

## **Passage de l'arithmétique à l'algèbre dans une perspective de résolution de problèmes : *une approche possible et favorable.***

Jérôme Proulx

Étudiant à la maîtrise en mathématiques à l'UQÀM, option didactique.

### 1) MISE EN CONTEXTE ET PRÉSENTATION DES INTÉRÊTS

Face à l'importance du sujet dans le milieu scolaire et aux développements récents dans celui de la recherche, notre groupe<sup>1</sup> s'est intéressé à la transition arithmétique/algèbre dans une perspective de résolution de problèmes. Nous nous sommes donc attardés à analyser et à réfléchir sur ce moment que nous jugeons personnellement important dans l'enseignement des mathématiques de niveau secondaire.

Notre intérêt principal se situe au niveau de ce passage des raisonnements arithmétiques aux raisonnements algébriques pour la résolution de problèmes en mathématiques. Plusieurs recherches ont, en effet, montré de nombreuses difficultés rencontrées lors de ce passage de l'arithmétique à l'algèbre en contexte de résolution de problèmes : chez les élèves (Bednarz et Janvier, 1996), chez les futurs enseignants en formation des maîtres (Schmidt, 1994) et dans les démarches proposées pour la classe à l'intérieur de certains manuels scolaires (Marchand et Bednarz, 1999, 2000). Ces résultats amènent à se questionner sur de nouvelles approches possibles quant à la façon d'aborder cette étape, jugée cruciale par plusieurs<sup>2</sup>, dans l'enseignement<sup>3</sup>.

### 2) LE CHOIX QUANT À LA RÉOLUTION DE PROBLÈMES

Le programme d'études québécois proposé par le MEQ met un accent particulier sur la résolution de problèmes en mathématiques. En ce qui concerne l'enseignement de l'algèbre en secondaire 2, ce contexte spécifique amène donc les élèves à utiliser l'algèbre pour résoudre des problèmes. L'algèbre est donc présenté comme un outil utile, efficace et général pour arriver à résoudre des problèmes, qui représente en quelque sorte l'objectif. C'est donc ce contexte québécois particulier qui nous permet d'aborder notre discussion sur le passage de l'arithmétique à l'algèbre sous l'angle de la résolution de problème.

Cette approche «outil algèbre pour résoudre des problèmes» fait évidemment contraste à la vision de l'algèbre en tant que sujet mathématique d'enseignement en lui-même, c'est-à-dire une approche pour laquelle l'algèbre devient l'objet d'enseignement, axant uniquement sur l'apprentissage des manipulations algébriques et symboliques en dehors de la résolution de problèmes. Cette dernière approche, procédurale, a évidemment pour conséquence majeure de dénier l'algèbre de tout son sens et de n'établir aucunement sa pertinence (l'algèbre est alors enseignée à vide, sans que son utilité et sa pertinence réelle soient montrées).

Par une analyse en profondeur de certains manuels scolaires, Marchand et Bednarz (1999) ont montré qu'il arrive qu'une majorité des problèmes proposés en algèbre soient des problèmes extrêmement simples (d'ordre arithmétique ou n'impliquant qu'une seule relation de comparaison entre les données<sup>4</sup>), ayant pu même être proposés pour l'enseignement de l'arithmétique aux niveaux précédents (sec.1 et primaire). L'importance et la pertinence de résoudre avec l'aide de l'outil algèbre, dans ces cas-ci, sont alors mis à l'écart.

La présence de ces problèmes «simples» en soi n'est pas négative, ce qui l'est est le fait que la majorité des problèmes proposés soient de ce type. Nous argumenterons plus tard sur les bienfaits et les apports, selon nous, d'une utilisation soignée et précise de ces problèmes dits «simples».

Dans un tel contexte, le faible intérêt et la réticence des élèves face à l'utilisation de ce nouvel outil s'avèrent compréhensibles : pourquoi se servir d'un nouvel outil lorsqu'ils peuvent aborder et résoudre ces mêmes problèmes avec d'autres stratégies efficaces. Nous considérons que le choix d'un enseignement structuré autour d'une imposition de l'utilisation de l'algèbre en résolution de problèmes, sans en faire voir sa nécessité réelle et son efficacité, ne peut donner de pertinence réelle à celle-ci pour l'élève. Comme le disent clairement Marchand et Bednarz :

Le choix de situations n'est en effet ici pas anodin, puisqu'il détermine la façon dont les élèves verront ou non la pertinence d'un passage au raisonnement algébrique, et saisiront

la puissance éventuelle de l'algèbre à résoudre une classe de problèmes pour laquelle le raisonnement arithmétique se révèle insuffisant. (Marchand et Bednarz, 1999, p.40)

C'est effectivement en faisant voir les limites de l'utilisation des stratégies arithmétiques sur des nouveaux problèmes plus complexes que l'utilisation de l'algèbre prendra tout son sens. Ainsi, le programme du Ministère de l'Éducation du Québec se prononce de façon très claire là-dessus :

Il est important de lui présenter des problèmes où l'algèbre devient un moyen plus efficace que l'arithmétique. L'élève pourra ainsi apprécier l'importance et l'utilité de l'algèbre. (MEQ 1994, secondaire 2, p.26)

Voici une analogie qui peut être utile : Imaginez que je vous donne un canon et que je vous dise que ce dernier vous servira dorénavant pour tuer les mouches : fini cette bonne vieille «tapette à mouche» habituelle (qui vous a rendu de bons et fiers services lors de vos dernières années). Même en vous montrant comment vous servir du canon pour réussir à tuer les mouches (entrer la poudre, mettre le feu, etc.), je ne crois pas être capable de vous convaincre de ne plus utiliser votre «tapette à mouche». Pourquoi? Parce que dans cette situation, cet outil très complexe, qui fera sans doute le travail, ne le fait pas plus que votre autre outil que vous contrôliez et avec lequel vous étiez habitués de travailler pour accomplir cette même tâche. Donc, même si ce canon puissant réussirait vraisemblablement à tuer les mouches, tant que vous ne verrez pas concrètement les limites de l'utilisation de votre «tapette à mouche» (pour faire couler un navire, par exemple) vous ne serez pas convaincus de la pertinence de ce nouvel outil pour résoudre certaines tâches. Malgré que ce canon puisse accomplir le travail voulu, c'est-à-dire tuer les mouches, sa pertinence d'utilisation vise davantage à régler des cas complexes et non des petits cas simples.

De façon analogue, la pertinence d'utilisation de l'algèbre passera par un travail systématique sur des problèmes où l'utilisation de l'arithmétique atteint ses limites et n'est plus pertinente dans ces cas, donc par un travail graduel sur des problèmes de plus en plus complexes où l'algèbre semble devenir un outil plus avantageux pour la résolution des problèmes.

De plus, à cela, il faut aussi ajouter un autre aspect propre à l'algèbre qui lui donne une grande pertinence, mais que nous ne traiterons pas dans ce texte : son caractère général. En effet, l'algèbre, une fois son sens construit, ne permet pas seulement de résoudre un seul type de problème, mais bien de résoudre une classe entière de problèmes. L'algèbre prend donc sa forme et sa pertinence dans sa capacité de généralisation.

Cette exigence du milieu scolaire envers l'utilisation de cet outil algèbre pour résoudre les problèmes amène souvent les élèves à s'investir dans les problèmes de façon algébrique sans contrôler et donner du sens à ce qu'ils font. Comme mentionné auparavant, on pourrait même à en arriver à enseigner l'outil algèbre (comme s'il était lui-même le sujet d'enseignement) et non la résolution des problèmes par l'algèbre (en utilisant l'outil algèbre pour résoudre). Encore une fois, cette façon de faire est tout à fait contradictoire avec les intentions du programme du Ministère de l'Éducation du Québec de deuxième secondaire qui insiste en premier lieu sur la résolution de problèmes :

Favoriser chez l'élève l'accroissement de l'habileté à analyser les données d'un problème et à utiliser des stratégies appropriées afin de trouver une solution qu'il pourra par la suite vérifier, interpréter et généraliser. (MEQ 1994, secondaire 2, p.22)

L'intérêt ou l'objectif majeur est donc centré sur la résolution des problèmes par les élèves.

Face à tout cela, on en arrive à la conclusion que nous devons proposer des problèmes qui donnent un sens et une pertinence à l'utilisation de l'outil algébrique, c'est-à-dire des problèmes qui font voir les limites des raisonnements arithmétiques pour la résolution des problèmes proposés et ainsi créer le passage souhaité vers l'algèbre. L'algèbre puise alors toute sa puissance dans premièrement sa capacité à résoudre ces problèmes inaccessibles par l'arithmétique et deuxièmement dans son caractère général pour résoudre une classe de problèmes –point sur lequel nous ne nous attarderons pas ici.

Alors, selon nous, la pertinence de l'algèbre doit être vécue par l'élève et non imposée par l'enseignant. Certaines de nos expériences personnelles au sein de la communauté enseignante nous ont permis de voir ces insistances, ces sollicitations et ces exigences, de

la part du milieu, à devoir utiliser à tout prix l'algèbre pour résoudre un problème en deuxième secondaire, sans quoi une solution adéquate, mais non algébrique, était jugée erronée –un certain contrat didactique étant mis à l'œuvre par l'enseignant<sup>5</sup>. Marchand et Bednarz (2000) ont même fait ressortir la présence d'une certaine détérioration des aptitudes de résolution de problème des élèves face à certains problèmes qu'ils arrivaient à résoudre antérieurement de façon arithmétique. Sans entrer dans ces détails, nous soulevons simplement ce fait pour faire réfléchir face à l'utilisation intensive et exclusive de l'algèbre dans un contexte de résolution de problèmes.

### 3) UNE PREMIÈRE RÉFLEXION

Dans les réflexions soulevées précédemment, nous nous rendons compte qu'il y a présence d'un écart important entre l'arithmétique et l'algèbre dans l'enseignement. Ces deux domaines sont souvent vus et traités de façon séparée et distincte : *«Depuis de nombreuses années, l'enseignement de l'algèbre est seulement amorcé une fois que l'apprentissage de l'arithmétique est presque terminé.»* (Carraher, Schliemann et Brizuela, 2002, p.1, notre traduction) et : *«L'organisation, dans les programmes d'études mathématiques contemporains, des domaines arithmétique et algébrique en chapitres distincts, où le rapport entre numérique et littéral est oublié...»* (Schmidt, 1994, p.70). Certains pourraient même dire que l'arithmétique est réservée au primaire, alors que l'algèbre serait réservée pour le secondaire. Ceci contribuerait même, selon Schmidt (1994), à *«une certaine répugnance à retourner à la vulgaire «arithmétique»»* pour certains élèves et enseignants. (Schmidt, 1994, p.57). De plus, les études de Bednarz et Janvier (1996) nous montrent que les élèves du primaire arrivent avec une panoplie de stratégies arithmétiques pour résoudre des problèmes considérés traditionnellement comme «algébriques». Notre analyse précise de ces diverses stratégies relevées chez les élèves dans ces études nous a permis de rendre compte du fait que certaines démarches arithmétiques ne sont pas si éloignées des démarches algébriques requises et désirées en deuxième secondaire<sup>6</sup>. Regardons en détails cette analyse.

#### 4) ANALYSE DE STRATÉGIES

Une transition n'étant pas ordinairement brusque (si on se fie à la définition du mot), comment faire ou établir ces liens entre l'arithmétique et l'algèbre dans ce travail sur la limite de l'utilisation de l'arithmétique pour résoudre? En se penchant sur les résultats de recherches de Bednarz et Janvier (1996), qui font apparaître une gamme de stratégies arithmétiques utilisées par les élèves, confrontés à la résolution de problèmes considérés traditionnellement algébriques et ce avant tout enseignement de l'algèbre, cela devient très éloquent. Lorsque l'on analyse en profondeur certaines stratégies arithmétiques utilisées par ces élèves face à ces problèmes algébriques «simples», on se rend compte qu'il existe un certain pont explicatif –un parallèle– pouvant être tracé entre leurs stratégies et ce qu'on «attend» d'eux en algèbre : les actions et les opérations faites en arithmétique pouvant être associées de façon judicieuse à celles requises en algèbre pour la résolution de ces problèmes «simples». Regardons en détails ce parallèle dont nous discuterons par la suite le potentiel.

Prenons l'exemple du problème suivant tiré d'une étude de Bednarz et Janvier<sup>7</sup>

*Deux menus différents ont été offerts à la cafétéria pour le repas du midi. On a servi 3 fois plus d'hamburger que de pizzas. 212 repas ont été servis. Combien a-t-on servi d'hamburgers et de pizzas? (Bednarz et Janvier)*

Premièrement, prenez le temps de résoudre ce problème vous même.

---

Face à ce problème, une solution algébrique possible est la suivante :

$x$  = nombre de pizzas,  $3x$  = nombre d'hamburgers

$$3x + x = 212$$

$$4x = 212$$

$$x = 53$$

$$3 \times 53 = 159$$

➔ 53 pizzas et 159 hamburgers.

Voici une solution possible d'un élève<sup>8</sup> :

$$212 \div 4 = 53 \quad [\div 4 \text{ car je compte 3 fois des hamburger et une fois des pizzas}]$$

$$53 \times 3 = 159 \quad [3 \text{ fois le nombre de pizzas} = \text{le nombre d'hamburger}]$$

$$53 + 159 = 212$$

➔ Pizzas : 53 hamburger : 159

---

Il est premièrement intéressant d'essayer de comprendre la stratégie arithmétique utilisée (que Bednarz et Janvier (1996) nomment : «prendre en compte la structure du problème», notre traduction). L'élève voit une petite part, celle des pizzas, et voit cette même petite part répétée trois fois pour les hamburgers («Trois fois le nombre de pizzas = le nombre d'hamburger»). Il voit donc 4 parts en tout dans ce problème et donc dans le nombre total de repas (3 pour les hamburgers et 1 pour les pizzas). Il divise donc le nombre total de repas en 4 ( $212 \div 4 = 53$ ). La valeur obtenue pour cette part représente le nombre de repas de pizzas, alors il la multiplie par 3 pour obtenir le nombre de repas de hamburgers servis ( $53 \times 3 = 159$ ).

Cette stratégie peut étonner en premier lieu tant par son originalité et sa richesse que par sa facilité, mais sa réussite demande selon nous un très grand contrôle sur les relations en présence dans le problème. Ce type de contrôle efficace sur les relations serait-il exploitable dans une amorce de transition de l'arithmétique à l'algèbre? Nous croyons que oui. Penchons-nous particulièrement sur l'établissement de certains liens.

Dans la solution algébrique, l'élève établit la relation entre les données :  $x$  pour le nombre de pizzas et  $3x$  pour le nombre d'hamburgers. Dans la solution arithmétique, l'élève établit aussi la relation entre les données : «3 fois le nombre de pizzas = le nombre d'hamburgers». Les deux solutions décrivent un contrôle quant à la relation en présence entre les données. Ensuite, dans la solution algébrique, l'élève «additionne ses  $x$ » et obtient  $4x$ . Dans la solution arithmétique, l'élève additionne ses parts : « $\div 4$  car je compte 3 fois des hamburgers et une fois des pizzas». Ensuite, l'élève «algébrique» divise son 212 en 4 pour obtenir la valeur de  $x$ . L'élève «arithmétique» divise son total en 4 pour obtenir la valeur d'une part. Après avoir obtenu 53, les deux élèves trouvent la quantité de hamburgers en ré-appliquant la relation liant les deux données (trois fois plus).

Cette analyse rapide et simpliste fait ressortir une certaine similitude ou association possible entre les deux solutions : un lien potentiel –dans la compréhension des relations et la modélisation du problème– semble pouvoir être tracé. N'y aurait-il pas possibilité d'exploiter ces similitudes? Ne pourrait-on pas introduire le raisonnement algébrique par

l'entremise d'un travail sur ces ressemblances marquées? L'insistance sur les ressemblances et leurs pouvoirs explicatifs dans les premiers pas de l'apprentissage de l'algèbre<sup>9</sup> ne serait-elle pas prometteuse quant à une émergence possible des raisonnements algébriques tant souhaités? L'algèbre n'y obtiendrait-elle pas un sens ici? Le sens, la compréhension de son utilisation et la pertinence de l'algèbre ne pourraient-ils pas émerger d'un travail axé sur les similitudes entre les deux solutions?

À cet effet, plus particulièrement au sujet de diverses stratégies informelles utilisées par les élèves, Nathan et Koedinger (2000) affirment que :

Les élèves, en employant des stratégies informelles, démontrent une compréhension intuitive des relations quantitatives qui pourraient s'avérer avantageuse dans un enseignement ultérieur. (Nathan et Koedinger, 2000, p.186, notre traduction)<sup>10</sup>

De plus, Bednarz et Janvier (1996) soulignent l'apport que ce type de stratégie peut avoir sur la compréhension de la mise en équation algébrique du problème. Dans leurs études, Bednarz et Janvier ont montré que les élèves ayant ce type de stratégies arrivaient à donner du sens à la signification de l'équation algébrique posée.

Face à cette position, certains pourraient nous critiquer<sup>11</sup> en affirmant que nous ne disons rien, car les solutions arithmétique et algébrique sont les mêmes dans un certain sens, par conséquent la solution arithmétique est en fait une solution algébrique maquillée. Nous répondons que cela est tout à fait juste et que c'est exactement ce que nous disons : les deux solutions sont très près l'une de l'autre dans ce type de problèmes –à quelques détails près. Le fait de les voir si rapprochées nous montre bien que le pas à faire entre les deux pour ce type de problème de départ est possible et qu'il n'est peut-être pas si grand. De plus, ce type de problème simple est probablement le type de problème à exploiter pour faire ce pont et créer cette transition souhaitée entre l'arithmétique et l'algèbre lors des débuts de l'enseignement de l'algèbre. Nous y reviendrons plus loin.

Pour ceux qui doutent encore de la présence d'un raisonnement arithmétique dans la deuxième solution, nous prenons le temps d'expliquer ce qui distingue, pour nous, une solution dite «algébrique» d'une solution dite «arithmétique». Une solution dite «algébrique» demande une manipulation algébrique de la part de l'élève sur une ou

plusieurs inconnues. L'élève, lors de ces manipulations, opère sur une certaine inconnue fixée préalablement au début du problème (un  $x$ , par exemple). L'élève opérera donc sur cette, ou ces, inconnue(s) jusqu'à ce qu'il obtienne, idéalement, la valeur de cette inconnue. Lors de ces manipulations algébriques, l'élève se détache du contexte propre au problème, il manipule algébriquement sans s'occuper de donner du sens à ses opérations dans le contexte [les opérations ne sont pas effectuées par rapport au contexte en présence]. Lorsque les manipulations algébriques sont effectuées, aucun lien n'est fait avec l'idée de pizzas ou de hamburgers : il n'y a présence que de manipulation symboliques dans le but de déterminer une inconnue préalablement posée. C'est ce qui s'appelle la «désémantisation», c'est-à-dire la perte du sens du contexte lors de la résolution. Cette «désémantisation» est une caractéristique nécessaire de la résolution algébrique. C'est l'étape durant laquelle l'élève se détache du contexte du problème (prend une distance, un certain écart) pour travailler sur un autre aspect (les manipulations) pour ensuite revenir avec une réponse qu'il devra réinvestir dans le problème proprement dit. Ce type de travail est, pour nous, descriptif d'une solution algébrique d'un problème. Lorsqu'on analyse les solutions arithmétiques, on voit que toutes les actions faites sont en lien avec le contexte du problème et n'ont de sens que dans ce contexte [la division par 4 dans la solution arithmétique arrive parce qu'on a 4 parts égales, alors que dans la solution algébrique c'est une opération qui est faite parce qu'on veut isoler le  $x$ , sans lien avec le contexte]. De plus, les opérations sont toutes dirigées sur des données connues (des nombres) : l'élève travaille et opère uniquement sur les données connues du problème. C'est, entre autres, une des différences entre une solution dite «arithmétique» et une solution dite «algébrique» en résolution de problèmes.

Finalement, certains peuvent se demander si il n'y a pas de contradiction entre l'idée de proposer ce genre de problème (que nous avons catalogué de simple auparavant) et l'idée de travailler sur la limite de l'arithmétique –pour faire le passage à l'algèbre. Notre vision repose plus sur le fait de travailler au tout début d'une séquence –en introduction– sur ce type de problème dans le but de faire tranquillement passer de l'arithmétique à l'algèbre, car nous croyons que ces problèmes (simples) peuvent faciliter et favoriser cette transition en créant un pont explicatif et un parallèle entre les deux solutions.

Comme nous l'avons vu, ces problèmes permettent de faire ressortir des stratégies arithmétiques (nous pourrions aussi travailler avec les stratégies essais numériques) qui, en plus de favoriser la compréhension de la mise en équation algébrique, peuvent contribuer à donner un certain sens aux opérations faites dans une résolution algébrique. La comparaison deux à deux des deux sortes de résolutions pourrait ainsi permettre de faire réfléchir un peu sur la raison des actions posées dans les démarches algébriques. C'est l'idée de dresser les deux types de solutions en parallèle pour faire voir et comprendre le fonctionnement des solutions algébriques.

La puissance et l'intérêt de ces problèmes algébriques «simples» résident donc dans le fait que ces problèmes sont abordables de façon arithmétique et que la comparaison de ces résolutions arithmétiques avec celles algébriques souhaitées [qui peuvent être exposées par le professeur en guise de «solution de l'expert mathématicien algébriste»] peut permettre de donner du sens et de faire comprendre la mise en équation algébrique et sa résolution.

Cette approche nous a été en quelque sorte inspirée par deux personnes avec lesquelles nous avons collaboré à l'été 2002 : les professeurs Ricardo Nemirovsky et David Carraher du centre de recherche TERC de Cambridge. La première idée provient de David Carraher qui nous expliquait que l'utilisation de l'algèbre ne peut être niée et que son apprentissage et son utilisation seront présentes et représenteront des objectifs d'études importants par la suite. Ainsi, cette algèbre se doit d'être dévoilée et proposée par l'enseignant aux élèves ; elle ne doit pas leur être cachée. La deuxième idée provient des travaux de Ricardo Nemirovsky en ce qui concerne son utilisation originale du matériel didactique dans l'enseignement. En effet, Ricardo Nemirovsky utilise le matériel didactique pour donner du sens à des notions mathématiques préalablement connues des élèves, c'est-à-dire qu'en un premier temps il expose les concepts mathématiques qui sont à l'étude et, dans un deuxième temps, il essaie de faire comprendre et de donner un sens à ces concepts [posés] en faisant raisonner les élèves sur l'utilisation d'un matériel didactique proposé. Le lien de cette deuxième idée avec l'approche que nous proposons est le fait que nous tentons de créer et donner un sens aux concepts et résolutions

algébriques [posés] à l'aide des stratégies arithmétiques [qui représente en quelque sorte notre matériel didactique].

La jonction de ces deux idées nous amène donc à vouloir montrer l'outil algébrique aux élèves –en tant que solution de l'expert mathématicien algébriste– et à essayer de lui donner un sens et une pertinence en ayant recours à un certain parallèle explicatif avec les stratégies arithmétiques.

Si on élabore sur la suite de la séquence d'enseignement, l'idée serait de complexifier les problèmes proposés au fur et à mesure de l'enseignement pour aller justement faire sentir cette limite de l'arithmétique face à des nouveaux problèmes<sup>12</sup>. On augmente la difficulté par un choix de problèmes qui est de plus en plus complexe<sup>13</sup>. Il est clair cependant que le fait de travailler uniquement sur des problèmes de ce type (faisant partie de la catégorie des problèmes simples dont nous avons parlé précédemment) ne motive aucunement la transition voulue, car on demeure toujours à un niveau «initiateur» : la complexification des problèmes proposés doit être présente, elle est primordiale pour faire saisir la limite de l'arithmétique. Nous proposons donc les problèmes «simples» comme initiateurs à l'intérieur d'une séquence visant, dans cette transition arithmétique/algèbre, à donner un sens à l'utilisation de l'algèbre et à en voir sa pertinence.

Le problème précédant étant structuré autour d'une relation multiplicative (3 fois plus), voici un autre type de problème «initiateur» reposant cette fois sur une relation additive :

*«Deux enfants ont chacun une collection de timbres. Alexandre possède 37 timbres de plus que Josée. S'ils ont ensemble 181 timbres, combien de timbres chacun a-t-il dans sa collection?» (Bednarz et Janvier)*

Premièrement, prenez encore le temps de résoudre ce problème vous même.

---

Face à ce problème, une solution algébrique possible est la suivante :

$$\begin{aligned} x &= \text{nombre de timbres de Josée, } x + 37 = \text{nombre de timbres d'Alexandre} \\ x + x + 37 &= 181 \\ 2x + 37 &= 181 \\ 2x &= 144 \end{aligned}$$

$$x = 72$$

$$72 + 37 = 109$$

➔ 72 pour Josée et 109 pour Alexandre

Voici une solution d'élève possible :

$$181 - 37 = 144$$

$$144 \div 2 = 72$$

$$72 + 37 = 109$$

➔ 72 pour Josée et 109 pour Alexandre

Il est encore une fois, premièrement, intéressant de comprendre la démarche arithmétique employée (aussi nommée «prise en compte de la structure du problème» par Bednarz et Janvier (1996)). Ici, l'élève y voit deux quantités, celle de Josée et celle d'Alexandre. En sachant qu'elles ne sont pas équivalentes (Alexandre en a 37 de plus), il décide de réorganiser le problème pour les rendre identiques. Il enlèvera donc la quantité (le surplus) qu'Alexandre a de plus que Josée ( $181 - 37 = 144$ ). Ainsi, en enlevant ce surplus, il obtient deux quantités qui sont maintenant équivalentes, c'est donc dire que le montant représente ce que Josée et Alexandre auraient s'ils étaient égaux (comme le surplus «appartient» en quelque sorte à Alexandre, on pourrait aussi dire que ce 144 représente la quantité que les deux auraient si les deux avaient le même nombre) . Il divise donc son résultat en deux ( $144 \div 2 = 72$ ). Cette quantité représente donc le nombre de timbres de Josée et ainsi il ajoute 37 à 72 pour obtenir le nombre de timbres d'Alexandre ( $72 + 37 = 109$ ).

Regardons maintenant le potentiel d'exploitation de cette solution, et de ce problème, en faisant ressortir, par une description des caractéristique de chacune des solutions, leurs similitudes inhérentes. Le contrôle sur les relations entre les données du problème est encore une fois central au parallèle existant entre les deux raisonnements.

Dans la solution algébrique, l'élève établit les relations entre les données :  $x$  pour le nombre de timbres de Josée et  $x + 37$  pour le nombre de timbres d'Alexandre. Dans la solution arithmétique, le contrôle sur la relation est implicite lorsqu'il voit la différence

entre les deux quantités, soit «37 de plus que l'autre», qu'il soustrait comme étant un surplus empêchant les deux quantités d'être équivalentes<sup>14</sup>. Le point crucial de la solution algébrique est lorsqu'il y a soustraction du 37 lors des manipulations algébriques ( $2x+37=181$ ,  $2x=144$ ). Cette opération s'associe à celle précédemment citée dans la procédure arithmétique (enlever le surplus). Finalement, dans la solution algébrique, on divise 144 en deux pour obtenir la valeur du  $x$  recherché. Dans la solution arithmétique, l'élève divise en deux sa quantité obtenue représentant deux fois une certaine quantité. Par la suite, dans les deux solutions, la quantité d'Alexandre est retrouvée en ajoutant le nombre de timbres qu'il possède de plus que Josée.

Encore une fois, on est à même de voir l'association pouvant être faite entre les deux solutions énoncées. Quelqu'un pourrait même dire que les opérations et les actions se transcrivent l'une dans l'autre [ce qui irait de pair avec notre prise de position selon laquelle nous affirmons qu'il existe un pont explicatif dans ces problèmes simples entre les solutions arithmétiques développées par les élèves et les solutions algébriques «standards»]. D'autres pourraient trouver que les solutions arithmétiques proposées semblent plus simples et plus riches au niveau du contrôle du problème. Nous n'entrerons pas dans des explications et dans une argumentation pour supporter cette affirmation – malgré le fait que nous y adhérons de plein gré –, mais nous voulons faire remarquer que ces allégations font transparaître le grand potentiel de ces problèmes simples en tant que porte d'entrée sur l'algèbre –non pas pour voir la limite de l'arithmétique, mais pour commencer un raisonnement et développer une compréhension de ce que représente l'outil algébrique [la puissance de l'algèbre étant exploitée par des problèmes qui suivront et face auxquels l'algèbre ne sera pas nouvelle, car déjà discutée, présentée et réfléchi]. Étant dits simples et riches au niveau du contrôle des relations entre les données du problème, ces entrées et ces façons de faire ne pourraient sûrement pas être nuisibles pour un travail ultérieur en algèbre où plusieurs s'entendent sur le fait que le contrôle des relations entre les données du problème est un aspect primordial de la résolution de problèmes (entre autre, voir Bednarz et Janvier, 1996).

Ces problèmes, impliquant une relation multiplicative ou additive, proposés précédemment font partie, selon nous, de la séquence de problèmes initiateurs d'une séquence d'enseignement visant une transition entre l'arithmétique et l'algèbre. Ces problèmes permettent de faire, par leurs solutions arithmétiques émergentes, un lien avec les solutions désirées dans un raisonnement algébrique. Ces problèmes «algébriques simples» (Marchand et Bednarz, 1999) permettent en effet un certain investissement des élèves dans leur résolution (ils sont capables d'initier une certaine résolution –pas nécessairement par algèbre ou par arithmétique (avec un raisonnement de type structure, mais de plusieurs façons) et, face à certaines solutions arithmétiques proposées, permettent de créer un lien avec les raisonnements et solutions algébriques désirées. Ils permettent d'initier tranquillement la transition vers l'algèbre en jouant sur la construction d'un sens –en établissant des liens avec les solutions arithmétiques— et en débutant l'idée de création d'une pertinence à l'algèbre, car ceux-ci se placent au début d'une séquence de problèmes démarrant un mouvement vers l'atteinte d'une certaine limite de l'arithmétique. Tout le potentiel à exploiter réside ici.

Voici un troisième exemple de problème. Ce problème à trois données intègre les deux sortes de relations proposées précédemment, soit une composition de relation additive et multiplicative<sup>15</sup> :

*«380 élèves sont inscrits aux trois activités sportives offertes durant la session. Le basket-ball regroupe 3 fois plus d'élèves que le patinage et la natation regroupe 114 élèves de plus que le basket-ball. Combien y-a-t-il d'élèves inscrits à chaque activité?» (Bednarz et Janvier)*

Comme toujours, prenez le temps de résoudre ce problème vous-même.

---

Face à ce problème, une solution algébrique possible pourrait être la suivante :

$x$  = nombre d'élèves inscrits au patinage,  
 $3x$  = nombre d'élèves inscrits au basket-ball,  
 $3x + 114$  = nombre d'élèves inscrits à la natation.  
 $x + 3x + 3x + 114 = 380$   
 $7x + 114 = 380$   
 $7x = 266$

$$x = 38$$

$$3 \times 38 = 114$$

$$3 \times 38 + 114 = 228$$

➔ 38 élèves inscrits au patinage, 114 au basket-ball et 228 à la natation.

Voici une solution d'élève possible :

Pour que la natation et le basket-ball soient équivalents :  $380 - 114 = 266$

Pour le patinage :  $266 \div (3+3+1) = 38$

Basket-ball :  $38 \times 3 = 114$

Natation :  $114 + 114 = 228$

➔ Patinage : 38 élèves, basket-ball : 114 élèves, natation : 228 élèves.

---

Comment fonctionne cette solution arithmétique? Sans être une solution tombée du ciel qui semble magique, cette solution implique selon nous un contrôle aigu des relations entre les données du problème.

L'élève, premièrement, enlève le surplus existant entre le nombre d'élèves à la natation et le basket-ball (la natation a 114 inscriptions de plus) pour que les quantités d'élèves à la natation et le basket-ball soient «équivalents» : «*Pour que la natation et le basket-ball soient équivalents.*»). Ensuite, par l'établissement des relations multiplicatives entre les quantités –la natation étant «équivalente» au basket-ball, car elle est maintenant sans son surplus– il est possible d'établir le nombre de fois que l'on retrouve la quantité d'inscriptions du patinage dans le nombre obtenu : tout peut maintenant être exprimé en terme de parts (une part étant le nombre d'inscriptions au patinage). Il obtient donc 7 parts avec lesquelles il divisera son nouveau total modifié (266) pour obtenir la valeur d'une part, soit la quantité pour le patinage : «*Pour le patinage :  $266 \div (3+3+1) = 38$ .*». Avec la valeur de la part, il ré-appliquera les relations du problème pour obtenir les autres données cherchées.

Cette fois-ci, je vous laisse la liberté d'établir vous même le parallèle, le potentiel d'exploitation et les ponts explicatifs en présence entre les actions et les raisonnements impliqués à l'intérieur des deux solutions présentées : (-114) ; (3 fois), ( $\div 7$ ), etc. Disons simplement qu'ils sont toujours tout aussi présents et intéressants.

Déjà à cette étape, en ayant simplement ajouté une donnée, plusieurs pourraient se prononcer sur le fait que la limite de l'arithmétique semble déjà atteinte, ce qui peut être effectivement vrai pour certains élèves. Ceci laisse donc transparaître l'évolution mentionnée auparavant, quant à la pertinence et l'émergence du raisonnement et des solutions algébriques, par cette façon de faire proposée.

Certains sceptiques pourraient affirmer que ces solutions proviennent de cas particuliers ou d'élèves exceptionnels et ne sont aucunement représentatives des solutions arithmétiques réelles des élèves avant un apprentissage de l'algèbre. Sans affirmer que ces solutions forment la majorité des raisonnements arithmétiques présents chez ces élèves, nous en soulignons leur présence chez certains élèves québécois avant la mise en place du programme d'études de 1993 (Bednarz et Janvier, 1996). Cependant, et cela nous servira d'appui plus tard quant à un autre argument que nous tiendrons, une étude ultérieure a démontré une baisse quant à la présence –ou au nombre– des solutions de ce type chez les élèves québécois avant l'apprentissage de l'algèbre (Marchand et Bednarz, 2000). Ces résultats soulèvent ainsi des questions quant à certains éléments du curriculum en vigueur –depuis 1993– au Québec (Marchand et Bednarz, 2000) et nous permettront plus loin d'appuyer notre prise de position, en un certain sens. Nous élaborerons là-dessus dans les prochains paragraphes.

##### 5) CE QUE NOUS EN TIRONS

Ces analyses font ressortir, selon nous, un grand potentiel pour les enseignants de deuxième secondaire à travailler sur ce passage de l'arithmétique à l'algèbre en essayant de réinvestir ces stratégies arithmétiques des élèves –dû à la présence de certaines similitudes– dans un but de développer les raisonnements algébriques chez les élèves et de les faire «*passer à l'algèbre*». Par le fait même, et c'est ce qui renforce en un certain sens cette position, ceci suit les intentions du programme d'études du Ministère de l'Éducation du Québec qui axe fortement, comme mentionné, sur la résolution de problème et sur l'importance de faire émerger la pertinence de l'algèbre aux yeux des élèves. Dans cette lignée, cette résolution de problème doit se faire et s'enseigner en utilisant des outils pertinents et efficaces (toujours aux yeux des élèves). Il en résulte

donc que l'algèbre devra être développée dans une perspective constante de résolution de problèmes, cette algèbre servant ainsi comme nouvel outil à la disposition des élèves dans un but ultime de résoudre des problèmes.

C'est donc dire que l'algèbre puise toute sa pertinence dans une démarche où l'arithmétique atteint sa limite et devient même inefficace, voire inutilisable. C'est donc cette voie qui, selon le Ministère de l'Éducation du Québec, se doit d'être empruntée dans les classes de mathématiques au Québec. Par un choix méticuleux d'une séquence de problèmes de plus en plus complexes, ce passage devra donc s'opérer en tentant d'atteindre la limite –et même l'inefficacité– de l'utilisation de l'outil arithmétique à l'égard des problèmes sélectionnés. C'est évidemment sur les épaules des enseignants et enseignantes que repose la lourde tâche d'effectuer ce passage requis et demandé, car c'est à eux que revient en quelque sorte la sélection des problèmes à proposer en classe.

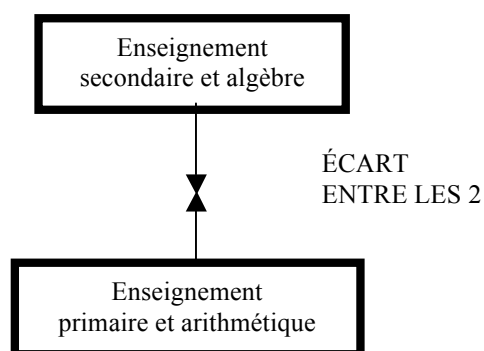
Cette position quant au ré-investissement des stratégies prend aussi un fort appui sur le fait –non négligeable– que les élèves arrivant en deuxième secondaire ont reçu, au moins, sept années d'enseignement de résolution de problèmes par l'arithmétique.

Une certaine «culture» mathématique se met alors en place dans la classe via une ensemble de pratiques établies, et les régularités sociales qui émergent de celles-ci se caractérisent par des manières d'agir, de parler et d'écrire les «mathématiques» pour rendre compte de solutions, en référence à une toile de fond qui est arithmétique (Bauersfeld, 1992). (tiré de Schmidt, 1994, p.1)

Il s'avère donc intéressant –et important– de tenter de tirer parti de cette «culture» mathématique en place chez les élèves [qui est en quelque sorte arithmétique]. Ceci est à prendre en compte et ne peut pas réellement être ignoré par l'enseignant. C'est pour cela qu'une approche axée sur le ré-investissement de ces stratégies arithmétiques pour introduire les stratégies et raisonnements algébriques nous semble prometteuse.

Cependant, il serait faux de dire que ces perspectives s'adressent uniquement aux enseignants de niveau secondaire. La tâche d'amenuiser et réduire l'écart existant entre l'enseignement de l'algèbre et son utilisation et l'enseignement de l'arithmétique et son utilisation ne repose pas entièrement sur les uniques épaules des enseignants du

secondaire. Les problèmes favorisant des liens entre l'arithmétique et l'algèbre, comme ceux de type «simple» montrés plus haut, se doivent aussi d'être travaillés de façon plus constante par les enseignants du primaire. C'est donc dire qu'un accent particulier devrait aussi être mis sur ce type de problèmes au primaire [en les résolvant, toutefois, ici, uniquement par l'arithmétique]. Le travail de résolution arithmétique du même type de problème que ceux proposés précédemment se doit d'être amorcé en axant sur le contrôle des relations entre les données du problèmes. Autant les enseignants du secondaire doivent ré-investir sur les stratégies arithmétiques des élèves dans ces problèmes «simples» pour faire émerger l'algèbre, autant les enseignants du primaire doivent proposer ce type de problèmes et faire travailler les raisonnements arithmétiques requis sous-jacents. L'idée prend sa source dans l'intention d'amenuiser l'écart existant entre les deux, quant à leur apprentissage.



Pour appuyer cette idée –de travailler de façon constante sur ce type de problèmes –nous voulons mettre en évidence le fait, comme mentionné auparavant, que le nombre de stratégies arithmétiques de type «structure» semble diminuer chez les élèves au Québec (Marchand et Bednarz, 2000). Ces stratégies semblent donc se perdre, et ce, malgré leur riche potentiel (Bednarz et Janvier, 1996). En effet, selon Bednarz et Janvier (1996), cette façon structurée de s'investir dans les problèmes semblerait être porteuse de grands potentiels quant à une compréhension et un contrôle sur les raisonnements algébriques ultérieurs. Donc, le fait que de moins en moins d'élèves possèdent et utilisent ce type de stratégies riches et prometteuses met en évidence l'importance et la pertinence d'initier rapidement –ou ré-initier– un travail autour de ce genre de problèmes comportant différentes relations entre les données –et bien d'autres types de problèmes– chez les élèves du primaire. De plus, nous avons même remarqué que cette idée semble avoir été

utilisée par certains nouveaux manuels scolaires québécois conçus pour le primaire. En effet, voici un problème tiré de la collection Tangram du deuxième cycle du primaire (sous presse) :

*«En électricité, on utilise des fils noirs, rouges et blancs. Pour une construction, on a utilisé 2 fois plus de fil blanc que de fil noir et de fil rouge ensemble. On a utilisé 45 mètres de fil en tout. On a utilisé deux fois moins de fil rouge que de fil noir. Combien de fil de chaque couleur a-t-on utilisé?»*

De plus, une étude faite par Landry (1999) met en évidence les bienfaits d'une approche préalable comme nous proposons [axée sur le contrôle des relations entre les données du problème]. Pour reprendre les mots de Marchand et Bednarz en rapport à cette étude :

Une séquence d'enseignement réalisée auprès d'élèves de secondaire 2, ayant mis l'accent sur une réflexion des relations de comparaison dans des problèmes en arithmétique et sur le passage à l'algèbre dans un contexte de généralisation, montre l'apport d'un tel travail préalable pour le développement de raisonnements algébriques dans un contexte de résolution de problèmes (Landry, 1999) (tiré de Marchand et Bednarz, 1999, p.37)

L'idée, en plus de favoriser l'émergence de raisonnements arithmétiques riches, est de solidifier les raisonnements arithmétiques des élèves pour que les enseignants du secondaire puissent réinvestir de façon constante sur ces derniers lors de leur enseignement de l'algèbre. La transition souhaitée, par le réinvestissement des stratégies, sera évidemment beaucoup plus efficace si les stratégies sur lesquelles les enseignants s'appuient sont stables et établies.

D'une certaine façon, on pourrait statuer sur le fait que notre position est quelque peu en lien avec l'histoire de l'enseignement de l'algèbre. En effet, Chevallard, cité dans Schmidt (1994) et repris dans Bednarz et Janvier (1996), fait ressortir un bilan de l'enseignement de l'algèbre à travers l'histoire. Si on se fie à ce que Chevallard en fait ressortir, les premiers pas de l'enseignement de l'algèbre étaient structurés autour d'une insistance sur la puissance de l'algèbre et la recherche de la limite de l'arithmétique en résolution de problèmes : ce qui est très près de l'approche que nous préconisons et proposons<sup>16</sup>.

Des modes de résolution arithmétique et algébrique de ces problèmes étaient proposés, en insistant sur la puissance de l'algèbre pour résoudre d'autres problèmes du même type. Dans cette démarche, l'algèbre apparaissait comme un nouvel outil qui, tout en prenant

racine dans la tradition et les connaissances arithmétiques, permettait de résoudre des problèmes que l'arithmétique ne pouvait traiter que localement. (Schmidt, 1994, p.71)

Face à des problèmes et des stratégies totalement différentes, mais faisant miroiter un parallèle intéressant pour notre approche, Nathan et Koedinger (2000) mentionnent que deux études récentes (Nathan et al. 1992; Koedinger et Henderson, 1997) ont montré qu'un enseignant liant l'enseignement de l'algèbre formelle et les représentations préalables des élèves a aidé à l'apprentissage de procédés algébriques chez les élèves -tels la mise en équation algébrique des relations entre les données du problème (Voir aussi à ce sujet Bednarz et Janvier, 1996).

Dans cette approche, les méthodes «unwinding» [...] utilisées spontanément par les élèves ont servi de représentation de base pour les nouveaux, et plus abstraits, objets et procédures. (Nathan et Koedinger, 2000, p.186, notre traduction).<sup>17</sup>

## 6) CONCLUSIONS

L'approche que nous préconisons pour favoriser le passage de l'arithmétique à l'algèbre, et ainsi faire émerger les raisonnements algébriques, est articulée sur l'introduction de problèmes algébriques «simples» dans le but de ré-investir et d'axer sur les stratégies arithmétiques utilisées par les élèves, pour faire émerger les stratégies algébriques voulues –par le pont explicatif et le parallèle existant entre les solutions arithmétiques et algébriques de ces problèmes «simples». Nous insistons donc sur le fait de travailler ainsi pour les enseignants du secondaire, mais aussi sur le fait qu'un travail plus assidu autour de ces types de problèmes<sup>18</sup> devrait être fait par les enseignants du primaire (traités uniquement par l'arithmétique cette fois).

Cette approche va ainsi de pair avec deux aspects très importants à prendre en compte : soit la place et l'importance de la résolution de problèmes dans le programme de formation québécoise et le fait, non négligeable, que la «culture» mathématique de l'élève, à ce stade, est arithmétique. Nous argumentons ainsi que cette approche est très prometteuse et semble très bénéfique quant à l'atteinte de l'objectif fixé sur la transition en douceur d'un mode de raisonnement arithmétique à un mode de raisonnement algébrique chez les élèves.

Cependant, il est très clair que les problèmes proposés dans la séquence de problèmes algébriques atteindront un niveau de complexification très élevé. À ces instants, les résolutions arithmétiques, si elles y sont encore possibles, ne seront plus réellement efficaces et aidantes pour établir des liens et comprendre les démarches algébriques, les manipulations demandées ne se reliant plus du tout à un travail sur le contexte du problème. C'était exactement ce que nous avons appelé la «désémantisation». C'est donc uniquement dans le but d'initier le travail algébrique que nous considérons le réinvestissement des solutions arithmétiques utiles pour donner un sens et faire voir une pertinence à l'algèbre. Ce n'est donc pas comme solution ultime d'enseignement de l'algèbre, car de toute façon, l'arithmétique atteindra une certaine limite, son utilisation sera, pour ainsi dire, impossible –d'où la puissance de l'algèbre.

Par contre, cette idée d'introduction nous fait soulever le point important qu'en tant qu'enseignant de deuxième secondaire, placé en face d'élèves ayant uniquement un bagage arithmétique, nous n'avons pas le droit de ne pas être au courant et d'ignorer la présence de ces stratégies arithmétiques chez les élèves dans notre enseignement. Négliger et ne pas prendre en compte les connaissances des élèves en leur imposant une nouvelle façon de résoudre ces problèmes est pour nous une grave erreur -cela va en plus à l'encontre des intentions du programme québécois de formation. Nous considérons ainsi que l'enseignant se doit d'être au courant des stratégies arithmétiques des élèves et se doit de les réutiliser pour faire émerger un sens à l'algèbre.

Finalement, comme le disent si bien Sfard et Linchevsky (1994), il n'est pas suffisant de proposer et de changer les approches d'enseignement pour arriver à faire développer davantage la compréhension adéquate des concepts à l'étude par les élèves, puisque quelle que soit la façon avec laquelle nous enseignons, nous ne créerons rien si nous ne nous attardons pas à faire construire et à donner un sens aux mathématiques étudiées.

Ainsi, quelle que soit la façon dont l'algèbre sera enseignée :

il semble très important que nous essayons de motiver nos élèves à donner du sens à toutes les étapes de l'apprentissage. Nous devons faire d'eux des chercheurs de sens qui, comme le dit Davis (1988, p.10), vont de façon habituelle «*interpréter* les situations, *interpréter* leurs actions, penser au sens des symboles et au sens des symboles et des opérations». (Sfard et Linchevsky, 1994, p.225, notre traduction)

C'est donc cette recherche acharnée et continuelle pour donner et faire construire un sens à l'algèbre qui est suggérée et souhaitée par notre approche.

---

<sup>1</sup> Le groupe d'étude était composé de deux enseignants de niveau primaire, soit Monsieur Benjamin Lasalle et Monsieur Luc Lapierre de l'Université de Montréal, et de moi-même. Le tout était supervisé par Madame Louise Poirier de l'Université de Montréal. Ce groupe d'étude a été mis sur pied dans le but d'élaborer une communication pour l'École d'Été dans le cadre du 54<sup>ème</sup> congrès de la CIEAEM à Vilanova i la Geltrú en Espagne (juillet 2002).

<sup>2</sup> Dont le ministère de l'éducation du Québec qui octroie à l'algèbre une place prépondérante dans les années ultérieures (de sec.2 à sec.5).

<sup>3</sup> Nous voulons toutefois être très clair sur le fait que nous ne nous disons pas que nos idées et conclusions sont absolues : notre intention est de proposer notre vision (construite à travers la lecture de plusieurs recherches, notre formation d'enseignant [cours de didactique et stages en milieu pratique] et nos expériences personnelles d'enseignant, entre autres au primaire et en secondaire 1 et 2). L'objectif du groupe est donc, par cela, de susciter un questionnement systématique et profond chez le lecteur quant aux perspectives possibles proposées.

<sup>4</sup> Par exemple, considérez le problème suivant tiré de cette étude : «*L'école offre deux activités sportives durant la session. Le hockey regroupe 37 élèves de plus que la natation. S'il y a 181 élèves inscrits à ces activités, combien d'élèves participent à chacune d'elles?*» (Marchand et Bednarz, 2000)

<sup>5</sup> Voir entre autres le livre de Guy Brousseau : *Théorie des situations didactiques*. Éditions La Pensée Sauvage, 1998.

<sup>6</sup> Nous pourrions même nous prononcer sur le fait qu'elles s'y apparentent beaucoup dans certains cas.

<sup>7</sup> Les problèmes ne seront pas toujours annexés de référence puisqu'ils ne figurent pas toujours à l'intérieur des textes cités. Nous avons eu un accès privilégié à ces problèmes par la gracieuseté de Madame Nadine Bednarz. Le groupe d'étude lui en est sincèrement reconnaissant.

<sup>8</sup> Les solutions proposées ont été inspirées et élaborées sur la base des solutions d'élèves consultées [pour ces mêmes problèmes], ainsi que leurs explications générales dans l'article écrit par Bednarz et Janvier (1996). Par souci d'intégrité et de respect pour les chercheurs de l'étude, nous n'avons pas utilisé directement et textuellement les solutions consultées.

<sup>9</sup> Nous soulignons au début, car nous savons fort bien qu'à un certain moment donné ce parallèle ne pourra plus être fait. Nous trouvons cependant intéressant de tracer ce pont explicatif dans les débuts pour donner un certain sens à cette algèbre et faire comprendre son utilisation possible.

<sup>10</sup> Les stratégies informelles dont il est question ici ne sont pas exactement les stratégies de type structure dont nous parlons, elles font référence à des stratégies considérées non usuelles ou «non scolaires» utilisées par les élèves –nous pourrions cependant possiblement y inclure les stratégies de type structure. De plus, ces auteurs mentionnent un certain type de stratégies –«unwinding»– sur lequel nous nous pencherons rapidement plus loin.

<sup>11</sup> Cela est en effet arrivé fréquemment lors de nos présentations, discussions et rencontres.

<sup>12</sup> Il est clair que cette limite n'existe pas physiquement ni conceptuellement : elle n'est pas établie à l'avance et peut varier d'un élève à un autre. Certains élèves vont pousser leurs raisonnements

arithmétiques très loin, alors que d'autres vont voir une certaine limite plus rapidement. Certains verront, ou sentiront, la pertinence de passer à l'algèbre avant d'autres : de là l'importance de travailler sur des problèmes de plus en plus complexes qui pousseront vers une certaine limite de l'arithmétique. Il est évident, comme mentionné, qu'à un certain niveau le parallèle entre les stratégies algébriques et arithmétiques ne pourra plus être fait, c'est pourquoi nous insistons sur les problèmes simples en début d'apprentissage où l'établissement de ce parallèle est possible, donc pour donner un sens à l'outil algèbre par l'arithmétique.

<sup>13</sup> Pour une description complète des types de problèmes et une classification de leur complexité, voir Bednarz et Janvier (1996) et Marchand et Bednarz (1999).

<sup>14</sup> À noter qu'il aurait pu ajouter la quantité manquante à Josée pour équivaloir à celle d'Alexandre. Donc, il aurait fait  $181 + 37 = 218$ ,  $218 \div 2 = 109$  (représentant le nombre de timbres d'Alexandre). Cette solution est cependant moins naturelle et peu probable étant donné la relation donnée dans le problème (37 de plus) qui fait ressentir l'idée d'un surplus.

<sup>15</sup> Ce problème n'est qu'un exemple précis. Nous aurions pu en former un autre de trois données avec une composition de relations additives ou bien multiplicatives [Voir Bednarz et Janvier (1996) et Marchand et Bednarz (1999)].

<sup>16</sup> L'idée n'étant évidemment pas de reproduire l'histoire, mais plutôt de s'en servir pour comprendre comment l'évolution de certains concepts s'est faite (Comment l'enseignement de l'algèbre se faisait-il?). Cela peut nous permettre, peut-être, de mieux comprendre et de percevoir des apports et des voies possibles (qui ont été vécues par nos prédécesseurs).

<sup>17</sup> Face à des problèmes du type : «Lorsque Ted est revenu de son travail, il a multiplié son taux horaire par les 6 heures qu'il avait travaillé. Par la suite, il a ajouté les 66\$ qu'il avait fait en pourboire et est arrivé au montant de 81,90\$. Quel est le taux horaire que Ted reçoit pour son travail?» (Nathan et Koedinger, 2000, p.170, notre traduction). Ces types de problèmes sont structurés de façon linéaire. Certains élèves utilisant la stratégie «unwinding» résolvent alors le problème en soustrayant 66\$ des 81,90\$ pour ensuite divisé le tout par 6. C'est une certaine démarche à «reculons».

<sup>18</sup> Pour une description complète des types de problèmes et une classification de leur complexité, voir Bednarz et Janvier (1996) et Marchand et Bednarz (1999).

## Références bibliographiques :

Bednarz, N. Janvier, B. (1996). Emergence and development of algebra as a problem-solving tool : continuities and discontinuities with arithmetic. In Bednarz, N., Kieran, C., Lee, L. (eds.) *Approaches to Algebra : Perspectives for Research and Teaching*. Dordrecht, Kluwer Academic Publishers, p. 115-136.

Carraher, D. Schliemann, A. D., Brizuela, B. M. (2002). *The Relationships between Arithmetic and Algebra in Early Mathematics Education*. Texte non-publié, TERC, Cambridge, Massachussets.

Gouvernement du Québec, Ministère de l'Éducation, Programme d'études de mathématiques 216, enseignement secondaire, 1994, 16-3301-07, pp.22-27.

- 
- Landry, M. (1999). *Développement d'habiletés en résolution de problèmes en algèbre chez les élèves du secondaire*. Thèse de doctorat inédite, Université du Québec à Montréal.
- Marchand, P. Bednarz, N. (1999). L'enseignement de l'algèbre au secondaire : une analyse des problèmes présentés aux élèves. *Bulletin AMQ, Vol. XXXIX, n°4*. pp.30-42.
- Marchand, P. Bednarz, N. (2000). Développement de l'algèbre dans un contexte de résolutions de problèmes. *Bulletin AMQ, Vol. XL, n°4*. pp.15-25.
- Nathan, M. J. Koedinger, K. R. (2000). Teachers' and Researchers' Beliefs About the Development of Algebraic Reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education, Vol.31, n°2*. pp.168-190.
- Schmidt, S. (1994). *Passage de l'arithmétique à l'algèbre et inversement de l'algèbre à l'arithmétique, chez les futurs enseignants dans un contexte de résolution de problèmes*. Thèse de doctorat inédite, Université du Québec à Montréal.
- Sfard, A. Linchevski, L. (1994). The gains and the pitfalls of reification - The case of algebra. *Educational Studies in Mathematics, 26*. pp.191-228.