SPECTRE p–ADIQUE:
ASPECTS TOPOLOGIQUES ET GÉOMÉTRIQUES

L. Bélair

§ 0. PRÉLIMINAIRES.

Soit p un nombre premier fixé. Cet exposé a comme toile de fond le corps des nombres p–adiques (voir [Am]). Ax–Kochen et Ershov ont montré que, en tant que corps muni de la valuation p–adique, v_p , la théorie élémentaire de $\mathbb{Q}_p$ est axiomatisée par les propriétés de corps valué hensélien, dont le groupe de valuation est un $\mathbb{Z}$–groupe où le plus petit élément positif est donné par la valuation de p , et dont le corps des restes est canoniquement isomorphe au corps premier $\mathbb{F}_p$. Ils ont aussi montré que cette théorie est modèle–complète. La structure valuée de $(\mathbb{Q}_p,v_p)$ est définissable algébriquement: $v_p(x) \leq v_p(y) \Leftrightarrow \exists z\, (x^\varepsilon+py^\varepsilon=z^\varepsilon)$, où $\varepsilon=3$ si $p=2$, et $\varepsilon=2$ sinon. La théorie $Th(\mathbb{Q}_p)$ est aussi modèle–complète dans le langage des anneaux, L . Pour chaque entier $n\geq 2$, soit P_n, $P_n^{\cdot}$ des prédicats unaires interprétés comme suit: $Th(\mathbb{Q}_p) \models P_n(x) \leftrightarrow \exists y\, (x = y^n)$ et $Th(\mathbb{Q}_p) \models P_n^{\cdot}(x) \leftrightarrow x \neq 0 \wedge P_n(x)$. Macintyre a montré que $Th(\mathbb{Q}_p)$ élimine les quantificateurs dans le langage des anneaux munis des prédicats P_n , que nous noterons $L(P_\omega)$. Notons qu'on a $v_p(x) \le v_p(y) \leftrightarrow P_\varepsilon(x^\varepsilon + py^\varepsilon)$; la topologie p–adique est donc décrite dans $L(P_\omega)$ par des formules atomiques.

Le spectre p–adique a été introduit par E. Robinson [Ro1], motivé par le spectre réel de Coste et Coste–Roy [CR]. Comme on le verra ci–dessous, cet objet est davantage lié à $\mathrm{Th}(\mathbb{Q}_p)$ qu'à $\mathbb{Q}_p$ en soi. Cette construction a été généralisée aux extensions finies de $\mathbb{Q}_p$ par Bröcker–Schinke [BS], et indépendamment dans [Bél]. Les démonstrations ci–dessous s'adaptent naturellement à ce contexte.

Dans cet exposé, on qualifie un espace topologique de <u>compact</u> s'il possède <u>la propriété de sous–recouvrement fini</u>. <u>Un espace compact ne sera donc pas nécessairement séparé</u>. On note CAC la théorie élémentaire des corps algébriquement clos, et X^c le complémentaire du sous–ensemble X d'un ensemble donné. Soit K un corps, on note $K^\cdot$ son groupe multiplicatif et $P_n^\cdot$ le sous–groupe multiplicatif des puissances n–ièmes. Une formule $\varphi(x_1,\dots x_n)$ de L désignera tout aussi bien le sous–ensemble de K^n qu'elle définit. Soit A un anneau et $L(A)$ le langage L muni de nouvelles constantes pour les éléments de A , on note $\Delta^+(A)$ le diagramme positif de A dans L , i.e. l'ensemble des énoncés atomiques de $L(A)$ vrais dans A . On note $\underline{x}$ le n–uplet $(x_1,\dots,x_n)$. Soit $f_1,\dots,f_m \in K[\underline{X}]$, I l'idéal engendré par les f_i dans $K[\underline{X}]$, et V la variété affine définie par les f_i , alors on pose $V(K) = \{\underline{x} \in K^n \mid f_i(\underline{x}) = 0 \ ,i=1,\dots,m\}$, et $K[V] = K[\underline{X}]/I$. L'anneau $K[V]$ est appelé anneau des coordonnées de V au–dessus de K . Soit $X \subseteq K^n$ et f une fonction de X dans K alors on pose $Z(f) = \{\underline{x} \in X \mid f(\underline{x}) = 0\}$. Nous utiliserons le fait suivant, conséquence du lemme de Hensel : si $x \in \mathbb{Q}_p^\cdot$ est tel que $v_p(x-1) > v_p(n^2)$, alors $x \in P_n^\cdot$. Soit $\underline{x} \in \mathbb{Q}_p^n$, $a \in \mathbb{Q}_p$ on pose $B(\underline{x}, a) =$ $= \{\underline{y} \in \mathbb{Q}_p^n \mid v_p(x_i - y_i) \ge v(a) \ , 1 \le i < n\}$.

§ 1. SPECTRE p–ADIQUE ?

Le rapport entre le spectre réel et la géométrie algébrique réelle est maintenant bien connu. Le spectre p–adique relève un peu du même genre de procédé. Plaçons–nous momentanément dans un contexte général pour situer ce type de construction. Soit (K, τ) un corps topologique de base. On s'intéresse aux variétés algébriques affines munies de la topologie induite par celle de K .

Il s'agit d'introduire un objet qui jouerait un rôle analogue à celui du spectre premier d'un anneau en géométrie algébrique.

Exemples. (1) Les nombres réels avec la topologie de l'ordre $(\mathbb{R}, <)$: les variétés héritent alors de la topologie euclidienne.

(2) Les nombres p–adiques avec la topologie de la valuation p–adique $(\mathbb{Q}_p, v_p)$: les variétés héritent de la topologie p–adique. □

Notons que, dans cette optique, si on considère les nombres complexes avec la topologie de Zariski $(\mathbb{C}, \tau)$, la topologie induite n'est pas la topologie de Zariski puisque cette dernière est plus fine que la topologie produit de $(\mathbb{C}, \tau)$. Rappelons brièvement le rapport entre le spectre premier et la géométrie algébrique (voir [DG], Introduction). Soit $f_1,\dots,f_m \in \mathbb{C}[\underline{X}]$, $I=(f_1,\dots f_m)$, V la variété affine définie par les f_i. Alors il y a correspondance biunivoque entre Spec $\mathbb{C}[V]$ et les points de V dans les extensions algébriquement closes de $\mathbb{C}$, au sens suivant: $V(\mathbb{C})$ (les points de V dans $\mathbb{C}$) se plonge dans Spec $\mathbb{C}[V]$ en envoyant $\underline{x}$ sur l'idéal maximal $M_{\underline{x}}=(X_1-x_1,\dots,X_n-x_n)+I$, qui correspond au noyau de l'homomorphisme de $\mathbb{C}$–algèbre $\text{év}(\underline{x}) : \mathbb{C}[V] \to \mathbb{C}$ qui envoie $g+I$ sur $g(\underline{x})$. Soit $K/\mathbb{C}$ une extension algébriquement close de $\mathbb{C}$. Considérons les points de V rationnels sur K, i.e. $V(K)$, qui correspondent donc aux K–homomorphismes $K[V] \longrightarrow K$. Par rapport à l'anneau des coordonnées de V au–dessus de $\mathbb{C}$,

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{C}[V] \arrow[rr] \arrow[rrrr, bend left, "\varphi"] \arrow[ddrr, dash] & & K[V] \arrow[rr] \arrow[dr, dash] & & K \\
& & & K \arrow[ur, dash] & \\
& & \mathbb{C} \arrow[ur, dash] & &
\end{tikzcd}$$

on n'obtient plus en général des idéaux maximaux mais des idéaux premiers: $\ker \varphi \in$ Spec $\mathbb{C}[V]$. Réciproquement, si $P \in$ Spec $\mathbb{C}[V]$ alors P correspond à un point de V rationnel sur la clôture algébrique du corps des fractions de $\mathbb{C}[V]/P$.

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{C}[V] \arrow[r] \arrow[dr] & \mathbb{C}[V]/P \arrow[r] & Q(\mathbb{C}[V]/P)^a \\
 & Q(\mathbb{C}[V]/P)^a[V] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Définissons la relation $\sim$ sur les $\mathbb{C}$–homomorphismes $\mathbb{C}[V] \longrightarrow K$, où K est une extension algébriquement close de $\mathbb{C}$. Soit $\varphi_i\colon \mathbb{C}[V] \longrightarrow K_i$, $i=1,2$ deux tels morphismes, alors $\varphi_1 \sim \varphi_2$ ssi il existe $K_3/\mathbb{C}$ algébriquement clos et des $\mathbb{C}$–homomorphismes $K_i \longrightarrow K_3$ tels que le carré ci–dessous commute

$$\varphi_1 \sim \varphi_2 \quad \text{ssi} \qquad \begin{tikzcd}
 & K_1 \arrow[dr, dashed] & \\
\mathbb{C}[V] \arrow[ur, "\varphi_1"] \arrow[dr, "\varphi_2"'] & & K_3 \\
 & K_2 \arrow[ur, dashed] &
\end{tikzcd}$$

La relation $\sim$ est une relation d'équivalence: elle est clairement réflexive et symétrique, et la transitivité découle de la propriété d'amalgamation des corps algébriquement clos. Remarquons que cette dernière propriété peut être déduite de la modèle–complétude de CAC . D'autre part on vérifie sans peine que $\varphi_1 \sim \varphi_2$ ssi $\ker \varphi_1 = \ker \varphi_2$. Cette discussion se transpose directement: pour tout anneau A, il y a correspondance biunivoque entre Spec A et les classes d'équivalence d'homomorphismes $A \longrightarrow K$, où $K \models \mathrm{CAC}$, pour la relation $\sim$. Nous laissons le soin au lecteur de faire une discussion analogue pour le spectre réel. Rappelons que la topologie de Spec A est donnée par la base d'ouverts $\{D(a) : a \in A\}$, où $D(a) = \{P : a \notin P\} = \{P : A/P \models (a \neq 0)\}$, ce qui correspond à $\{A \longrightarrow K/\!\sim \,: K \models (a \neq 0)\}$. Si $A = \mathbb{C}[V]$ alors la topologie induite par Spec $\mathbb{C}[V]$ à travers le plongement $V(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathrm{Spec}\, \mathbb{C}[V]$ n'est nulle autre que la topologie de Zariski sur $V(\mathbb{C})$.

Une façon d'introduire le spectre p–adique est donc comme suit. Soit A un anneau, et considérons les homomorphismes de A dans les modèles de $\mathrm{Th}(\mathbb{Q}_p)$. Puisque $\mathrm{Th}(\mathbb{Q}_p)$ est modèle–complète, la relation analogue $\sim$ est aussi une relation d'équivalence et le spectre p–adique de A est alors l'ensemble des classes d'équivalences pour cette relation. Rappelons que la topologie p–adique peut être définie directement avec le prédicat $P^{\cdot}_{\varepsilon}$.

<u>Définition</u>. Le <u>spectre p–adique</u> de A , $\mathrm{Spec}_p A$, est l'espace topologique suivant :
$\mathrm{Spec}_p A = \{A \longrightarrow K \mid K \models \mathrm{Th}(\mathbb{Q}_p)\} / \sim$, et la topologie est celle engendrée par la base $\{D_{\underline{n}}(\underline{a}) \mid n_i \in \omega , a_i \in A , 1 \leq i \leq k , k \in \omega\}$, où $D_{\underline{n}}(\underline{a}) = \{A \longrightarrow K/\sim \mid K \models \wedge P^{\cdot}_{n_i}(a_i)\}$. Cet ensemble est bien défini grâce à l'élimination des quantificateurs (ou "E.Q.") de $\mathrm{Th}(\mathbb{Q}_p)$ dans le langage $L(P_\omega)$. □

§ 2. PROPRIÉTÉS ÉLÉMENTAIRES.

Le spectre p–adique possède des propriétés analogues à celles du spectre premier. Nous vérifierons d'abord ces propriétés pour le spectre premier et nous verrons que les démonstrations se transposent au spectre p–adique (cf.[CR]). Dans ce qui suit, soit A un anneau.

<u>Proposition</u>. *L'espace Spec A est compact.*

<u>Démonstration</u>. Notons d'abord que pour a, b ∈ A , on a:

$$D(1) = \mathrm{Spec}\ A$$
$$D(0) = \emptyset$$
$$D(a) \cap D(b) = D(ab)$$
$$D(a+b) \subseteq D(a) \cup D(b) .$$

Introduisons la théorie propositionnelle T , dont les variables propositionnelles sont $\{D(a) : a \in A\}$, et les axiomes sont:

1) $D(1) = \top$

2) $D(0) = \bot$

3) $D(a) \wedge D(b) \longleftrightarrow D(ab)$

4) $D(a+b) \longrightarrow D(a) \vee D(b)$.

Il y a correspondance biunivoque entre Spec A et les modèles de cette théorie: à $M \models T$ on associe $P_M = \{a \in A : M(D(a)) = \bot\}$, et à $P \in \mathrm{Spec}\ A$ on associe M_p où $M_P(D(a)) = \top$ ssi

$a \notin P$. Il est clair que $M_P \models T$, et $P_M \in \mathrm{Spec}\, A$ découle des axiomes : 1),2),3)$\leftarrow$ et 4) impliquent que c'est un idéal propre, et 3)$\rightarrow$ qu'il est premier. On est ramené au lemme suivant.

Lemme. *Pour tout* $a \in A$, $D(a)$ *est un sous–ensemble compact de Spec A.*

Démonstration. Montrons que toute famille de fermés de base ayant la propriété d'intersection finie possède une intersection non vide. Soient $\Lambda \subsetneq A$ et $\{D(a_i) : a_i \in \Lambda\}$ tels que pour tout $a_1,\dots,a_n \in \Lambda$ on ait $D(a_1)^c \cap \dots \cap D(a_n)^c \cap D(a) \neq \emptyset$. En termes de notre langage propositionnel ceci nous dit que tout sous–ensemble fini de $\{\neg D(a_i), D(a) : a_i \in \Lambda\}$ a un modèle. Par compacité cet ensemble d'énoncés a aussi un modèle, i.e. $\bigcap_i D(a_i)^c \cap D(a) \neq \emptyset$. □

Autre démonstration de la Proposition (voir [vdD], Definition 5.5). Considérons sur Spec A la topologie plus fine engendrée par les $D(a), D(a)^c$, dite topologie constructible, et remplaçons T par $\Delta^+(A) + CAC$. Alors il y a correspondance biunivoque entre Spec A et les complétions de $\Delta^+(A) + CAC$ dans $L(A)$, et comme ci–dessus on montre que tout $D(a)$ est compact dans cette topologie et donc, a fortiori, dans la topologie de départ qui est moins fine. □

Proposition. *Pour tout* $\underline{a} \in A^k$, $\underline{n} \in \omega^k$ $D_{\underline{n}}(\underline{a})$ *est compact et, en particulier,* $\mathrm{Spec}_p A = D_n(1)$ *est compact.*

Démonstration. On peut utiliser la topologie plus fine (constructible) comme ci–dessus et la correspondance entre $\mathrm{Spec}_p A$ et les complétions de $\Delta^+(A) + \mathrm{Th}(\mathbb{Q}_p)$ dans $L(A)$. Ou encore on peut procéder comme dans la première preuve en axiomatisant la théorie universelle $(\mathrm{Th}(\mathbb{Q}_p))_\forall$ dans $L(P_\omega)$ et en notant qu'il y a une correspondance entre $\mathrm{Spec}_p A$ et l'ensemble des couples $(P, (\dot{P}_{P,n})_{n\in\omega})$, où $P \in \mathrm{Spec}\, A$, et $(A/P, (\dot{P}_{P,n})_{n\in\omega}) \models (\mathrm{Th}(\mathbb{Q}_p))_\forall$. A la classe de $\varphi : A \longrightarrow K$ on fait correspondre $(\ker \varphi, (\dot{P}_{\varphi,n})_{n\in\omega})$, où $\dot{P}_{\varphi,n} = \{a \in A : K \models \dot{P}_n(\varphi(a))\}$, qui est bien défini par E.Q.; et à $(P,(\dot{P}_{P,n}))$ on fait correspondre la classe de $A \longrightarrow K$, où $(A/P,(\dot{P}_{P,n})) \longrightarrow K$, $K \models \mathrm{Th}(\mathbb{Q}_p)$, qui est aussi bien définie par E.Q. . Une telle axiomatisation a été donnée dans [Ro2] et (indépendamment) [Bé2] . □

<u>Proposition</u>. *Tout fermé irréductible de Spec A, ou $Spec_p A$, est l'adhérence d'un seul et unique point.*

<u>Démonstration</u>. Par exemple pour Spec A . Soit F un fermé irréductible non vide (i.e. $F = F_1 \cup F_2$, F_i fermés $\Rightarrow$ $F = F_1$ ou $F = F_2$). Définissons un modèle de T : posons $M(D(a)) = \top$ ssi il existe $(A \longrightarrow K)/\sim \in F$ tel que $K \models (a \neq 0)$. Alors $M \models T$ et $F = \overline{\{P_M\}}$. Pour montrer que $M \models T$, seul l'axiome 3)$\rightarrow$ mérite qu'on s'y arrête. Si $M(D(ab)) = \perp$, alors pour tout $(A \longrightarrow K)/\sim \in F$ on a $K \models (ab = 0)$, et donc $K \models (a = 0)$ ou $K \models (b = 0)$. Ainsi $F \subseteq D(a)^c \cup D(b)^c$, d'où $F \subseteq D(a)^c$ ou $F \subseteq D(b)^c$, i.e. $M(D(a)) = \perp$ ou $M(D(b)) = \perp$. Que $F = \overline{\{P_M\}}$ et l'unicité de ce point générique sont immédiats puisqu'un point x appartient à l'adhérence d'un point y ssi tous les ouverts qui contiennent x contiennent aussi y . Pour une démonstration analogue dans l'esprit de la topologie constructible et un contexte légèrement différent voir [Pi]. □

<u>Proposition</u>. *Soit $K = \mathbb{C}$, ou $\mathbb{Q}_p$, $Spec_* = Spec$, ou $Spec_p$, $f_1,\dots,f_m \in K[\underline{X}]$, $I = (f_1,\dots,f_m)$, V la variété affine définie par les f_i , V(K) muni de la topologie de Zariski, ou p–adique respectivement. Alors l'injection $\iota : V(K) \longrightarrow Spec_*K[V]$ est un plongement topologique dense.*

<u>Démonstration</u>. Pour Spec $\mathbb{C}[V]$. On a $\iota(\underline{x}) = (X_1-x_1,\dots,X_n-x_n) + I$ et $\mathrm{Spec}\,\mathbb{C}[V] \cong \{P \in \mathrm{Spec}\,\mathbb{C}[\underline{X}] \mid I \subseteq P\}$, et donc pour $g \in \mathbb{C}[\underline{X}]$, $D(g+I) \cong \{P \in \mathrm{Spec}\,\mathbb{C}[\underline{X}] \mid g \notin P\}$. Voyons que ι et ι^{-1} sont continues: $\iota^{-1}D(g+I) = \{\underline{x} \mid g(\underline{x}) \neq 0\}$ est ouvert et $\iota\{\underline{x} \mid g(\underline{x}) \neq 0\} = \mathrm{im}(\iota) \cap D(g+I)$ est ouvert. Pour la densité de $\mathrm{im}(\iota)$ dans $\mathrm{Spec}\,\mathbb{C}[V]$ il faut montrer que si $D(g+I) \neq \emptyset$ alors il existe $\underline{x} \in V(\mathbb{C})$ tel que $g(\underline{x}) \neq 0$. Soit $P \in D(g+I)$ et E la clôture algébrique du corps des fractions de $\mathbb{C}[V]/P$, alors $\mathbb{C} \subseteq E$ et $E \models \exists\underline{x}\ (\underline{x} \in V(E) \wedge g(\underline{x}) \neq 0)$, et par modèle–complétude il existe $\underline{x} \in V(\mathbb{C})$ tel que $g(\underline{x}) \neq 0$. Un argument similaire s'applique à $Spec_p$ en ayant à l'esprit que les $\{\underline{x} \mid P_n^{\cdot}(f(\underline{x}))\}$, $f \in \mathbb{Q}_p[\underline{X}]\}$, engendrent la topologie p–adique sur la variété. □

§ 3. FONCTIONS CONTINUES DÉFINISSABLES.

Un espace topologique est dit spectral s'il est compact, possède une base d'ouverts compacts close par intersection finie, et si tout fermé irréductible est l'adhérence d'un unique point (voir [Ho]). Hochster (ibid.) a montré que les espaces spectraux sont exactement les espaces homéomorphes au spectre premier d'un anneau. On a vu que $\mathrm{Spec}_p\mathbb{Q}_p[V]$ est un espace spectral. On peut se demander s'il y a un anneau ayant un rapport significatif avec la variété V dont le spectre premier est homéomorphe à $\mathrm{Spec}_p\mathbb{Q}_p[V]$. On connaît une réponse dans le cas du spectre réel.

Proposition ([CC]). *Soit* $f_1,\dots,f_m \in \mathbb{R}[\underline{X}]$ *,* V *la variété affine définie par les* f_i *, et* $\mathcal{C}(V(\mathbb{R}))$ *l'ensemble des fonctions continues définissables (avec paramètres) de* $V(\mathbb{R})$ *dans* $\mathbb{R}$ *. Alors le spectre réel de* $\mathbb{R}[V]$ *est homéomorphe au spectre premier de* $\mathcal{C}(V(\mathbb{R}))$ *par un isomorphisme naturel au niveau de leur treillis d'ouverts compacts.* □

Nous allons montrer un résultat analogue dans le cas p–adique. Dans ce qui suit, définissable sera synonyme de définissable avec paramètres, et la topologie p–adique sera sous–entendue.

Définition. Soit $n \in \omega$, et $S \subseteq \mathbb{Q}_p^n$ un sous–ensemble définissable, on note $\mathcal{C}(S)$ l'ensemble des fonctions $S \longrightarrow \mathbb{Q}_p$ continues et définissables. □

Dans le contexte réel, Dickmann (voir [Di]) a mis en évidence l'analogue de la proposition suivante. Ici, elle nous fournit la clé du résultat.

Proposition 1. *Soit* $n \in \omega$ *,* $S \subseteq \mathbb{Q}_p^n$ *définissable et localement fermé (en particulier pour* $S = V(\mathbb{Q}_p)$ *),* $f \in \mathcal{C}(S)$ *et* $g \in \mathcal{C}(S-Z(f))$ *. Alors il existe un entier* $N \geq 1$ *tel que pour tout* $\underline{x}_0 \in \overline{S-Z(f)}$ *il existe* $c(\underline{x}_0), d(\underline{x}_0) \in \mathbb{Q}_p^\cdot$ *tel que (*)* $v_p(f^N g) \geq v_p(c(\underline{x}_0))$ *, sur l'ensemble* $\overline{B}(\underline{x}_0, d(\underline{x}_0)) \cap (S - Z(f))$ *.* □

En termes de norme p–adique on a $|f^N g|_p \leq |c(\underline{x}_0)|_p$, c'est donc dire que $f^N g$ est localement bornée sur $\overline{S-Z(f)}$. Il s'agit d'analyser la croissance de g sur la frontière de $Z(f)$:

g, f sont localement les zéros d'une équation polynomiale et a fortiori de croissance polynomiale; d'autre part par E.Q. leur comportement est décrit par les restes de polynômes à deux variables $h(g(\underline{x}), f(\underline{x}))$ modulo des $P_m^{\cdot}$, et le fait que ceux–ci soient "relativement explicitement ouverts" nous dit qu'on peut prédire le comportement de $h(y, z)$ à partir de celui de $h(0, z)$, dans un voisinage relatif de $(0, 0)$. Nous allons d'abord voir comment le résultat principal découle de cette proposition.

Corollaire 2. *Soit $f, g \in \mathcal{C}(S)$ tel que $Z(g) \subseteq Z(f)$, alors il existe un entier $N \geq 1$ tel que g divise f^N dans $\mathcal{C}(S)$, i.e. $f \in \sqrt{(g)}$.*

Démonstration. On a alors $g^{-1} \in \mathcal{C}(S-Z(f))$. Il existe N tel que $f^N g^{-1}$ est localement bornée sur $\overline{S-Z(f)}$. Ainsi $f \cdot f^N g^{-1}$ prolongée par 0 sur Z(f) appartient à $\mathcal{C}(S)$ et $gf^{N+1}g^{-1} = f^{N+1}$. □

Voici un autre fait–clef.

Proposition 3 ([Ro2]). *Soit $n \in \omega$, $U \subseteq \mathbb{Q}_p^n$ un ouvert définissable, alors il existe des polynômes $f_{ij} \in \mathbb{Q}_p[\underline{X}]$ et des entiers n_{ij} tel que $U = \bigcup_i \bigcap_j P_{n_{ij}}^{\cdot}(f_{ij}(\underline{x}))$.* □

Corollaire 4. *Soit $\iota : V(\mathbb{Q}_p) \longrightarrow \mathrm{Spec}_p\mathbb{Q}_p[V]$ le plongement canonique. Alors la correspondance $\varphi(\underline{x}) \longrightarrow \{(\mathbb{Q}_p[V] \longrightarrow K)/\sim \mid K \models \varphi(\underline{x})\}$ entre les sous–ensembles définissables de $V(\mathbb{Q}_p)$ et les sous–ensembles constructibles de $\mathrm{Spec}_p\mathbb{Q}_p[V]$ (par E.Q.) induit une bijection entre les ouverts définissables de $V(\mathbb{Q}_p)$ et les ouverts compacts de $\mathrm{Spec}_p\mathbb{Q}_p[V]$.* □

On vérifie que la bijection en question induit un isomorphisme de treillis entre le treillis des ouverts définissables de $V(\mathbb{Q}_p)$ et le treillis des ouverts compacts de $\mathrm{Spec}_p\mathbb{Q}_p[V]$, qui est engendré par les $D_n(g+I)$, $g \in \mathbb{Q}_p[\underline{X}]$.

Proposition 5. *Il y a un homéomorphisme entre $\mathrm{Spec}_p\mathbb{Q}_p[V]$ et $\mathrm{Spec}\,\mathcal{C}(V(\mathbb{Q}_p))$ induit par un isomorphisme naturel au niveau des treillis d'ouverts compacts.*

Démonstration. (1) Ces deux espaces étant spectraux, il suffit de montrer que leurs treillis d'ouverts compacts sont isomorphes: cet isomorphisme induit alors une bijection entre les filtres premiers de ces treillis qui s'identifient avec les points de chacun des espaces (dualité espaces spectraux $\longleftrightarrow$ treillis distributifs). Cette bijection est alors clairement un homéomorphisme.

(2) Comme on l'a vu, le treillis des ouverts compacts de $\mathrm{Spec}_p \mathbb{Q}_p[V]$ peut être identifié au treillis des ouverts définissables de $V(\mathbb{Q}_p)$. Notons–le $\tau(V)$.

(3) Soit $\tau(\mathcal{C})$ le treillis des ouverts compacts de $\mathrm{Spec}\, \mathcal{C}(V(\mathbb{Q}_p))$; alors $\tau(\mathcal{C})$ coïncide avec $\{D(f) \mid f \in \mathcal{C}(V(\mathbb{Q}_p))\}$. En effet, $\tau(\mathcal{C})$ est le treillis engendré par les $D(f)$, $f \in \mathcal{C}(V(\mathbb{Q}_p))$. On sait déjà que $D(f) \cap D(g) = D(fg)$. Soit $\psi(x,y) = x^2 + py^2$, on vérifie aisément que $\mathbb{Q}_p \models (\psi(x,y) = 0 \longleftrightarrow (x = 0 \wedge y = 0))$ et alors $D(f) \cup D(g) = D(\psi(f,g))$: l'inclusion $\supseteq$ est claire, d'autre part $Z(\psi(f,g)) \subseteq Z(f) \cap Z(g)$ et par le corollaire 2 on a $f, g \in \sqrt{(\psi(f,g))}$ et l'inclusion $\subseteq$ s'ensuit aussitôt.

(4) Soit $\Phi : \tau(\mathcal{C}) \longrightarrow \tau(V)$ l'application qui envoie $D(f)$ sur $\{\underline{x} \in V(\mathbb{Q}_p) \mid f(\underline{x}) \neq 0\}$. L'application Φ est bien définie puisque si $D(f) = D(g)$ alors $\sqrt{(f)} = \sqrt{(g)}$ et $Z(f) = Z(g)$, et donc $\Phi(D(f)) = \Phi(D(g))$. On vérifie immédiatement que Φ est un homomorphisme de treillis. Si $\Phi(D(f)) = \Phi(D(g))$ alors $Z(f) = Z(g)$, et par le corollaire 2 $\sqrt{(f)} = \sqrt{(g)}$ d'où $D(f) = D(g)$ et Φ est injective. La surjectivité de Φ découle du lemme suivant.

<u>Lemme 6</u>. *Pour tout fermé définissable $F \subseteq \mathbb{Q}_p^n$, il existe une fonction continue définissable qui s'annule exactement sur F.*

<u>Démonstration</u>. Notons que dans le cas réel on peut utiliser $\mathrm{dist}(\underline{x}, F) = \inf\{|\underline{x} - \underline{y}| \mid \underline{y} \in F\}$, mais dans notre cas on ne dispose pas de la section $p^{-v_p(x)}$ pour définir la norme p–adique. Pour tout m il existe $e_i \in \mathbb{N}$ tel que, $\mathbb{Q}_p = \{0\} \mathring{\cup} P_m^{\cdot} \mathring{\cup} e_1 P_m^{\cdot} \mathring{\cup} \ldots \mathring{\cup} e_{k(m)} P_m^{\cdot}$. Pour m fixé et pour $x \in \mathbb{Q}_p^{\cdot}$ posons $\rho_m(x) = e_i$ ssi $x \in e_i P_m^{\cdot}$. Ainsi $x \in P_m^{\cdot}$ ssi $\rho_m(x) = 1$. Notons que ρ_m est continue sur $\mathbb{Q}_p^{\cdot}$ puisque les $e_i P_m^{\cdot}$ sont ouverts. Soit $\varphi_m : \mathbb{Q}_p \longrightarrow \mathbb{Q}_p$ défini par

$$\varphi_m(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ x(\rho_m(x)\text{-}1) & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$$

On vérifie aisément que φ_m est continue sur $\mathbb{Q}_p$ et que $\varphi_m(x) = 0$ ssi $x \in P_m$. Soit

$$\psi_i(X_1,\ldots,X_{r(i)}) = X_1^{r(i)} + pX_2^{r(i)} + \ldots + p^{r(i)-1} X_{r(i)}^{r(i)}$$

alors comme précédemment $\mathbb{Q}_p \models (\psi_i(\underline{x}) = 0 \leftrightarrow \wedge\, x_j = 0)$. Par la proposition 3 il existe $m(i,j) \in \mathbb{N}$ et $f_{ij} \in \mathbb{Q}_p[\underline{X}]$ tel que $F = \bigcup_{i=1}^{q} \bigcap_{j=1}^{r(i)} P_{m(i,j)}(f_{ij}(\underline{x}))$, et

$$\psi_F(\underline{x}) = \prod_{i=1}^{q} \psi_i(\varphi_{m(i,1)}(f_{i1}(\underline{x})),\ldots,\varphi_{m(i,r(i))}(f_{ir(i)}(\underline{x})))$$

est la fonction cherchée. □

Notons comme corollaire que la dimension de Krull de $\mathcal{C}(V(\mathbb{Q}_p))$ est égale à la dimension combinatoire de $\mathrm{Spec}_p\mathbb{Q}_p[V]$ comme espace spectral, qui coïncide avec la dimension p–adique au sens de [SvdD], qui elle–même coïncide avec la dimension au sens de la géométrie algébrique.

<u>Démonstration de la Proposition 1</u> (cf. [CC] et la preuve de l'inégalité de Lojasiewicz p–adique (Thm. 2.5) dans [BS]).

Soit $v = v_p$. Si $\underline{x}_0 \in S-Z(f)$ alors par continuité de fg l'inégalité (*) est vérifiée avec $N=1$. On peut donc supposer que $\underline{x}_0 \in Z(f) \cap \overline{S-Z(f)}$. Considérons la formule

$$H(\underline{x},t,y,z) := \exists \underline{u}\ (\underline{u}\in S \wedge \underline{u}\in B(\underline{x},t) \wedge [(y=0 \wedge z=0) \vee (f(\underline{u})\neq 0 \wedge g(\underline{u})\neq 0 \wedge z=f(\underline{u}) \wedge y=g(\underline{u})^{-1})] .$$

Par E.Q. cette formule est équivalente dans $\mathrm{Th}(\mathbb{Q}_p)$ à une formule de la forme

$$\bigvee_i \bigwedge_j \{ P^{\bullet}_{m_{ij}}(h_{ij}(\underline{x},t,y,z)) , P_{n_{ij}}(k_{ij}(\underline{x},t,y,z)) : h_{ij}, k_{ij} \in \mathbb{Q}_p[\underline{X},T,Y,Z] \} .$$

Soit t_0 tel que $\overline{B}(\underline{x}_0,t_0) \cap S$ est fermé, et soit $S_0 := H(\underline{x}_0,t_0,y,z)$. Notons que $S_0 \cap OZ = \{O\}$, où $OZ = \{(y, z) \mid y=0\}$ et $O = (0, 0)$. Pour $a \neq 0$ quelconque, g est bornée sur le compact $\overline{B}(\underline{x}_0,t_0) \cap S \cap \{\underline{x} \in S : v(f(\underline{x})) \leq v(a)\}$ et (*) est vérifiée sur cet ensemble pour $N=1$. Il suffit donc de considérer $\overline{B}(\underline{x}_0,t_0) \cap S \cap \{\underline{x} \in S : v(f(\underline{x})) \geq v(a)\}$ pour un $a \neq 0$ approprié, i.e. montrer que dans un voisinage pointé de O on a $v(z^N y^{-1}) \geq v(c)$ pour tout $(y,z) \in S_0$ et des c, N appropriés. Dans l'expression de S_0 sans quantificateur, il suffit de considérer chacune des intersections $\bigcap_j$, et on peut supposer que O appartient à cette intersection sinon zy^{-1} est sûrement borné sur un voisinage pointé de O . On peut donc supposer

$$O \in S_0 = \bigcap_i P^{\cdot}_{m_i}(h_i(y,z)) \cap P_{n_i}(k_i(y,z))$$

et en outre $h_i, k_i \in \mathbb{Z}_p[Y,Z]$. Rappelons que $S_0 \cap OZ = \{O\}$, et donc l'un au moins des $h_i(0, z)$, $k_i(0, z)$ ne s'annule pas partout sur OZ . Soit $r(Y, Z)$ l'un de ces polynômes et P_m le prédicat correspondant. Pour $a \in \mathbb{Q}_p$ soit $U(a) = \{(y, z) \mid v(y), v(z) \geq v(a)\}$. Soit ε_1 tel que $r(0, Z)$ n'a pas de zéro différent de O sur $U(\varepsilon_1) \cap OZ$. D'autre part soit $r(0, Z) = Z^N s(Z)$, où $s \in \mathbb{Z}_p[Z]$ et $s(0) \neq 0$. Pour un ε_2 approprié on a

$$v(r(0, z)) < v(\alpha z^N) , \quad \text{pour } v(z) > v(\varepsilon_2) , z \neq 0$$

où $\alpha = \max \{v(s(z))+v(p) \mid v(z) \geq v(\varepsilon_2) , z \neq 0\}$ et $v(\alpha) \geq 0$. Soit $\varepsilon \in \mathbb{Q}^{\cdot}_p$ tel que $v(\varepsilon) > \max \{v(\varepsilon_1), v(\varepsilon_2), 0\}$, et exprimons r comme polynôme en Y :

$$r(Y, Z) = \sum_{j \geq 1} \gamma_j(Z) Y^j + r(0, Z) \ .$$

Alors pour $z \neq 0$ tel que $v(z) \geq v(\varepsilon)$, on a $r(0, z) \neq 0$ et donc

$$r(Y, z) \cdot r(0, z)^{-1} = \Sigma \ \gamma_j(z) \ r(0, z)^{-1} \ Y^j + 1 \ .$$

Si $v(y) \geq v(m^2 \alpha z^N) > v(m^2 r(0, z))$, alors pour $j \geq 1$, $v(\gamma_j(z) r(0, z)^{-1} y^j) > v(\gamma_j(z) m^2) \geq v(m^2)$, $(v(\gamma_j(z)) \geq 0)$, ce qui implique que $r(y, z) \cdot r(0, z)^{-1} \in P^{\cdot}_m$. Nous pouvons choisir ε, α, N tel que pour chacun des $r(Y, Z)$ et P_m comme ci–dessus on ait $r(y, z) \cdot r(0, z)^{-1} \in P^{\cdot}_m$ pour $y, z \in \mathbb{Q}^{\cdot}_p$ tels que $v(z) \geq v(\varepsilon)$ et $v(y) \geq v(m^2 \alpha z^N)$. Posons $c_0 = q^2 \alpha$, où q est le produit de tous les m nécessaires. Alors $(y, z) \notin S_0$ pour (y, z) tel que $z \neq 0$, $v(z) \geq v(\varepsilon)$ et $v(y) > v(c_0 z^N)$, sinon, par ce qui précède, on aurait aussi $(0, z) \in S_0$, ce qui est impossible. Ainsi $v(y) \leq v(c_0 z^N)$ pour $(y, z) \in U(\varepsilon) \cap S_0$, et on obtient l'inégalité voulue pour le voisinage pointé $U(\varepsilon) - O$. Il est clair que ce N ne dépend que du degré en Z des polynômes $r(0,Z)$ et donc a fortiori que de la description sans quantificateur de $H(\underline{x},t,y,z)$. On en conclut l'existence d'un N uniforme pour tous les $\underline{x}_0$. □

Notons que cette démonstration fonctionne dans tout modèle de $Th(\mathbb{Q}_p)$ et dans les corps p–adiquement clos de rang supérieur à 1 , en ajoutant les constantes nécessaires.

BIBLIOGRAPHIE.

[Am] Y. Amice, **Les nombres p–adiques**, Presses Univ. de France, 1975.

[Bé1] L. Bélair, Spectres p–adiques en rang fini, C.R.A.S. Paris 305 (1987), 1–4.

[Bé2] L. Bélair, Substructures and Uniform Elimination for p–adic Fields, Ann. Pure Appl. Logic 39 (1988), 1–17.

[BS] L. Bröcker et J.H. Schinke, On the L–adic Spectrum, Schriften Math. Univ. Munster, 2 Ser. 40, 1986.

[CC] M. Carral et M. Coste, Normal Spectral Spaces and Their Dimensions, J. Pure Appl. Alg. 30 (1983), 227–235.

[CR] M. Coste et M.–F. Coste–Roy, La topologie du spectre réel, in **Ordered Fields and Real Algebraic Geometry**, Contemporary Math. 8 (1982), A.M.S., 27–59.

[DG] J. Dieudonné et A. Grothendieck, **Eléments de géométrie algébrique I** , Springer–Verlag, 1971.

[Di] M. Dickmann, **Model–theoretic methods in real algebraic geometry**, North–Holland, Mathematical Library, en préparation.

[Ho] M. Hochster, Prime Ideal Structure in Commutative Rings, Trans. Amer. Math. Soc. 142 (1969), 43–60.

[Pi] A. Pillay, Sheaves of Continuous Definable Functions, J. Symb. Logic 53 (1988), 1165–1169

[Ro1] E. Robinson, The p–adic Spectrum, J. Pure Appl. Alg. 40 (1986), 281–297.

[Ro2] E. Robinson, The Geometric Theory of p–adic Fields, J. Algebra 110 (1987), 158–172.

[SvdD] P. Scowcroft et L. van den Dries, On the Structure of Semi–Algebraic Sets over p–adic Fields, J. Symb. Logic 53 (1988), 1138–1164.

[vdD] L. van den Dries, Artin–Schreier Theory for Commutative Regular Rings, Ann. Math. Logic 12 (1977), 113–150.

L. Bélair
Equipe de logique mathématique
UER de mathématique
Université Paris VII

Adresse actuelle :
Université du Québec à Montréal
Dépt. de Mathématiques et Informatique
1193 Place Phillips
Montréal H3C 3P8 – CANADA