{-1} T_t^{-1} \\ &= \Big(q^{-1}T_s - (1 - q^{-1})T_e\Big)\Big(q^{-1}T_t - (1 - q^{-1})T_e\Big) \\ &= q^{-2}T_{st} - q^{-2}(q-1)T_s - q^{-2}(q-1)T_t + q^{-2}(q-1)^2 T_e \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} i(T_{ts}) &= T^{-1}_{(ts)^{-1}} = (T_s T_t)^{-1} = T_t^{-1} T_s^{-1} \\ &= \Big(q^{-1}T_t - (1 - q^{-1})T_e\Big)\Big(q^{-1}T_s - (1 - q^{-1})T_e\Big) \\ &= q^{-2}T_{ts} - q^{-2}(q-1)T_s - q^{-2}(q-1)T_t + q^{-2}(q-1)^2 T_e \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} i(T_{sts}) &= i(T_s T_t T_s) = i(T_s)i(T_t)i(T_s) = T_s^{-1} T_t^{-1} T_s^{-1} \\ &= \Big(q^{-1}T_s - (1 - q^{-1})T_e\Big)\Big(q^{-1}T_t - (1 - q^{-1})T_e\Big)\Big(q^{-1}T_s - (1 - q^{-1})T_e\Big) \\ &= q^{-3}T_{sts} - q^{-3}(q-1)T_{st} - q^{-3}(q-1)T_{ts} + q^{-3}(q-1)^2 T_s \\ &\quad + q^{-3}(q-1)^2 T_t - q^{-3}\Big((q-1)^3 + (q-1)^2 + (q-1)\Big)T_e \end{aligned}$$

Parce que $sts = tst$, nous avons $i(T_{sts}) = i(T_{tst})$.

3.4 Le polynôme R

Nous allons maintenant exprimer $T_{w^{-1}}^{-1}$ au moyen de la base $\{T_x \mid x \in W\}$ de $\mathcal{H}$. Les polynômes $R_{x,w}(q)$ apparaîtront dans ces expressions.

Notation 3.1. Nous allons utiliser q_w à la place de $q^{\ell(w)}$, et ε_w à la place de $(-1)^{\ell(w)}$.

Définition 3.2. Étant donné une permutation $w \in S_n$, nous allons lui associer un tableau de forme $1 < 2 < \cdots < (n-1) < n$ pour lequel la $k^{\text{ième}}$-ligne est constituée des nombres $w(1), w(2), \ldots, w(k)$ en ordre croissant. Nous noterons ce tableau $B(w)$.

Exemple 3.2. Considérons la permutation

$$w = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 4 & 1 & 6 & 5 \end{pmatrix} \in S_6,$$

nous obtenons alors

$$B(w) = \begin{array}{cccccc} 3 & & & & & \\ 2 & 3 & & & & \\ 2 & 3 & 4 & & & \\ 1 & 2 & 3 & 4 & & \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 6 & \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array}.$$

Notation 3.2. Soit $w \in S_n$ et $1 \leq i \leq n$. Étant donné le tableau $B = B(w)$, $L(B, i)$ désignera la première ligne de B contenant i. Noter que les lignes sont indexées du haut vers le bas et les colonnes de gauche à droite.

Remarque 3.1. Soit une permutation $w \in S_n$ pour laquelle nous connaissons $B = B(w)$, alors il est possible de déterminer w, ainsi que w^{-1}. En effet, si i est un entier entre 1 et n, alors $w(i)$ est l'unique entier de la $i^{\text{ième}}$- ligne qui n'apparait pas dans la $(i-1)^{\text{ième}}$ - ligne et $w^{-1}(i) = L(B, i)$ pour tout $1 \leq i \leq n$.

Définition 3.3. Étant donné deux permutations

$$x = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-1 & n \\ x(1) & x(2) & \dots & x(n-1) & x(n) \end{pmatrix} \in S_n$$

et

$$y = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-1 & n \\ y(1) & y(2) & \dots & y(n-1) & y(n) \end{pmatrix} \in S_n,$$

nous écrirons $x \leq y$ si et seulement si $b_{ij}(x) \leq b_{ij}(y)$ pour tout i, j, $1 \leq j \leq i \leq n$, où $b_{ij}(x)$ (respectivement $b_{ij}(y)$) est l'entrée à la ligne i et colonne j de $B(x)$ (respectivement $B(y)$). Nous écrirons aussi $B(x) \leq B(y)$. Si $x \leq y$ et $x \neq y$, nous écrirons aussi dans ce cas $x < y$. Cette relation d'ordre est l'ordre de Bruhat pour le groupe symétrique. La définition de l'ordre de Bruhat pour un groupe de Coxeter général est différente, mais l'équivalence entre les deux définitions est une conséquence du lemme 3.6 d'un article de Deodhar (voir la référence (1)).

Exemple 3.3. Nous avons que

$$x = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 5 & 2 & 4 \end{pmatrix} \not\leq \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 1 & 5 & 3 \end{pmatrix} = y$$

parce que

$$B(x) = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 3 \\ \cline{1-2} 1 & 3 \\ \cline{1-3} 1 & 3 & 5 \\ \cline{1-4} 1 & 2 & 3 & 5 \\ \hline 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline \end{array} \quad \not\leq \quad \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 4 \\ \cline{1-2} 2 & 4 \\ \cline{1-3} 1 & 2 & 4 \\ \cline{1-4} 1 & 2 & 4 & 5 \\ \hline 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline \end{array} = B(y);$$

alors que

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix} = y_1$$

parce que

$$B(x_1) = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \cline{1-1} 2 \\ \cline{1-2} 2 & 3 \\ \cline{1-3} 1 & 2 & 3 \\ \cline{1-4} 1 & 2 & 3 & 5 \\ \hline 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline \end{array} \quad \leq \quad \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \cline{1-1} 3 \\ \cline{1-2} 2 & 3 \\ \cline{1-3} 2 & 3 & 5 \\ \cline{1-4} 1 & 2 & 3 & 5 \\ \hline 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline \end{array} = B(y_1);$$

Lemme 3.3. *Soit $w \in S_n$ et une réflexion simple s. Alors*

a) *$\leq$ est une relation d'ordre partiel sur S_n ;*

b) *$sw < w$ si et seulement si $\ell(sw) < \ell(w)$.*

Démonstration. a) est obtenu facilement de la relation d'ordre usuel dans les entiers naturels.

b) Supposons que $s = s_i$ est la transposition $s_i = (i, (i+1))$, où $1 \leq i \leq (n-1)$. Nous avons que $\ell(sw) < \ell(w)$ si et seulement si $i = w^{-1}(s)$, $(i+1) = w^{-1}(r)$ avec $r < s$, (en d'autres mots $(i+1)$ apparait à la gauche de i dans l'image de w). Maintenant $sw < w$ signifie que $B(sw) < B(w)$. Il faut noter que le tableau $B(sw)$ est obtenu de $B(w)$ en remplaçant dans toutes les lignes de $B(w)$ contenant un et un seul élement de $\{i, (i+1)\}$: cet élément de l'intersection par l'autre élément. Alors pour que $B(sw) < B(w)$, il faut que l'élément de toutes les lignes de $B(w)$ contenant un et un seul élement de $\{i, (i+1)\}$ doit être $(i+1)$ et ceci signifie que $(i+1)$ apparait à la gauche de i dans l'image de w. Nous obtenons donc que $\ell(sw) < \ell(w)$ si et seulement si $B(sw) < B(w)$ si et seulement si $sw < w$. □

Lemme 3.4. *Soit $w \in S_n$ et une réflexion simple s tels que $sw < w$. Supposons que $x < w$.*

a) *Si $sx < x$, alors $sx < sw$.*

b) *Si $sx > x$, alors $sx \leq w$ et $x \leq sw$.*

Dans tous les deux cas, nous avons $sx \leq w$.

Démonstration. Nous supposons que $s = s_i$ est la transposition $s_i = (i, (i+1))$, où $1 \leq i \leq (n-1)$. $x < w$ si et seulement si $B(x) < B(w)$. Notons aussi que $sw < w$ signifie que $(i+1)$ apparait à la gauche de i dans l'image de w ou encore dans le tableau nous avons $L(B(w), (i+1)) < L(B(w), i)$. Dans ce cas, le tableau $B(sw)$ est obtenu de $B(w)$ en remplaçant dans toutes les lignes de $B(w)$ contenant un et un seul élement de $\{i, (i+1)\}$, à savoir ici $(i+1)$: cet élément $(i+1)$ de l'intersection par élément i.

a) Si $sx < x$, alors $L(B(x), (i+1)) < L(B(x), i)$. De plus, nous avons vu dans la preuve du lemme précédent comment calculer $B(sx)$ à partir de $B(x)$. Le tableau $B(sx)$ est obtenu de $B(x)$ en remplaçant dans toutes les lignes de $B(x)$ contenant un et un seul élement de $\{i, (i+1)\}$, à savoir ici $(i+1)$: cet élément $(i+1)$ de l'intersection par élément i. Comme $B(x) < B(w)$ et par nos remarques ci-dessus à propos de $B(sx)$ et $B(sw)$, nous pouvons facilement conclure que $B(sx) < B(sw)$ et $sx < sw$.

b) Si $sx > x$, alors $L(B(x), (i+1)) > L(B(x), i)$. Le tableau $B(sx)$ est obtenu de $B(x)$ en remplaçant dans toutes les lignes de $B(x)$ contenant un et un seul élement de $\{i, (i+1)\}$, à savoir ici i : cet élément i de l'intersection par élément $(i+1)$. Comme $B(x) < B(w)$ et en comparant $B(sx)$ et $B(w)$, nous obtenons $B(sx) \leq B(w)$ et ainsi $sx \leq w$. De même, en comparant $B(x)$ et $B(sw)$, nous obtenons $B(x) \leq B(sw)$ et ainsi $x \leq sw$.

Par transitivité, nous obtenons de a) et de b) que $sx \leq w$ et le lemme est démontré.

□

Proposition 3.1. *Pour tout $x, w \in W$, définissons les polynômes de Laurent $R_{x,w}(q) \in \mathbb{Z}[q, q^{-1}]$ au moyen de l'équation*

$$\overline{T_w} = T_{w^{-1}}^{-1} = \varepsilon_w q_w^{-1} \sum_{x \in W} \varepsilon_x R_{x,w}(q) T_x.$$

Alors nous avons que

a) $R_{x,w}(q)$ *est un polynôme en* q, *c'est-à-dire que* $R_{x,w}(q) \in \mathbb{Z}[q]$ *dont le degré* $deg_q\Big(R_{x,w}(q)\Big) = \ell(w) - \ell(x)$ *;*

b) $R_{w,w}(q) = 1$ *pour tout* $w \in W$ *;*

c) $R_{x,w}(q) = 0$ *si* $x \not\leq w$.

Démonstration. Nous allons procéder par récurrence sur la longueur $\ell(w)$. Si $\ell(w) = 0$, alors $w = e$ et $\overline{T_e} = T_e$. Dans ce cas, la proposition est clairement vérifiée.

Si $\ell(w) = 1$, alors $w = s \in S$, c'est-à-dire que s est une réflexion simple. Nous avons alors que

$$\overline{T_s} = T_{s^{-1}}^{-1} = T_s^{-1} = q^{-1}T_s - (1 - q^{-1})T_e = -q^{-1}\big((q-1)T_e + (-1)T_s\big).$$

Dans ce cas, $R_{s,s} = 1$, $R_{e,s} = (q-1)$ et la proposition est clairement vérifiée.

Considérons le cas où w est tel que sa longueur $\ell(w) > 1$. Il existe une réflexion simple $s \in S$ telle que $\ell(sw) = \ell(w) - 1$. Posons $w = sv$. Alors nous avons $\ell(v) = \ell(w) - 1 < \ell(w)$, ainsi que $\varepsilon_w = -\varepsilon_v$ et $q_w = q_v q$.

$$\begin{aligned}
\overline{T_w} = T_{w^{-1}}^{-1} = T_{(sv)^{-1}}^{-1} = (T_{v^{-1}s^{-1}})^{-1} = (T_{v^{-1}}T_{s^{-1}})^{-1} &= T_s^{-1}T_{v^{-1}}^{-1} \\
&= \Big(q^{-1}T_s - (1-q^{-1})T_e\Big)T_{v^{-1}}^{-1} \\
&= \Big(q^{-1}T_s - (1-q^{-1})T_e\Big)\Big(\varepsilon_v q_v^{-1}\sum_{y\leq v}\varepsilon_y R_{y,v}(q)T_y\Big) \\
&= q^{-1}\Big(T_s - (q-1)T_e\Big)\Big(\varepsilon_v q_v^{-1}\sum_{y\leq v}\varepsilon_y R_{y,v}(q)T_y\Big) \\
&= \varepsilon_w q_w^{-1}\Big[(q-1)\sum_{y\leq v}\varepsilon_y R_{y,v}(q)T_y - \sum_{y\leq v}\varepsilon_y R_{y,v}(q)T_sT_y\Big]
\end{aligned}$$

En utilisant les équations (1), nous devons séparer la deuxième somme selon que

$sy < y$ ou $sy > y$, c'est-à-dire que le terme $\varepsilon_y R_{y,v}(q) T_s T_y$ peut prendre deux formes :

— Si $sy > y$, alors $\varepsilon_y R_{y,v}(q) T_s T_y = \varepsilon_y\ R_{y,v}(q)\ T_{sy}$.

— Si $sy < y$, alors $\varepsilon_y R_{y,v}(q) T_s T_y = (q-1)\ \varepsilon_y\ R_{y,v}(q) T_y + q\varepsilon_y\ R_{y,v}(q) T_{sy}$ et dont la première partie va annuler les termes de la première somme de l'équation.

Nous obtenons ainsi

$$\overline{T_w} = \varepsilon_w q_w^{-1} \Big[(q-1) \sum_{y \leq v} \varepsilon_y R_{y,v}(q) T_y - \sum_{\substack{y \leq v \\ sy < y}} \varepsilon_y R_{y,v}(q) T_s T_y - \sum_{\substack{y \leq v \\ sy > y}} \varepsilon_y R_{y,v}(q) T_s T_y \Big]$$

$$= \varepsilon_w q_w^{-1} \left[\begin{array}{l} (q-1) \displaystyle\sum_{\substack{y \leq v \\ sy < y}} \varepsilon_y R_{y,v}(q) T_y + (q-1) \sum_{\substack{y \leq v \\ sy > y}} \varepsilon_y R_{y,v}(q) T_y \\ - \displaystyle\sum_{\substack{y \leq v \\ sy < y}} \varepsilon_y R_{y,v}(q) \Big((q-1) T_y + q T_{sy} \Big) - \sum_{\substack{y \leq v \\ sy > y}} \varepsilon_y R_{y,v}(q) T_{sy} \end{array} \right]$$

Conséquemment

$$\overline{T_w} = \varepsilon_w q_w^{-1} \left[- \sum_{\substack{y \leq v \\ sy < y}} \varepsilon_y q R_{y,v}(q) T_{sy} + (q-1) \sum_{\substack{y \leq v \\ sy > y}} \varepsilon_y R_{y,v}(q) T_y - \sum_{\substack{y \leq v \\ sy > y}} \varepsilon_y R_{y,v}(q) T_{sy} \right]$$

En effectuant le changement de coordonnées : x à la place de sy pour les première et troisième sommes et le changement de coordonnées x à la place de y pour la deuxième somme nous obtenons ainsi

$$\overline{T_w} = \varepsilon_w q_w^{-1} \left[\sum_{\substack{sx \leq v \\ x < sx}} \varepsilon_x q R_{sx,v}(q) T_x + (q-1) \sum_{\substack{x \leq v \\ x < sx}} \varepsilon_x R_{x,v}(q) T_x + \sum_{\substack{sx \leq v \\ sx < x}} \varepsilon_x R_{sx,v}(q) T_x \right]$$

En utilisant le fait que $w = sv$, nous obtenons que $\overline{T_w}$ est égal à

$$\varepsilon_w q_w^{-1} \left[\sum_{\substack{sx \leq sw \\ x < sx}} \varepsilon_x q R_{sx,sw}(q) T_x + (q-1) \sum_{\substack{x \leq sw \\ x < sx}} \varepsilon_x R_{x,sw}(q) T_x + \sum_{\substack{sx \leq sw \\ sx < x}} \varepsilon_x R_{sx,sw}(q) T_x \right]$$

Il y a trois cas ci-dessus. Nous avons

— Si $sx \leq sw$ et $x < sx$, alors par transitivité nous obtenons $x < sx \leq sw < w$.

— Si $x \leq sw$ et $x < sx$, alors par transitivité nous obtenons $x \leq sw < w$.

— Si $sx \leq sw$ et $sx < x$, alors soit $sx = sw$, c'est-à-dire $x = w$, soit $sx < sw < w$. Dans ce dernier cas, parce que $x = s(sx) > sx$, alors par l'énoncé (b) du lemme précédent, nous obtenons que $x \leq w$.

Dans tous les cas, nous avons que $x \leq w$, avec $x = w$ seulement dans la troisième somme ci-dessus. De ce qui précède, nous avons que $R_{x,w}(q) = 0$ lorsque $x \not\leq w$ et c) est vérifié.

Si $x = w$, alors le coefficient de T_w ci-dessus est

$$\varepsilon_w q_w^{-1} \varepsilon_w R_{sw,sw}(q) = \varepsilon_w q_w^{-1} \varepsilon_w$$

et ainsi

$$R_{w,w}(q) = 1.$$

Ceci fait en sorte que (b) est maintenant démontré.

Si $x < w$ et $sx < x$, alors nous avons par le lemme précédent que $sx < sw$ et le coefficient de T_x ci-dessus est

$$\varepsilon_w q_w^{-1} \varepsilon_x R_{sx,sw}(q)$$

et ainsi

$$R_{x,w}(q) = R_{sx,sw}(q).$$

Dans ce cas $\ell(sx) = \ell(x) - 1$, $\ell(sw) = \ell(w) - 1$ et ainsi le degré de $R_{x,w}(q)$ est par récurrence un polynôme en q de degré $\ell(sw) - \ell(sx) = \ell(w) - \ell(x)$. Ceci vérifie a) dans cette situation.

Si $x < w$ et $x < sx$, alors le coefficient de T_x ci-dessus est

$$\varepsilon_w q_w^{-1} \varepsilon_x (q R_{sx,sw}(q) + (q-1) R_{x,sw}(q))$$

et ainsi

$$R_{x,w}(q) = qR_{sx,sw}(q) + (q-1)R_{x,sw}(q).$$

Dans ce cas $\ell(sx) = \ell(x)+1$, $\ell(sw) = \ell(w)-1$ et ainsi le degré de $R_{x,w}(q) = qR_{sx,sw}(q) + (q-1)R_{x,sw}(q)$ est par récurrence un polynôme en q de degré $\ell(w) - \ell(x)$. En effet, $qR_{sx,sw}(q)$ est un polynôme de degré $\ell(sw) - \ell(sx) + 1 = \ell(w) - 1 - (\ell(x)+1) + 1 = \ell(w) - \ell(x) - 1$, alors que $(q-1)R_{x,sw}(q)$ est un polynôme de degré $\ell(sw) - \ell(x) + 1 = \ell(w) - 1 - \ell(x) + 1 = \ell(w) - \ell(x)$. Ceci vérifie a) dans cette situation.

Ceci complète la preuve.

$\square$

Remarque 3.2. Dans le cas où $sw < w$, $x < w$, $x < sx$, nous n'aurons pas nécessairement que $sx \leq sw$. Ceci signifie que dans la formule $R_{x,w}(q) = qR_{sx,sw}(q) + (q-1)R_{x,sw}(q)$, le terme $R_{sx,sw}(q) = 0$. Un exemple où cette situation se produit est la suivante dans le groupe symétrique S_4 :

$$w = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad s = s_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Exemple 3.4. Pour le groupe symétrique $S_2 = \{ e \ , \ s \}$, où s est la transposition

$$s = s_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},$$

nous obtenons facilement du lemme 3.1 que les seuls polynômes non-nuls sont

$$R_{e,e}(q) = R_{s,s}(q) = 1 \qquad \text{et} \qquad R_{e,s}(q) = q-1.$$

Exemple 3.5. Pour le groupe symétrique $S_3 = \{ e \ , \ s \ , \ t \ , \ st \ , \ ts \ , \ sts \}$, où

$$s = s_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad t = s_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

nous obtenons de l'exemple 3.1 et du lemme 3.1 que

$$R_{x,e}(q) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = e, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$R_{x,s}(q) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = s\,; \\ (q-1) & \text{si } x = e\,; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$R_{x,t}(q) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = t\,; \\ (q-1) & \text{si } x = e\,; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$R_{x,st}(q) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = st\,; \\ (q-1) & \text{si } x = s \text{ ou } x = t\,; \\ (q-1)^2 & \text{si } x = e\,; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$R_{x,ts}(q) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = ts\,; \\ (q-1) & \text{si } x = s \text{ ou } x = t\,; \\ (q-1)^2 & \text{si } x = e\,; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$R_{x,sts}(q) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = sts\,; \\ (q-1) & \text{si } x = st \text{ ou } x = ts\,; \\ (q-1)^2 & \text{si } x = s \text{ ou } x = t\,; \\ (q^3 - 2q^2 + 2q - 1) & \text{si } x = e\,; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Remarque 3.3. Il y a ainsi un algorithme simple pour calculer les polynômes $R_{x,w}$ par récurrence sur la longueur $\ell(w)$ de w en utilisant le fait que $R_{w,w} = 1$, $R_{x,w} = 0$ pour $x \not\leq w$. Soit une réflexion simple s tel que $sw < w$. Par la preuve de la proposition précédente, alors, il y a deux possibilités :

$$R_{x,w}(q) = \begin{cases} R_{sx,sw}(q), & \text{si } sx < x\,; \\ (q-1)R_{x,sw}(q) + qR_{sx,sw}(q), & \text{si } sx > x. \end{cases}$$

Chacun des termes dans ces formules ci-dessus sont définis.

3.5 Propriétés des polynômes R

Proposition 3.2. *Soit deux permutations $x, w \in S_n$. Alors*

a) *l'évaluation du polynôme $R_{x,w}(q)$ à $q = 1$ est égal à*

$$R_{x,w}(q)\big|_{q=1} = \begin{cases} 0 & si\ x \neq w\,; \\ 1 & si\ x = w. \end{cases}$$

b) *$R_{x,w}(q)$ est un polynôme monique en $(q-1)$ de degré $(\ell(w) - \ell(x))$ dont tous les coefficients sont des entiers ≥ 0.*

Démonstration. a) Nous procédons par récurrence sur la longueur $\ell(w)$ de w. Si w est tel que $\ell(w) = 0$, alors $w = e$ et a) est trivialement vérifié. Nous pouvons donc supposer que $\ell(w) > 0$. Si $x \not\leq w$, alors $R_{x,w}(q) = 0$ et a) est encore vérifiée dans ce cas.

Si $x = w$, alors nous avons que $R_{x,w}(q) = R_{w,w}(q) = 1$ et a) est aussi vérifié.

Supposons maintenant que $x < w$ et prenons une réflexion simple s telle que $sw < w$. Une telle réflexion simple s existe parce que $\ell(w) > 0$. Nous obtenons ainsi que $R_{x,w}(q)\big|_{q=1} = R_{sx,sw}(q)\big|_{q=1}$, parce que

$$R_{x,w}(q)\big|_{q=1} = \begin{cases} R_{sx,sw}(q)\big|_{q=1}, & \text{si } sx < x\,; \\ \big[(q-1)R_{x,sw}(q) + qR_{sx,sw}(q)\big]\big|_{q=1} = R_{sx,sw}(q)\big|_{q=1}, & \text{si } sx > x. \end{cases}$$

Par récurrence, nous avons que

$$R_{sx,sw}(q)\big|_{q=1} = \begin{cases} 0 & \text{si } sx \neq sw\,; \\ 1 & \text{si } sx = sw. \end{cases}$$

De ceci, nous pouvons conclure que l'énoncé a) est vérifié.

b) Nous procédons comme ci-dessus par récurrence sur la longueur $\ell(w)$ de w. Les cas où soit $w = e$, soit $x \neq w$ ou encore $x = w$ sont triviaux. Nous supposerons donc que $\ell(w) > 0$ et $x < w$. Prenons une réflexion simple s telle que $sw < w$. Une telle réflexion simple s existe parce que $\ell(w) > 0$. Nous avons que

$$R_{x,w}(q) = \begin{cases} R_{sx,sw}(q), & \text{si } sx < x\,; \\ (q-1)R_{x,sw}(q) + qR_{sx,sw}(q), & \text{si } sx > x. \end{cases}$$

Si $sx < x$, alors par récurrence $R_{sx,sw}(q)$ est un polynôme monique en $(q-1)$ de degré $(\ell(sw) - \ell(sx)) = (\ell(w) - 1) - (\ell(x) - 1) = (\ell(w) - \ell(x))$ dont tous les coefficients sont des entiers ≥ 0. Dans ce cas, b) est vérifié.

Si $sx > x$, alors nous avons que

$$\begin{aligned}R_{x,w}(q) &= (q-1)R_{x,sw}(q) + qR_{sx,sw}(q)\\ &= (q-1)\left[R_{x,sw}(q) + R_{sx,sw}(q)\right] + R_{sx,sw}(q)\end{aligned}$$

Par récurrence, $R_{x,sw}(q)$ est un polynôme monique en $(q-1)$ de degré $\ell(sw) - \ell(x) = \ell(w) - 1 - \ell(x) = \ell(w) - \ell(x) - 1$ et $R_{sx,sw}(q)$ est un polynôme monique en $(q-1)$ de degré $\ell(sw) - \ell(sx) = (\ell(w)-1) - (\ell(x)+1) = \ell(w) - \ell(x) - 2$. De cette observation, nous pouvons conclure que $R_{x,w}(q)$ est un polynôme monique en $(q-1)$ de degré $\ell(w) - \ell(x)$. Ceci conclut la preuve de b). □

Exemple 3.6. Considérons la permutation

$$w = s_1s_2s_3s_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \in S_4$$

Nous allons calculer $R_{x,w}$ pour tout $x \in S_4$ de deux façons.

Première façon en utilisant la définition de l'involution :

$$\begin{aligned}(T_{w^{-1}})^{-1} &= (T_{s_1s_3s_2s_1})^{-1} = T_{s_1}^{-1}T_{s_2}^{-1}T_{s_3}^{-1}T_{s_1}^{-1}\\ &= \left(q^{-1}T_{s_1} - (1-q^{-1})T_e\right)\left(q^{-1}T_{s_2} - (1-q^{-1})T_e\right)\\ &\quad \left(q^{-1}T_{s_3} - (1-q^{-1})T_e\right)\left(q^{-1}T_{s_1} - (1-q^{-1})T_e\right)\\ &= q^{-4}\begin{bmatrix} T_{s_1s_2s_3s_1} - (q-1)T_{s_1s_2s_3} - (q-1)T_{s_1s_2s_1} - (q-1)T_{s_2s_3s_1}\\ + (q-1)^2T_{s_1s_2} + (q-1)^2T_{s_2s_1} + (q-1)^2T_{s_2s_3} + (q-1)^2T_{s_3s_1}\\ - (q-1)^3T_{s_1} - (q-1)^3T_{s_2} - \left((q-1)^3 + q(q-1)\right)T_{s_3} -\\ + \left((q-1)^4 + q(q-1)^2\right)T_e \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Ainsi

$$R_{x,w} = \begin{cases} 1 & \text{si } x = s_1s_2s_3s_1\,; \\ (q-1) & \text{si } x \in \{s_1s_2s_3, s_1s_2s_1, s_2s_3s_1\}\,; \\ (q-1)^2 & \text{si } x \in \{s_1s_2, s_2s_3, s_2s_1, s_3s_1\}\,; \\ (q-1)^3 & \text{si } x \in \{s_1, s_2\}\,; \\ (q-1)^3 + q(q-1) & \text{si } s = s_3\,; \\ (q-1)^4 + q(q-1)^2 & \text{si } x = e\,; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Deuxième façon en utilisant les règles de récurrence :

Ici le tableau $B(w)$ est

$$B(w) = \begin{array}{|c|c|c|c|} \cline{1-1} 3 \\ \cline{1-2} 2 & 3 \\ \cline{1-3} 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline \end{array}$$

nous pouvons donc déterminer tous les tableaux $B(x)$ tels que $B(x) \leq B(w)$ et ainsi tous les éléments $x \in S_4$ tels que $x \leq w$. Nous obtenons que ces éléments x sont

$x \in \{e, s_1, s_2, s_3, s_1s_2, s_1s_3, s_2s_3, s_2s_1, s_1s_2s_3, s_1s_2s_1, s_2s_3s_1, w = s_1s_2s_3s_1\} = I[e, w]$

et $R_{x,w}(q) = 0$ si $x \notin I[e, w]$.

Nous devons donc nous concentrer sur les x appartenant à $I[e, w]$. Comme nous procédons par récurrence, il faut aussi connaître les polynômes $R_{x',s_2s_1s_3}(q)$, $R_{x',s_1s_3}(q)$ et $R_{x',s_1}(q)$ pour tous les éléments $x' \in S_4$. En sachant que

$$R_{x',s_1}(q) = \begin{cases} 1, & \text{si } x' = s_1\,; \\ (q-1), & \text{si } x' = e\,; \\ 0, & \text{sinon}\,; \end{cases}$$

$$R_{x',s_3s_1}(q) = \begin{cases} 1, & \text{si } x' = s_1s_3\,; \\ (q-1), & \text{si } x' \in \{s_1, s_3\}\,; \\ (q-1)^2, & \text{si } x' = e\,; \\ 0, & \text{sinon}\,; \end{cases}$$

et

$$R_{x',s_2s_3s_1}(q) = \begin{cases} 1, & \text{si } x' = s_2s_3s_1\,; \\ (q-1), & \text{si } x' \in \{s_2s_1, s_2s_3, s_3s_1\}\,; \\ (q-1)^2, & \text{si } x' \in \{s_1, s_2, s_3\}\,; \\ (q-1)^3, & \text{si } x' = e\,; \\ 0, & \text{sinon}\,; \end{cases}$$

alors nous pouvons calculer par les règles de récurrence les polynômes $R_{x,w}(q)$.

$$R_{s_1s_2s_3s_1,\ s_1s_2s_3s_1}(q) = 1;$$

$$R_{s_1s_2s_3,\ s_1s_2s_3s_1}(q) = R_{e,s_1}(q) = (q-1);$$

$$R_{s_1s_2s_1,\ s_1s_2s_3s_1}(q) = R_{e,s_3}(q) = (q-1);$$

$$R_{s_2s_3s_1,\ s_1s_2s_3s_1}(q) = (q-1)R_{s_2s_3s_1,\ s_2s_3s_1}(q) + qR_{s_1s_2s_3s_1,\ s_2s_3s_1}(q) = (q-1);$$

$$R_{s_1s_2,\ s_1s_2s_3s_1}(q) = R_{e,s_3s_1} = (q-1)^2;$$

$$R_{s_2s_3,\ s_1s_2s_3s_1}(q) = (q-1)R_{s_2s_3,\ s_2s_3s_1}(q) + qR_{s_1s_2s_3,\ s_2s_3s_1} = (q-1)^2;$$

$$R_{s_2s_1,\ s_1s_2s_3s_1}(q) = (q-1)R_{s_2s_1,\ s_2s_3s_1} + qR_{s_1s_2s_1,\ s_2s_3s_1} = (q-1)^2;$$

$$R_{s_3s_1,\ s_1s_2s_3s_1}(q) = R_{s_3,\ s_2s_3s_1}(q) = (q-1)^2;$$

$$R_{s_1,\ s_1s_2s_3s_1}(q) = R_{e,s_2s_3s_1}(q) = (q-1)^3;$$

$$R_{s_2,\ s_1s_2s_3s_1}(q) = (q-1)R_{s_2,\ s_2s_3s_1}(q) + qR_{s_1s_2,\ s_2s_3s_1}(q) = (q-1)^3;$$

$$R_{s_3,\ s_1s_2s_3s_1}(q) = (q-1)R_{s_3,\ s_2s_3s_1} + qR_{s_1s_3,\ s_2s_3s_1} = (q-1)^3 + q(q-1);$$

$$R_{e,\ s_1s_2s_3s_1}(q) = (q-1)R_{e,\ s_2s_3s_1} + qR_{s_1,\ s_2s_3s_1} = (q-1)^4 + q(q-1)^2.$$

Ce sont les mêmes polynômes que ceux obtenus au moyen de la première façon.

3.6 Cas particulier d'un élément de Coxeter

Nous allons maintenant décrire $\overline{T_w}$ pour l'élément T_w où $w \in S_n$ est un élément de Coxeter, plus précisément

$$w = s_1s_2\ldots s_{n-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & (n-1) & n \\ 2 & 3 & 4 & \ldots & n & 1 \end{pmatrix}$$

Nous allons premièrement décrire les éléments $x \in S_n$ tels que $x \leq w$ en notant que

$$B(x) \leq B(w) = \begin{array}{cccccc}
2 & & & & & \\
2 & 3 & & & & \\
2 & 3 & 4 & & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & & & \\
2 & 3 & 4 & \cdots & n & \\
1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n
\end{array}$$

Lemme 3.5. *Soit l'ensemble $\mathcal{P}(\{1,2,\ldots,n-1\})$ des sous-ensembles de $\{1,2,\ldots,n-1\}$.*

a) *Si $I \in \mathcal{P}(\{1,2,\ldots,n-1\})$, alors il existe un unique élément $x_I \in S_n$ défini par le fait que le tableau*

$$B(w) - B(x_I) = (b_{i,j})_{1 \leq j \leq i \leq n}$$

est tel que $b_{i,j} \in \{0,1\}$ et

$$b_{i,j} = \begin{cases} 0, & si\ i = n\,; \\ 1, & si\ i' \leq i \leq (n-1),\ 1 \leq j \leq i' \text{ pour au moins un } i' \in I\,; \\ 0, & sinon. \end{cases}$$

En particulier, $x_I \leq w$.

b) *La fonction*

$$\mathcal{P}(\{1,2,\ldots,n-1\}) \longrightarrow \{x \in S_n \mid x \leq w\} \quad \text{définie par} \quad I \longmapsto x_I$$

est une bijection.

c) *Si $I = \{i_1, i_2, \ldots, i_k\} \in \mathcal{P}(\{1,2,\ldots,n-1\})$ avec $i_1 < i_2 < \cdots < i_k$, alors $x_I = s_1 s_2 \ldots \widehat{s_{i_1}} \ldots \widehat{s_{i_2}} \ldots \widehat{s_{i_k}} \ldots s_{n-2} s_{n-1}$, où $\widehat{s_{i_j}}$ signifie que s_{i_j} n'apparait comme facteur dans le produit.*

Démonstration. a) Étant donné $I = \{i_1, i_2, \ldots, i_k\} \in \mathcal{P}(\{1,2,\ldots,n-1\})$ avec $i_1 < i_2 < \cdots < i_k$. Posons aussi $i_0 = 0$ et $i_{k+1} = n$. Considérons la permutation

x_I définie pour $i \in \{1, 2, \ldots, (n-1), n\}$ par

$$x_I(i) = \begin{cases} (i_{j-1}+1), & \text{si } i = i_j \text{ pour } j \in \{1, 2, \ldots, k, k+1\}\,; \\ i+1, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Il est facile de vérifier que $x_I \in S_n$ et que x_I satisfait les conditions de a). L'unicité est une conséquence de la remarque 3.1.

b) Nous avons donc une fonction

$$\mathcal{P}(\{1, 2, \ldots, n-1\}) \longrightarrow \{x \in S_n \mid x \leq w\} \quad \text{définie par} \quad I \longmapsto x_I$$

injective. Pour compléter la preuve, il suffit de noter que la cardinalité de $\{x \in S_n \mid x \leq w\}$ est au plus 2^{n-1}. Il suffit de compter les tableaux possibles $B \leq B(w)$. Pour la première ligne de B, il faut choisir un élément parmi $\{1, 2\}$ et il y a donc deux choix possibles. Pour la seconde ligne, il faut choisir un élément parmi $\{1, 2, 3\}$, mais cet élément ne doit pas appartenir à la première ligne. Il y a alors deux choix possibles. Nous poursuivons ainsi pour la $i^{\text{ième}}$ - ligne où $i < n$, il faut choisir un élément parmi $\{1, 2, \ldots, (i+1)\}$, mais cet élément ne doit pas appartenir à la $(i-1)^{\text{ième}}$ - ligne. Il y a alors deux choix possibles. Pour la $n^{\text{ième}}$ - ligne, il y a un seul choix. Donc pour les tableaux possibles B, il y a 2^{n-1} possibilités et ainsi la cardinalité $|\{x \in S_n \mid x \leq w\}| \leq 2^{n-1}$. La preuve de b) est complétée.

c) Nous avons décrit ci-dessus x_I. Il est facile de vérifier que

$$x_I = s_1 s_2 \ldots \widehat{s_{i_1}} \ldots \widehat{s_{i_2}} \ldots \widehat{s_{i_k}} \ldots s_{n-2} s_{n-1}.$$

$\square$

Proposition 3.3. *Soit l'élément de Coxeter w ci-dessus.*

a) *Nous avons*

$$\overline{T_w} = q^{-n} \left(\sum_{I \in \mathcal{P}(\{1,2,\ldots,n-1\})} (-1)^{|I|} (q-1)^{|I|} T_{x_I} \right).$$

b) *Pour tout $I \in \mathcal{P}(\{1,2,\ldots,n-1\})$, nous avons $R_{x_I,w} = (q-1)^{|I|}$.*

Démonstration. a) Nous allons procéder par récurrence sur n. Le cas $n = 2$ est traité au lemme 3.1 a). Nous pouvons supposer que $n > 2$. Posons $v = s_1 s_2 \ldots s_{n-2}$. Nous avons que $w = v s_{n-1}$.

$$v = s_1 s_2 \ldots s_{n-2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & (n-2) & (n-1) & n \\ 2 & 3 & 4 & \ldots & (n-1) & 1 & n \end{pmatrix}$$

Nous pouvons considérer v comme une permutation de $\{1,2,\ldots,(n-1)\}$ et est un élément de Coxeter comme ci-dessus mais pour $n-1$. Par récurrence, nous obtenons que

$$\overline{T_v} = q^{-(n-1)} \left(\sum_{I \in \mathcal{P}(\{1,2,\ldots,n-2\})} (-1)^{|I|}(q-1)^{|I|} T_{x_I} \right).$$

Maintenant

$$\begin{aligned}
\overline{T_w} &= \overline{T_{vs_{n-1}}} = \overline{T_v T_{s_{n-1}}} \\
&= q^{-(n-1)} \left(\sum_{I \in \mathcal{P}(\{1,2,\ldots,n-2\})} (-1)^{|I|}(q-1)^{|I|} T_{x_I} \right) \left(q^{-1} T_{s_{n-1}} - (1-q^{-1}) T_e \right) \\
&= q^{-n} \left(\sum_{I \in \mathcal{P}(\{1,2,\ldots,n-2\})} (-1)^{|I|}(q-1)^{|I|} T_{x_I} \right) \left(T_{s_{n-1}} - (q-1) T_e \right) \\
&= q^{-n} \left(\begin{array}{l} \displaystyle\sum_{I \in \mathcal{P}(\{1,2,\ldots,n-2\})} (-1)^{|I|}(q-1)^{|I|} T_{x_I s_{n-1}} \\ \displaystyle + \sum_{I \in \mathcal{P}(\{1,2,\ldots,n-2\})} (-1)^{|I|+1}(q-1)^{|I|+1} T_{x_I} \end{array} \right)
\end{aligned}$$

La première somme correspond aux sous-ensembles I de $\{1,2,\ldots,(n-1)\}$ ne contenant pas $(n-1)$ et la deuxième somme correspond aux sous-ensembles I de $\{1,2,\ldots,(n-1)\}$ contenant $(n-1)$. Comme $x_I \in S_{n-1}$ pour $I \in \mathcal{P}(\{1,2,\ldots,(n-$

2)}, alors nous avons $x_I(n) = n$ et $\ell(x_I s_{n-1}) = \ell(x_I) + 1$ lorsque nous considérons x_I comme un élément de S_n, . En effet nous avons une inversion de plus dans la permutation $x_I s_{n-1}$ que dans x_I. Nous obtenons ainsi la formule en a).
b) est une conséquence facile de a).

□

3.7 Formule de Deodhar pour le calcul des polynômes R

Nous allons maintenant généraliser le résultat précédent pour un élément quelconque. Cette généralisation est due à Deodhar. Nous allons seulement l'énoncer et l'illustrer dans un exemple, mais ne la démontrerons pas. Il s'agit du théorème 1.3 de la référence (2).

Remarque 3.4. Il est bien connu que nous pouvons exprimer toute permutation w de S_n comme un produit $s_{i_1}s_{i_2}\ldots s_{i_k}$ de réflexions simples et pour lequel $k = \ell(w)$. Une telle expression est dite réduite.

Dans le reste de cette section, nous fixons une expression réduite $\underline{w} = s_{i_1}s_{i_2}\ldots s_{i_k}$ de w, où $k = \ell(w)$.

Définition 3.4. Une sous-expression de $\underline{w}$ est une suite $\underline{\sigma} = (\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k)$ d'éléments de S_n tels que

— $\sigma_0 = e$;

— $\sigma_{j-1}^{-1}\sigma_j$ est soit e, soit s_{i_j} pour tout $1 \leq j \leq k$.

Nous dirons de plus qu'une sous-expression $\underline{\sigma}$ est distinguée si et seulement si $\sigma_j \leq \sigma_{j-1}s_{i_j}$ pour tout $1 \leq j \leq k$. Nous noterons par $\mathcal{D}(\underline{w})$ l'ensemble des sous-expressions distinguées de $\underline{w}$.

Notation 3.3. Soit une sous-expression distinguée $\underline{\sigma} = (\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k) \in \mathcal{D}(\underline{w})$ de $\underline{w}$. Alors nous notons

$$m(\underline{\sigma}) = \Big|\{1 \leq j \leq k \mid \sigma_{j-1} > \sigma_j\}\Big| \quad \text{et} \quad n(\underline{\sigma}) = \Big|\{1 \leq j \leq k \mid \sigma_{j-1} = \sigma_j\}\Big|.$$

Nous noterons par

$$\pi : \mathcal{D}(\underline{w}) \longrightarrow S_n : \qquad \text{la fonction définie par} \qquad \pi(\underline{\sigma}) = \pi(\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k) = \sigma_k.$$

Proposition 3.4 (Deodhar). *Soit une expression réduite $\underline{w} = s_{i_1}s_{i_2}\ldots s_{i_k}$ de w, où $k = \ell(w)$ et $x \in S_n$ tel que $x \leq w$. Alors*

$$R_{x,w}(q) = \sum_{\underline{\sigma}} q^{m(\underline{\sigma})}(q-1)^{n(\underline{\sigma})}$$

où les sous-expressions $\underline{\sigma}$ apparaissant dans cette somme parcourent l'ensemble $\mathcal{D}(\underline{w})$ et sont telles que $\pi(\underline{\sigma}) = x$.

Exemple 3.7. Calculons $R_{x,w}$ au moyen de la formule de Deodhar pour tous les éléments de S_3. En utilisant les notations de l'exemple 3.5, nous avons que les éléments de S_3 sont $\{e, s, t, st, ts, sts\}$.

Si $w = e$, alors $k = 0$. Dans ce cas, $\mathcal{D}(e) = \{\underline{\sigma} = e\}$. De la formule de Deodhar, nous obtenons

$$R_{x,e}(q) = \begin{cases} 1, & \text{si } x = e\,; \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Si $w = s$, alors $k = 1$. Dans ce cas, $\mathcal{D}(s) = \{\underline{\sigma}(1) = (e,e),\ \underline{\sigma}(2) = (e,s)\}$. Nous avons

- Pour $\underline{\sigma}(1)$, nous avons $n(\underline{\sigma}(1)) = 1$, $m(\underline{\sigma}(1)) = 0$ et $\pi(\underline{\sigma}(1)) = e$.
- Pour $\underline{\sigma}(2)$, nous avons $n(\underline{\sigma}(2)) = 0$, $m(\underline{\sigma}(2)) = 0$ et $\pi(\underline{\sigma}(2)) = s$.

De la formule de Deodhar, nous obtenons

$$R_{x,s}(q) = \begin{cases} 1, & \text{si } x = s\,; \\ (q-1), & \text{si } x = e\,; \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

De la même façon, nous avons

$$R_{x,t}(q) = \begin{cases} 1, & \text{si } x = t\,; \\ (q-1), & \text{si } x = e\,; \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Si $w = st$, alors $k = 2$. Dans ce cas,

$$\mathcal{D}(st) = \{\underline{\sigma}(1) = (e,e,e),\ \underline{\sigma}(2) = (e,e,t),\ \underline{\sigma}(3) = (e,s,s),\ \underline{\sigma}(4) = (e,s,st)\}$$

— Pour $\underline{\sigma}(1)$, nous avons $n(\underline{\sigma}(1)) = 2$, $m(\underline{\sigma}(1)) = 0$ et $\pi(\underline{\sigma}(1)) = e$.

— Pour $\underline{\sigma}(2)$, nous avons $n(\underline{\sigma}(2)) = 1$, $m(\underline{\sigma}(2)) = 0$ et $\pi(\underline{\sigma}(2) = t$.

— Pour $\underline{\sigma}(3)$, nous avons $n(\underline{\sigma}(3)) = 1$, $m(\underline{\sigma}(3)) = 0$ et $\pi(\underline{\sigma}(3)) = s$.

— Pour $\underline{\sigma}(4)$, nous avons $n(\underline{\sigma}(4)) = 0$, $m(\underline{\sigma}(4)) = 0$ et $\pi(\underline{\sigma}(4)) = st$.

De la formule de Deodhar, nous avons

$$R_{x,st}(q) = \begin{cases} 1, & \text{si } x = st\,; \\ (q-1), & \text{si } x = t \text{ ou } x = s\,; \\ (q-1)^2, & \text{si } x = e\,; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

De même,

$$R_{x,ts}(q) = \begin{cases} 1, & \text{si } x = ts\,; \\ (q-1), & \text{si } x = t \text{ ou } x = s\,; \\ (q-1)^2, & \text{si } x = e\,; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Si $w = sts$, alors $k = 3$. Dans ce cas,

$$\mathcal{D}(sts) = \begin{Bmatrix} \underline{\sigma}(1) = (e,e,e,e),\ \underline{\sigma}(2) = (e,e,e,s),\ \underline{\sigma}(3) = (e,e,t,t),\ \underline{\sigma}(4) = (e,e,t,ts), \\ \underline{\sigma}(5) = (e,s,s,e),\ \underline{\sigma}(6) = (e,s,st,st),\ \underline{\sigma}(7) = (e,s,st,sts) \end{Bmatrix}$$

Il faut noter que la suite (e, s, s, s) n'est pas distinguée.

— Pour $\underline{\sigma}(1)$, nous avons $n(\underline{\sigma}(1)) = 3$, $m(\underline{\sigma}(1)) = 0$ et $\pi(\underline{\sigma}(1)) = e$

— Pour $\underline{\sigma}(2)$, nous avons $n(\underline{\sigma}(2)) = 2$, $m(\underline{\sigma}(2)) = 0$ et $\pi(\underline{\sigma}(2)) = s$

— Pour $\underline{\sigma}(3)$, nous avons $n(\underline{\sigma}(3)) = 2$, $m(\underline{\sigma}(3)) = 0$ et $\pi(\underline{\sigma}(3)) = t$

— Pour $\underline{\sigma}(4)$, nous avons $n(\underline{\sigma}(4)) = 1$, $m(\underline{\sigma}(4)) = 0$ et $\pi(\underline{\sigma}(4)) = ts$

— Pour $\underline{\sigma}(5)$, nous avons $n(\underline{\sigma}(5)) = 1$, $m(\underline{\sigma}(5)) = 1$ et $\pi(\underline{\sigma}(5)) = e$

— Pour $\underline{\sigma}(6)$, nous avons $n(\underline{\sigma}(6)) = 1$, $m(\underline{\sigma}(6)) = 0$ et $\pi(\underline{\sigma}(6)) = st$

— Pour $\underline{\sigma}(7)$, nous avons $n(\underline{\sigma}(7)) = 0$, $m(\underline{\sigma}(7)) = 0$ et $\pi(\underline{\sigma}(7)) = sts$

De la formule de Deodhar, nous avons

$$R_{x,st}(q) = \begin{cases} 1, & \text{si } x = sts\,; \\ (q-1), & \text{si } x = st \text{ ou } x = ts\,; \\ (q-1)^2, & \text{si } x = s \text{ ou } x = t\,; \\ (q-1)^3 + q(q-1), & \text{si } x = e\,; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exemple 3.8. Calculons $R_{x,w}$ au moyen de la formule de Deodhar pour l'élément

$w = s_1s_2s_3s_1$ de S_4. Dans ce cas,

$$\mathcal{D}(w) = \begin{Bmatrix} \underline{\sigma}(1) = (e,e,e,e,e),\ \underline{\sigma}(2) = (e,e,e,e,s_1),\ \underline{\sigma}(3) = (e,e,e,s_3,s_3), \\ \underline{\sigma}(4) = (e,e,e,s_3,s_3s_1),\ \underline{\sigma}(5) = (e,e,s_2,s_2,s_2), \\ \underline{\sigma}(6) = (e,e,s_2,s_2,s_2s_1),\ \underline{\sigma}(7) = (e,e,s_2,s_2s_3,s_2s_3), \\ \underline{\sigma}(8) = (e,e,s_2,s_2s_3,s_2s_3s_1),\ \underline{\sigma}(9) = (e,s_1,s_1,s_1,e), \\ \underline{\sigma}(10) = (e,s_1,s_1,s_1s_3,s_3),\ \underline{\sigma}(11) = (e,s_1,s_1s_2,s_1s_2,s_1s_2), \\ \underline{\sigma}(12) = (e,s_1,s_1s_2,s_1s_2,s_1s_2s_1),\ \underline{\sigma}(13) = (e,s_1,s_1s_2,s_1s_2s_3,s_1s_2s_3), \\ \underline{\sigma}(14) = (e,s_1,s_1s_2,s_1s_2s_3,s_1s_2s_3s_1) \end{Bmatrix}$$

Il faut noter que les deux suites (e,s_1,s_1,s_1,s_1) et $(e,s_1,s_1,s_1s_3,s_1s_3)$ ne sont pas distinguées.

— Pour $\underline{\sigma}(1)$, nous avons $n(\underline{\sigma}(1)) = 4$, $m(\underline{\sigma}(1)) = 0$ et $\pi(\underline{\sigma}(1)) = e$

— Pour $\underline{\sigma}(2)$, nous avons $n(\underline{\sigma}(2)) = 3$, $m(\underline{\sigma}(2)) = 0$ et $\pi(\underline{\sigma}(2)) = s_1$

— Pour $\underline{\sigma}(3)$, nous avons $n(\underline{\sigma}(3)) = 3$, $m(\underline{\sigma}(3)) = 0$ et $\pi(\underline{\sigma}(3)) = s_3$

— Pour $\underline{\sigma}(4)$, nous avons $n(\underline{\sigma}(4)) = 2$, $m(\underline{\sigma}(4)) = 0$ et $\pi(\underline{\sigma}(4)) = s_3s_1$

— Pour $\underline{\sigma}(5)$, nous avons $n(\underline{\sigma}(5)) = 3$, $m(\underline{\sigma}(5)) = 0$ et $\pi(\underline{\sigma}(5)) = s_2$

— Pour $\underline{\sigma}(6)$, nous avons $n(\underline{\sigma}(6)) = 2$, $m(\underline{\sigma}(6)) = 0$ et $\pi(\underline{\sigma}(6)) = s_2s_1$

— Pour $\underline{\sigma}(7)$, nous avons $n(\underline{\sigma}(7)) = 2$, $m(\underline{\sigma}(7)) = 0$ et $\pi(\underline{\sigma}(7)) = s_2s_3$

— Pour $\underline{\sigma}(8)$, nous avons $n(\underline{\sigma}(8)) = 1$, $m(\underline{\sigma}(8)) = 0$ et $\pi(\underline{\sigma}(8)) = s_2s_3s_1$

— Pour $\underline{\sigma}(9)$, nous avons $n(\underline{\sigma}(9)) = 2$, $m(\underline{\sigma}(9)) = 1$ et $\pi(\underline{\sigma}(9)) = e$

— Pour $\underline{\sigma}(10)$, nous avons $n(\underline{\sigma}(10)) = 1$, $m(\underline{\sigma}(10)) = 1$ et $\pi(\underline{\sigma}(10)) = s_3$

— Pour $\underline{\sigma}(11)$, nous avons $n(\underline{\sigma}(11)) = 2$, $m(\underline{\sigma}(11)) = 0$ et $\pi(\underline{\sigma}(11)) = s_1s_2$

— Pour $\underline{\sigma}(12)$, nous avons $n(\underline{\sigma}(12)) = 1$, $m(\underline{\sigma}(12)) = 0$ et $\pi(\underline{\sigma}(12)) = s_1s_2s_1$

— Pour $\underline{\sigma}(13)$, nous avons $n(\underline{\sigma}(13)) = 1$, $m(\underline{\sigma}(13)) = 0$ et $\pi(\underline{\sigma}(13)) = s_1s_2s_3$

— Pour $\underline{\sigma}(14)$, nous avons $n(\underline{\sigma}(14)) = 0$, $m(\underline{\sigma}(14)) = 0$ et $\pi(\underline{\sigma}(14)) = s_1s_2s_3s_1$

De la formule de Deodhar, nous avons

$$R_{x,w}(q) = \begin{cases} 1, & \text{si } x = s_1s_2s_3s_1\,; \\ (q-1), & \text{si } x \in \{s_1s_2s_1,\ s_1s_2s_3,\ s_2s_3s_1\}\,; \\ (q-1)^2, & \text{si } x \in \{s_3s_1,\ s_2s_1,\ s_2s_3,\ s_1s_2\}\,; \\ (q-1)^3, & \text{si } x \in \{s_1,\ s_2\}\,; \\ (q-1)^3 + q(q-1), & \text{si } x = s_3\,; \\ (q-1)^4 + q(q-1)^2, & \text{si } x = e\,; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ce sont les mêmes polynômes que ceux obtenus à l'exemple 3.6.

CHAPITRE IV

LES BASES ET LES POLYNÔMES DE KAZHDAN-LUSZTIG

4.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous allons construire une nouvelle base pour l'algèbre de Hecke, composée d'élément C_w invariant sous l'involution définie au chapitre 3. Il s'agit de la base de Kazhdan-Lusztig de $\mathcal{H}$. Nous définirons ensuite les polynômes de Kazhdan-Lusztig. Ces polynômes sont obtenus au moyen du changement de bases entre les bases de Kazhdan-Lusztig $\{C_w \mid w \in S_n\}$ et standard $\{T_w \mid wnS_n\}$.

Dans ce chapitre, il est nécessaire de considérer l'algèbre de Hecke $\mathcal{H}$ non plus sur l'anneau $\mathbb{Z}[q, q^{-1}]$, mais sur l'anneau $\mathbb{Z}[q^{1/2}, q^{-1/2}]$. En d'autres mots, nous prolongeons les coefficients de l'algèbre.

4.2 La base $\{C_w \mid w \in S_n\}$.

Dans un premier temps, considérons un élément h de $\mathcal{H}$ le plus simple possible, c'est-à-dire de la forme

$$h = \alpha q^{a/2} T_s + \beta q^{b/2} T_e,$$

où $\alpha, \beta, a, b \in \mathbb{Z}$, $\alpha, \beta \neq 0$ et s est une réflexion simple, et tel que $\overline{h} = h$. La condition $\overline{h} = h$ signifie que

$$\alpha q^{-a/2}[q^{-1}T_s - (1 - q^{-1})T_e] + \beta q^{-b/2} T_e = \alpha q^{a/2} T_s + \beta q^{b/2} T_e.$$

Nous obtenons

$$\alpha q^{-(a+2)/2} = \alpha q^{a/2} \quad \Longrightarrow \quad a = -1$$

et

$$-\alpha q^{1/2}(1 - q^{-1}) + \beta q^{-b/2} = \beta q^{b/2} \quad \Longrightarrow \quad -\alpha(q^{1/2} - q^{-1/2}) = \beta(q^{b/2} - q^{-b/2}).$$

Nous avons donc que $b = 1$ et $\beta = -\alpha$. Donc $(q^{-1/2}T_s - q^{1/2}T_e)$ est un candidat pour être l'élément C_s lorsque s est une réflexion simple.

Lorsque s et t sont deux réflexions simples distinctes, nous pouvons considérer un élément h de $\mathcal{H}$ le plus simple possible, c'est-à-dire de la forme

$$h = \alpha q^{a/2}T_{st} + \beta q^{b/2}T_s + \gamma q^{c/2}T_t + \delta q^{d/2}T_e$$

où $\alpha, \beta, \gamma, \delta, a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, $\alpha, \beta, \gamma, \delta \neq 0$, et tel que $\overline{h} = h$. Sachant que

$$\overline{T_{st}} = q^{-2}T_{st} - q^{-2}(q-1)T_s - q^{-2}(q-1)T_t + q^{-2}(q-1)^2T_e,$$

nous obtenons de la condition $\overline{h} = h$ que

$$a = -2, \quad b = c = 0, \quad d = 2, \quad \beta = \gamma = -\alpha \quad \text{et} \quad \delta = \alpha.$$

Donc $(q^{-1}T_{st} - T_s - T_t + qT_e)$ est un candidat pour être l'élément C_{st}. Il est facile de noter que ce dernier élément est C_sC_t. Cependant si nous considérons maintenant deux réflexions simples s, t telles que $sts = tst$, nous serions tenter de définir C_{sts} comme étant $C_sC_tC_s$. Mais ceci n'est pas la bonne approche, parce que $C_sC_tC_s$ et $C_tC_sC_t$ sont deux éléments distincts dans $\mathcal{H}$ et ainsi il n'est pas clair ce que nous devons prendre pour définir $C_{sts} = C_{tst}$. Nous allons ajouter un facteur de correction. Dans ce dernier cas, nous aurons $C_{sts} = C_{tst} = C_sC_tC_s - C_s = C_tC_sC_t - C_t$.

Théorème 4.1 (Kazhdan - Lusztig). *Pour chaque permutation $w \in S_n$, il existe un élément unique $C_w \in \mathcal{H}$ tel que :*

a) $i(C_w) = C_w$,

b) $C_w = \varepsilon_w q_w^{1/2} \sum_{x \leq w} \varepsilon_x q_x^{-1} P_{x,w}(q^{-1})\, T_x$.

où $P_{x,w}(q)$ est un polynôme dans $\mathbb{Z}[q]$ tels que :

— $P_{x,w}(q) = 0$ *lorsque* $x \not\leq w$.

— $P_{w,w}(q) = 1$

— *le degré de $P_{x,w}(q)$ est plus petit ou égal à $(\ell(w) - \ell(x) - 1)/2$ si $x < w$.*

Ces polynômes $P_{x,w}(q)$ sont les polynômes de Kazhdan-Lusztig.

Démonstration. Ce théorème a été démontré pour la première fois par D. Kazhdan et G.Lusztig dans la référence (5). Nous reprenons cette preuve. Nous allons démontrer ce théorème en deux étapes : premièrement l'unicité de l'élément C_w et ensuite son existence.

Commençons par l'unicité. Pour montrer celle-ci, il suffit de voir que les conditions a) et b) font en sorte que les polynômes $P_{x,w}(q) \in \mathbb{Z}[q]$ dans l'expression de C_w sont uniques. Nous démontrons l'unicité de $P_{x,w}(q)$ par récurrence sur $\ell(w) - \ell(x) \geq 0$. Le cas où $\ell(w) - \ell(x) = 0$ correspond à $x = w$ et par b), $P_{w,w}(q) = 1$. Ainsi le polynôme est unique dans ce cas. Soit

$$C_w = \varepsilon_w q_w^{1/2} \sum_{x \leq w} \varepsilon_x q_x^{-1} P_{x,w}(q^{-1})\, T_x.$$

Par la condition a), nous avons $\overline{C_w} = C_w$ et ainsi

$$\begin{aligned} \varepsilon_w q_w^{1/2} \sum_{x \leq w} \varepsilon_x q_x^{-1} P_{x,w}(q^{-1})\, T_x &= \varepsilon_w q_w^{-1/2} \sum_{y \leq w} \varepsilon_y q_y P_{y,w}(q)\, T_{y^{-1}}^{-1} \\ &= \varepsilon_w q_w^{-1/2} \sum_{y \leq w} \varepsilon_y q_y P_{y,w}(q) \left[\varepsilon_y q_y^{-1} \sum_{x \leq y} \varepsilon_x R_{x,y}(q) T_x \right] \\ &= \varepsilon_w q_w^{-1/2} \sum_{x \leq w} \varepsilon_x \left[\sum_{x \leq y \leq w} R_{x,y}(q) P_{y,w}(q) \right] T_x \end{aligned}$$

En comparant le coefficient de T_x des deux côtés de l'équation, nous obtenons après des simplifications évidentes et multiplication par $q_x^{1/2}$.

$$q_w^{1/2} q_x^{-1/2} P_{x,w}(q^{-1}) = q_w^{-1/2} q_x^{1/2} \sum_{x \leq y \leq w} R_{x,y}(q) P_{y,w}(q).$$

Parce que $R_{x,x}(q) = 1$, nous avons

$$q_w^{1/2} q_x^{-1/2} P_{x,w}(q^{-1}) - q_w^{-1/2} q_x^{1/2} P_{x,w}(q) = q_w^{-1/2}\ q_x^{1/2} \sum_{x < y \leq w} R_{x,y}(q) P_{y,w}(q). \qquad (4.1)$$

Par récurrence nous pouvons supposer que les polynômes $P_{y,w}(q)$ sont uniques pour tous les y tel que $x < y \leq w$, car $(\ell(w) - \ell(y)) < (\ell(w) - \ell(x))$. En prenant en considération les propriétés des polynômes $P_{y,w}(q)$, on voit que le terme à droite dans l'équation (4.1) est un polynôme de Laurent en $q^{1/2}$. Supposons que

$$P_{x,w}(q) = a_0 + a_1 q + a_2 q^2 + \cdots + a_N q^N, \qquad \text{où } N \leq \frac{\ell(w) - \ell(x) - 1}{2},$$

le terme $q_w^{1/2} q_x^{-1/2} P_{x,w}(q^{-1})$ du côté gauche de l'équation (4.1) consistera en une somme de puissance $q^{i/2}$ où $i \geq 1$ et le terme $q_w^{-1/2} q_x^{1/2} P_{x,w}(q)$ consistera en une somme de puissance $q^{i/2}$ où $i \leq -1$. Comme l'intersection des puissances de chacune de ces deux sommes est vide, le polynôme $P_{x,w}(q)$ est uniquement déterminé.

Notons que l'équation (4.1) nous fournit une méthode pour calculer $P_{x,w}(q)$.

Nous allons maintenant démontrer l'existence de C_w satisfaisant les conditions a) et b) ci-dessus pour tout $w \in S_n$. Nous allons définir C_w par induction sur $\ell(w)$. Nous avons précédemment discuté des cas où $\ell(w) \leq 2$.

Si $v \in S_n$ est tel que $\ell(v) < \ell(w)$, nous pouvons supposer que C_v, ainsi que les polynômes $P_{z,v}(q)$ sont bien définis. Nous écrirons que $z \prec v$ si et seulement si $z < v$, $\varepsilon_z = -\varepsilon_v$ et le polynôme $P_{z,v}(q)$ en q est exactement de degré $(\ell(v) - \ell(z) - 1)/2$. Dans cette situation, nous noterons le coefficient de $q^{(\ell(v)-\ell(z)-1)/2}$ dans $P_{z,v}(q)$ par $\mu(z, v) \in \mathbb{Z}$.

Pour $w \in S_n$, $w \neq e$, considérons une réflexion simple s tel que $\ell(sw) = \ell(w) - 1$. Notons $v = sw$. Par récurrence C_v est défini. Définissons

$$C_w = C_s C_v - \sum_{\substack{z \prec v \\ sz < z}} \mu(z,v) C_z \tag{4.2}$$

Il est clair que cet élément est bien invariant par l'involution i. Il suffit donc de vérifier que la condition b) est bien vérifiée. Il suffit d'exprimer les deux côtés de l'équation (4.2) dans la base standard $\{T_x, x \in S_n\}$.

Nous avons du côté droit que

$$\begin{aligned}
C_s C_v &= \left[q^{-1/2} T_s - q^{1/2} T_e\right] \left[\varepsilon_v q_v^{1/2} \sum_{x \leq v} \varepsilon_x q_x^{-1} P_{x,v}(q^{-1}) T_x\right] \\
&= \varepsilon_v q_v^{1/2} \sum_{\substack{x \leq v \\ sx > x}} q^{-1/2} \varepsilon_x q_x^{-1} P_{x,v}(q^{-1}) T_{sx} \\
&\quad + \varepsilon_v q_v^{1/2} \sum_{\substack{x \leq v \\ sx < x}} q^{-1/2} \varepsilon_x q_x^{-1} P_{x,v}(q^{-1}) [q T_{sx} + (q-1) T_x] \\
&\quad - \varepsilon_v q_v^{1/2} \sum_{x \leq v} q^{1/2} \varepsilon_x q_x^{-1} P_{x,v}(q^{-1}) T_x \\
&= \varepsilon_w q_w^{1/2} \varepsilon_w q_w^{-1} T_w \ + \varepsilon_w q_w^{1/2} \sum_{\substack{sx < v \\ sx < x}} \varepsilon_x q_x^{-1} P_{sx,v}(q^{-1}) T_x \\
&\quad + \varepsilon_w q_w^{1/2} \sum_{\substack{sx < v \\ x < sx}} \varepsilon_x q_x^{-1} q^{-1} P_{sx,v}(q^{-1}) T_x + \varepsilon_w q_w^{1/2} \sum_{\substack{x < v \\ sx < x}} \varepsilon_x q_x^{-1} (q^{-1} - 1) P_{x,v}(q^{-1}) T_x \\
&\quad + \varepsilon_w q_w^{1/2} \sum_{x \leq v} \varepsilon_x q_x^{-1} P_{x,v}(q^{-1}) T_x
\end{aligned}$$

Nous pouvons maintenant comparer le coefficient de T_x des deux côtés de l'équation (4.2). Nous obtenons ainsi

$$P_{x,w}(q) = \begin{cases} 1, & \text{si } x = w\,; \\ qP_{sx,v}(q) + P_{x,v}(q) - \sum\limits_{\substack{z \prec v \\ sz < z}} \mu(z,v) q_w^{1/2} q_z^{-1/2} P_{x,z}(q), & \text{si } x < w \text{ et } sx > x\,; \\ qP_{x,v}(q) + P_{sx,v}(q) - \sum\limits_{\substack{z \prec v \\ sz < z}} \mu(z,v) q_w^{1/2} q_z^{-1/2} P_{x,z}(q), & \text{si } x < w \text{ et } sx < x. \end{cases}$$

Dans ces expressions, nous pouvons noter que si $z \prec v$, $\ell(z) \equiv \ell(w) \pmod 2$ et $q_w^{1/2} q_z^{-1/2} P_{x,z}(q) \in \mathbb{Z}[q]$. Par récurrence, nous obtenons facilement que $P_{x,w}(q) \in \mathbb{Z}[q]$ et son degré comme polynôme en q est $\leq (\ell(w) - \ell(x) - 1)/2$.

□

Proposition 4.1. *Les éléments C_w, où w parcourt l'ensemble S_n de permutations, forment une base de $\mathcal{H}$ comme $\mathbb{Z}[q^{1/2}, q^{-1/2}]$-module.*

Démonstration. Nous savons que $\{T_w \mid w \in S_n\}$, forment une base de $\mathcal{H}$. Pour prouver que les éléments C_w, où w parcourt l'ensemble S_n de permutations, forment aussi une base, il suffit de noter que ces derniers éléments sont reliés aux éléments T_w par une matrice de passage de déterminant non-nul.

Nous avons vu au théorème précédent que

$$C_w = q_w^{-1/2} T_w + \sum_{x<w} a_{x,w}\, T_x \quad \text{avec } a_{x,w} \in \mathbb{Z}[q^{1/2}, q^{-1/2}] \text{ pour tout } x < w.$$

Fixons un ordre total sur S_n qui respecte l'ordre de Bruhat. Alors la matrice de passage sera une matrice triangulaire dont les entrées sur la diagonale principale sont de la forme $q_w^{-1/2}$. Clairement cette matrice est inversible et les éléments C_w est une base de $\mathcal{H}$ comme $\mathbb{Z}[q^{1/2}, q^{-1/2}]$-module. □

Exemple 4.1. Soit $x, w \in S_n$ tel que $x < w$ et $\ell(w) - \ell(x) = 1$. Nous avons vu dans la preuve du théorème 4.1 que

$$q_w^{1/2} q_x^{-1/2} P_{x,w}(q^{-1}) - q_w^{-1/2} q_x^{1/2} P_{x,w}(q) = q_w^{-1/2}\ q_x^{1/2} \sum_{x<y\leq w} R_{x,y}(q) P_{y,w}(q).$$

Dans la somme à droite, il y a qu'une seule possibilité pour $y = w$. Donc l'équation devient

$$q_w^{1/2} q_x^{-1/2} P_{x,w}(q^{-1}) - q_w^{-1/2} q_x^{1/2} P_{x,w}(q) = q_w^{-1/2}\ q_x^{1/2} R_{x,w}(q).$$

Par la remarque 3.3, nous obtenons que $R_{x,w}(q) = (q-1)$ et nous obtenons

$$q^{1/2} P_{x,w}(q^{-1}) - q^{-1/2} P_{x,w}(q) = q^{-1/2}(q-1) = q^{1/2} - q^{-1/2}$$

Puisque le degré de $P_{x,w}(q) \leq (\ell(w) - \ell(x) - 1)/2 = 0$, alors $P_{x,w}(q)$ est constant $P_{x,w}(q) = c$. En substituant ci-dessus, nous voyons que $c = 1$ et $P_{x,w}(q) = 1$

Lemme 4.1. *Soit $w \in S_n$. Alors, pour tout $x \in S_n$ tel que $x \leq w$, nous avons*

$$P_{x,w}(q)\big|_{q=0} = 1.$$

Démonstration. Nous procéderons par récurrence sur $\ell(w)$. Soit une réflexion simple tel que $\ell(sw) = \ell(w) - 1$ et posons $v = sw$. Nous avons vu dans la preuve du théorème 4.1 que

$$P_{x,w}(q) = \begin{cases} 1, & \text{si } x = w\,; \\ qP_{sx,v}(q) + P_{x,v}(q) - \displaystyle\sum_{\substack{z \prec v \\ sz<z}} \mu(z,v) q_w^{1/2} q_z^{-1/2} P_{x,z}(q), & \text{si } x < w \text{ et } sx > x\,; \\ qP_{x,v}(q) + P_{sx,v}(q) - \displaystyle\sum_{\substack{z \prec v \\ sz<z}} \mu(z,v) q_w^{1/2} q_z^{-1/2} P_{x,z}(q), & \text{si } x < w \text{ et } sx < x. \end{cases}$$

Nous pouvons supposer que $x < w$, sinon c'est trivial. Dans chacune des sommes sur l'ensemble des permutations z telles que $z \prec v$ et $sz < z$, nous avons que

$(\ell(w) - \ell(z)) \geq 2$ et en conséquence lorsque $q = 0$, ces sommes s'annulent. Donc

$$P_{x,w}(q)\big|_{q=0} = \begin{cases} 1, & \text{si } x = w\,; \\ P_{x,v}(q)\big|_{q=0}, & \text{si } x < w \text{ et } sx > x\,; \\ P_{sx,v}(q)\big|_{q=0}, & \text{si } x < w \text{ et } sx < x. \end{cases}$$

Notons que, par le lemme 3.4, nous avons dans les conditions ci-dessus que $x < v = sw$ si $sx > x$, alors que $sx < v = sw$ si $sx < x$. Par récurrence nous obtenons le résultat.

□

Lemme 4.2. *Soit $x, w \in S_n$ tel que $x \leq w$ et $\ell(w) - \ell(x) \leq 2$. Alors $P_{x,w}(q) = 1$.*

Démonstration. Les cas où $\ell(w) - \ell(x) = 0$ et 1 ont déjà été traités. Soit une réflexion simple s tel que $sw < w$. Notons $v = sw$. Nous allons donc nous concentrer sur le cas $\ell(w) - \ell(x) = 2$. Nous procédons par récurrence sur la longueur $\ell(w)$ de w. Nous avons vu dans la preuve du théorème (4.1) que

$$P_{x,w}(q) = \begin{cases} 1, & \text{si } x = w\,; \\ qP_{sx,v}(q) + P_{x,v}(q) - \displaystyle\sum_{\substack{z \prec v \\ sz < z}} \mu(z,v) q_w^{1/2} q_z^{-1/2} P_{x,z}(q), & \text{si } x < w \text{ et } sx > x\,; \\ qP_{x,v}(q) + P_{sx,v}(q) - \displaystyle\sum_{\substack{z \prec v \\ sz < z}} \mu(z,v) q_w^{1/2} q_z^{-1/2} P_{x,z}(q), & \text{si } x < w \text{ et } sx < x. \end{cases}$$

Nous avons deux cas à considérer : soit $x < sx$, soit $x > sx$.

Si $x < sx$, notons premièrement qu'il n'y a pas d'élément $z \in S_n$ tel que $x \leq z \prec v$. En effet à cause des longueurs, il faudrait que $z = x$, mais alors nous n'avons pas $sz < z$. Nous avons aussi vu au lemme 3.4 que dans cette situation nous avons $x \leq sw = v$. Donc $P_{x,v}(q) = 1$ par ce que nous avons obtenu à l'exemple 4.1. Nous avons aussi $\ell(sx) = \ell(v)$ et si $sx \leq v$, alors $sx = v$, mais ceci est impossible parce que $sv > v$ et $sx > x$. Conséquemment $P_{sx,v}(q) = 0$ et

$$P_{x,w}(q) = qP_{sx,v}(q) + P_{x,v}(q) = 1.$$

Si $sx < x$, notons premièrement qu'il n'y a qu'un seul élément $z \in S_n$ tel que $x \leq z \prec v$ et $sz < z$, il s'agit de $z = x$. Il nous faut considérer deux cas : soit $x < sw = v$, soit $x \not< sw = v$. Dans le premier cas, c'est-à-dire $x < sw = v$, alors $P_{x,v}(q) = 1$ et $\mu(x,v) = 1$. Donc

$$P_{x,w}(q) = qP_{x,v}(q) + P_{sx,v}(q) - \mu(x,v)qP_{x,x}(q) = q + P_{sx,v}(q) - q = P_{sx,v}(q) = 1$$

par récurrence.

Dans le second cas, c'est-à-dire $x \not< sw = v$, alors $P_{x,v}(q) = 0$ et $\mu(x,v) = 0$. Donc

$$P_{x,w}(q) = qP_{x,v}(q) + P_{sx,v}(q) - \mu(x,v)qP_{x,x}(q) = P_{sx,v}(q) = P_{sx,v}(q) = 1$$

par récurrence.

$\square$

Exemple 4.2. Soit la permutation

$$w = s_2s_1s_3s_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in S_4.$$

Nous allons maintenant calculer tous les polynômes $P_{x,w}(q)$. Comme $P_{x,w}(q) = 0$ sauf lorsque $x \leq w$. Nous pouvons restreindre nos calculs aux permutations suivantes

$$x \in \{e,\ s_1,\ s_2, s_3,\ s_2s_1,\ s_2s_3,\ s_1s_3,\ s_1s_2,\ s_3s_2,\ s_2s_1s_3,\ s_2s_1s_2,\ s_2s_3s_2,\ s_1s_3s_2,\ w\}.$$

En considérant le lemme précédent, nous avons que $P_{x,w}(q) = 1$ si

$$x \in \{s_2s_1,\ s_2s_3,\ s_1s_3,\ s_1s_2,\ s_3s_2,\ s_2s_1s_3,\ s_2s_1s_2,\ s_2s_3s_2,\ s_1s_3s_2,\ w\}.$$

Pour calculer les polynômes $P_{x,w}(q)$ pour $x \in \{e, s_1, s_2, s_3\}$, nous allons utiliser les formules récursives obtenues lors de la preuve du théorème 4.1 où $s = s_2$.

Nous obtenons ainsi

$$P_{s_1,w}(q) = qP_{s_2s_1,s_1s_3s_2}(q) + P_{s_1,s_1s_3s_2}(q) - \sum_{\substack{z \prec v \\ s_2z<z}} \mu(z,v) q_w^{1/2} q_z^{-1/2} P_{s_1,z}(q).$$

Cependant il est facile de vérifier que $s_2s_1 \not< s_1s_3s_2$,car

$$B(s_2s_1) = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 3 \\ \cline{1-1} 1 & 3 \\ \cline{1-2} 1 & 2 & 3 \\ \cline{1-3} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline \end{array} \not< \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 2 \\ \cline{1-1} 2 & 4 \\ \cline{1-2} 1 & 2 & 4 \\ \cline{1-3} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline \end{array} = B(s_1s_3s_2)$$

et alors $P_{s_2s_1,s_1s_3s_2}(q) = 0$. Par le lemme 4.2 et parce que $s_1 < s_1s_3s_2$, nous obtenons que $P_{s_1,s_1s_3s_2}(q) = 1$. Finalement si nous considérons l'ensemble des permutations $z \prec s_1s_3s_2$ tels que $s_2z < z$, cet ensemble est vide. En effet, la longueur $\ell(z)$ de z est soit 2, soit 0. Comme $z < s_1s_3s_2$, alors $z \in \{s_1s_3, s_1s_2, s_3s_2, e\}$, mais dans tous les cas, nous n'aurons pas $s_2z < z$. En incorporeant toutes ces observations, nous obtenons que $P_{s_1,s_1s_3s_2}(q) = 1$. L'argument est identique pour $x = s_3$ et nous obtenons que $P_{s_3,s_1s_3s_2}(q) = 1$.

Si $x = s_2$, nous avons

$$P_{s_2,w}(q) = qP_{s_2,s_1s_3s_2}(q) + P_{e,s_1s_3s_2}(q) - \sum_{\substack{z \prec v \\ s_2z<z}} \mu(z,v) q_w^{1/2} q_z^{-1/2} P_{s_2,z}(q).$$

Ici il est facile de vérifier que $s_2 < s_1s_3s_2$ et, par le lemme 4.2, nous avons que $P_{s_2,s_1s_3s_2}(q) = 1$. Comme ci-dessus, nous obtenons que l'ensemble des permutations $z \prec s_1s_3s_2$ tels que $s_2z < z$ est vide. Il nous reste à calculer $P_{e,s_1s_3s_2}(q)$. Nous procédons toujours avec les formules récursives.

$$P_{e,s_1s_3s_2}(q) = qP_{s_1,s_3s_2}(q) + P_{e,s_3s_2}(q) - \sum_{\substack{z \prec s_3s_2 \\ s_1z<z}} \mu(z,v) q_{s_1s_3s_2}^{1/2} q_z^{-1/2} P_{e,z}(q).$$

Il est facile de vérifier au moyen des tableaux que $s_1 \not\prec s_3s_2$ et conséquemment $P_{s_1,s_3s_2}(q) = 0$. Par le lemme 4.2, $P_{e,s_3s_2}(q) = 1$. Finalement il n'y a pas de $z \prec s_3s_2$ tel que $s_1z < z$. Donc $P_{e,s_1s_3s_2}(q) = 1$ et $P_{s_2,w}(q) = (q+1)$.

Si $x = e$, nous avons

$$P_{e,w}(q) = qP_{s_2,s_1s_3s_2}(q) + P_{e,s_1s_3s_2}(q) - \sum_{\substack{z \prec s_1s_3s_2 \\ s_2z<z}} \mu(z,v) q_w^{1/2} q_z^{-1/2} P_{e,z}(q)$$

Nous avons déjà calculé $P_{s_2,s_1s_3s_2}(q) = 1$ et $P_{e,s_1s_3s_2}(q) = 1$ ci-dessus. Le même argument que ci-dessus montre qu'il existe aucun $z \in S_4$ tel que $z \prec s_1s_3s_2$ et $s_2z < z$. Donc $P_{e,w}(q) = (q+1)$.

En résumé, nous avons obtenu que

$$P_{x,w}(q) = \begin{cases} (q+1) & \text{si } x \in \{e, s_2\}; \\ 1 & \text{si } x \in \left\{ \begin{matrix} s_1, s_3, s_2s_1, & s_2s_3, & s_1s_3, & s_1s_2, s_3s_2, \\ s_2s_1s_3, & s_2s_1s_2, & s_2s_3s_2, & s_1s_3s_2, & w \end{matrix} \right\}; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

CONCLUSION

Dans ce mémoire, nous avons concentré notre étude à l' algèbre de Hecke associée au groupe linéaire sur un corps fini dans quel cas le groupe symétrique intervient. Cependant la notion d'algèbre de Hecke est beaucoup plus générale que celle-là. Dans ces généralisations,

— soit l'algèbre de Hecke est associée à un groupe réductif sur un corps fini (respectivement un corps p-adique) dans quel cas le groupe de Weyl (respectivement le groupe de Weyl affine) intervient (par exemple voir les références (3) et (4)) ;

— soit l'algèbre de Hecke est l'algèbre des opérateurs d'entrelacements de la représentation induite à partir d'une représentation cuspidale unipotente d'un sous-groupe de Levi dans quel cas l'algèbre est alors à paramètres non-constants (par exemple voir la référence (6)) ;

— soit comme algèbre donnée par une présentation et des relations associées à un groupe de Coxeter quelconque (par exemple, voir la référence (5)).

La théorie de bases et des polynômes de Kazhdan-Lusztig se généralise à tous ces cas. Le sujet a été initié, il y a maintenant une quarantaine d'années, et il fait maintenant partie de ce qui s'appelle la théorie géométrique des représentations. La combinatoire, la géométrie algébrique et la théorie de Lie interviennent activement dans cette théorie géométrique des représentations. Par exemple, Kazhdan et Lusztig ont démontré en 1980 en utilisant la géométrie algébrique et la cohomologie d'intersection, que les coefficients des polynômes de Kazhdan-Lusztig sont ≥ 0 et ont conjecturé que ceci est vrai pour tous les groupes de Coxeter. Cette dernère conjecture a été démontrée récemment par Williamson et Elias en développant une théorie entièrement algébrique de Hodge pour les bimodules de Soergel.

Les recherches dans ce domaine se poursuivent activement. Il est illusoire de penser traiter complètement la théorie dans un mémoire de maîtrise. Cependant nous espérons que le présent mémoire constitue une introduction concrète au sujet.

RÉFÉRENCES

(1) DEODHAR, V. V. (1977). Some Characterizations of Bruhar Ordering on a Coxeter Group and Determination of the Relative Möbius Function. *Invent. Math. 39*, 187-198.

(2) DEODHAR, V. V. (1985). On some geometric aspects of Bruhat orderings. I. A finer decomposition of Bruhat cells. *Invent. Math. 79*, 499-511.

(3) GECK, M. et PFEIFFER, G. (2000). *Characters of Finite Coxeter Groups and Iwahori-Hecke Algebras.* Oxford : Clarendon Press.

(4) HUMPHREYS, J. E. (1992). *Reflection Groups and Coxeter Groups.* Cambridge : Cambridge University Press.

(5) KAZHDAN, D. and LUSZTIG, G. (1979) .Representations of Coxeter groups and Hecke algebras. *Invent. Math. 53*, 165-184.

(6) LUSZTIG, G. (2003). *Hecke algebras with unequal parameters.* American Mathematical Society.