

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL

UNE ÉVALUATION COMPUTATIONNELLE DE LA LOI GÉNÉRALISÉE DE
L'APPARIEMENT PAR L'ANALYSE DES PROPRIÉTÉS STATISTIQUES
INHÉRENTES AUX SITUATIONS OPÉRANTES

THÈSE
PRÉSENTÉE
COMME EXIGENCE PARTIELLE
DU DOCTORAT EN PSYCHOLOGIE

PAR
PIER-OLIVER CARON

SEPTEMBRE 2017

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL
Service des bibliothèques

Avertissement

La diffusion de cette thèse se fait dans le respect des droits de son auteur, qui a signé le formulaire *Autorisation de reproduire et de diffuser un travail de recherche de cycles supérieurs* (SDU-522 – Rév.01-2006). Cette autorisation stipule que «conformément à l'article 11 du Règlement no 8 des études de cycles supérieurs, [l'auteur] concède à l'Université du Québec à Montréal une licence non exclusive d'utilisation et de publication de la totalité ou d'une partie importante de [son] travail de recherche pour des fins pédagogiques et non commerciales. Plus précisément, [l'auteur] autorise l'Université du Québec à Montréal à reproduire, diffuser, prêter, distribuer ou vendre des copies de [son] travail de recherche à des fins non commerciales sur quelque support que ce soit, y compris l'Internet. Cette licence et cette autorisation n'entraînent pas une renonciation de [la] part [de l'auteur] à [ses] droits moraux ni à [ses] droits de propriété intellectuelle. Sauf entente contraire, [l'auteur] conserve la liberté de diffuser et de commercialiser ou non ce travail dont [il] possède un exemplaire.»

REMERCIEMENTS

Je tiens d'abord à remercier mon directeur de thèse, monsieur Jacques Forget, pour avoir été l'architecte du façonnement de mes comportements intellectuels. Son influence sur mon parcours académique est primordiale et incontestable. Je pense qu'il a vu en moi beaucoup de potentiel qu'il a su canaliser pendant tout le processus de doctorat. Je le remercie pour ses commentaires acerbes, mais combien instructifs et formateurs, qui, comme il le sait, je l'espère, ont beaucoup été appréciés comme les belles années passées au sein de son laboratoire.

J'aimerais aussi remercier monsieur André Achim, mon superviseur de stage de recherche, de m'avoir formé à la computation et aux statistiques, habiletés essentielles sans lesquelles il m'aurait été impossible de compléter la présente thèse, mais plus particulièrement à la façon de réfléchir quantitativement. J'ignore s'il appréciera le contenu de cette thèse plus comportementale que cognitive, disons-le, mais peut-être pourrait-il saisir l'influence qu'il a eue sur ce projet.

Je remercie aussi mes amis et collègues du laboratoire, notamment Mélissa, Anne-Josée et Alexandre. J'aimerais remercier spécialement Philippe Valois qui m'a beaucoup soutenu dans ce projet, puisqu'il est dans les rares personnes qui en comprennent les tenants et aboutissants, et avec qui j'ai développé une belle relation d'amitié. Je prends cet espace pour te souhaiter le meilleur pour la fin de ton parcours et l'après!

Je tiens également à souligner l'appui financier du Fond Québécois de Recherche - société et la culture (FQRSC) qui a grandement facilité la réalisation de cette thèse et le parcours doctoral dans son ensemble.

À mes parents et ma famille, je les remercie de m'avoir soutenu tout au long de ce processus, même s'ils ne comprenaient pas vraiment ce que je faisais. Avec un peu de recul, je m'aperçois malheureusement que je n'aidais pas vraiment à rendre mon projet ni le parcours doctoral plus intelligible. À mon épouse, Geneviève, qui a vu du début à la fin la réalisation de ce projet, qui m'a soutenu psychologiquement, encouragé et aidé à toutes les étapes. Je te remercie de ton dévouement. Enfin, à mon fils Éloi. Je souhaite que, comme ton père, tu accomplisses ce que tu désires dans la vie. Merci, mon petit bonheur.

TABLES DES MATIÈRES

LISTE DES FIGURES.....	VII
LISTE DES TABLEAUX.....	IX
RÉSUMÉ.....	X
CHAPITRE I	
INTRODUCTION.....	1
1.1. La loi d'appariement.....	2
1.2. Problématique.....	3
1.2.1. Le problème lié à l'explication de la loi de l'appariement.....	3
1.2.2. Le problème lié à l'utilisation de la loi de l'appariement.....	4
1.3. Objectif.....	5
1.4. Présentation des cinq articles.....	6
CHAPITRE II	
PRESENTATION DE L'ARTICLE 1.....	8
SUR LA LOI DE L'APPARIEMENT.....	9
CHAPITRE III	
PRESENTATION DE L'ARTICLE 2.....	90
LA LOI GÉNÉRALISÉE DE L'APPARIEMENT : UNE SIMULATION DE MONTE-CARLO.....	91
CHAPITRE IV	
PRESENTATION DE L'ARTICLE 3.....	118
MATCHING WITHOUT LEARNING.....	119

CHAPITRE V	
PRESENTATION DE L'ARTICLE 4	142
ON THE STATISTICAL PROPERTIES OF OPERANT SETTINGS AND THEIR CONTRIBUTION TO THE EVALUATION OF SENSITIVITY TO REINFORCEMENT	143
CHAPITRE VI	
PRESENTATION DE L'ARTICLE 5	172
DES OUTILS POUR ÉVALUER LA SENSIBILITÉ AU RENFORCEMENT SOUS EXCEL, R ET MATLAB.....	173
CHAPITRE VII	
DISCUSSION GÉNÉRALE	202
7.1. Les contributions de la thèse	202
7.1.1. Synthétiser des travaux et implications sur la recherche actuelle	202
7.1.2. Montrer l'influence des contraintes inhérentes aux situations opérantes	205
7.1.3. Programmer une simulation skinnérienne.....	206
7.1.4. Proposer une méthode d'évaluation des contraintes sur la loi de l'appariement	207
7.2. Lier les simulations et le modèle nul.....	209
7.3. Perspectives futures.....	212
RÉFÉRENCES	214

LISTE DES FIGURES

Figure	Page
2.1 Deux illustrations de programmes de renforcement concurrents	85
2.2 Représentation de la loi généralisée de l'appariement selon sa forme logarithmique (graphiques de gauche) et selon l'équation de puissance (graphiques de droite).....	86
2.3 Illustration d'une situation opérante simplifiée	87
3.1 Les valeurs moyennes de la variance expliquée en fonction du taux de réponse maximum et de la quantité d'observations.....	112
3.2 Les valeurs moyennes de la sensibilité en fonction du taux de réponse maximum et de la quantité d'observations	113
3.3 Les distributions de la variance expliquée, de la sensibilité et du biais générées par les 24 000 essais.....	114
4.1 Illustration of the influence of the first constraint	139
4.2 Results from simulation 1.....	140
4.3 Results from simulation 2.....	141
5.1 Hypothetical subject's response allocation as a function of reinforcer rates ratios	166
6.1 Ouverture de la feuille de calcul permettant d'évaluer la sensibilité sous Microsoft Office Excel 2010	196

6.2	Les résultats hypothétiques du participant	197
6.3	Présentation du code R nécessaire à l'évaluation d'une relation d'appariement.	198
6.4	Présentation du code Matlab nécessaire à l'évaluation d'une relation d'appariement.	200

LISTE DES TABLEAUX

Tableau	Page
2.1 Table des matières	88
2.2 Présentation des versions de la loi de l'appariement.....	89
3.1 Tableau récapitulatif des bornes de la distribution uniforme discrète.....	115
3.2 Les valeurs moyennes de la variance expliquée en fonction du taux de réponse maximum et de la quantité d'observations.....	116
3.3 Les valeurs moyennes de la sensibilité en fonction du taux de réponse maximum et de la quantité d'observations	117
5.1 Summary of the hypothetical example	167
6.1 Résumé des résultats.....	195
7.1 Effets (en somme de distance χ^2) de θ , p_1 et p_2 sur les corrélations	211

RÉSUMÉ

L'objectif de la présente thèse est de répondre aux deux questions de recherche suivantes : comment la loi de l'appariement obtient-elle de hautes variances expliquées lorsqu'elle est appliquée à des données représentant la prise de décision et comment évaluer si un organisme suit vraisemblablement les prédictions que le modèle engendre. Pour répondre à ces deux questions, la thèse propose l'idée selon laquelle une situation opérante possède des propriétés contraignant la fréquence d'apparition des comportements et des conséquences, corrélant conséquemment les composantes de l'équation d'appariement et augmentant simultanément la corrélation attendue entre les ratios des réponses et des renforçateurs. Ces conjectures entraînent l'élaboration d'un modèle nul (un modèle ne contenant que l'influence des contraintes) permettant d'évaluer les relations d'appariement des organismes par rapport à une hypothèse nulle à la fois flexible et orientée théoriquement, et qui implique que la variance expliquée d'une relation d'appariement attendue dans une situation opérante est élevée sans nécessité de processus comportementaux ou décisionnels. La présente thèse comporte cinq articles qui développent sa substance, défendent ses conjectures et démontrent leur portée.

Le premier article synthétise les développements de la loi de l'appariement depuis sa première formulation par Herrnstein en 1961 jusqu'à aujourd'hui. Il décrit cinq versions de la loi de l'appariement, soit la loi stricte de l'appariement, la loi quantitative de l'effet, la loi généralisée de l'appariement, la loi moderne de l'appariement et la concaténation de la loi généralisée de l'appariement. L'article met l'accent sur les enjeux contemporains, les limites des modèles et leurs contributions. Il dresse le portrait vers la problématique abordée dans cette thèse : les variances expliquées élevées et l'évaluation de la loi de l'appariement.

Le deuxième article présente et évalue l'idée selon laquelle les variances expliquées de la loi généralisée de l'appariement sont dues aux propriétés inhérentes aux programmes de renforcement. Il s'agit d'une première modélisation de la situation opérante proposant la contrainte selon laquelle, dans un programme de renforcement concurrent à intervalle variable, la quantité de renforçateurs ne peut dépasser la quantité de comportements émis. Par l'intermédiaire de simulations Monte-Carlo, l'article conclut que l'influence des contraintes explique en moyenne

47 % de la variance de la loi généralisée de l'appariement. L'idée selon laquelle ce résultat peut être utilisé comme hypothèse nulle pour évaluer l'appariement est proposée en guise de conclusion.

À la suite à l'article 2, le troisième article examine davantage l'influence des contraintes sur les relations d'appariement (plus de conditions) ainsi que l'ajout d'une contrainte supplémentaire (la dépendance réciproque entre deux comportements). Les résultats respectent les conclusions de l'article 2. De plus, l'article 3 montre que la contrainte supplémentaire permet d'expliquer en moyenne 63 % de la variance. Cette conclusion tend vers les conclusions tirées des études empiriques, particulièrement celles employant un protocole de recherche descriptif avec des humains. Pour conclure, l'article soutient que les simulations montrent que la loi généralisée de l'appariement peut être partiellement expliquée par les contraintes de la situation opérante et qu'un processus comportemental n'est pas toujours nécessaire pour rendre compte des variances expliquées élevées.

Le quatrième article propose un modèle nul quantifiable a priori permettant d'évaluer les relations d'appariement. L'article s'articule autour de la difficulté à évaluer la sensibilité aux renforçateurs des organismes comme évalué par la loi généralisée de l'appariement. Les fondements théoriques du modèle nul sont d'abord développés, puis sa formulation est décrite. Le modèle est une généralisation des articles 2 et 3, et peut être calculé sans avoir recours aux simulations de Monte-Carlo. La relation entre le modèle et les simulations est décrite en conclusion de la thèse.

Le cinquième article présente trois outils informatiques sous les logiciels Excel, R et Matlab permettant à tout chercheur d'utiliser le modèle nul développé à l'article 4 pour évaluer les relations d'appariement à leurs propres données comportementales.

Les cinq articles sont précédés d'une introduction détaillant la problématique. Par la suite, ces articles sont présentés et sont suivis d'une conclusion détaillant les contributions de la thèse, les liens entre les simulations et le modèle nul, et se concluent sur les perspectives de recherche futures.

Mots clés : relation d'appariement, loi de l'appariement, simulation de Monte-Carlo, corrélation de ratio, conditionnement opérant, programme de renforcement

CHAPITRE I

INTRODUCTION

En analyse expérimentale du comportement, une conception défendue est que le comportement opérant ne peut être étudié isolément, mais plutôt en relation avec les événements de l'environnement qui lui sont associés (Skinner, 1938). Ce cadre de recherche privilégie l'étude du comportement d'un organisme (protocole expérimental à cas unique) placé sous de multiples conditions permettant la manipulation d'une variable indépendante et facilitant la prise de mesure d'une variable dépendante, généralement la fréquence comportementale. Dans une procédure typique de conditionnement opérant, un pigeon est devant une option (un disque lumineux) lui procurant de la nourriture en fonction de la façon dont celui-ci picore le disque (Skinner, 1938). Ce contexte favorise l'étude des relations fonctionnelles entre une condition particulière de renforcement et le débit du comportement opérant. Si une relation existe entre la réponse et l'événement, ce dernier dicte la probabilité de réapparition du comportement. Autrement dit, la probabilité de réapparition d'un comportement est contrôlée par la contingence de renforcement qui lui est associée. Cet énoncé reprend l'idée originale de Thorndike (1911) selon laquelle un comportement surviendra plus fréquemment s'il est suivi d'une conséquence plaisante. Plus tard, Skinner (1938) rendra l'énoncé empirique en évitant le terme de conséquence plaisante qui représente un état interne de l'organisme inaccessible à l'investigation empirique pour le remplacer par une définition circulaire selon laquelle la probabilité d'un comportement augmente s'il est suivi d'une conséquence augmentant la probabilité d'apparition du comportement, c'est-à-dire, la définition stricte d'un renforçateur.

1.1. La loi d'appariement

Une originalité proposée à la fin des années 50 est d'étudier le comportement d'un organisme en présence de deux programmes de renforcement (le participant peut actionner une clé A ou une clé B). Même si cette procédure (appelée un programme de renforcement concurrent) est étudiée par d'autres (Ferster & Skinner, 1957; Findley, 1958), il revient à Herrnstein (1961) d'avoir élucidé la relation quantitative liant réponses et renforçateurs (la loi de l'appariement). Dans ces travaux, Herrnstein montre que la probabilité d'apparition du comportement ne dépend pas seulement du programme de renforcement auquel le comportement est associé, mais aussi des autres programmes de renforcement associés aux autres comportements de l'organisme. La loi de l'appariement s'est révélée décrire adéquatement les choix des organismes lorsque ceux-ci répondent à un programme de renforcement concurrent, et ce, par de multiples études (Baum, 1979, 1983; Davison & McCarthy, 1988; de Villiers, 1977; Forget, Donais & Giroux, 2001; McDowell, 1986, 2005, 2013; Pierce & Epling, 1983; Wearden & Burgess, 1982). Aussi, Herrnstein est le principal artisan du courant de recherche qui s'est construit à partir de l'étude de son modèle (Forget, et al., 2001; Mazur, 2006). Il est notamment à l'origine de la formation de la *Society for the Quantitative Analyses of Behavior*. De plus, la loi de l'appariement a engendré un accroissement des modèles mathématiques, qui lui sont par ailleurs liés, tels que l'hypothèse de l'amélioration locale (Herrnstein, 1997), la théorie de l'inertie comportementale (Nevin & Grace, 2000), le modèle de la discriminabilité des contingences (Davison & Jenkins, 1985), la théorie de la sensibilité sociale (Forget & Rivard, 2010), le modèle des choix contextuels (Grace & Hucks, 2013), le modèle de la dévaluation hyperbolique (Mazur, 2001), le modèle computationnel de la sélection par les conséquences (McDowell, 2004) ou encore, la théorie de la maximisation molaire (Rachlin, Battalio, Kagel & Green, 1981) au sein de la discipline. Bien que la loi de l'appariement se soit révélée un modèle puissant et fertile, il reste plusieurs questions à résoudre.

1.2. Problématique

Les travaux autour de la loi de l'appariement prennent deux directions au courant des 20 dernières années. D'abord, il y a le problème d'expliquer, généralement par des modèles testables de façon computationnelle, comment l'organisme atteint un état d'équilibre comportemental comme stipulé par l'appariement. Ensuite, il y a l'application de la loi de l'appariement en milieu naturel, son utilisation, son interprétation, mais plus particulièrement les limites de son applicabilité. Ces problèmes seront présentés dans les prochaines sections. Chacun des points sera détaillé davantage dans les prochaines sections.

1.2.1. Le problème lié à l'explication de la loi de l'appariement

L'un des problèmes de la loi de l'appariement est d'identifier quel processus de l'organisme permet l'émergence de l'équilibre comportemental impliquée par l'appariement. En effet, elle explique plus de 80 % de variances expliquées des études portant sur les programmes de renforcement concurrent (Baum, 1979; Davison & McCarthy, 1988; McDowell, 2013), mais puisqu'il s'agit d'un modèle descriptif du comportement, la loi de l'appariement n'explique pas de quelle façon l'organisme choisit. Autrement dit, l'appariement est l'aboutissement molaire et il n'y a pas d'explication moléculaire (moment par moment, seconde par seconde, par exemple) du phénomène qui génère le comportement. Les chercheurs s'empressent alors de proposer leur propre théorie. Il est possible de séparer temporellement et conceptuellement la modélisation explicative de l'appariement. En premier lieu, il y a la rivalité entre la théorie de l'amélioration locale (Herrnstein, 1997) et de la maximisation molaire (Rachlin, 1995) qui débute dans les années 70 et se termine dans les années 90, quoique les questions de recherche restent encore ouvertes. En deuxième lieu, l'utilisation de modèles computationnels tels que l'apprentissage par renforcement (Sutton & Barto, 1998), les réseaux neuronaux (Haykin, 2009) et les algorithmes génétiques (McDowell, 2004) qui débute dans les années 90 et se

poursuit à ce jour. Sans entrer dans les détails (ce sera fait ultérieurement), l'ensemble de ces modèles a un même objectif, c'est-à-dire d'expliquer la loi de l'appariement par des mécanismes moléculaires et internes à l'organisme qui, une fois les comportements agglomérés à l'échelle molaire, font émerger l'appariement. Bien que la computation impliquée dans ces modèles soit largement différente, ils sont basés qualitativement sur un même mécanisme, nommément un processus d'apprentissage contingent à la distribution des renforçateurs. Il n'est donc pas étonnant que, malgré leurs différences algorithmiques, ils atteignent le même objectif computationnel, soit d'imiter les relations d'appariement. Sakai et Fukai (2008) montrent par ailleurs qu'un processus impliquant une maximisation partielle, si elle inclut une mémoire des choix passés et des renforçateurs, mènera à l'appariement, et ce, peu importe l'algorithme impliqué. Par conséquent, les modèles théoriques avec des résultats empiriques similaires ne peuvent être départagés. Un autre point de vue, plus récent, suggère que la loi de l'appariement pourrait être le fruit de l'expérimentation (la procédure et l'appareillage) plutôt que produit de l'organisme (Killeen, 2015). Cette idée est d'autant plus intéressante qu'elle s'accorde bien avec une conception béhavioriste de comportement. En revanche, Killeen n'a pas modélisé sa suggestion. Bref, il existe plusieurs modèles représentant les mécanismes internes qui permettent d'expliquer le comportement des organismes. Il existe aussi une perspective peu explorée quant à la modélisation de l'appariement par rapport à l'environnement.

1.2.2. Le problème lié à l'utilisation de la loi de l'appariement

Dans les années 90, la quantité d'études transactionnelles sur l'applicabilité de l'appariement en contexte naturel s'accroît. Leur objectif est d'évaluer l'étendue des situations dans lesquelles le modèle s'applique. Si le programme de recherche est prometteur de prime abord, les chercheurs se butent à la difficulté de tirer des conclusions expérimentalement valides. Le problème est qu'en l'absence de contrôle de la variable indépendante, il est impossible de confirmer hors de tout doute le lien entre les taux comportementaux et de renforcement (Bijou, Peterson & Ault, 1968).

La majeure partie des études ont d'ailleurs recours à des devis non expérimentaux. En effet, 68 % des études transactionnelles recourent à des observations descriptives où le protocole de recherche n'implique aucune manipulation expérimentale, restreignant l'applicabilité de leurs conclusions (Caron, Royer & Forget, 2014). Autrement dit, en absence d'un devis expérimental, la problématique revient à déterminer à quel moment les résultats obtenus par la loi de l'appariement sont vraisemblablement dus au contrôle exercé par le ratio des renforçateurs sur les comportements de l'organisme.

Cette conclusion mène à un second problème : il est difficile de tirer la conclusion qu'un organisme suit effectivement les prédictions de la loi de l'appariement. Aucune règle théoriquement valide n'existe actuellement pour déterminer si l'organisme dans la situation opérante est sensible ou non aux contingences de renforcement. L'obtention de variances expliquées élevées n'est pas garante du contrôle des ratios de comportements par rapport aux ratios de renforçateurs. Pourtant toutes les études sur l'appariement, particulièrement les études transactionnelles, n'ont recours qu'à une heuristique de décision selon laquelle une variance expliquée de plus de 50 % est suffisante pour juger l'organisme sensible aux contingences (Reed, 2009; Rivard, Forget, Kerr & Bégin, 2014), et ce, sans égard à d'autres paramètres aussi intéressants, tels que le paramètre de sensibilité et le biais. Ces paramètres, seuls, ne sont pas plus suffisants. L'heuristique est cependant problématique, car il n'est ni justifié théoriquement ni empiriquement.

1.3. Objectif

L'objectif de la présente thèse est de répondre à ces deux problèmes : comment la loi de l'appariement obtient-elle de hautes variances expliquées et comment évaluer si un organisme est sensible aux contingences de renforcement? Pour répondre à ces deux questions, la thèse propose l'idée selon laquelle une situation opérante possède des propriétés contraignant la fréquence d'apparition des

comportements et des conséquences, corrélant ainsi les composantes de l'équation d'appariement (comportements et renforçateurs) et, conséquemment, la corrélation entre leurs ratios. Ces conjectures permettent de répondre aux problèmes précédents en suggérant un modèle d'appariement ne nécessitant pas de processus comportementaux (processus de décision) lequel est basé sur des supputations à la fois flexibles et orientées théoriquement, évaluant les relations d'appariement des organismes.

1.4. Présentation des cinq articles

Le premier article synthétise les développements de la loi de l'appariement. Cette synthèse expose explicitement le choix de la thèse de se restreindre à la loi généralisée de l'appariement. L'article met l'accent sur les enjeux contemporains, les limites des modèles et leurs contributions. Il dresse le portrait vers la problématique de la thèse : les variances expliquées élevées qu'obtient la loi de l'appariement et les limites de l'utilisation de celle-ci en contexte appliqué.

Le deuxième article est une première tentative permettant de répondre aux questions de recherche. Il propose que la situation opérante possède des propriétés inhérentes, maintenues par les fonctions de feedback liant comportements et conséquences, et montre qu'elles engendrent comme phénomène émergeant la loi généralisée de l'appariement. L'article conclut avec l'idée selon laquelle ce résultat peut être utilisé comme hypothèse nulle pour évaluer l'appariement.

Le troisième article poursuit les travaux entamés par l'article 2. Il examine plus systématiquement l'influence des contraintes sur les relations d'appariement (plus de conditions) ainsi que d'ajouter une contrainte supplémentaire (la dépendance réciproque entre deux comportements). Les résultats soutiennent ceux de l'article 2. L'article conclut sur le fait que la loi généralisée de l'appariement s'explique partiellement par la présence de contraintes et que ces dernières peuvent produire des variances expliquées élevées sans avoir recours à des processus comportementaux.

Le quatrième article propose un modèle (référé dorénavant comme le modèle nul, car il correspond à ce qui est attendu seulement par hasard, sans l'influence de processus) généralisant les résultats des articles 2 et 3. Il s'agit d'une quantification a priori (sans avoir recours aux simulations des articles précédents) des corrélations entre les composantes de la loi généralisée de l'appariement. Ces résultats permettent d'estimer la variance expliquée attendue dans une situation opérante selon les contraintes envisagées ainsi que la vraisemblance d'une relation d'appariement d'un organisme.

Le cinquième article offre des outils informatiques évaluant la sensibilité au renforcement. L'objectif du manuscrit est de démocratiser l'utilisation du modèle nul développé au chapitre V afin d'améliorer la qualité des études publiées sur la loi de l'appariement. L'article présente trois logiciels implémentant les calculs du modèle nul et de son test d'hypothèse pour évaluer la sensibilité au renforcement. Un exemple est présenté afin d'illustrer la procédure.

CHAPITRE II

PRÉSENTATION DE L'ARTICLE 1

SUR LA LOI DE L'APPARIEMENT

Référence complète : Caron, P.-O. (2017). Sur la loi de l'appariement. *Psychologie Française*, 62, 29-55. doi: 10.1016/j.psfr.2015.10.003

Sur la loi de l'appariement

On the matching law

Caron, Pier-Olivier

Laboratoire des Sciences Appliquées du Comportement, Département de
Psychologie, Université du Québec à Montréal

Conflit d'intérêt : Aucun
Téléphone : 514.987.3000 poste 2569
Correspondance
Pier-Olivier Caron
Université du Québec à Montréal
Département de Psychologie
C.P. 8888 succursale Centre-ville
Montréal, Qc, Canada, H3C 3P8
(courriel : pocarou19@gmail.com)

L'auteur est financé par le Fonds de recherche du Québec - société et culture.

Résumé

La loi de l'appariement (Herrnstein, 1961) est le modèle le plus important au sein de l'analyse expérimentale du comportement (Forget et al., 2001; Mazur, 2006). L'objectif de la présente étude est de donner un aperçu synthétique et critique quant à ses développements. En conservant un regard historique, l'étude décrit les versions de la loi de l'appariement et leurs implications de 1950 à aujourd'hui. Les cinq versions sont la loi stricte de l'appariement, la loi quantitative de l'effet (Herrnstein, 1970), la loi généralisée de l'appariement (Baum, 1974b), la loi moderne de l'appariement (McDowell, 2005) et de la concaténation de la loi généralisée de l'appariement (Rachlin, 1971). Les développements théoriques sont ensuite abordés : le débat entre l'amélioration locale (Herrnstein, 1997) et la maximisation molaire (Rachlin et al., 1976) est exposé. L'article met l'accent sur les enjeux contemporains, les limites des modèles et leurs contributions. Bien que la loi de l'appariement s'avère extensivement étudiée, beaucoup d'expérimentations sont encore nécessaires et seules les études futures permettront de répondre aux questions demeurrées ouvertes.

Mots clefs.; Choix, loi de l'appariement, analyse expérimentale du comportement, théorie de l'appariement, équation d'appariement, amélioration locale, maximisation molaire.

Abstract

The matching law (Herrnstein, 1961) is the most important model within the experimental analysis of behavior (Forget, Donais & Giroux, 2001; Mazur, 2006). The purpose of the current study is to critically and synthetically present the model's developments. Through an historic perspective, the study describes the versions of the matching law and their theoretical implications since the 1950s. The five discussed versions are the strict matching law, the quantitative law of effect (Herrnstein, 1970), the generalized matching law (Baum, 1974b), the modern matching law (McDowell, 2005) and the cantatonic generalized matching law (Rachlin, 1971). The theoretical and empirical status of each version is discussed. Thereafter, theoretical developments such as the debate between molar maximization (Rachlin et al., 1976) and melioration (Herrnstein, 1997) and computational models are analyzed. Limits of the generalized matching law, the most used model in the fields, and perspectives for future studies are discussed. Even though the matching law is extensively studied, much is left to experiment. Only future studies will bring lights on these questions.

Keywords ; Choice, matching law, experimental analysis of behavior, matching theory matching equation, melioration, molar maximization.

Sur la loi de l'appariement

1. Introduction

La loi de l'appariement (angl. *matching law*, Herrnstein, 1961)¹ est un modèle issu de l'analyse expérimentale du comportement qui, lors d'une importante croissance de démonstrations empiriques entre 1960 et 1990, s'est révélé décrire précisément les choix des organismes lorsque ceux-ci répondent à un programme de renforcement concurrent (Baum, 1979, 1983; Davison & McCarthy, 1988; de Villiers, 1977; Forget, Donais & Giroux, 2001; McDowell, 1986, 2005, 2013a; Pierce & Epling, 1983; Wearden & Burgess, 1982). Il s'agit d'un modèle descriptif conceptualisant les choix d'un organisme, toutes espèces confondues, et les contingences de renforcement de son environnement (Herrnstein, 1961). Elle stipule que la fréquence d'un comportement (B) est proportionnelle au taux relatif de renforçateurs obtenus (R). Cette relation est mathématiquement symbolisée par :

$$\frac{B_1}{B_2} = \frac{R_1}{R_2} \quad (1)$$

représentant la première formulation de la loi de l'appariement. Dans une situation donnée, si trois fois plus de renforçateurs sont disponibles pour R_1 que pour R_2 , alors l'organisme devrait émettre trois fois plus de comportements B_1 que de comportements B_2 . Ainsi, une variation de l'un des deux ratios a une influence directe sur le second. Elle s'applique, en théorie, à toutes les situations où un organisme a le choix entre deux ou plusieurs alternatives, où des conséquences renforçantes sont

contingentes à ces alternatives (selon le cadre du conditionnement opérant) et qu'il existe une certaine incertitude relative quant à leur obtention. La loi de l'appariement est notamment employée pour orienter les interventions thérapeutiques (Borrero & Vollmer, 2002; Borrero et al., 2010), pour décrire les comportements sociaux d'enfants ayant un trouble du spectre de l'autisme (Duval & Forget, 2005; Poirier & Forget, 1996; Rivard, Forget, Kerr & Bégin, 2014), pour étudier l'effet de drogues en psychopharmacologie (Anderson, Velkey & Woolverton, 2002), pour décrire la sélection de jeux au football américain (Reed, Critchfield & Martens, 2006) et au basket-ball (Alferink, Critchfield, Hitt & Higgins, 2009; Vollmer & Bourret, 2000) ou encore pour prédire les choix dans le jeu « pierre-feuille-ciseau » (Kangas et al., 2009).

Cette dernière étude permet d'illustrer un exemple d'application de la loi de l'appariement. Dans le jeu « pierre-feuille-ciseau », deux joueurs choisissent chacun l'une des trois options et comparent leur choix. Le gagnant est celui qui choisit la pierre lorsque son adversaire choisit le ciseau, le ciseau contre la feuille et, comme il l'a toujours été, la feuille contre la pierre. En cas de choix identique, aucun point n'est accordé et un nouvel essai débute. Dans une version itérée du jeu, la loi de l'appariement prédit que le joueur s'ajustera proportionnellement au gain qu'il fait (s'il ne se fixe pas une règle telle que de toujours jouer la « pierre » ou encore, de répéter une certaine séquence de choix). Par exemple, si l'adversaire émet 50 % de « pierre », 30 % de « ciseau » et 20 % de « feuille », alors le protagoniste fera 50 %

de « feuille », 30 % de « pierre » et 20 % de « ciseau ». Si l'adversaire essaie d'embrouiller le joueur et modifie la proportion de ses choix, alors le joueur, si ces choix suivent les contingences de renforcement, s'ajustera « spontanément » aux changements.

Depuis les premiers travaux d'Herrnstein en 1961, la loi de l'appariement a été adaptée en plusieurs versions afin de rendre compte de l'accumulation des données et d'augmenter ses performances descriptives. Les cinq versions sont la loi stricte de l'appariement (telle que formulée par Herrnstein, 1961), la loi quantitative de l'effet (Herrnstein, 1970), la loi généralisée de l'appariement (Baum, 1974b), la loi moderne de l'appariement (McDowell, 1989) et la concaténation de la loi généralisée de l'appariement (Rachlin, 1971).

L'objectif de la présente étude est de donner un aperçu historique, synthétique et critique quant au développement théorique et empirique de la loi de l'appariement. Cette perspective se dégage des autres études qui focalisent soit sur la centralisation de données empiriques (p. ex. : Caron, Royer & Forget, 2014; McDowell, 2013a), soit sur la présentation du modèle aux non initiés (p. ex. : Forget, et al., 2001; Forget & Rivard, 2010; Jacobs, et al., 2013; Poling, Edwards, Weeden & Foster, 2011). Enfin, il importe de préciser que la loi moderne de l'appariement et la concaténation de la loi généralisée de l'appariement n'ont jamais été présentées en langue française et qu'aucun article francophone ne fait état du statut des versions de la loi de l'appariement.

Insérer le tableau 1 ici

Le tableau 1 présente le plan de l'article. D'abord les programmes de renforcement concurrent seront introduits, puis ce sera la loi de l'appariement et ses différentes versions (la loi quantitative de l'effet, la loi généralisée de l'appariement, la loi moderne de l'appariement et la concaténation de loi généralisée de l'appariement). L'article met l'accent sur la loi généralisée de l'appariement. Il y a aura une section sur l'interprétation empirique des paramètres, l'accroissement des études naturelles et appliquées. Ensuite, les développements théoriques que la loi de l'appariement a suscités seront présentés. Il s'agit plus particulièrement de la concurrence théorique entre l'amélioration locale et la maximisation molaire et comment le débat entre ces deux théories comportementales s'est résolue. L'article se termine par une discussion sur les modèles computationnels.

1.1. Les programmes de renforcement concurrents

Dans une procédure typique de conditionnement opérant, un pigeon est devant une option lui procurant de la nourriture en fonction d'un programme de renforcement (Skinner, 1938). Le taux selon lequel l'animal émet ses réponses est la variable dépendante. Cette procédure permet de contrôler un nombre substantiel de variables indépendantes telles que le délai entre la réponse et la nourriture, la quantité de nourriture, l'intervalle entre deux réponses renforcées, et le contrôle d'autres comportements (Malcuit, Pomerleau & Maurice, 1995). L'un des programmes de renforcement le plus étudié est le programme à intervalle variable (Forget, 2009).

Dans une telle procédure, la nourriture est distribuée selon un intervalle de temps aléatoire variant autour d'une moyenne spécifique (Flesher & Hoffman, 1962). La nourriture devient accessible au pigeon lorsque le délai est échu. Par exemple, si le programme est spécifié à deux minutes, le renforçateur peut être accessible après 90 secondes, 15 secondes, 180 secondes ou même 360 secondes. À long terme, la moyenne demeure toutefois de 120 secondes. À tout moment, le pigeon peut faire un choix et, dans la mesure où le délai est écoulé, il obtient alors de la nourriture. Et la séquence recommence. En revanche, le pigeon n'a pas de renseignements, outre son apprentissage dans de pareilles circonstances, quant à l'accessibilité du renforçateur. Le comportement des organismes soumis à un programme de renforcement à intervalle variable devient encore plus intéressant à étudier lorsque deux de ces programmes sont mis en place simultanément à l'intérieur d'une même boîte opérante. Il s'agit alors d'un programme de renforcement concurrent.

Un programme de renforcement concurrent est une procédure expérimentale où un organisme est placé devant deux ou plusieurs options. Chacun de ces options est associée à un programme de renforcement, généralement à intervalle variable (voir Malcuit et al., 1995). La figure 1 illustre trois appareils permettant d'étudier un organisme dans un programme concurrent de façon différente. La partie supérieure (A) montre une cage de conditionnement opérant utilisé par Baum et Rachlin (1969) auprès de six pigeons. La boîte est séparée en deux par une ligne transversale et chacun des cotés correspond à une lumière d'une certaine couleur ainsi qu'à un

programme de renforcement. Dans cet appareil, il est possible de mesurer l'allocation temporelle (la durée - en temps - passée dans l'une ou l'autre des extrémités de la boîte) des pigeons et d'y évaluer les prédictions de la loi de l'appariement.

Insérer la figure 1 ici

Un exemple permet d'illustrer le fonctionnement de programmes concurrents. L'expérimentateur commence par placer l'animal dans la cage opérante. Il comptabilise le temps passé dans l'un ou l'autre des endroits de la cage. Un programme de renforcement à intervalle variable différent est attribué à chacun des deux espaces. Si l'animal est dans un espace lorsque la valeur de l'intervalle de ce côté est terminée, il obtient alors un renforçateur (accès pendant trois secondes à du grain). Une nouvelle valeur d'intervalle est déterminée et le décompte recommence pour ce programme. L'animal reste généralement une heure dans la cage ou jusqu'à ce que tous les renforçateurs soient distribués, selon la procédure de l'expérimentateur. L'animal se déplace d'un côté puis de l'autre et obtient des renforçateurs en fonction des contingences déterminées pour chaque programme. Il est possible de généraliser cette procédure à deux leviers sur un mur, où le rat peut appuyer soit à droite, soit à gauche, deux disques luminescents pour le pigeon ou encore l'humain devant deux choix. Le chercheur s'intéresse alors au nombre de réponses émises sur le dispositif plutôt qu'au temps passé d'un côté ou de l'autre.

Un exemple courant d'un programme concurrent chez l'humain est ces dynamiques sociales (Borrero, et al., 2007; Pierce, Epling & Greer, 1981). Dans un groupe, à tout moment, le participant peut choisir avec qui tergiverser. Les choix de ce dernier sont renforcés par leur fonction sur l'entourage social (débuter une conversation, faire une demande). Chaque individu avec qui il peut interagir correspond à une option du programme et leurs comportements (la façon dont ils répondent aux participants) correspondent aux renforçateurs. Le participant n'a alors qu'à ajuster ses choix en fonction des conséquences.

Il revient à Skinner (1950) d'avoir étudié le premier les programmes de renforcement concurrents. Celui-ci remarqua que le ratio des choix des organismes demeure constant même s'il retire le programme de renforcement des deux options (procédure d'extinction). Cependant, les contributions de Skinner au sujet des programmes de renforcement concurrents en restent là. Celui-ci s'est relativement désintéressé de cette procédure, désintérêt exemplifié par la faible proportion de pages accordées aux programmes de renforcement concurrents dans l'ouvrage séminal de Ferster et Skinner (1957). L'année suivante, Findley (1958) publie les résultats d'une procédure permettant d'analyser davantage la réponse aux programmes concurrents. Un levier au centre de la cage permet à l'organisme de choisir entre deux programmes de renforcement. La partie inférieure gauche de la figure 1 illustre l'appareil de Findley. À gauche se trouve le disque permettant de choisir le programme de renforcement en vigueur, alors que le disque de droite

permet aux pigeons d'y répondre. Cette procédure permet de calculer le temps total que l'organisme attribue à chacun des programmes (comme la procédure de Baum et Rachlin, 1969). Cet appareil est cependant différent des appareils modernes (partie inférieure droite de la figure 1) dans lesquels les deux options sont présentées simultanément. Dans cette procédure, chacun des disques est associé à un programme de renforcement qui lui est spécifique. Cela dit, même si Findley remarque la constance que Skinner a déjà observée, Herrnstein (1958, 1961, 1997), étudiant de ce dernier, est celui qui découvrira la relation quantitative liant réponses et renforçateurs dans un programme de renforcement concurrent.

2. La loi de l'appariement

La première formulation de la loi de l'appariement apparaît brièvement après *Schedules of Reinforcement* (Ferster et Skinner, 1957). Herrnstein découvre en 1961 que la relation entre le ratio des taux de réponses émises par un organisme est fonction du ratio des taux de renforçateurs associés à ces réponses. Cette relation prend la forme de l'équation suivante (celle-ci est reproduite par commodité) ;

$$\frac{B_1}{B_2} = \frac{R_1}{R_2} \quad (1)$$

où les *Bs* et les *Rs* représentent respectivement le taux de réponse pour une option et le taux de renforçateurs obtenu qui lui est associé. Elle énonce que la fréquence d'un comportement n'est pas directement dépendante du taux de renforcement absolu qui

lui est associé, mais qu'il dépend aussi du taux relatif de renforcement des autres programmes dans l'environnement.

De 1961 à 1970, l'équation 1 est la version dominante de la loi de l'appariement dans la littérature empirique et théorique. Elle est maintenant connue sous le nom de la loi stricte de l'appariement (LSA). Elle est la fondation de tous les modèles subséquents.

2.1. La loi quantitative de l'effet

La loi quantitative de l'effet (LQE; Herrnstein, 1970) ou encore la théorie de l'appariement (angl. *matching theory*) naît d'un effort pour généraliser la LSA à une situation opérante ne comportant qu'un seul programme de renforcement ou, autrement dit, un seul choix. L'objectif est de faire de la loi de l'appariement un modèle qui permet d'expliquer le plus grand nombre possible de situations opérantes.

Herrnstein (1970) propose la formule suivante :

$$B_1 = k \frac{R_1}{R_1 + R_e} \quad (2)$$

où B_1 et les R_s sont les mêmes que pour l'équation 1, R_e représente les renforçateurs non reliés au programme de renforcement en vigueur et k est une constante correspondant au taux absolu de réponses. Si k est défini comme $k = B_1 + B_2$, alors il devient possible de montrer que l'équation 2 est équivalente à l'équation 1. La position d'Herrnstein sur la LQE se résume ainsi : il s'agit, selon la perspective de

Hull (1943), d'une théorie quantitative du concept de force de la réponse (angl. *response strength*). La force d'une réponse ne dépend pas seulement de son taux de renforçateurs associés, mais plutôt son taux relatif dans l'environnement.

Il s'agit du modèle qui a le plus intéressé les chercheurs (Commons, Herrnstein & Rachlin, 1982; de Villiers, 1977; de Villiers & Herrnstein, 1976; Herrnstein, 1997; McDowell, 2005; Warren-Boulton, Silberberg, Gray & Ollom, 1985; Williams, 1988), et ce, bien qu'il apparait à la fin des années 80 que le modèle n'est pas adéquat. Deux critiques récurrentes s'opposent à la LQE. D'abord, dans les années 70, le modèle ne peut rendre compte des différences qualitatives entre les renforçateurs (ou encore l'asymétrie entre les choix) et la tendance des organismes à sous appairer (cette critique sera abordée dans la section 2.2 sur la loi généralisée de l'appariement). Ensuite, dans les années 80, les implications théoriques formulées par les paramètres k et R_e ne sont pas soutenues par l'expérimentation (McDowell, 2013; Warren-Boulton, et al., 1985).

Selon McDowell (2013a), si la LQE s'est montrée aussi résistante devant les données contradictoires, c'est que les analyses plus poussées nécessaires à leur découverte n'étaient pas communes à l'époque. Dans les années 70 et 80, les méthodes statistiques en analyse expérimentale du comportement étaient relativement rudimentaires et la variance expliquée était déjà substantiellement élevée pour ne pas s'intéresser davantage à la variance résiduelle (relation non identifiée et restante après l'ajustement d'un modèle à un jeu de données). La recension de de Villiers et

Herrnstein (1976), par exemple, montre que la LQE explique 90 % de la variance, voire plus et ce, dans plusieurs études, réalisées auprès de plusieurs espèces et avec différents types de renforçateurs. Les résultats soutiennent donc la vraisemblance de la LQE. Pourquoi alors chercher à développer davantage les analyses ? En cas de disparité entre les données comportementales recueillies et le modèle, c'est-à-dire lorsque les résultats ne se conforment pas exactement à la loi de l'appariement, il est coutume de blâmer l'expérimentateur, la procédure utilisée, ou la variabilité inter-individuelle des sujets (Davison, 1981). Si les réponses de l'organisme ne concordent pas avec les résultats attendus, c'est que les contingences de renforcement n'étaient pas adéquates (Skinner, 1974). Autrement dit, le chercheur est dans l'erreur et non l'organisme.

En comparaison à la LSA, la LQE possède deux paramètres supplémentaires, lui conférant déjà un avantage explicatif. Cependant, les résultats ne soutiennent pas les considérations théoriques de Herrnstein (1970; de Villiers et Herrnstein, 1976) et, par conséquent, les contraintes d'invariance de k et R_e en fonction des variations des conditions expérimentales. Selon la revue de la littérature (31 études, 138 participants) de McSweeney, Melville et Whipple (1983), certains ajustements des données proposaient des valeurs négatives de R_e (résultats théoriquement incompatibles selon le modèle) et des résultats non significatifs, c'est-à-dire moins performants que le hasard. Ces résultats sont très loin d'expliquer 80 % de variance. La revue de Warren-Boulton et al. (1985) montre, quant à elle, que les 90 % de

variances expliquées moyennes trouvées par de Villiers et Herrnstein (1976) sont exagérées et que, bien que k et R_e augmente la vraisemblance du modèle, elles ne se conforment pas à la théorie. La revue de McDowell (2013a, voir son appendice A) montre que l'estimation de k ne correspond pas aux attentes théoriques, et ce, même en imposant des contraintes plus flexibles sur le paramètre². Enfin, il faut noter que la taille d'échantillon sur laquelle ces analyses sont faites dépasse rarement plus qu'une dizaine de points (Caron, 2013a). Bref, si les données empiriques sont analysées par rapport à l'équation 2, les conclusions théoriques s'avèrent insoutenables.

Aujourd'hui, les auteurs n'hésitent pas à considérer cette version de l'appariement comme fausse (voir Caron, 2013b; McDowell, 2013a). Au début des années 80, un changement de paradigme vers la loi généralisée de l'appariement s'opère. Celle-ci répond au problème d'asymétrie des choix et permet l'ajustement des organismes aux contingences de renforcement. En revanche, certains auteurs ont tenté de maintenir les fondements de la LQE et ont proposé la loi moderne de l'appariement (McDowell, 1989, 2005, 2013a). Ce modèle sera présenté à la section 2.3, après la loi généralisée de l'appariement.

Dans la prochaine section, les origines de la LGA seront présentées. Ensuite, l'interprétation empirique de ces paramètres. L'accroissement des études naturelles et appliquées qu'elle a suscitées sera discuté. Cette section se terminera par une description de la LGA telle que perçue à ce jour.

2.2. La loi généralisée de l'appariement

En comparaison à la LQE, la loi généralisée de l'appariement (LGA; Baum, 1974b) naît d'un effort pour maximiser la description des choix des organismes. Durant les années 60, un nombre croissant d'études montre que les organismes ne se conforment pas parfaitement à la LSA. En fait, une légère déviation des prédictions est généralement observée. Catania (1963) découvre que les données sont mieux décrites par la LSA lorsqu'il ajoute un exposant de 0,83 :

$$\frac{B_1}{B_2} = \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^{0,83} \quad (3)$$

plutôt que l'unité (1), implicite de l'équation 1.

Il s'agit de la version la plus primitive de la LGA. À l'époque, la nature de l'exposant est interprétée comme une faille expérimentale ou la contamination de variables confondantes : la relation entre le ratio des taux de réponse et le ratio des taux de renforçateurs doit être strictement proportionnelle. En fait, cette conceptualisation est si forte parmi les chercheurs de l'époque, que peu d'entre eux peuvent concevoir une loi du comportement comportant un paramètre libre, voire même un paramètre différent de 1, tel que proposé par Catania (voir Davison, 1981). D'ailleurs, cela explique pourquoi la LQE a pu subsister malgré son incapacité à expliquer ces déviations. Les chercheurs étudient aussi à l'époque l'influence du délai interréponse (angl. *change-over delay*), un délai imposé lorsque le pigeon change d'option afin d'éviter qu'il n'alterne superstitieusement entre les deux. Le délai

interréponse montre un effet sur la capacité de la LSA de décrire les comportements des pigeons (Catania, 1966; Shull & Pliskoff, 1967), et ce, depuis les travaux d'Herrnstein (1961; pour une opinion contraire, voir Staddon, 2014).

D'importants travaux subséquents ont montré que la déviation observée est la norme dans le programme de renforcement concurrent à intervalle variable (Myers & Myers, 1977)³. Baum (1974b) propose alors LGA sous la forme suivante :

$$\frac{B_1}{B_2} = c \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^a \quad (4)$$

où les B s et les R s sont les mêmes que ceux présentés dans les équations précédentes. Le paramètre a représente l'ajustement de l'organisme aux contingences de renforcement et le paramètre c représente la préférence d'un organisme à émettre l'un ou l'autre des comportements. Baum nomme respectivement ces paramètres « la sensibilité » et « le biais ». Il propose aussi de mettre l'équation sous forme logarithmique :

$$\log\left(\frac{B_1}{B_2}\right) = a \log\left(\frac{R_1}{R_2}\right) + \log c \quad (5)$$

où tous les paramètres sont les mêmes que l'équation 4. Cette dernière proposition est généralement préférée puisqu'elle permet l'utilisation d'une régression ordinaire des moindres carrés afin d'estimer le biais, la sensibilité et la variance expliquée (Baum, 1974b; Davison & Elliffe, 2009). Elle rend également leur interprétation

graphiquement intuitive. La figure 2 illustre ce propos en représentant la loi généralisée de l'appariement selon sa forme logarithmique (graphiques de gauche) et l'équation de puissance (graphiques de droite). Dans les graphiques de gauche, la sensibilité correspond au degré de la pente (perceptible en haut à gauche) alors qu'il s'agit d'un degré de courbure à droite. Dans les graphiques inférieurs, l'influence du biais est clairement perceptible à gauche alors que la sensibilité et le biais sont difficilement différenciables à droite. Le biais est l'ordonnée à l'origine et la sensibilité est le degré de la pente.

Insérer la figure 2 ici

En revanche, Catania (1963) argumente contre l'utilisation du logarithme pour présenter et interpréter les résultats. Sa première critique est d'affirmer que les logarithmes donnent l'illusion que le ratio des taux de réponse est négatif lorsque le dénominateur est plus élevé⁴ et que la version puissance (équation 4) est plus parcimonieuse. Il faut rappeler qu'à l'époque, lorsque les auteurs rapportaient graphiquement leurs résultats, ceux-ci utilisaient une échelle logarithmique. Les critiques de Catania n'auront pas raison de la version de Baum, car l'équation 5 demeure la version la plus utilisée de la loi de l'appariement (Davison & McCarthy, 1988; McDowell, 2013a).

Il faut noter que les paramètres des équations 4 et 5 ne sont pas strictement équivalents. En effet, Heth, Pierce, Belke & Hensch (1989) étudient l'effet de la

transformation logarithmique sur les paramètres de la LGA. Puisque l'équation 4 nécessite un ajustement curvilinéaire (angl. *curve fitting*) et que l'équation 5 nécessite plutôt un ajustement linéaire, la somme des carrés d'erreur n'est pas la même et l'estimation des paramètres en est affectée. L'erreur, ε , est un paramètre implicite à la loi de l'appariement, et il est rarement pris en compte par les auteurs compte tenu des variances expliquées très élevées que le modèle obtient. Il contient aussi implicitement les tendances résiduelles (relation entre deux ou plusieurs variables demeurant dans le jeu de données après avoir extrait l'information d'un modèle) de la LQE.

La différence principale entre la LGA et la LQE est que la première rend compte de l'asymétrie entre les choix (biais) et permet d'expliquer la déviation (maintenant désignée par le terme « sous-appariement ») de la LSA (sensibilité). Le compromis ici n'est pas d'ordre statistique. En fait, en passant de la LQE à la LGA, les analystes renoncent à une conception plus théorique de l'appariement contre un modèle descriptif résolument empirique. Cela ne prit que très peu de temps avant que la puissance descriptive de la LGA fasse l'unanimité dans la littérature scientifique expérimentale. Nombre d'écrits soulignent la puissance descriptive de la LGA que ce soit en contexte expérimental (Baum, 1979; Davison & McCarthy, 1988; de Villiers, 1977; McDowell, 2013a; Pierce & Epling, 1983; Wearden & Burgess, 1982) ou en contexte naturel (Caron et al., 2014; Forget, et al., 2001; Forget & Rivard, 2010; Jacobs et al., 2013).

L'ajout de deux paramètres libres est donc parfaitement profitable par rapport à la LSA. Non seulement elle permet de décrire l'asymétrie et le sous-appariement que la LQE ne pouvait expliquer avec autant de paramètres (k et R_e contre a et b), mais elle permet aussi d'augmenter la variance expliquée obtenue et de rendre compte des tendances résiduelles. Bien que la LGA se soit révélée très robuste vis-à-vis des données recueillies, et généralisable à plusieurs contextes, un certain nombre de questions demeurent. L'une des plus importantes concerne l'interprétation empirique des paramètres (sensibilité et biais).

2.2.1. Les paramètres de la loi généralisée de l'appariement

La sensibilité est généralement définie comme un processus interne permettant à l'organisme d'ajuster ses choix lorsque les contingences de renforcement varient expérimentalement ou naturellement. La valeur du biais, quant à elle, est due tantôt à une contrainte phylogénétique, tantôt à un phénomène ontogénétique, mais le biais est généralement conçu comme une variable rendant compte à la fois de l'effort (ou la facilité) requis à un organisme pour émettre le comportement, mais aussi d'une préférence (Baum, 1974a, 1974b). Deux questions principales subsistent quant à la LGA : (a) à quel moment peut-on juger que l'organisme est sensible ou non aux contingences de renforcement ? et (b) quelle est l'interprétation théorique de la sensibilité et du biais ?

Comment caractériser et identifier la sensibilité de l'organisme aux contingences de renforcement ? L'estimation de la sensibilité se fait par l'estimation

d'une droite de régression, elle peut prendre n'importe quelle valeur des nombres réels. Lorsque la sensibilité est nulle, cela indique que l'organisme ne s'ajuste pas aux contingences en vigueur. La sensibilité peut également être négative. Dans ce cas, plus le taux relatif de renforçateurs que l'organisme obtient augmente, moins l'organisme répond à la situation (cette problématique reviendra à la section 3.2.2 lorsque la maximisation molaire sera abordée). En poursuivant l'idée selon laquelle la sensibilité de l'organisme doit être égale à 1 et que les résultats expérimentaux montrent qu'elle varie autour de cette valeur, Baum (1974) propose qu'une valeur de sensibilité inférieure à 0,90 soit considérée comme un sous-appariement, qu'une valeur supérieure à 1,10 soit considérée comme un sur-appariement, et que les valeurs intermédiaires représentent un appariement strict (au sens de la LSA). Cette proposition est cependant arbitraire sur le plan statistique. Ainsi, Mullins, Agunwamba et Donohoe (1982) proposent d'utiliser une valeur p (angl., *p-value*) pour évaluer si la sensibilité est significativement différente de 1. Si cette proposition est plus adéquate pour distinguer les trois profils d'appariement, elle ne permet pas de conclure qu'un sujet est insensible aux contingences de renforcement. Elle atteste simplement que l'organisme sous-apparie ou sur-apparie significativement différemment de l'appariement stricte : et non s'il est sensible ou pas. Récemment, une évaluation computationnelle de la LGA montre que certaines propriétés des situations opérantes peuvent biaiser systématiquement ses paramètres (Caron, 2014). Lorsqu'aucun processus d'apprentissage n'est utilisé, il est tout de même vraisemblable d'observer des relations d'appariement. Ce résultat est une première

étape afin de tester entre les hypothèses selon lesquelles les réponses de l'organisme sont soit émises de façon aléatoire (il est alors insensible aux contingences), soit elles sont plutôt liées à un processus comportemental.

Quelle est l'interprétation théorique de la sensibilité et du biais ?

Contrairement à la LQE, aucune contrainte théorique n'est imposée sur la valeur des paramètres. Si leur interprétation semble assez simple, leur signification demeure obscure. En fait, les interprétations basées sur les paramètres de la LGA sont toujours réalisées a posteriori et, dans une certaine mesure, leurs fondements résident dans la tautologie (Rachlin, 1971). Par ses paramètres libres au sein de l'équation 5, la LGA est conçue comme un modèle flexible et généralisable à une multitude de situations opérantes. En revanche, l'interprétation des paramètres, lorsque ceux-ci changent entre deux conditions expérimentales, s'avère plus difficile à déterminer. Le modèle théorique de la discriminabilité des contingences ainsi que deux études empiriques permettent d'illustrer ce propos.

2.2.1.1. Le modèle de la discriminabilité des contingences

Le modèle de la discriminabilité des contingences développé par Davison et Jenkins (1985) est une tentative d'interprétation théorique de la LGA. Il est moins influent que l'amélioration locale et la maximisation molaire (qui seront présentés à la section 3), mais plus pertinent quant au formalisme de l'équation de la LGA. Le modèle repose sur la reformulation suivante ;

$$\frac{B_1}{B_2} = c \frac{R_1 - R_1 + pR_2}{R_2 - pR_2 + pR_1} \quad (6)$$

où les B_s , les R_s et c sont les mêmes que ceux de la LGA, présentée à l'équation 4. Le paramètre p rend compte de la même tendance statistique que la sensibilité sauf qu'il constitue une mesure de la confusion entre les deux programmes de renforcement (l'ambiguïté entre deux stimuli discriminatif signalant des programmes de renforcement). Il s'agit d'une proposition visant à accorder une correspondance théorique à la sensibilité : à quel point les deux programmes de renforcement sont-ils différenciables ? Dès son origine, cette interprétation, devant les preuves expérimentales, est insuffisante. Le paramètre p est développé afin de rendre compte du sous-appariement. Il ne peut théoriquement concevoir de valeurs plus grandes que 1. L'étude de Baum et Rachlin (1969), pour ne nommer que celle-ci, montre que la sensibilité peut être supérieure à 1 dans certaines circonstances. Est-il possible de surdiscriminer les contingences ?

Les équations 4 et 6 expliquent approximativement la même quantité de variance expliquée. La différence majeure entre elles est dans la tendance résiduelle de données (Sutton, Grace, McLean & Baum, 2008) générée par l'extraction de la variance de a ou de p . L'étude de Sutton et al. (2008) analyse plusieurs études et trouve ainsi que la LGA, qui inclut le même nombre de paramètres que celui de Davison et Jenkins, permet de mieux décrire les données, car, après l'extraction de la variance, ce dernier montre des tendances résiduelles. Le modèle de discriminabilité

des contingences apparaît donc nécessiter un paramètre supplémentaire. Le paramètre p n'explique que partiellement les tendances expliquées par a . Il est difficile d'en préférer l'utilisation. Ainsi, le modèle de Davison et Jenkins (1985) se retrouve peu développé pendant les années 80 et 90, même s'il peut rendre compte de certains phénomènes empiriques tels que mesurer la confusion entre des stimuli.

2.2.1.2. L'interprétation de la sensibilité et du biais dans les études empiriques

Dans la procédure développée par McSweeney (1978), un pigeon est soumis à deux programmes de renforcement à intervalle variable simultanément. Dans le premier programme, la réponse consiste à donner un coup de bec sur un disque lumineux sur le mur (un comportement phylogénétiquement adapté à l'espèce) et dans le second, la réponse consiste à appuyer sur un levier avec la patte (un comportement non phylogénétiquement déterminé). Sachant que les pigeons respectent généralement les prédictions de la LSA dans un programme de renforcement concurrent typique, comment vont-ils adapter leur comportement par rapport à l'ajout d'un levier ? La prédiction initiale propose que le biais, lié à l'effort et la préférence, soit en faveur du coup de bec considérant sa facilité d'exécution pour l'oiseau. En revanche, les résultats montrent que les pigeons sont légèrement moins sensibles aux contingences de renforcement et leur biais montre qu'ils ont tendance à préférer le levier tout en appuyant moins sur ce dernier. McSweeney (1978) propose que les pigeons discriminent au maximum les contingences afin de n'avoir à appuyer

qu'un minimum de fois sur le levier. Cette étude illustre (a) que la sensibilité et le biais sont influencés et interagissent de façon imprévue en fonction des conditions expérimentales et (b) que les interprétations quant aux résultats de la LGA sont évaluées a posteriori. Il n'est pas clair si le biais représente ici une préférence, l'effort ou la discriminabilité des contingences (ni même la direction de ces phénomènes) et en quoi ceux-ci interagissent avec la sensibilité.

Une autre procédure développée par Rasmussen et Newland (2008) porte sur l'aversion à la perte (angl. *loss-aversion*) chez l'humain. Les participants sont d'abord soumis à une procédure typique de programme de concurrent à intervalle variable. Ensuite, les expérimentateurs ajoutent une contingence de punition négative constituant en la perte de renforçateurs (une perte monétaire) dans l'un des deux programmes. Par exemple, un programme de renforcement « A » peut distribuer 5 jetons aux deux minutes en moyenne et un autre « B » peut en distribuer 3 (c'est-à-dire, deux programme de renforcement à intervalle variable dont seule la magnitude est modifié). En délaissant la sensibilité et le biais (sans perte de généralité), il est attendu dans cette condition que 62,5 % (ou $5 / (5 + 3)$) des comportements du participant soit vers le programme « A ». L'expérimentateur ajoute comme contingence supplémentaire de retirer 2 jetons dans cette même durée de temps pour ce programme. Si la LGA est considéré dans son sens strict (la LSA), la nouvelle prédiction est de supposer que 50 % (ou $(5 - 2) / ((5 - 2) + 3)$) des comportements seront émis envers « A ». La punition négative entraînerait une diminution de la

valeur subjective de l'option. Une autre hypothèse est de considérer que le biais expliquera les différences comportementales entre les deux conditions (avec ou sans punition négative), car les participants préféreront le programme ayant seulement la contingence de renforcement positif.

Si les prédictions de la seconde hypothèse sont confirmées, il n'est pas prévu que les sujets deviennent insensibles aux contingences de renforcement en vigueur (mesure de a tendant vers zéro). Pire, ce qui devait être une préférence pour l'alternative sans punition se révèle en fait un biais en faveur de l'option concurrente. Aucune prédiction a priori n'est soutenue.

Cet élément n'est pas sans conséquence à la théorisation du phénomène d'aversion à la perte et à l'intégration de contingences de punitions au sein de la loi de l'appariement : la perte un stimulus de renforcement ne représente pas la même valeur subjective qu'une densité de renforcement moindre (par exemple, gagner 6 jetons et en perdre 2 par la suite, n'est pas équivalent à gagner 4 jetons). Tout comme l'exemple précédent, cette étude montre (a) que les paramètres varient entre les conditions expérimentales, (b) que la LGA est utile comme outil d'interprétation post hoc et (c) que la signification des paramètres semble varier à travers les conditions expérimentales.

En somme, bien que chacun des paramètres ait un rôle distinct au sein de l'équation 5, il s'avère difficile de prédire leur changement lorsque les conditions

expérimentales sont modifiées. Leur signification théorique et empirique ne s'accorde pas. En d'autres termes, prédire les effets d'une manipulation expérimentale sur l'un des paramètres est beaucoup plus complexe qu'il n'y paraît. Soit les valeurs des paramètres interagissent ensemble, soit celles-ci sont très sensibles aux conditions environnementales. À ce titre, la LGA s'approche davantage d'un outil méthodologique permettant d'approfondir les réponses des organismes face aux contingences de renforcement que d'un modèle conceptuel (Davison & McCarthy, 1988). À ce titre, elle est un outil intéressant quant à l'élaboration et l'analyse d'études appliquées.

À la suite de ces travaux expérimentaux sur la LGA, les études transactionnelles (angl. *translational study*), les études faisant le pont entre les intérêts cliniques et les modèles en laboratoire, prennent une part plus importante de la littérature scientifique (pour des recensions de la littérature, voir Caron et al., 2014; Forget, et al., 2001; Jacobs et al., 2013). Les chercheurs ayant une tendance plus expérimentale vont tenter de résoudre des problèmes d'ordre appliqué avec le modèle de l'appariement. Bien que leur contribution théorique reste relativement faible, l'importance (au moins sur le plan empirique) de cette tendance dans les années 80 et 90 se doit d'être mentionnée.

2.2.2. L'accroissement des études naturelles et appliquées

En 1981 et 1982, McDowell signe deux articles promouvant la loi de l'appariement comme modèle permettant d'orienter et d'interpréter les relations naturelles entre les comportements d'une personne et leurs conséquences. Deux autres études (Myerson & Hale, 1984; Vyse, 1986) soulignent dans les mêmes années l'importance du modèle pour les thérapies comportementales. Ces études mettent de l'avant que, outre les contributions de la loi de l'appariement aux contextes expérimentaux, elle permet de nombreux développements appliqués (Forget & Rivard, 2010; Jacobs, Borrero & Vollmer, 2013; McDowell, 1981, 1982, 1988; Myerson & Hale, 1984; Noll, 1995; Pierce & Epling, 1995; Vyse, 1986). D'abord, elle permet de rendre compte de la relation entre plusieurs comportements cibles et de renforçateurs : elle favorise un contextualisme de la situation opérante. Elle valorise également l'augmentation des comportements souhaités et la réduction des comportements inadéquats tout en mettant un accent sur ces premiers. Enfin, elle propose que les comportements d'une personne ne sont pas fonction de la valeur du taux de renforçateurs absolu qu'il obtient, mais plutôt de leur valeur relative.

Les études focalisent principalement sur la description des choix d'humains plutôt que ceux d'autres espèces animales. L'objectif implicite de ces études est d'évaluer l'étendue des situations dans lesquelles le modèle semble ou ne semble pas s'appliquer. La première étude à tester la loi de l'appariement en contexte naturel est celle de Forget (1987). L'auteur analyse la relation entre les comportements inappropriés et appropriés d'un élève du primaire par rapport à l'attention sociale

qu'il obtient de son enseignant. Il conclut que l'appariement décrit bien cette relation. Sur le plan historique, l'importance de cette étude est double. Il s'agit de la première étude sur la loi de l'appariement en contexte naturel et elle est à l'origine de la théorie de la sensibilité sociale telle que définie par Rivard et Forget (2010). Dans ce modèle, la loi de l'appariement est plus particulièrement utilisée pour montrer que les comportements sociaux d'enfants ayant un trouble du spectre de l'autisme sont sensibles à l'attention sociale (Duval & Forget, 2005; Poirier & Forget, 1996; Rivard et al., 2014). Une contribution de Forget et ses collègues est de montrer que les comportements de ces enfants s'ajustent en fonction de leur environnement social. Ces résultats invalident la perception populaire selon laquelle les personnes ayant un trouble du spectre de l'autisme seraient incapables d'interagir avec leur entourage.

En contexte éducatif, la loi de l'appariement, peu importe sa version, permet de décrire les comportements en milieu scolaire (Shriver & Kramer, 1997) et les comportements d'attention à la tâche (Forget, 1987; Caron, Forget, Leroux-Boudreault, 2014), d'évaluer la difficulté des tâches scolaires (Reed & Martens, 2008) et les comportements de résolution de problèmes mathématiques (Mace, McCurdy & Quigley, 1990). La LGA est employée, dans le cadre d'interventions pour décrire la relation entre les comportements problèmes et leurs conséquences (Borrero & Vollmer, 2002; Borrero et al., 2010). Dans ce contexte, le thérapeute réalise une analyse fonctionnelle des comportements problèmes présentés par un patient. Par la suite, il réalise une analyse descriptive afin d'observer la relation

naturelle entre les comportements et les conséquences qu'il obtient. Cela permet au thérapeute ou au chercheur, selon le cas, de confirmer la fonction opérante de la conséquence tout en analysant de façon quantitative la façon dont les comportements s'ajusteront lorsque le l'intervenant modifiera les contingences de renforcement. La valeur de la sensibilité et du biais permettent de vérifier si une variation plus ou moins importante du taux relatif des renforçateurs entraînera une modification proportionnelle du taux de réponse.

Comme il a déjà été mentionné, l'objectif implicite de ces études transactionnelles est d'évaluer l'étendue des situations dans lesquelles l'appariement s'applique. Il apparaît que celle-ci soit une formulation assez générale des choix des humains, et ce, dans plusieurs contextes naturels. Après la forte croissance des études transactionnelles, aujourd'hui les études portent davantage sur les limites de ces applications. Certaines études tentent de montrer que les résultats d'une analyse de la relation de l'appariement n'est pas toujours convergente à celle d'une analyse fonctionnelle. D'autres soulignent la difficulté d'expérimenter en milieu naturel des modèles rigoureux issus du laboratoire

2.2.3. La loi généralisée de l'appariement à ce jour

Aujourd'hui, la puissance descriptive de la LGA fait consensus dans la littérature scientifique expérimentale. Un nombre important de recensions (Baum, 1979; Davison & McCarthy, 1988; de Villiers, 1977; McDowell, 2013a; Wearden & Burgess, 1982) montre que dans un contexte expérimental avec des rats et des

pigeons, la LGA obtient des variances expliquées supérieures à 80 %. À titre indicatif, 80 % réfère à une borne minimale plutôt qu'une moyenne. En contexte expérimental avec des humains, c'est-à-dire, lorsque le ratio des taux de renforçateurs est contrôlé par le chercheur, les résultats se maintiennent ; la variance expliquée minimale est généralement de 70 % (Forget, et al., 2001; Forget & Rivard, 2010; Pierce & Epling, 1983). Finalement, en contexte naturel avec des humains, les résultats sont tout aussi concluants ; la variance expliquée se situe près de 65 % en moyenne (Caron et al., 2014; Forget & Rivard, 2010; Jacobs et al., 2013). Bref, le modèle de la LGA est le modèle dominant au sein de l'analyse expérimentale du comportement, malgré la difficulté à expliquer ces paramètres. Pour pallier à ce problème, McDowell développe la théorie moderne de l'appariement.

2.3. La loi moderne de l'appariement

La loi moderne de l'appariement (angl. *modern matching theory*, LMA) est une composition entre la LGA et la LQE (McDowell, 2005). L'appellation moderne n'est qu'une formulation distinguant les versions classiques (la LSA, la LQE) de la version exclusivement proposée et développée par McDowell et ses collègues (Dallery, Soto & McDowell, 2005; McDowell, 1989, 2005, 2013a; McDowell, Caron, Kulubekova & Berg, 2008). Par ailleurs, il faut noter que McDowell intègre la LGA sous l'appellation moderne. La formule qu'il propose est la suivante :

$$B_1 = k \frac{R_1^a}{R_1^a + R_{1e}} \quad (7)$$

où le paramètre k correspond au taux absolu de comportement de la LQE, a représente le paramètre de la sensibilité de la LGA et dans laquelle :

$$R_{1e} = \frac{R_e^a}{c_{1e}} \quad (8)$$

où R_{1e} jumèle la préférence et les renforçateurs non reliés au programme de renforcement de l'option 1. Plus spécifiquement, c_{1e} symbolise la préférence attribuable à l'option 1 et R_e^a symbolise les renforçateurs non reliés à l'option 1 exposés à la sensibilité. Le modèle est donc constitué de quatre paramètres : deux libres et deux restreints.

Bien que McDowell ait proposé la LMA il y a plus de 25 ans (McDowell, 1986, 1989), qu'il ait fait une description approfondie de son modèle (McDowell, 2005), qu'il ait effectué une analyse considérable de plusieurs bases de données (McDowell, 2013a) et que son modèle décrive très bien les données empiriques, elle reste ignorée par la communauté scientifique. Une simple recherche dans un moteur de recherche tel que *PsycInfo* montrera que les seuls auteurs à citer les travaux sur la LMA impliquent McDowell lui-même. Les raisons de cette ignorance restent cependant à éclaircir.

Différentes pistes peuvent être proposées. D'abord, les performances de la LMA (en termes de variance expliquée), quoique supérieures à la LGA, demeurent marginales, particulièrement lorsque l'ajout de deux paramètres libres est considéré.

Selon les analyses de McDowell (2013a), la LMA élimine les tendances résiduelles dans les données comportementales. Cela représente un avantage intéressant sur le plan statistique, car le modèle explique vraisemblablement toutes les relations dans le jeu de données (cette considération est considérée par Cohen, Cohen, West & Aiken, 2003, comme une bonne pratique statistique – Sans trop argumenter sur la validité de cette convention [elle permet certes de trouver de nouvelles relations jusqu’alors inédites], elle laisse en arrière-plan l’idée selon laquelle les tendances résiduelles peuvent être fortuites [dû à l’erreur d’échantillonnage] et empiriquement non systématiques [d’ailleurs des procédures telles que la régression polynomiale permettent de trouver « vérifier » méthodiquement des tendances résiduelles] – et une étape postérieure requise à l’analyse de données). En revanche, l’augmentation ainsi obtenue de la variance expliquée demeure négligeable par rapport à la sophistication ajoutée : encore faut-il expliquer ces relations à l’aide d’un appareillage théorique alambiqué. Par exemple, l’équation 8 n’exprime pas de façon intuitive l’asymétrie des choix et sa modulation par la sensibilité (contrairement à la notion de biais de la LGA). Sur le plan algébrique, la LMA permet bel et bien de mieux expliquer les données, mais la LGA demeure plus simple et élégante. Ensuite, les chercheurs du domaine ne souhaitent probablement pas ressusciter (d’autres diront maintenir vivant) un modèle dont les données ne soutiennent précédemment pas sa vraisemblance. Enfin, une dernière explication réside dans le fait que la LMA n’intègre pas les facteurs qui intéressent les chercheurs actuellement. Toutes les variables nécessaires pour évaluer la valeur d’un renforçateur, par exemple, le délai de renforcement (la

durée de temps entre la réponse et l'obtention du renforçateur) ou la magnitude (l'amplitude du renforçateur, tel que la quantité - en poids, par exemple - de nourriture), ne sont pas intégrées dans la LMA. La LGA peut en revanche intégrer ces variables. Il s'agit de la concaténation de la loi généralisée de l'appariement (CLA).

2.4. La concaténation de loi généralisée de l'appariement

Bien que la concaténation de la loi généralisée de l'appariement (angl. *the concatenated generalized matching law*) ait été proposée une première fois par Baum et Rachlin (1969), l'article de Rachlin (1971) est généralement associé à cette conceptualisation. Elle fut davantage développée par Killeen (1972) et Davison et McCarthy (1988). La CLA est une extension de la LGA et peut être conceptualisée comme une généralisation de celle-ci, car elle consiste à ajouter des ratios additifs et indépendants à l'équation (la concaténation). La CLA stipule que le ratio des choix d'un organisme est fonction du ratio des taux de renforçateurs obtenus, mais aussi d'un ensemble d'autres variables représentant le ratio de la valeur des stimuli de renforcement. Ainsi, Rachlin (1971) propose que :

$$\frac{B_1}{B_2} = \frac{V_1}{V_2} \quad (9)$$

où les V s représentent la valeur des renforçateurs et sont généralement déclinés comme

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{R_1}{R_2} * \frac{I_1}{I_2} * \frac{M_1}{M_2} * \dots \quad (10)$$

où les R_s représentent le taux de renforçateurs, les I_s représentent l'immédiateté du renforçateur (l'inverse du délai de renforcement), les M_s représentent la magnitude du renforçateur et les trois points dénotent la possibilité d'insérer d'autres variables. Ici, les I_s et les M_s sont arbitrairement utilisés, ils peuvent être remplacés par n'importe quelle composante de la situation opérante. Dans l'équation 10, chaque ratio est considéré comme indépendant et multiplicatif. La CLA permet, contrairement à la LGA, de considérer, en plus du taux de renforçateurs obtenus, un ensemble d'autres variables afin de décrire le ratio des taux de réponse et propose un cadre afin d'étudier leurs effets. La CLA est perçue comme tautologique et *ad hoc* (Rachlin, 1971). En effet, si l'organisme ne respecte pas les prédictions du modèle, une variable non mesurée peut être invoquée pour expliquer les déviations. Il devient alors impossible de la falsifier.

Killeen (1972) propose de formuler la CLA en mettant l'emphasis sur la fonction de chacune des variables de l'équation 9 :

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{f_1(R_1)}{f_1(R_2)} * \frac{f_2(I_1)}{f_2(I_2)} * \frac{f_3(M_1)}{f_3(M_2)} * \dots \quad (11)$$

où les variables sont les mêmes que celles de l'équation 10. L'équation (11) justifie l'étude de variables indépendantes aux taux de renforcement. Ainsi, des modèles comme le modèle des choix contextuels (Grace & Hucks, 2013) ou le modèle de la dévaluation hyperbolique (Mazur, 2001) qui sont issus de l'étude du délai de

renforcement, peuvent être intégrés à la LGA par l'entremise de la CLA proposée par Killeen (1972).

Enfin, la CLA est aussi rencontrée dans la littérature empirique sous la forme suivante ;

$$\log\left(\frac{B_1}{B_2}\right) = a \log\left(\frac{R_1}{R_2}\right) + b \log\left(\frac{M_1}{M_2}\right) + d \log\left(\frac{I_1}{I_2}\right) + \log c \quad (12)$$

où les variables sont les mêmes que dans l'équation 10, b et d n'ont pas de définitions préétablies, mais correspondent à la sensibilité telle que définie par a . Cette version est décrite par Davison et McCarthy (1988) et représente une conciliation entre la LGA et la CLA. Elle est adéquate dans la mesure où chacune des variables respecte une fonction linéaire et où elles sont toutes indépendantes. Cette proposition s'est révélée juste pour la magnitude de renforcement (Cording, McLean & Grace, 2011), mais elle est cependant prématurée afin d'intégrer le délai de renforcement qui s'exprime par une fonction curvilinéaire (Grace & Hucks, 2013).

Même s'il s'agit d'une version de l'appariement beaucoup plus intégratrice, la CLA, comme la version moderne de l'appariement, n'est pas le modèle le plus exploité dans la littérature empirique. L'intégration des variables complémentaires à la valeur de renforcement est aussi prématurée. Chacune de ces variables doit être étudiée de façon approfondie et isolément afin d'identifier la fonction appropriée.

Néanmoins, il s'agit de la façon dont les analystes expérimentaux conçoivent la LGA (Davison & McCarthy, 1988).

3. Les développements théoriques

Jusqu'à maintenant, les différentes versions de la loi de l'appariement ont été exposées. Un regard critique a été porté quant à la valeur théorique et empirique de chacune d'elles. Si cette section est actuellement satisfaisante sur le plan du formalisme mathématique des équations, elle est superficielle quant aux développements théoriques engendrés au sein de l'analyse expérimentale du comportement. En effet, la loi de l'appariement est en grande partie à l'origine de la *Society for the Quantitative Analyses of Behavior* et du décuplement des modèles mathématiques au sein de la discipline (Forget, et al., 2001; Mazur, 2006).

Il faut enfin souligner que, bien que plusieurs modèles soient décrits dans la présente étude, d'autres, non mentionnées, sont encore d'actualité. Le cadre de cet article ne permet pas de les aborder tous. L'emphase est ainsi mise sur les tendances théoriques palpables des analystes du comportement. Les modèles sélectionnés sont utilisées afin d'illustrer l'évolution *paradigmatique* du courant. Les autres modèles, moins influents dans une certaine mesure, ne sont pas désuets ou erronés. Au contraire, ils sont simplement victimes d'être absents de ce texte.

Pour les fins de la présente section, il ne sera pas toujours nécessaire de distinguer entre les versions de la loi de l'appariement. Il suffit de connaître les principales conclusions de la section précédente :

- a. La LSA s'avère incomplète (il lui manque au mieux deux paramètres) ;
- b. Les fondements théoriques de la LQE sont erronés ;
- c. La LGA est le modèle dominant et permet de rendre compte adéquatement des comportements de l'organisme dans une situation concurrente ;
- d. La LMA explique les mêmes phénomènes que la LGA (elle nécessite cependant deux paramètres libres supplémentaires pour un gain marginal de variance expliquée et l'élimination de tendances statistiques résiduelles) ;
- e. La CLA est plus générale que la LGA et la LMA (elle permet de rendre de façon *ad hoc* des déviations de la LGA ainsi que l'intégration d'autres propriétés des renforçateurs et de la situation opérante).

Dans la prochaine section, un sommaire est réalisé et sera détaillé davantage durant le reste de la section. Chaque théorie et conception sera explicitement décrite. L'amélioration locale, la maximisation molaire, et les modèles computationnels sont abordés.

3.1. Récapitulatif sur la loi de l'appariement

Sur le plan historique, la LSA fut la version dominante de 1961 à 1970, jusqu'à l'article séminal d'Herrnstein (1970). Durant les développements de la LQE,

un groupement de chercheurs a démontré les points faibles du modèle (son incapacité à rendre compte de l'asymétrie de renforcement et le sous-appariement). Cela a poussé ces derniers à adopter la LGA plutôt que la LQE comme modèle des relations entre les comportements des organismes et les contingences de renforcement dans une situation de programme concurrent. Entre les années 1970 à 1990, il apparaît une séparation entre les chercheurs conceptualisable sur deux continuums, le premier est l'axe molaire- moléculaire, et le second est l'importance accordée aux théories économiques. Deux théories se manifestent davantage : la théorie de l'amélioration locale (angl. *melioration*) et la maximisation molaire. Ces deux théories sont définies comme molaires et s'affronteront sur la place qu'a l'économie dans le conditionnement opérant. La distinction n'est donc pas tellement entre la LQE et la LGA.

Vers le milieu des années 90, les rivalités théoriques entre les principaux acteurs s'amenuisent. Ceux-ci débutent d'autres programmes de recherche. Cette décennie est caractérisée par deux changements. Le premier est la quantité d'études en contexte appliqué et naturel. L'accroissement débute dans les années 1980 et devient particulièrement palpable dans les années 1990 et 2000. Ces études sont initiées par le cadre prometteur que permet la loi de l'appariement à la thérapie comportementale (ces développements sont abordées à la section 2.2.2). Le deuxième est l'augmentation des modèles computationnels débutés dans les années 90. En fait, si la loi de l'appariement est un modèle quantitatif performant, le processus par lequel

l'équilibre comportemental qu'elle prédit est atteint n'est pas explicite. Avec les performances informatiques développées au cours des dernières années ainsi que l'augmentation des modèles computationnels venant d'autres disciplines (les sciences cognitives ou l'ingénierie, par exemple), plusieurs modèles informatiques sont développés afin d'expliquer l'appariement. La question centrale est alors la suivante : quels sont les processus comportementaux entraînant l'apparition des relations d'appariement dans le cadre de situations opérantes ? Il reste aux acteurs contemporains à expliquer ce phénomène.

3.2. La concurrence entre l'amélioration locale et la maximisation molaire

Dans cette section, la maximisation molaire et l'amélioration locale seront d'abord discutées. Il faut remarquer le rôle essentiel que joue l'allégeance aux modèles théoriques dans l'interprétation de données alors que leur validité n'est que très rarement débattue (Charest, 2007).

3.2.1. L'amélioration locale

L'amélioration locale est une théorie développée principalement par Herrnstein (1997) et ses étudiants, plus particulièrement par Vaughan et Heyman. Il s'agit d'une extension théorique directe de la LQE et compatible avec toutes les autres versions. Selon cette perspective, la loi de l'appariement est une condition d'équilibre locale entre les taux de comportements d'un organisme et les taux de renforcement. L'organisme vise à minimiser les déviations des prédictions de la loi de l'appariement. En d'autres termes, l'organisme ajuste ses choix aux taux de

renforcement qu'il obtient en maximisant la probabilité d'obtenir un renforçateur à chaque moment. Plus la déviation de la loi de l'appariement est importante à un certain moment (une perspective locale), plus la possibilité que l'organisme change d'option augmente. Cette conception est donc en contraste avec la conception molaire de la loi de l'appariement, c'est-à-dire qu'en tant que phénomène émergent de plusieurs séances d'observations, elle s'explique de façon locale (moment par moment, plutôt que par l'ensemble de ces moments).

Quoique la proposition de l'amélioration locale, en tant que théorie, n'apporte pas davantage d'approfondissement des dynamiques comportementales que la découverte de la LSA (il s'agit d'une reformulation selon une perspective locale plutôt que molaire de l'appariement et non la découverte d'un nouveau processus), Herrnstein (1982) entrevoit les avenues prometteuses d'une telle conception. Ainsi, propose-t-il en 1982, que l'amélioration locale puisse remplacer les théories issues de *l'homme rationnel* en économie qui agit toujours en connaissance de cause, c'est-à-dire, qui, à toute occasion donnée, maximise son potentiel hédoniste. Cet argument est adressé directement aux tenants de la maximisation molaire (Rachlin et al., 1981) et, dans une moindre mesure, aux économistes. Il faut souligner d'une part que la théorie a eu des répercussions en économie (Mazur, 2006). Il ne faut donc pas s'imaginer que cet argument est fait à l'emporte-pièce. D'autre part, la loi de l'appariement et son canevas théorique, l'amélioration locale, apparaissent paradoxale pour la plupart des théories économiques. Dans ces dernières, l'organisme maximise ses actions enfin d'en obtenir le plus grand bénéfice. Par exemple, si

chaque réponse d'un organisme à une option quelconque offre un bénéfice avec une probabilité x , pourquoi en choisir une autre deux fois moins avantageuse ? Dans l'amélioration locale, l'organisme tente de minimiser les déviations de la loi de l'appariement. S'il accorde trop de temps pour l'une des options par rapport aux gains relatifs de celle-ci, il changera d'option afin de retourner à l'équilibre de l'appariement. En d'autres termes, l'organisme répondra occasionnellement au programme moins avantageux ce qui est contraire à ce qui est soutenu par les théoriques économiques.

Sur le plan du formalisme mathématique, Vaughan (1982) rapproche l'amélioration locale au modèle de Rescorla-Wagner. Cette dernière est une théorie de conditionnement pavlovien proposant que l'organisme apprend de la différence entre ce qui est attendu et ce qui arrive⁵. Il est aussi possible de noter la ressemblance avec les l'apprentissage par renforcement (modèle computationnel) de Sutton et Barto (1998). En considérant qu'à tout moment t , répondre à l'option 1 (B_1) peut être renforcé ou non, l'organisme met à jour la valeur subjective qu'il accorde au programme

$$V_1 = \alpha(V(B_1) - V(B_1, t)) \quad (13)$$

où $V(B_1)$ symbolise la valeur de renforcement du comportement B_1 (valeur moyenne, par exemple) et $V(B_1, t)$ représente la valeur de B_1 au moment t , et α représente le taux d'apprentissage. Il est possible de considérer la valeur subjective d'un programme par

;

$$V_i = \frac{R_i}{B_i} \quad (14)$$

où la valeur V_i correspond à la valeur d'un programme i . Comme c'est le cas pour la CLA, d'autres paramètres peuvent être ajoutés pour rendre compte de la valeur subjective. Enfin, dans une situation concurrente avec deux options, l'équation suivante ;

$$R_D = V_1 - V_2 \quad (15)$$

correspond à la probabilité de changer de comportement. Si R_D est supérieur à 0, alors l'organisme répondra B_1 et si R_D est inférieur à 0, alors l'organisme répondra B_2 . La valeur de V_i est mise à jour à chaque moment t . Autrement dit, si la valeur subjective et relative d'une option se modifie, l'organisme tentera de minimiser les variations en faisant de sorte que l'équation 15 tende vers zéro.

Cette conceptualisation de l'amélioration met en évidence le fait qu'il s'agit d'une théorie du comportement du changement de réponse (angl. *changeover behavior*). En outre, il est fréquent de voir des articles mentionnant l'amélioration locale seulement dans l'objectif d'illustrer l'aspect irrationnel du comportement de certains organismes (qui ne maximisent pas leur gain, mais l'apparient). Alors que le modèle est essentiellement axé sur le changement de réponse, celui-ci néglige les études de Pliskoff et de ses collègues (Pliskoff, 1971; Shull & Pliskoff, 1967; Stubbs, Pliskoff & Reid, 1977) sur le même comportement et se retrouve aussi hors du cadre

S-R-C du conditionnement opérant. En effet, le comportement de changer de réponse est considéré seulement comme un moyen de minimiser les déviations par rapport à l'appariement ; il n'est pas explicitement renforcé par quoi que ce soit. Cela est davantage explicite dans l'étude Heyman (1979), étudiant de Herrnstein et défenseur de l'amélioration locale, proposant un modèle markovien estimant la probabilité de changer de réponse sans référer à l'influence des renforçateurs sur le comportement et leur probabilité d'apparition.

En opposition, les études de Pliskoff, démarrées avant les propositions de l'amélioration locale, démontrent que le comportement de changer de réponse peut être étudié comme un opérant, qu'un programme complexe permet d'en rendre compte⁶ et que certaines variables dans l'environnement permettent d'en prédire la fréquence. La connaissance de ces travaux n'est aucunement explicite. Il faut remarquer que les études de Pliskoff font partie d'une perspective moléculaire (conceptualisation marginale de l'appariement à l'époque). La plupart sont publiées dix ans avant la première formalisation de l'amélioration locale en 1980 et, au moment où elle est décrite, le débat est davantage orienté sur la maximisation plutôt que sur le comportement de changer de réponse. Ainsi, il n'y a jamais eu de rivalité sur le sujet. Cela dit, peu d'études ont tenté de valider le formalisme de l'amélioration locale ou encore d'analyser de façon exhaustive le comportement de changer de réponse. Aux fins de la présente étude, l'amélioration locale sera considérée comme une théorie reposant sur la loi de l'appariement et étant à l'encontre de l'intégration des conceptions économiques au sein de l'analyse du comportement. Les différends

entraînés par une telle perspective seront davantage détaillés en explicitant la maximisation molaire, la principale concurrente.

3.2.2. La maximisation molaire

En opposition à l'amélioration locale, la maximisation molaire (Rachlin, Green, Kagel & Battalio, 1976; Rachlin, Battalio, Kagel & Green, 1981; Kagel et al., 1995) conçoit les situations opérantes comme analogues aux concepts de marché et de consommation. Elle propose que les concepts économiques permettent de mieux rendre compte des comportements des organismes par rapport aux renforçateurs qu'ils reçoivent. Les stimuli de renforcement sont alors avantageusement, selon eux, interprétés comme des biens économiques. Dans un programme concurrent, lorsque la performance de l'organisme demeure stable, Rachlin et al. (1981) considèrent qu'il maximise la valeur subjective des renforçateurs qu'il obtient.

La maximisation est essentiellement une théorie de la contrainte (Rachlin et al., 1981) et repose sur l'hypothèse selon laquelle les conditions dans lesquelles l'organisme se retrouve, l'état comportemental stable de celui-ci, constitue un état optimisé de la situation. Les contraintes peuvent être de l'ordre d'un budget comportemental (un nombre maximum de réponses à émettre par séance), le prix de consommation (le temps à attendre pour une option ou une quantité de réponses à émettre) ou le marché (la possibilité d'obtenir un bien – un renforçateur – à l'extérieur de la condition expérimentale). L'intérêt de ces contraintes est d'observer le choix des organismes lorsque les conditions sont variées (plus de revenus pour le

budget, augmentation ou diminution des prix). Des fonctions contour d'indifférence (angl. *indifference contour*) sont alors ajustées à ces données.

Selon Kagel, Battalio et Green (1995), la loi de l'appariement (plus particulièrement la LGA dans ce cas-ci) n'est pas une loi générale, mais plutôt un cas particulier de la loi de la demande. Ils utilisent alors les concepts issus de l'économie (la substituabilité entre deux biens, leur complémentarité ou leur indépendance). Pour soutenir cette perspective, Kagel et al. (1995) soulignent des résultats allant théoriquement à l'encontre de l'amélioration locale. L'antiappariement (angl. : *antimatching* ; Kagel, et al., 1995; ou *countermatching* ; Hursh, 1980) désigne le phénomène par lequel les choix de consommation se dirigent inversement aux taux relatifs de renforçateurs. En d'autres termes, plus une option est renforçante, moins l'organisme en consomme. Il s'agit d'un cas particulier de la LGA, car la valeur de la sensibilité est alors négative. Par exemple, Hursh (1978) observe la consommation d'eau et de nourriture de singes rhésus. Dans la première étape de l'expérience, l'animal a accès à trois leviers, chacun ayant un programme de renforcement à intervalle variable. Les deux premiers offrent de la nourriture (exactement la même pour les deux) et de l'eau. Hursh observe que s'il augmente le coût de la nourriture d'un levier, le singe mange plus au second, ce qui n'a rien d'étonnant au regard de l'appariement pour l'instant. Dans la seconde expérience, il retire le deuxième levier de nourriture. Dès lors, si le coût du levier de nourriture augmente, l'animal réduit sa consommation d'eau et de nourriture. Alors que la LGA prédit une augmentation de

la consommation d'eau, c'est le contraire qui est observé. Une hypothèse a posteriori est de formuler que l'eau facilite l'ingestion de nourriture. Selon le vocabulaire économique, l'augmentation du prix d'un bien augmente la consommation de son bien substitutif (ici la nourriture identique à l'autre levier), mais diminue aussi la consommation d'un bien complémentaire (l'eau). Dans ce cas, la LGA peut décrire adéquatement la relation entre les leviers de nourriture et celle entre l'eau et la nourriture (s'il est considéré que la sensibilité peut montrer des valeurs négatives). Même si la valeur relative de l'eau augmente, l'organisme en consomme moins. Ce résultat paradoxal invalide l'amélioration locale. Par conséquent, Rachlin et al. (1976) suggèrent d'interpréter la sensibilité comme la substituabilité entre deux biens. En termes économiques, la substituabilité est l'ajustement des ressources (comportements) aux prix de consommation (renforçateurs). Il s'agit certes d'une proposition intéressante, mais qui, à l'exception de l'intuition économique supplémentaire, ne résout en rien les problèmes d'interprétation du paramètre.

Sur le plan du formalisme mathématique, la contribution la plus intéressante est la démonstration montrant que la LGA est une conséquence d'une fonction de contour. Rachlin (1982) suggère que, dans un programme de renforcement concurrent, la fonction de contour peut prendre la forme suivante ;

$$V = x_1 R_1^y + x_2 R_2^y \quad (16)$$

où y est un index de substituabilité, le ratio x_1/x_2 représente la variable à laquelle les deux commodités R_1 et R_2 sont substitutives (par exemple, les calories de la

nourriture). L'équation 16 est ainsi une première contrainte de la valeur subjective des renforçateurs. Ensuite, l'auteur suggère la seconde contrainte ;

$$V = T_1 + T_2 \quad (17)$$

où T_i est le temps d'allocation à une réponse 1 ou 2 et la troisième ;

$$R = aT^m \quad (18)$$

qui représente la fonction de feedback (angl. *feedback function*), où m et a représentent le programme de renforcement. En substituant l'équation 17 et 18 dans

$$\text{l'équation 16 : } V = x_1 a_1 T_1^{m_1} + x_2 a_2 (1 - T_1)^{m_2} \quad (19)$$

En différentiant cette équation par rapport à T_1 et en faisant quelques manipulations, la fonction de contour devient :

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{x_1}{x_2} \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^y \quad (20)$$

lorsque $m_1 = m_2 = 1$. Il s'agit alors de l'optimum économique de l'organisme sur la fonction de contour et qui, selon les valeurs de m et de a , prédisent la LGA. Ainsi, la loi de l'appariement apparaît comme une conséquence de la maximisation (pour plus de renseignement sur la démonstration, voir l'ouvrage de Rachlin, 1982. À la fin du présent article, seule l'intuition selon laquelle l'appariement découle de la maximisation est suffisante.) Outre, cette démonstration, le formalisme de la

maximisation molaire reste rudimentaire (Charest, 2007). L'utilisation des fonctions de contour est décrite sans en donner de formes précises. Ainsi, rien ne garantit que la fonction de feedback, l'équation 18 employée par Rachlin, exprime réellement celle d'un programme de renforcement tout comme la fonction de contour, présentée à l'équation 16, exprime adéquatement la consommation de l'organisme. Les ouvrages sur la maximisation molaire n'évaluent pas la vraisemblance de ces fonctions sur les données. Les travaux majeurs basés sur cette théorie demeurent des exposés sur la valeur heuristique de ces analyses. Elles permettent d'en montrer les intuitions aux autres analystes du comportement de l'époque. Ainsi, la maximisation molaire est une conception téléologique du comportement puisqu'elle se limite à une interprétation a posteriori des fonctions; elle ne peut déduire de loi causale réfutable.

Le plus grand débat entre la maximisation locale et l'amélioration porte sur le comportement des organismes dans un programme de renforcement concurrent à intervalle variable et à proportion variable. Dans le premier programme, le renforçateur est distribué autour d'une certaine moyenne de temps alors que, pour le deuxième, il s'agit d'une moyenne du nombre de réponses requis. Les deux programmes sont offerts simultanément à l'organisme et celui-ci peut changer de programme à tout moment. Dans cette situation, l'amélioration locale prédit l'appariement et la maximisation molaire prédit une préférence (une valeur de biais) marquée pour la contingence à proportion variable. Herrnstein et Heyman (1979), par exemple, montrent que les organismes appariement et que la préférence pour la

proportion variable n'est pas observée. En fait, la préférence est plutôt pour le programme à intervalle variable. L'excuse (a posteriori) de Rachlin et al. (1981) est alors d'affirmer que les programmes de renforcement ne sont pas substitutifs, ce qui est théoriquement vraisemblable, car la composante de loisirs (angl. *leisure*) n'est pas considérée. Le programme à proportion nécessiterait plus de travail pour obtenir le renforçateur alors que l'intervalle aurait une composante de repos. Il existerait ainsi une autre fonction de contour permettant de rendre compte de ce phénomène. Si l'hypothèse est vraisemblable, Herrnstein (voir le commentaire à la fin de l'article de Rachlin et al., 1981), note que Rachlin et al. n'ont pas refait les analyses pour en vérifier la justesse. Dans une analyse des études sur le programme de renforcement concurrent à intervalle variable et à proportion variable, Kagel et al. (1995) montrent que, au mieux, le comportement des organismes se situe quelque part entre la théorie de l'appariement et la maximisation molaire.

Par la perspective (locale/molaire) différente et l'aspect téléologique de la maximisation molaire, il n'est pas possible de comparer entre cette dernière et l'amélioration locale. Malgré l'importance de l'empirisme au sein de l'analyse du comportement et l'accumulation de données sur deux décennies, l'expérience scientifique n'a pu ériger une théorie comme meilleure que l'autre.

3.2.3. La fin du débat

Vers la fin des années 80, les débats entre amélioration locale et maximisation molaire s'estompent. Non pas qu'une théorie ait donné raison à l'autre, mais plutôt

parce que les chercheurs sont restés campés sur leurs positions, et que le dialogue s'est rompu entre eux. Au début des années 90, les études sur ces modèles deviennent de plus en plus rares. Il faut d'abord rappeler le décès de Herrnstein en 1994. Après la montée des sciences cognitives en psychologie, les analystes du comportement se retrouvent avec moins de subventions de recherche pour entretenir leur dispendieux laboratoire animal. Rachlin et Green, les deux psychologues de la maximisation molaire, ainsi que Heyman, cessent les études sur leurs modèles pour se tourner vers d'autres projets moins coûteux. Selon *PsycInfo*, Vaughan ne publiera plus de papiers sur le sujet après 1993 (à l'exception d'un court commentaire en 1997). Enfin, Kagel et Battalio se recentreront sur leur discipline d'origine, la micro-économie, après leur ouvrage *Economic Choice Theory*. Ils abandonnent tous ce domaine dans lequel plusieurs questions restent ouvertes et où plusieurs contributions peuvent être encore réalisées. Aujourd'hui, les modèles économiques ont toujours un rôle en analyse du comportement, mais ils ne sont plus exclusivement orientés par rapport à la loi de l'appariement.

À la suite de cette analyse, deux conclusions s'imposent. Malgré une quantité imposante d'études empiriques sur le sujet, aucun consensus par rapport à la supériorité de l'un des deux modèles n'a pu émerger. La preuve empirique n'a pas permis de départager les deux camps au fil des années. L'allégeance théorique constitue l'essentiel du problème : les chercheurs ont toujours maintenu la conviction que le cadre théorique de leur adversaire était en réalité un cas particulier de leur propre théorie. L'hypothèse de la maximisation molaire correspond à un cadre

téléologique du comportement alors que l'amélioration locale repose sur une conception mécaniste. La supériorité des assises épistémologiques de ces derniers est alors au centre de leur adhésion théorique alors que le cadre téléologique s'exprime par les qualités heuristiques de leur modèle.

Avec le déclin de ce débat, vient un intérêt marqué pour les modèles computationnels. Le processus par lequel l'organisme atteint l'appariement et les paramètres reliés à celui n'étant pas élucidés, les chercheurs se tournent vers la computation afin de répondre à ses questions.

3.3. Les modèles computationnels

Pendant les années 90, plusieurs chercheurs en analyse du comportement tentent d'élucider les processus comportementaux par l'intermédiaire de modèles computationnels. Influencés par une perspective moléculaire et avec l'avantage de la puissance de calcul des ordinateurs, ils tentent de rendre compte de la loi de l'appariement afin d'y tester des processus comportementaux (conceptualisés de façon plus ou moins complexe). Ce mouvement est initié au début des années 90 (Donahoe, Palmer & Burgos, 1993; Shimp, 1992). Parmi les modèles computationnels ayant eu le plus d'influence sur les études portant sur la loi de l'appariement, il y a l'apprentissage par renforcement (Sutton & Barto, 1998), les réseaux-neuronaux (Haykin, 1998) et les algorithmes génétiques (Forrest, 1993). Ces modèles ont l'avantage de pouvoir gérer moment par moment les interactions entre un organisme artificiel et son environnement. L'objectif du programmeur est en quelque sorte de laisser l'organisme agir dans son environnement et d'analyser la

façon dont celui-ci s'y ajuste. Cette conception repose essentiellement sur l'optimisation, quoiqu'elle ne s'y prête pas toujours dans le contexte de l'analyse du comportement (dans lequel l'objectif est de vérifier de façon computationnelle la validité d'une théorie de l'apprentissage représentée mathématiquement, contrairement au domaine de l'ingénierie dans lequel l'objectif est plutôt d'évaluer la rapidité de la simulation ou le coût en mémoire de stockage pour l'ordinateur).

Insérer la figure 3 environ ici

La figure 3 illustre de façon simplifiée le fonctionnement d'une simulation d'une situation opérante. Un agent artificiel est dans un programme de renforcement concurrent. Il débute la simulation au centre de l'espace au temps t . Au début de la condition, il est indifférent (une probabilité uniforme) entre les différentes options présentes dans son environnement. La façon dont l'organisme choisit est dictée par l'algorithme. L'agent émet une réponse, l'environnement envoie une rétroaction ou non à l'organisme et ce dernier se retrouve à la situation initiale au temps $t+1$. Au fil de son apprentissage, l'agent calcule de façon continue et approximative les probabilités d'être renforcé à l'une ou l'autre des options en fonction des événements survenant dans son environnement. L'organisme atteindra un équilibre *optimal* (ce n'est pas toujours le cas) en fonction des contingences en vigueur. Dans le cas de l'apprentissage par renforcement, il peut choisir l'option la plus bénéfique (maximiser ses gains) afin de recevoir le maximum de renforçateur possible ou dans le cas d'algorithme évolutif, l'option ayant permis le plus de descendance. Dans ce dernier,

il ne s'agit pas d'un individu, mais de ses gènes. Certains dicteront d'aller à gauche (le programme 1) et d'autres à droite (le programme 2). Si le programme attribue une conséquence, alors la communauté de gènes sera modifiée, favorisant les gènes du côté choisi. La nature des programmes n'est pas importante ici. Il peut s'agir de deux programmes de renforcement à proportion variable, de programmes à distribution aléatoire, c'est-à-dire l'équivalent du bandit manchot (angl. *multi-armed bandit*), ou de programmes à intervalle variable. La situation peut être complexifiée en ajoutant des composantes de temps, de déplacements dimensionnels supplémentaires, davantage d'information par rapport à l'espace et un environnement plus dynamique.

Une remarque au passage pour le lecteur qui aura constaté que les modèles computationnels mentionnés sont généralement considérés de l'ordre des *sciences cognitives* : il s'agit, pour l'analyste du comportement, non pas de modéliser une structure cognitive, mais bien d'en étudier les sorties (angl. *output*) et les comportements ainsi générés. Il faut accepter d'une part que ces modèles en tant qu'outils conceptuels n'appartiennent pas à une discipline spécifique, pas plus que le marteau n'est réservé qu'à l'usage exclusif des menuisiers, et d'autre part, qu'un cognitiviste prétendant que les modèles computationnels qu'il élabore (que celui-ci les appelle l'esprit, le cortex frontal, la mémoire, l'hypothalamus ou la pensée) sont les reflets exacts des processus réels ne montrerait qu'une grotesque incompréhension des enjeux des simulations des organismes vivants. La validité empirique et théorique des modèles comportementaux computationnels repose sur le degré auquel leur

caractère analogique aux situations réelles peut être accepté, et ce, sans égard à la discipline impliquée. Enfin, l'élaboration de tels modèles est fortement encouragée au sein de l'analyse expérimentale du comportement (Shimp, 2013).

Il existe au moins une quinzaine de modèles computationnels rendant compte de l'appariement. Leur présentation et comparaison dépasse largement le cadre de cet article. Il suffit toutefois de comprendre que, malgré la simplicité de la situation opérante présentée précédemment, les modèles se réduisent en quelque sorte à un agent qui émet une réponse et qui ajuste la probabilité de celle-ci en fonction des conséquences de son environnement. Les différences demeurent dans la façon dont l'agent fait ses choix et comment la probabilité d'une réponse est ajustée. Actuellement, certains modèles sont peaufinés jusqu'à rendre les patrons comportementaux des agents artificiels « indissociables » de ceux des organismes biologiques dans plusieurs conditions.

Quels sont les contributions de ces modèles ? D'abord, ils démontrent de façon univoque que des théories quantitatives de l'apprentissage peuvent rendre compte de divers patrons comportementaux dont celui de l'appariement. Ensuite, ils montrent qu'il existe une panoplie de façon de modéliser (selon une perspective moléculaire) des processus d'apprentissage menant à l'appariement. Celle-ci apparaît alors clairement comme un phénomène émergent. En revanche, les modèles computationnels éclairent peu sur les notions de sensibilité et de biais. Outre, « l'erreur d'échantillonnage » de l'histoire comportementale de l'agent, aucune

systematisation des valeurs des paramètres n'est identifiée. Au contraire, l'idée selon laquelle la moyenne des simulations est équivalente à la moyenne des organismes biologique est davantage soutenue et valorisée. Imiter par ordinateur le comportement d'organisme suffit. Enfin, ils n'ont pas permis d'avancées théoriques sur le concept d'appariement. En partant du modèles et en validant que celui-ci fonctionne bel et bien sur le plan computationnel, ils n'ont pas ouvert d'autres avenues ou d'autres questions de recherche sur le plan empirique.

Bien que la computation impliquée dans ces modèles soit largement différente, ils sont basés sur un même mécanisme, nommément un processus d'apprentissage quantitatif contingent à la distribution des renforçateurs. Il n'est donc pas étonnant que, malgré leurs différences algorithmiques, ils atteignent le même objectif computationnel, soit d'imiter les relations d'appariement. Entre autre, Sakai et Fukai (2008) démontrent qu'un processus impliquant une maximisation partielle, si elle inclut des choix passés et de l'information sur les renforçateurs, devrait mener à l'appariement, et ce, peu importe l'algorithme impliqué. Par conséquent, les modèles théoriques avec des résultats empiriques similaires ne peuvent être départagés.

Une autre façon de conceptualiser la loi de l'appariement est par l'intermédiaire des contraintes systématiques inhérentes aux situations opérantes (Caron, 2014). Contrairement aux autres modèles qui s'intéressent principalement à un processus intrinsèque aux organismes, Caron propose que des contraintes à l'intérieur des situations opérantes mènent à linéarisation de la relation entre le taux

relatif de réponse et de renforçateurs. La proposition repose sur une simulation d'échantillonnage répétée (méthode Monte-Carlo) restreinte par une contrainte vraisemblablement présente dans la plupart des situations opérantes. Cette étude montre qu'une telle perspective permet d'expliquer en moyenne jusqu'à 47 % de la variance expliquée. De plus, des études supplémentaires montrent qu'il est possible d'augmenter la variance expliquée à 62% par l'ajout d'une autre contrainte (Caron, sous-presse). La contribution de ces études est de montrer qu'une conception n'inférant pas de processus comportementaux internes aux organismes peut obtenir des résultats similaires aux modèles computationnels. Dans certaines situations d'expérimentation (où le taux de renforcement n'est pas contrôlé, par exemple), la loi de l'appariement pourrait s'avérer être un artefact en raison des contraintes des programmes concurrents.

Comme le souligne Killeen (2015), la loi de l'appariement pourrait être le fruit de l'expérimentation (la procédure et l'appareillage) plutôt que produit de l'organisme. Il faut alors dévier de la façon dont l'appariement est présentement formalisée dans les modèles computationnels et tenter de nouvelles perspectives moléculaires afin d'élucider la nature des paramètres de la loi de l'appariement et les processus liés à l'apprentissage menant à des opérants molaires stables.

4. Conclusion

L'objectif de la présente étude est de donner un aperçu synthétique et critique quant aux développements de la loi de l'appariement. Son influence sur l'analyse du

comportement ne peut être négligée. Elle s'avère être un modèle puissant et fertile afin de décrire les choix des organismes. Depuis 1961, un certain nombre de propositions ont d'ailleurs permis au modèle d'évoluer et de s'adapter à l'accumulation de données empiriques.

Insérer le tableau 2 ici

Le tableau 2 présente (selon l'ordre de présentation) les versions de la loi de l'appariement et résume quelques renseignements pertinents à leur sujet. La LSA est reconnue comme étant incomplète et les fondements théoriques de la LQE se sont avérés erronés. La LGA est devenue le modèle dominant parmi les chercheurs du domaine. Elle fait l'unanimité dans la littérature scientifique expérimentale. La LMA, quoiqu'exhaustivement étudiée, est actuellement peu féconde, car elle nécessite quatre paramètres libres. Elle n'a pas reçu l'engouement de sa concurrente. Enfin, la CLA est la version plus générale de la LGA. Moins utilisée dans les études, elle correspond à la conceptualisation théorique de l'appariement pour les chercheurs.

La loi de l'appariement fut au centre d'importants débats quant à l'intégration des concepts économiques au sein de l'analyse du comportement. Elle fut à la fois perçue comme étant à l'encontre de la maximisation (selon l'amélioration locale) et à la fois comme un cas particulier de celle-ci (selon la maximisation molaire). Malgré les rivalités et l'accumulation de données, le débat s'est clos sans dénouement. L'allégeance théorique à une certaine perspective comportementale fut plus dominante que l'allégeance empirique. Les modèles économiques sont toujours

d'actualité en analyse du comportement bien qu'ils ne soient plus exclusivement orientés sur la loi de l'appariement. Plusieurs questions demeurent toujours ouvertes.

Par la suite, les décennies suivantes sont caractérisées par la croissance d'études en contexte appliqué et naturel ainsi que l'augmentation des modèles computationnels. Ce premier groupe d'études est initié par le cadre prometteur que permet la loi de l'appariement à la thérapie comportementale. Le deuxième groupe vise à expliquer l'équilibre comportemental prédit par la loi de l'appariement à l'aide de modèles informatiques reposant sur un cadre moléculaire de l'interaction comportement-environnement.

Il reste encore à explorer quant à la loi de l'appariement. D'abord, il reste à éclaircir l'interprétation des paramètres de la sensibilité et du biais (au moins dans le cas de la LGA). Ensuite, une autre avenue consiste à évaluer chacune des composantes de la CLA et d'évaluer dans quelle mesure les propriétés des situations concurrentes, plus particulièrement les qualités des renforçateurs, se joignent à l'équation. Enfin, il reste à trouver et à tester empiriquement un modèle moléculaire permettant d'expliquer l'équilibre comportemental (molaire) de la loi de l'appariement. Ces travaux de grande envergure ne peuvent être achevés que par l'expérimentation scientifique : un dessein propre à l'analyse expérimentale du comportement

Références

- Alferink, L. A., Critchfield, T. S., Hitt, J. L., & Higgins, W. J. (2009). Generality of the matching law as a descriptor of shot selection in basketball. *Journal of Applied Behavior Analysis, 42*, 595-608. doi: 10.1901/jaba.2009.42-595
- Anderson, K. G., Velkey, A. J., & Woolverton, W. L. (2002). The generalized matching law as a predictor of choice between cocaine and food in rhesus monkeys. *Psychopharmacology, 163*, 319-326. doi: 10.1007/s00213-002-1012-7
- Baum, W. M. (1974a). Choice in free-ranging wild pigeon. *Science, 185*, 78-79. doi: 10.1126/science.185.4145.78
- Baum, W. M. (1974b). On two types of deviation from the matching law: bias and undermatching. *Journal of the Experimental Analysis of Behavior, 22*, 231-242. doi: 10.1901/jeab.1974.22-231
- Baum, W. M. (1979). Matching, undermatching, and overmatching in studies of choice. *Journal of the Experimental Analysis of Behavior, 32*, 269-281. doi: 10.1901/jeab.1979.32-269
- Baum, W. M. (1983). Matching, statistics, and common sense. *Journal of the Experimental Analysis of Behavior, 39*, 499-501. doi: 10.1901/jeab.1983.39-499

- Baum, W. M., & Rachlin, H. C. (1969). Choice as time allocation. *Journal of the Experimental Analysis of Behavior*, *12*, 861-874. doi: 10.1901/jeab.1969.12-861
- Borrero, J. C., Crisolo, S. S., Tu, Q., Rieland, W. A., Ross, N. A., Francisco, M. T., & Yamamoto, K. Y. (2007). An application of the matching law to social dynamics. *Journal of Applied Behavior Analysis*, *40*, 589-601. doi: 10.1901/jaba.2007.589-601
- Borrero, J. C., & Vollmer, T. R. (2002). An application of the matching law to severe problem behavior. *Journal of Applied Behavior Analysis*, *35*, 13-27. doi: 10.1901/jaba.2005.35-13
- Borrero, C. S. W., Vollmer, T. R., Borrero, J. C., Bourret, J. C., Sloman, K. N., Samaha, A. L., & Dallery, J. (2010). Concurrent reinforcement schedules for problem behavior and appropriate behavior: experimental applications of the matching law. *Journal of the Experimental Analysis of Behavior*, *93*, 455-469. doi: 10.1901/jeab.2010.93-455
- Caron, P.-O. (2013a). On applying the matching law to between-subject data. *Animal Behaviour*, *85*, 857-860. doi: 10.1016/j.anbehav.2013.01.022
- Caron, P.-O. (2013b). On the empirical status of the matching law : comment on McDowell (2013). *Psychological Bulletin*, *139*, 1029-1031. doi: 10.1037/a0032403
- Caron, P.-O. (2014). La loi généralisée de l'appariement : une simulation de Monte-Carlo. *Acta Comportamentalia*, *22*, 169-179.

- Caron, P.-O. (sous-presse). Matching without learning. *Adaptive Behavior*. doi: 10.1177/1059712315590484
- Caron, P.-O., Forget, J., & Leroux-Boudreault, A. (2014). Les applications de la sensibilité sociale en contexte éducatif. *Journal de Thérapie Comportementale et Cognitive*, 24. doi: 10.1016/j.jtcc.2014.07.004
- Caron, P.-O., Royer, F., & Forget, J. (2014). La sensibilité sociale : une recension critique. *Acta Comportamentalia*, 22, 334-351.
- Catania, A. C. (1963). Concurrent performances : reinforcement interaction and response independence. *Journal of the Experimental Analysis of Behavior*, 6, 253-263. doi: 10.1901/jeab.1963.6-253
- Catania, A. C. (1966). Concurrents operants. Dans W. K. Honing (Dir.), *Operant behavior : Areas of research and application* (pp. 213-270). New York: Appleton-Century-Crofts.
- Charest, Y.-O. (2007). *La théorie des choix rationnels et le comportement animal*. Mémoire de maîtrise, Université du Québec à Montréal, Montréal.
- Cohen, J., Cohen, P., West, S. G., & Aiken, L. S. (2003). *Applied multiple regression/correlation analysis for the behavioral sciences*. Mahwah (NJ): Erlbaum.
- Commons, M. L., Herrnstein, R. J., & Rachlin, H. (1982). *Quantitative Analyses of Behavior : Matching and maximising accounts*. Cambridge: Ballinger.
- Cording, J. R., McLean, A. P., & Grace, R. C. (2011). Testing the linearity and independence assumptions of the generalized matching law for reinforcer

- magnitude: a residual meta-analysis. *Behavioural Processes*, 87, 64-70. doi: 10.1016/j.beproc.2011.02.011
- Dallery, J., Soto, P. L., & McDowell, J. J. (2005). A test of the formal and modern theories of matching. *Journal of the Experimental Analysis of Behavior*, 84, 129-145. doi: 10.1901/jeab.2005.108-04
- Davison, M. (1981). Choice between concurrent variable-interval and fixed-ratio schedules: a failure of the generalized matching law. Dans C. M. Bradshaw, E. Szabadi & C. F. Lowe (Dir.), *Quantification of steady-state operant behaviour* (pp. 91-100). North Holland: Elsevier.
- Davison, M., & Elliffe, D. (2009). Variance matters: the shape of a datum. *Behavioural Processes*, 81, 216-222. doi: 10.1016/j.beproc.2009.01.004
- Davison, M., & Jenkins, P. E. (1985). Stimulus discriminability, contingency discriminability, and schedule performance. *Animal Learning & Behavior*, 13, 77-84. doi: 10.3758/bf03213368
- Davison, M., & McCarthy, D. (1988). *The matching law: a research review*. Hillsdale (NJ): Erlbaum.
- de Villiers, P. (1977). Choice in concurrent schedules and a quantitative formulation of the law of effect. Dans W. K. Honing & J. E. R. Staddon (Dir.), *Handbook of Operant Behavior* (pp. 233-287). New Jersey: Prentice Hall.
- de Villiers, P. A., & Herrnstein, R. J. (1976). Toward a law of response strength. *Psychological Bulletin*, 83, 1131-1153. doi: 10.1037/0033-2909.83.6.1131

- Donahoe, J. W., Burgos, J. E., & Palmer, D. C. (1993). A selectionist approach to reinforcement. *Journal of the Experimental Analysis of Behavior*, *60*, 17-40. doi: 10.1901/jeab.1993.60-17
- Duval, I., & Forget, J. (2005). Les relations fonctionnelles entre l'attention de l'adulte et les comportements sociaux appropriés d'enfants autistes. *Revue Québécoise de Psychologie*, *26*, 67-78.
- Ferster, C. B., & Skinner, B. F. (1957). *Schedules of reinforcement*. New York: Appleton-Century-Croft.
- Findley, J. D. (1958). Preference and switching under concurrent scheduling. *Journal of the Experimental Analysis of Behavior*, *1*, 123-144. doi: 10.1901/jeab.1958.1-123
- Fleshler, M., & Hoffman, H. S. (1962). A progression for generating variable-interval schedules. *Journal of the Experimental Analysis of Behavior*, *5*, 529-530. doi: 10.1901/jeab.1962.5-529
- Forget, J. (1987). Les relations fonctionnelles entre l'attention sociale d'enseignantes et les comportements sociaux d'un élève du primaire. *Revue Québécoise de Psychologie*, *8*, 27-43.
- Forget, J. (2009). *Dictionnaire des sciences du comportement*. Montréal, Département de Psychologie: Université du Québec à Montréal.
- Forget, J., Donais, S., & Giroux, N. (2001). La loi de l'appariement et ses applications en psychologie clinique et en éducation. *Revue Canadienne de Psycho-Education*, *30*, 311-327.

- Forget, J., & Rivard, M. (2010). Évaluer la sensibilité sociale de l'enfant à l'attention de l'adulte. Perspective de recherche en autisme. Dans G. Magerotte & E. Willaye (Dir.), *Intervention comportementale clinique* (pp. 235-287). Bruxelles: De Boeck.
- Forrest, S. (1993). Genetic algorithms. *Science*, 262(5123), 872-878
- Grace, R. C., & Hucks, A. D. (2013). The allocation of operant behavior. Dans G. J. Madden, W. V. Dube, T. D. Hackenberg, G. P. Hanley & K. A. Lattal (Dir.), *APA handbook of behavior analysis, Vol. 1: Methods and principles* (pp. 307-337). Washington, DC, US: American Psychological Association. doi: 10.1037/13937-014
- Haykin, S. (1998). *Neural networks: a comprehensive foundation*. Upper Saddle River, (NJ): Prentice Hall
- Herrnstein, R. J. (1958). Some factors influencing behavior in a two-response situation. *Transaction of the New York Academy of Science*, 21, 35-45.
- Herrnstein, R. J. (1961). Relative and absolute strength of response as a function of frequency of reinforcement. *Journal of the Experimental Analysis of Behavior*, 4, 267-272. doi: 10.1901/jeab.1961.4-267
- Herrnstein, R. J. (1970). On the law of effect. *Journal of the Experimental Analysis of Behavior*, 13, 243-266. doi: 10.1901/jeab.1970.13-243

- Herrnstein, R. J. (1982). Melioration as behavioral dynamism. In M. L. Commons, R. J. Herrnstein & H. Rachlin (Eds.), *Quantitative analyses of behavior : matching and maximizing account* (pp. 433-458). Cambridge : Ballinger.
- Herrnstein, R. J. (1997). *The matching law. Papers in psychology and economics*. Cambridge (MA) : Harvard University Press.
- Herrnstein, R. J. & Heyman, G. M. (1979). Is matching compatible with reinforcement maximization on concurrent variable-interval variable-ratio? *Journal of the Experimental Analysis of Behavior*, *31*, 209-223. doi : 10.1901/jeab.1979.31-209
- Heth, C. D., Pierce, W. D., Belke, T. W., & Hensch, S. A. (1989). The effect of logarithmic transformation on estimating the parameters of the generalized matching law. *Journal of the Experimental Analysis of Behavior*, *52*, 65-76. doi: 10.1901/jeab.1989.52-65
- Heyman, G. M. (1979). A Markov model description of changeover probabilities on concurrent schedules. *Journal of the Experimental Analysis of Behavior*, *31*, 41-51. doi: 10.1901/jeab.1979.31-41
- Hull, C. L. (1943). *Principles of Behavior*. Oxford: Apple Century Croft.
- Hursh, S. R. (1980). Economic concepts for the analysis of behavior. *Journal of the Experimental Analysis of Behavior*, *34*, 219-238. doi: 10.1901/jeab.1980.34-219
- Hursh, S. R., & Silberberg, A. (2008). Economic demand and essential value. *Psychological Review*, *115*, 186-198. doi: 10.1037/0033-295X.115.1.186

- Jacobs, E. A., Borrero, J. C., & Vollmer, T. R. (2013). Translational applications of quantitative choice models. Dans G. J. Madden, W. V. Dube, T. D. Hackenberg, G. P. Hanley & K. A. Lattal (Dir.), *APA handbook of behavior analysis, Vol. 2: Translating principles into practice* (pp. 165-190). Washington, DC, US: American Psychological Association. doi: 10.1037/13938-007
- Kagel, J. H., Battalio, R. C., & Green, L. (1995). *Economic choice theory : an experimental analysis of animal behavior*. New York: Cambridge University Press.
- Kangas, B. D., Berry, M. S., Cassidy, R. N., Dallery, J., Vaidya, M., & Hackenberg, T. D. (2009). Concurrent performance in a three-alternative choice situation: Response allocation in a Rock/Paper/Scissors game. *Behavioural Processes*, 82, 164-172. doi: 10.1016/j.beproc.2009.06.004
- Killeen, P. (1972). The matching law. *Journal of the Experimental Analysis of Behavior*, 17, 489-495. doi: 10.1901/jeab.1972.17-489
- Killeen, P. (2015). The logistics of choice. *Journal of the Experimental Analysis of Behavior*, 104, 74-92. doi: 10.1002/jeab.156
- Mace, F. C., McCurdy, B., & Quigley, E. A. (1990). A collateral effect of reward predicted by matching theory. *Journal of Applied Behavior Analysis*, 23, 197-205. doi: 10.1901/jaba.1990.23-197
- Malcuit, G., Pomerleau, A., & Maurice, P. (1995). *Psychologie de l'apprentissage*. Saint-Hyacinthe: Edisem.

- Mazur, J. E. (2001). Hyperbolic value addition and general models of animal choice. *Psychological Review*, *108*, 96-112. doi: 10.1037/0033-295x.108.1.96
- Mazur, J. E. (2006). Mathematical models and the experimental analysis of behavior. *Journal of the Experimental Analysis of Behavior*, *85*, 275-291. doi: 10.1901/jeab.2006.65-05
- McDowell, J. J. (1981). On the validity and utility of Herrnstein's hyperbola in applied behavior analysis. Dans C. M. Bradshaw, E. Szabadi & C. F. Lowe (Dir.), *Quantification of steady-state operant behaviour* (pp. 95-109). North Holland: Elsevier.
- McDowell, J. J. (1982). The importance of Herrnstein's mathematical statement of the law of effect for behavior therapy. *American Psychologist*, *37*, 771-779. doi: 10.1037/0003-066x.37.7.771
- McDowell, J. J. (1986). On the falsifiability of matching theory. *Journal of the Experimental Analysis of Behavior*, *45*, 63-74. doi: 10.1901/jeab.1986.45-63
- McDowell, J. J. (1988). Matching theory in natural human environments. *The Behavior Analyst*, *11*, 95-109.
- McDowell, J. J. (1989). Two modern developments in matching theory. *The Behavior Analyst*, *12*, 153-166.
- McDowell, J. J. (2005). On the classic and modern theories of matching. *Journal of the Experimental Analysis of Behavior*, *84*, 111-127. doi: 10.1901/jeab.2005.59-04

- McDowell, J. J. (2013a). On the theoretical and empirical status of the matching law and matching theory. *Psychological Bulletin*, *139*, 1000-1028. doi: 10.1037/a0029924
- McDowell, J. J., Caron, M. L., Kulubekova, S., & Berg, J. P. (2008). A computational theory of selection by consequences applied to concurrent schedules. *Journal of the Experimental Analysis of Behavior*, *90*, 387-403. doi: 10.1901/jeab.2008.90-387
- McSweeney, F. K. (1978). Prediction of concurrent keypeck treadle-press responding from simple schedule performance. *Animal Learning & Behavior*, *6*, 444-450. doi: 10.3758/bf03209642
- McSweeney, F. K., Melville, C. L., & Whipple, J. E. (1983). Herrnstein's equation for the rates of responding during concurrent schedules. *Animal Learning & Behavior*, *11*, 275-289. doi: 10.3758/BF03199777
- Mullins, E., Agunwamba, C. C., & Donohoe, A. J. (1982). On the analysis of studies of choice. *Journal of the Experimental Analysis of Behavior*, *37*, 323-327. doi: 10.1901/jeab.1982.37-323
- Myers, R. L., & Myers, L. E. (1977). Undermatching : a reappraisal of performance on concurrent variable-interval schedules of reinforcement. *Journal of the Experimental Analysis of Behavior*, *27*, 203-241. doi: 10.1901/jeab.1977.27-203
- Myerson, J., & Hale, S. (1984). Practical implications of the matching law. *Journal of Applied Behavior Analysis*, *17*, 367-380. doi: 10.1901/jaba.1984.17-367

- Noll, J. P. (1995). The matching law as a theory of choice in behavior therapy. Dans W. T. O'Donohue & L. Krasner (Dir.), *Theories of behavior therapy: Exploring behavior change*. (pp. 129-144): Washington, DC, US: American Psychological Association. doi: 10.1037/10169-005
- Pierce, W. D., & Epling, W. F. (1983). Choice, matching, and human behavior: A review of the literature. *The Behavior Analyst*, 6, 57-76.
- Pierce, W. D., & Epling, W. F. (1995). The applied importance of research on the matching law. *Journal of Applied Behavior Analysis*, 28, 237-241. doi: 10.1901/jaba.1995.28-237
- Pierce, W. D., Epling, W. F., & Greer, S. M. (1981). Human communication and the matching law. In C. M. Bradshaw, E. Szabadi & C. F. Lowe (Eds.), *Quantification of steady-state operant behaviour* (pp. 345-348). Amsterdam: Elsevier/North Holland.
- Pliskoff, S. S. (1971). Effects of symmetrical and asymmetrical changeover delays on concurrent performances. *Journal of the Experimental Analysis of Behavior*, 16, 249-256. doi: 10.1901/jeab.1971.16-249
- Poirier, N., & Forget, J. (1996). L'analyse quantitative de la relation entre l'attention sociale de l'adulte et la réponse sociale d'enfants autistes et asperger. *Journal de Thérapie Comportementale et Cognitive*, 7, 51-65.
- Poling, A., Edwards, T. L., Weeden, M., & Foster, T. M. (2011). The matching law. *The Psychological Record*, 61, 313-322.

- Rachlin, H. (1971). On the tautology of the matching law. *Journal of the Experimental Analysis of Behavior*, *15*, 249-251. doi: 10.1901/jeab.1971.15-249
- Rachlin, H., Green, L., Kagel, J. H., & Battalio, R. C. (1976). Economic demand theory and psychological studies of choices. In G. Bower (Ed.), *The Psychology of Learning and Motivation* (Vol. 10, pp. 129-154). New York: Academic Press.
- Rachlin, H., Battalio, R. C., Kagel, J. H., & Green, L. (1981). Maximization theory in behavioral psychology. *The Behavioral and Brain Sciences*, *4*, 371-388. doi: 10.1017/S0140525X00009407
- Rasmussen, E. B., & Newland, M. C. (2008). Asymmetry of reinforcement and punishment in human choice. *Journal of the Experimental Analysis of Behavior*, *89*, 157-167. doi: 10.1901/jeab.2008.89-157
- Reed, D. D., Critchfield, T. S., & Martens, B. K. (2006). The generalized matching law in elite sport competition: Football play calling as operant choice. *Journal of Applied Behavior Analysis*, *39*, 281-297. doi: 10.1901/jaba.2006.146-05
- Reed, D. D., & Martens, B. K. (2008). Sensitivity and bias under conditions of equal and unequal academic task difficulty. *Journal of Applied Behavior Analysis*, *14*, 39-52. doi: 10.1901/jaba.2008.41-39
- Rivard, M., Forget, J., Kerr, K., & Bégin, J. (2014). Matching law and sensitivity to therapist's attention in children with autism spectrum disorders. *The Psychological Record*, *65*, 79-88. doi: 10.1007/s40732-014-0015-1

- Romanowich, P., Bourret, J., & Vollmer, T. R. (2007). Further analysis of the matching law to describe two- and three-point shot allocation by professional basketball players. *Journal of Applied Behavior Analysis, 40*, 311-315. doi: 10.1901/jaba.2007.119-05
- Sakai, Y., & Fukai, T. (2008). When does reward maximization lead to matching law? *PLoS One, 3*, e3795. doi: 0.1371/journal.pone.0003795
- Shimp, C. P. (1992). Computational behavior dynamics: an alternative description of Nevin (1969). *Journal of the Experimental Analysis of Behavior, 57*, 289-299. doi: 10.1901/jeab.1992.57-289
- Shimp, C. P. (2013). Toward the unification of molecular and molar analyses. *The Behavior Analyst, 36*, 295-312.
- Shriver, M. D., & Kramer, J. J. (1997). Application of the generalized matching law for description of student behavior in the classroom. *Journal of Behavioral Education, 7*, 131-149. doi: 10.1023/A:1022884823529
- Shull, R. L., & Pliskoff, S. S. (1967). Changeover delay and concurrent schedules : Some effect on relative performance measures. *Journal of the Experimental Analysis of Behavior, 10*, 517-527. doi: 10.1901/jeab.1967.10-517
- Skinner, B. F. (1938). *The behavior of organism*. New York: Appleton Century Croft.
- Skinner, B. F. (1950). Are theories of learning necessary? *Psychological Review, 57*, 193-216. doi: 10.1037/h0054367
- Skinner, B. F. (1974). *About behaviorism*. New York: Alfred A. Knopf.

- Skinner, B. F. (1981). Selection by consequences. *Science*, *213*, 501-504. doi: 10.1126/science.7244649
- Staddon, J. E. R. (2014). On choice and the law of effect. *International Journal of Comparative Psychology*, *27*, 569-584.
- Stilling, S. T., & Critchfield, T. S. (2010). The matching relation and situation-specific bias modulation in professional football play selection. *Journal of the Experimental Analysis of Behavior*, *93*, 435-454. doi: 10.1901/jeab.2010.93-435
- Stubbs, D. A., Pliskoff, S. S., & Reid, H. M. (1977). Concurrent schedules: a quantitative relation between changeover behavior and its consequences. *Journal of the Experimental Analysis of Behavior*, *27*, 85-96. doi: 10.1901/jeab.1977.27-85
- Sutton, R. S., & Barto, A. G. (1998). *Reinforcement learning : an introduction*. Cambridge, MA: MIT Press.
- Sutton, N. P., Grace, R. C., McLean, A. P., & Baum, W. M. (2008). Comparing the generalized matching law and contingency discriminability model as accounts of concurrent schedule performance using residual meta-analysis. *Behavioural Processes*, *78*, 224-230. doi: 10.1016/j.beproc.2008.02.012
- Vaughan, W. (1981). Melioration, matching, and maximization. *Journal of the Experimental Analysis of Behavior*, *36*, 141-149. doi: 10.1901/jeab.1981.36-141

- Vaughan, W. (1982). Choice and the Rescorla-Wagner model. In M. L. Commons, R. J. Herrnstein & H. Rachlin (Eds.), *Quantitative analyses of behavior : Matching and maximizing account* (Vol. II, pp. 263-279). Cambridge: Ballinger.
- Vollmer, T. R., & Bourret, J. (2000). An application of the matching law to evaluate the allocation of two- and three-point shots by college basketball players. *Journal of Applied Behavior Analysis, 33*, 137-150. doi: 10.1901/jaba.2000.33-137
- Vyse, S. A. (1986). Methodology, the matching law, and applied behavior analysis. *The Behavior Analyst, 9*, 157-160.
- Warren-Boulton, F. R., Silberberg, A., Gray, M., & Ollom, R. (1985). Reanalysis of the equation for simple action. *Journal of the Experimental Analysis of Behavior, 43*, 265-277. doi: 10.1901/jeab.1985.43-265
- Wearden, J. H., & Burgess, I. S. (1982). Matching since Baum (1979). *Journal of the Experimental Analysis of Behavior, 38*, 339-348. doi: 10.1901/jeab.1982.38-339
- Williams, B. A. (1988). Reinforcement, choice, and response strength. Dans R. C. Atkinson, R. J. Herrnstein, G. Lindzey & R. D. Luce (Dir.), *Stevens' Handbook of Experimental Psychology: Vol. II. Learning and cognition* (pp. 167-244). New York: Wiley.

Note de bas de page

¹ Les traductions correspondent à l'usage du Dictionnaire des sciences du comportement de Forget (2009). Aussi, sur le plan du formalisme mathématique, une symbolique différente de celles des auteurs cités est utilisée. Les équations sont présentées selon une perspective contemporaine.

² Il s'agit de l'exigence d'égalité du k (angl. *equal-k requirement*) plutôt que l'exigence de constance de k (angl. *constant-k requirement*). La première est une restriction plus stricte et la seconde plus flexible sur le plan de l'estimation. La différence entre les deux exigences dépasse le cadre de cet article (particulièrement puisqu'elles sont fausses). Le lecteur intéressé est redirigé vers l'ouvrage de McDowell (2013).

³ Le lecteur attentif remarquera que les travaux de Myers et Myers ont été publiés bien plus tard après la première formulation de la loi généralisée de l'appariement par Baum en 1974. Il faut savoir que (a) la thèse de D.L. Myers était déjà connue de Baum, probablement l'un des arbitres de l'article, et que (b) l'article de Myers et Myers (1977) était en révision depuis 1972 au *Journal of the Experimental Analysis of Behavior*.

⁴ Il ne s'agit pas de l'argumentation exacte de Catania (1963). En fait, l'auteur propose que les logarithmes donnent l'illusion que le ratio des taux de réponse est négatif lorsque le taux de réponse est peu élevé. Cette argumentation est inadéquate,

car un ratio $\log(100/50)$ est équivalent à $\log(2/1)$. En revanche, lorsque le dénominateur est plus élevé que le numérateur, il est effectivement possible d'obtenir des valeurs négatives.

⁵ Il faut mettre l'accent ici sur le fait que le processus par lequel cette différence est *estimée* et par lequel l'organisme génère une *valeur attendue* n'est pas une question à laquelle répond un béhavioriste radical. Son intérêt repose sur la prédiction des comportements de l'organisme. L'argument développé par Vaughan (1982) peut être interprété dans le même cadre que celui proposé par l'équation 9, c'est-à-dire que la probabilité d'apparition d'un comportement dépend de la valeur subjective et relative du renforcement.

⁶ Pour le lecteur initié, Pliskoff (1971) suggère de conceptualiser le comportement de changer de réponse comme un programme de renforcement tandem (lorsque que deux exigences successives ou plus sont complétées, c'est-à-dire changer de réponse et la fin du délai interréponse). Ce programme est lui-même conjonctif (lorsqu'une des exigences est complétée) à l'une des options concurrentes pour laquelle la probabilité de renforcement, à la fin du délai interréponse, dépend du programme de renforcement de la nouvelle option, de la durée du délai, et de la durée interchangement.

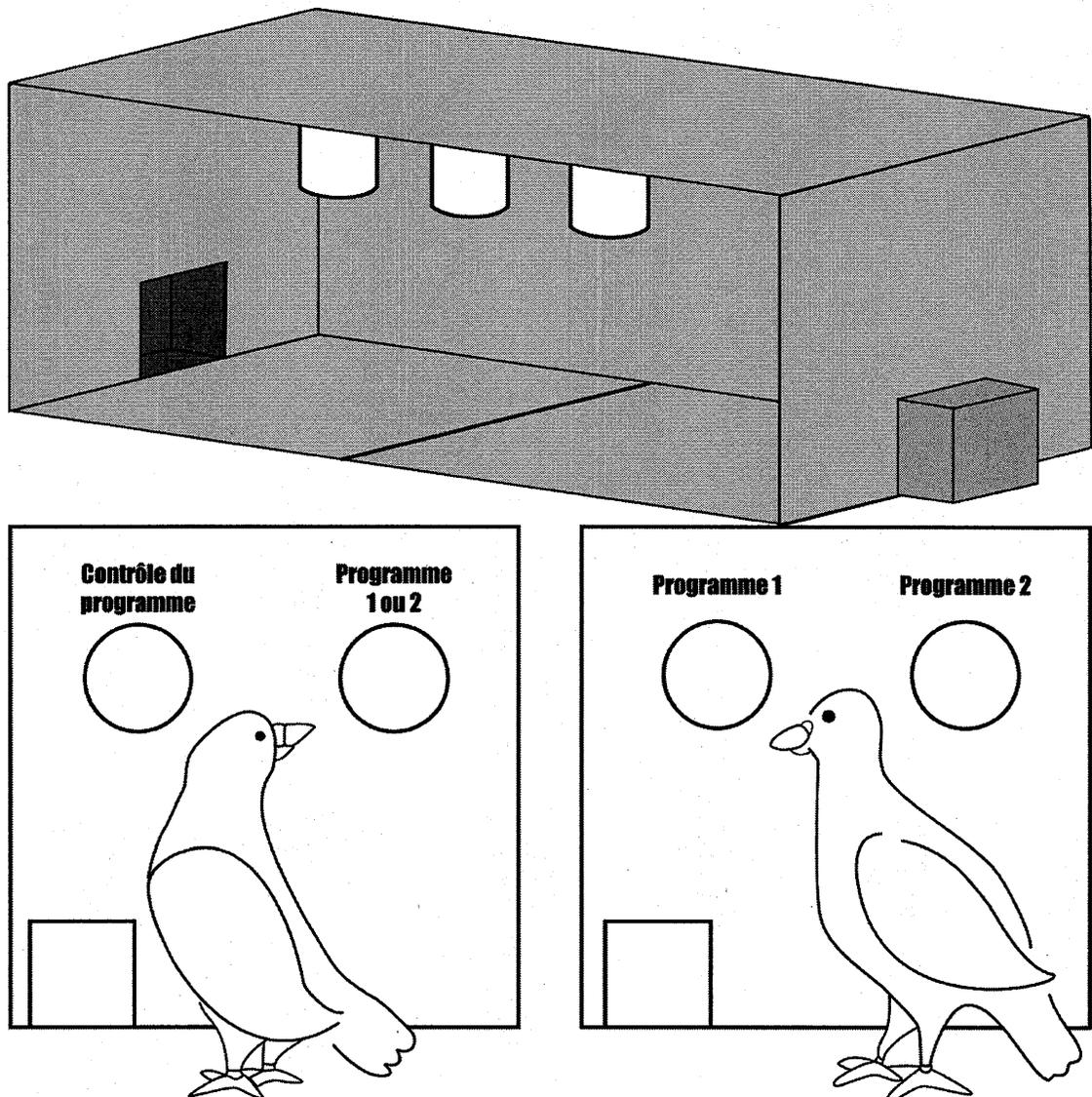


Figure 1. Deux illustrations de programmes de renforcement concurrents. Elles sont décrites dans le texte et sont inspirées de (a) Baum et Rachlin (1969, p.864) et (b) de Villiers (1976, p. 234)

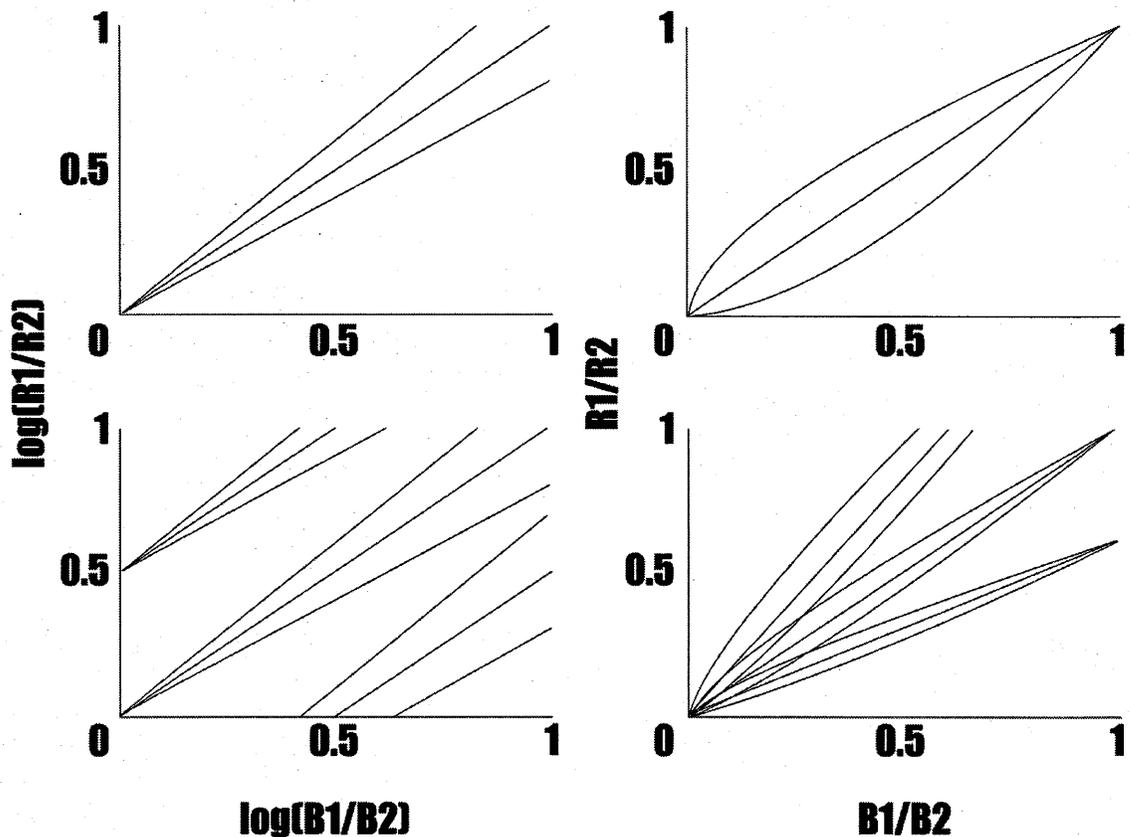


Figure 2. Représentation de la loi généralisée de l'appariement selon sa forme logarithmique (graphiques de gauche) et selon l'équation de puissance (graphiques de droite). Dans les graphiques supérieurs, seule la sensibilité est variée (valeurs utilisées ; 0,80, 1,00 et 1,20). Neuf relations sont illustrées dans les graphiques inférieurs. Les trois précédentes valeurs de sensibilité sont utilisées ainsi que trois valeurs de biais (-0,50, 0,00 et 0,50). Dans les graphiques de gauche, la sensibilité (le coefficient) est le degré de la pente (perceptible en haut à gauche), alors qu'il s'agit d'un degré de courbure à droite. Dans les graphiques inférieurs, l'influence du biais (l'ordonnée à l'origine) est clairement perceptible à gauche alors que la sensibilité et le biais sont difficilement différenciables à droite.

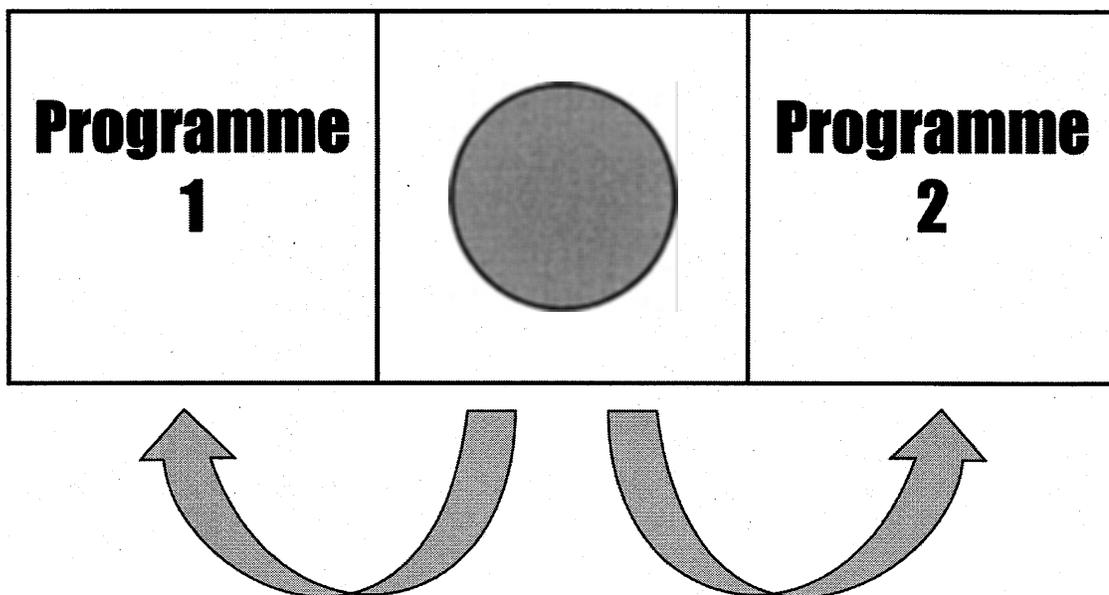


Figure 3. Illustration d'une situation opérante simplifiée. L'organisme (le cercle) peut émettre deux comportements (aller à droite ou aller à gauche). Son choix est enregistré comme réponse et cette dernière peut être renforcée ou non par le programme correspondant. Enfin, l'organisme est soit replacé à la case départ (au centre), soit il peut rester ou changer de programme.

Tableau 1. Table des matières

N°	Titre
1.	Introduction
1.1.	Les programmes de renforcement concurrent
2.	La loi de l'appariement
2.1.	La loi quantitative de l'effet
2.2.	La loi généralisée de l'appariement
2.2.1.	L'interprétation empirique des paramètres
2.2.1.1.	Le modèle de la discriminabilité des contingences
2.2.1.2.	L'interprétation de la sensibilité et du biais dans les études empiriques
2.2.2.	L'accroissement des études naturelles et appliquées
2.2.3.	La loi généralisée de l'appariement à ce jour
2.3.	La loi moderne de l'appariement
2.4.	La concaténation de loi généralisée de l'appariement
3.	Les développements théoriques
3.1.	Récapitulatif sur la loi de l'appariement
3.2.	La concurrence entre l'amélioration locale et la maximisation molaire
3.2.1.	L'amélioration locale
3.2.2.	La maximisation molaire
3.2.3	La fin du débat
3.3	Les modèles computationnels
4.	Conclusion

Tableau 2. Présentation des versions de la loi de l'appariement

Version	Abréviation	N°	Auteur	Année	Équation
La loi stricte de l'appariement	LSA	1	Herrnstein	1961	$\frac{B_1}{B_2} = \frac{R_1}{R_2}$
La loi quantitative de l'appariement	LQA	2	Herrnstein	1970	$B_1 = k \frac{R_1}{R_1 + R_e}$
La loi généralisée de l'appariement	LGA	5	Baum	1974	$\log\left(\frac{B_1}{B_2}\right) = a \log\left(\frac{R_1}{R_2}\right) + \log c$
La loi moderne de l'appariement	LMA	7	McDowel 1	1989	$B_1 = k \frac{R_1^a}{R_1^a + R_{1e}}$
La concaténation de la loi généralisée de l'appariement	CLA	11	Rachlin	1971	$\frac{V_1}{V_2} = \frac{f_1(R_1)}{f_1(R_2)} * \dots$

Note. Selon l'ordre de présentation dans le manuscrit.

CHAPITRE III

PRÉSENTATION DE L'ARTICLE 2

LA LOI GÉNÉRALISÉE DE L'APPARIEMENT : UNE SIMULATION DE MONTE-CARLO

Référence complète : Caron, P.-O. (2014). La loi généralisée de l'appariement : une simulation de Monte-Carlo. *Acta Comportamentalia*, 22, 169-179.

La loi généralisée de l'appariement : une simulation de Monte-Carlo

The generalized matching law : a Monte Carlo simulation

Pier-Olivier Caron

Université du Québec à Montréal

Note de l'auteur

Pier-Olivier Caron, Laboratoire des Sciences Appliquées du Comportement, Département de Psychologie, Université du Québec à Montréal.

Je remercie Jacques Forget, Philippe Valois et les experts anonymes pour leurs commentaires sur une première version de cet article.

Les données de la présente étude ont été présentées sous forme d'affiche à la 36e rencontre annuelle de la Society for the Quantitative Analyses of Behavior (SQAB) qui a eu lieu à Minneapolis (MN) en mai 2013.

L'auteur avec qui correspondre est Pier-Olivier Caron, Université du Québec à Montréal, Département de Psychologie, C.P. 8888 succursale Centre-ville, Montréal (Québec, Canada), H3C 3P8, (courriel : pocaron19@gmail.com).

Résumé

La loi généralisée de l'appariement (LGA) est un modèle descriptif conceptualisant le ratio des réponses en fonction du ratio des renforçateurs (Baum, 1974). Les résultats des études montrent généralement une sensibilité autour de 0,80 et des variances expliquées (r^2) supérieures à 0,80 (Davison & McCarthy, 1988). Les r^2 très élevés de la LGA suggèrent la présence de contraintes inhérentes à la plupart des situations opérantes. Dans un programme de renforcement concurrent à intervalle variable, par exemple, la quantité de renforçateurs ne peut surpasser la quantité de comportements émis. L'objectif de la présente étude est de simuler les résultats de la LGA lorsque cette contrainte est implantée à des échantillons pseudoaléatoires. Au total, seize conditions sont répliquées 1 500 fois, représentant 24 000 essais. Les résultats montrent que la LGA obtient en moyenne un r^2 de 47 %, une sensibilité de 0,60 et un biais nul. Les résultats suggèrent que des r^2 de 0,62, 0,80 et 0,97 sont qualifiables, respectivement, de petite, moyenne et forte différence comparativement à 0,47. La perspective de la présente étude est comparée aux simulations de McDowell (2004) et des pistes de recherche futures sont présentées.

Mots-clés; loi de l'appariement, variance expliquée, simulation, Monte-Carlo, fonction de feedback

Abstract

The generalized matching law (GML) is a descriptive mathematical model that conceptualizes an organism's response ratios as a function of associated reinforcer ratios (Baum 1974). The matching equation has been used in several experimental and natural studies and results frequently showed explained variances (r^2) over 80% and sensitivity of 0.80 (Davison & McCarthy 2010). This high level of r^2 might suggest that constraints within operant conditioning procedures may inflate GML parameters. For instance, in most operant procedures, such as a concurrent variable-interval schedule of reinforcement, the amount of reinforcers obtained is always lower or equal to the amount of responses, which can be seen as an emergent property of feedback functions. The purpose of the current study is to apply the GML to pseudorandomly sampled data in which this constraint has been computed. A Monte Carlo simulation shows that the generalized matching law explained on average 47 % of the variance, with sensitivity around a value of 0.60 and bias of $\log c = 0.00$. Results found in the current study could be used as an alternative null hypothesis for future studies in natural settings. For instance, explained variances of 0.62, 0.80, and 0.97 could be qualify, respectively, as small, medium and large differences compared to 0.47. The current study is finally compared to McDowell's (2004) simulations. McDowell computed behavioral processes, such as the selection by consequences (Skinner, 1981), within the organism whereas the current study investigates environmental and observational constraints on the regressions estimates. Current

results suggest further investigations of underlying environmental constraints when studying the GML. Futures studies are necessary to assess what to expect from the GML when such constraints occur in the operant conditioning procedure.

Keywords; explained variance, matching law, Monte Carlo, simulation, feedback function

La loi généralisée de l'appariement : une simulation de Monte-Carlo

« *If the matching law accounts for 90 % of the variance, that's good enough for me. I'm not greedy.* », R.J. Herrnstein à J.E. Mazur (Mazur, 2006, p.279)

La loi de l'appariement est un modèle quantitatif issu de l'analyse expérimentale du comportement (Herrnstein, 1961). Elle est à l'origine de l'augmentation des modèles mathématiques au sein de la discipline et de la formation de la *Society for the Quantitative Analyses of Behavior* (Forget, Donais & Giroux, 2001; Mazur, 2006). En 1993, plusieurs articles au sommet de la liste des trente articles les plus cités au sein du *Journal of the Experimental Analysis of Behavior* traitaient de la loi de l'appariement (JEAB, 1993). Elle a engendré, entre autres, l'hypothèse de l'amélioration locale (Herrnstein, 1997), la théorie de l'inertie comportementale (Nevin & Grace, 2000), le modèle de la discriminabilité des contingences (Davison & Jenkins, 1985), la théorie de la sensibilité sociale (Forget & Rivard, 2010), le modèle des choix contextuels (Grace & Hucks, 2013), le modèle de la dévaluation hyperbolique (Mazur, 2001), le modèle computationnel de la sélection par les conséquences (McDowell, 2004) ou encore, la théorie de la maximisation molaire (Rachlin, Battalio, Kagel & Green, 1981). La loi de l'appariement prédit que la distribution des choix d'un organisme est fonction des ratios de renforçateurs qu'il obtient. Cette relation est représentée mathématiquement par l'équation (1) :

$$B_1/B_2 = R_1/R_2 \quad (1)$$

où les B_s et les R_s sont respectivement la quantité de réponses émises et la quantité de renforçateurs obtenus. Bien que la loi de l'appariement se soit révélée un modèle puissant et fertile, une série importante de travaux montre qu'une fonction puissance décrit mieux les choix des organismes lorsque ceux-ci se retrouvent devant des alternatives de renforcement telles qu'un programme de renforcement concurrent (Baum, 1979; Davison & McCarthy, 1988; de Villiers, 1977; McDowell, 2013a; Wearden & Burgess, 1982). Cette version se nomme la loi généralisée de l'appariement (LGA; Baum, 1974) et se retrouve le plus souvent dans la littérature empirique sous forme logarithmique :

$$\log(B_1/B_2) = a \log(R_1/R_2) + \log c \quad (2)$$

où le paramètre a , le degré de la pente dans l'équation (2), représente la sensibilité ou l'ajustement de l'organisme aux contingences de renforcement et où le paramètre c , l'ordonnée à l'origine, représente le biais ou la préférence d'un organisme pour l'un des comportements. L'utilité des logarithmes est de transformer la fonction puissance en fonction linéaire et de rendre l'interprétation de la sensibilité et du biais graphiquement intuitive. La sensibilité et le biais sont estimés, sans contrainte statistique, à partir d'une régression ordinaire des moindres carrés (Davison & Elliffe, 2009). Des études exhaustives montrent de façon récurrente que la sensibilité tourne autour de 0,80 et que la variance expliquée est supérieure à 80 % (Davison & McCarthy, 1988; McDowell, 2013a). Ces résultats remarquables sont certainement à l'origine des propos optimistes d'Herrnstein présentés auparavant.

Cette très haute valeur de variance expliquée laisse présager que certaines propriétés inhérentes aux procédures de conditionnement opérant peuvent influencer la variance expliquée, la sensibilité et le biais. En fait, les réponses d'un organisme et les renforçateurs qu'il obtient ne sont pas indépendants. Dans la plupart des procédures de conditionnement opérant, la quantité maximale de renforçateurs ne peut surpasser la quantité de réponses lors d'une même séance (McDowell & Ansari, 2005). Cette relation est traduite mathématiquement par l'équation (3) :

$$B_{ij} \geq R_{ij} \quad (3)$$

où l'indice j représente la séance correspondante pour une certaine classe de comportements i . Cette contrainte peut être considérée comme une conséquence des fonctions de feedback inhérentes à certains programmes de renforcement comme les programmes de renforcement à intervalle variable (Baum, 1992; Nevin & Baum, 1980).

Puisqu'il existe vraisemblablement un lien de dépendance entre les réponses et les renforçateurs, la corrélation attendue est nécessairement supérieure à zéro. Afin d'isoler l'influence de l'équation (3), la présente étude suit la tendance à utiliser des simulations informatiques en analyse du comportement (Donahoe, Burgos & Palmer, 1993; Heth, Pierce, Belke & Hensch, 1989; McDowell, 2004; McDowell & Ansari, 2005; McLean, 2006; Seth, 2007; Shimp, 1992). L'objectif est de déterminer les paramètres de la LGA lorsque la contrainte ($B_{ij} \geq R_{ij}$) est implantée à une simulation

où les réponses d'un organisme sont échantillonnées de façon pseudoaléatoire. Sur le plan pratique, les résultats s'avéreront utiles à l'identification d'un critère normatif permettant de déterminer une hypothèse nulle lorsque la LGA est utilisée.

Méthode

Une série de simulations de Monte-Carlo est conduite dans MATLAB (R2012b). Cette méthode se base sur la répétition d'échantillonnages pseudoaléatoires afin d'estimer les paramètres pertinents sur l'ensemble de ces échantillons. Au total, 24 000 essais sont réalisés et sont répartis en quatre par quatre conditions. Elles permettent de vérifier que les résultats observés ne sont pas strictement dus à une propriété d'une seule condition, mais qu'ils s'appliquent aux autres conditions également. Chacune des seize conditions est répliquée 1 500 fois.

L'objectif de chaque essai est de recréer un échantillon d'observations où un organisme artificiel émet une quantité pseudoaléatoire de comportements (B_1 et B_2) et où il obtient une quantité pseudoaléatoire de renforçateurs (R_1 et R_2). Ces valeurs sont générées par la fonction *unidrnd* qui génère des valeurs de l'ensemble des nombres entiers à partir d'une distribution uniforme dont les bornes maximales et minimales sont prédéterminées. L'organisme artificiel peut émettre une quantité maximum de comportements. En d'autres termes, il s'agit de la borne maximale pour B_1 et B_2 à laquelle *unidrnd* peut générer une valeur. Cet élément réduit la quantité de comportements à des fréquences possiblement observables. Les valeurs maximales

sont choisies afin de refléter la fréquence des comportements des organismes biologiques en contexte naturel. Ainsi, les valeurs 7 et 10 représentent des comportements peu fréquents, la valeur 30 représente un comportement moyennement fréquent et la valeur 100 représente un comportement très fréquent. Au total, le maximum de réponses correspond à quatre conditions.

La simulation nécessite deux restrictions. La première contraint la quantité minimum de comportements observables à une valeur de 1. En fait, même s'il est possible en réalité de ne pas observer de comportement pendant une observation, une valeur de B_1 , B_2 , R_1 et R_2 égale à 0 rend le logarithme indéfini et la donnée est alors ignorée de l'analyse statistique. Cette première restriction n'est pas due à la simulation, mais aux logarithmes à l'intérieur de la LGA. Elle permet aussi de garder la variance homogène et constante à travers les essais. Ce problème n'est pas sans rappeler la critique de Timberlake (1982) selon laquelle une relation d'appariement ne peut décrire l'absence de réponse ou de renforçateur pour l'une des contingences. Par conséquent, la borne minimale de B_1 , B_2 , R_1 et R_2 est de 1.

La deuxième restriction, représentée par l'équation (3), contraint la quantité de renforçateurs à être inférieure ou égale à la quantité de comportements émis. En d'autres termes, la borne maximale de R_1 et de R_2 correspond à la valeur générée pseudoaléatoirement de B_1 et de B_2 de l'observation correspondante. Comme il a été mentionné précédemment, la contrainte reflète un aspect élémentaire se retrouvant dans la majorité des situations opérantes et peut être considérée comme une

conséquence des fonctions de feedback. Elle est aussi employée dans le modèle computationnel de la sélection par les conséquences (McDowell & Ansari, 2005).

Chaque essai est constitué d'une quantité prédéfinie d'observations faites sur l'organisme artificiel. Il s'agit du nombre de données d'observations et chacune d'entre elles permet de générer une valeur pour B_1 , B_2 , R_1 et R_2 . Le nombre de données est choisi afin de représenter les études retrouvées dans la littérature. Ainsi, les valeurs 5 et 7 correspondent à une petite quantité d'observations, la valeur 30 correspond à une quantité moyenne d'observations et la valeur 50 correspond à une grande quantité d'observations. La quantité d'observations correspond aux quatre dernières conditions.

Insérer le tableau 1 environ ici

Enfin, pour chaque essai, la simulation génère une série de valeurs pseudoaléatoires pour chaque valeur de B_1 , B_2 , R_1 et R_2 selon les bornes spécifiées auparavant et rappelées dans le tableau 1. Les valeurs générées sont insérées en ratio et puis sous forme logarithmique, telle que décrit par l'équation (2). Une régression ordinaire des moindres carrés est finalement réalisée sur l'ensemble des données d'un essai. Les valeurs de la variance expliquée, de la sensibilité et du biais sont conservées.

Résultats

Une analyse multivariée entre les quatre par quatre conditions est réalisée sur la variance expliquée et la sensibilité. Le biais n'est pas considéré, car sa valeur moyenne est stable et nulle ($\log c = 0,00$). En fait, la simulation n'a pas introduit de biais dans l'équation de la LGA, ce qui s'explique par l'absence de contraintes indépendantes à l'ajustement des contingences. Une analyse statistique n'apporterait donc pas un approfondissement significatif. Les tableaux 2 et 3 montrent les moyennes et les écarts types de chacune des conditions pour la variance expliquée et la sensibilité.

Variance expliquée

La figure 1 montre l'effet principal de la quantité d'observations sur la variance expliquée, $F(3, 23\ 984) = 117,591, p < 0,001$. Lorsque le nombre de séances ou le nombre de données d'observations augmentent, la variance expliquée tend à diminuer légèrement. Ce résultat apparaît intuitif en regard de la littérature statistique où la quantité de données augmente la précision de la régression (Cohen, Cohen, West & Aiken, 2003). De plus, la figure 1 montre l'effet principal du maximum de réponses sur la variance expliquée, $F(3, 23\ 984) = 111,406, p < 0,001$. Lorsque le maximum de réponses augmente, la variance expliquée augmente légèrement. Aucun effet d'interaction n'est trouvé, $F(9, 23\ 984) = 1,350, p = 0,205$.

Insérer le tableau 2 et la figure 1 environ ici

Sensibilité

La figure 2 montre que les valeurs de la sensibilité diminuent en même temps que le maximum de réponses augmente. Les résultats montrent un effet d'interaction de la quantité d'observations et du maximum de réponses sur la sensibilité, $F(9, 23\ 984) = 3,547, p < 0,001$. Cette interaction provient de l'instabilité des conditions de 5 et 7 observations par essai. Comme il est indiqué au tableau 3, leurs écarts types sont plus élevés que pour les autres conditions.

Insérer le tableau 3 et la figure 2 environ ici

Enfin, la figure 3 montre les distributions des valeurs de la variance expliquée de la sensibilité et du biais au travers de toutes les conditions. De façon intéressante, les moyennes des distributions se situent en dessous des moyennes observées auprès organismes biologiques. Ces résultats suggèrent que les contraintes imposées à la simulation reflètent partiellement la LGA lorsqu'elle est étudiée en contexte naturel et que probablement d'autres contraintes pourront rapprocher les valeurs simulées aux valeurs des données expérimentales actuelles.

Insérer la figure 3 environ ici

Discussion

L'objectif de la présente étude était d'évaluer l'influence de la contrainte ($B_i \geq R_i$) sur les paramètres de la LGA lorsque les réponses et les renforçateurs sont échantillonnés de façon pseudoaléatoire. Étonnamment, les résultats montrent une variance expliquée (r^2) moyenne de 0,47, une sensibilité moyenne de 0,60 et un biais

nul ($\log c = 0,00$). En comparaison, si la simulation n'avait introduit aucune contrainte, les résultats attendus auraient été un r^2 et une sensibilité nuls. Ainsi, l'ajout de la contrainte ($B_{ij} \geq R_{ij}$) a fait émerger des relations d'appariement. Cette augmentation s'explique par le lien de dépendance créé entre les réponses et les renforçateurs lorsque la contrainte est implantée. Cependant, il est surprenant qu'une contrainte aussi anodine et commune aux procédures opérantes ait un effet si substantiel sur les paramètres de la LGA. Ces résultats permettent des considérations théoriques et appliquées.

Considérations théoriques

La démarche employée dans le présent article se distingue du modèle computationnel de la sélection par les conséquences développé par McDowell (2004). Cette théorie vise à identifier et quantifier la sélection par les conséquences proposée par Skinner (1981), à l'aide d'algorithmes génétiques. En générant des fonctions de parenté, de gains, de lignées et de mutations, il est possible de générer des patrons de comportements similaires aux organismes vivants (McDowell, 2013b). Ces fonctions font partie inhérente de l'organisme artificiel et sont le centre des investigations. La présente étude aborde plutôt les contraintes dans lesquelles l'organisme artificiel répond. L'idée sous-jacente de cette perspective est que la LGA est un phénomène émergent des contraintes à l'intérieur des situations opérantes. De ce fait, elle ignore les processus comportementaux à l'intérieur des organismes tels que la sélection par les conséquences.

Les résultats montrent qu'une telle perspective est viable. En revanche, une sensibilité de 0,60 et un r^2 de 0,47 ne sont pas suffisamment près des valeurs obtenues auprès d'organismes vivants pour expliquer ou invalider entièrement le phénomène de l'appariement. À ce titre, les études futures pourront vérifier l'effet d'autres contraintes afin de modéliser plus précisément l'environnement. Ainsi, une contrainte imposant une limite de réponses maximale que l'organisme peut émettre augmenterait substantiellement la variance expliquée, car elle créerait un lien de dépendance supplémentaire entre les réponses et entre les renforçateurs. Elle est symbolisée par l'équation (5) :

$$B_{1j} + B_{2j} = B_{tj} \quad (5)$$

où B_t correspond à la quantité de réponses totale d'un organisme. Cette contrainte est pertinente, car il est difficile, voire impossible, de concevoir qu'un organisme puisse répondre indéfiniment aux programmes de renforcement. L'équation (5) est d'ailleurs fréquemment rencontrée dans la littérature sur la théorie de la maximisation molaire (Rachlin, et al., 1981) et l'hypothèse de l'amélioration locale (Herrnstein, 1997). Une augmentation de r^2 est aussi envisageable avec une autre contrainte imposant un nombre maximal de renforçateurs. L'équation (6) représente cette contrainte :

$$R_{1j} + R_{2j} = R_{tj} \quad (6)$$

où R_t correspond à la quantité de renforçateurs totale. Cette contrainte est aussi raisonnable puisque l'accès aux programmes de renforcement est généralement limité

dans le temps ou par la quantité de renforçateurs que l'organisme peut obtenir. Ces deux contraintes pourront être testées isolément ou de façon combinée afin d'évaluer leur influence sur la LGA. Bref, les résultats ne peuvent pas falsifier l'hypothèse selon laquelle la LGA est un processus comportemental, mais ils suggèrent que le phénomène s'explique en partie par des contraintes inhérentes aux situations opérantes.

Considérations appliquées

Les résultats de la présente étude sont pertinents pour les études descriptives, particulièrement pour celles qui ne contrôlent pas les contingences de renforcement. En effet, les résultats proposent une hypothèse nulle alternative à $r^2 = 0$. En appliquant plutôt l'hypothèse nulle $r^2 = 0,47$, il devient possible de vérifier si le sujet distribue vraisemblablement ses comportements en fonction du ratio des renforçateurs. Afin de vérifier cette hypothèse, il suffit de comparer les coefficients de corrélation (r) obtenus à la valeur hypothétique $0,69$ ($\sqrt{0,47}$) en employant la transformation du z de Fisher. Si la variance expliquée des comportements du sujet est significativement supérieure au critère hypothétique, alors il est vraisemblable que le sujet apparie et qu'il n'émette pas ses comportements de façon aléatoire. Afin de faciliter la comparaison aux chercheurs et praticiens, il est possible de proposer des indices qualitatifs propres à l'évaluation de la LGA. Ainsi, une différence de r de $0,10$ réfère à une taille d'effet faible, une différence de r de $0,20$ réfère à une taille d'effet moyenne et une différence de r de $0,30$ réfère à une taille d'effet forte. Ces résultats

se traduisent en r^2 de 0,62, 0,80 et 0,97 respectivement et concordent avec les distributions présentées à la figure 3. Ces valeurs pourront se révéler utiles comme critère normatif afin d'évaluer et de comparer la vraisemblance de l'appariement en contexte naturel. Cependant, ces valeurs sont déterminées arbitrairement et représentent actuellement des approximations. D'autres simulations seront nécessaires pour en évaluer la précision.

Conclusion

La présente étude montre que la LGA explique en moyenne 47 % de la variance avec une sensibilité moyenne de 0,60 lorsque la contrainte ($B_{ij} \geq R_{ij}$) est implantée. Ces valeurs peuvent être comparées aux valeurs générées par des observations descriptives, plus particulièrement lorsque les contingences de renforcement ne sont pas contrôlées. Des indices qualitatifs pour évaluer et comparer les variances expliquées de l'appariement sont proposés. Pour l'instant, ces critères sont approximatifs et doivent être utilisés consciencieusement. L'étude questionne aussi l'existence de processus comportementaux menant l'organisme à suivre les prédictions de la LGA. Les résultats suggèrent que l'appariement peut être partiellement explicable par des contraintes environnementales. Enfin, d'autres études sont nécessaires pour évaluer l'influence d'autres contraintes, notamment la manipulation des liens de dépendance entre les distributions des Bs et des Rs . Ces futures analyses sont nécessaires afin d'évaluer ce qui est attendu de la LGA lorsque ces contraintes opèrent.

Références

- Baum, W. M. (1974). On two types of deviation from the matching law: bias and undermatching. *Journal of the Experimental Analysis of Behavior*, *22*, 231-242. doi: 10.1901/jeab.1974.22-231
- Baum, W. M. (1979). Matching, undermatching, and overmatching in studies of choice. *Journal of the Experimental Analysis of Behavior*, *32*, 269-281. doi: 10.1901/jeab.1979.32-269
- Baum, W. M. (1992). In search of the feedback function for variable-interval schedules. *Journal of the Experimental Analysis of Behavior*, *57*, 365-375. doi: 10.1901/jeab.1992.57-365
- Cohen, J., Cohen, P., West, S. G., & Aiken, L. S. (2003). *Applied multiple regression/correlation analysis for the behavioral sciences* (III ed.). Mahwah (NJ): Erlbaum.
- Davison, M., & Elliffe, D. (2009). Variance matters: the shape of a datum. *Behavioural Processes*, *81*, 216-222. doi: 10.1016/j.beproc.2009.01.004
- Davison, M., & Jenkins, P. E. (1985). Stimulus discriminability, contingency discriminability, and schedule performance. *Animal Learning & Behavior*, *13*, 77-84. doi: 10.3758/bf03213368
- Davison, M., & McCarthy, D. (1988). *The matching law: a research review*. Hilldale (NJ): Erlbaum.

- de Villiers, P. (1977). Choice in concurrent schedules and a quantitative formulation of the law of effect. Dans W. K. Honing & J. E. R. Staddon (Dir.), *Handbook of operant behavior* (pp. 233-287). New Jersey: Prentice Hall.
- Donahoe, J. W., Burgos, J. E., & Palmer, D. C. (1993). A selectionist approach to reinforcement. *Journal of the Experimental Analysis of Behavior*, *60*, 17-40. doi: 10.1901/jeab.1993.60-17
- Forget, J., Donais, S., & Giroux, N. (2001). La loi de l'appariement et ses applications en psychologie clinique et en éducation. *Revue Canadienne de Psycho-Education*, *30*, 311-327.
- Forget, J., & Rivard, M. (2010). Évaluer la sensibilité sociale de l'enfant à l'attention de l'adulte. Perspective de recherche en autisme. Dans G. Magerotte & E. Willaye (Dir.), *Intervention comportementale clinique* (pp. 235-274). Bruxelles: De Boeck.
- Grace, R. C., & Hucks, A. D. (2013). The allocation of operant behavior. Dans G. J. Madden, W. V. Dube, T. D. Hackenberg, G. P. Hanley & K. A. Lattal (Dir.), *APA handbook of behavior analysis, Vol. 1: Methods and principles* (pp. 307-337). Washington, DC, US: American Psychological Association. doi: 10.1037/13937-014
- Herrnstein, R. J. (1961). Relative and absolute strength of response as a function of frequency of reinforcement. *Journal of the Experimental Analysis of Behavior*, *4*, 267-272. doi: 10.1901/jeab.1961.4-267

- Herrnstein, R. J. (1997). *The matching law: papers in psychology and economics*, Cambridge (MA): Harvard University Press.
- Heth, C. D., Pierce, W. D., Belke, T. W., & Hensch, S. A. (1989). The effect of logarithmic transformation on estimating the parameters of the generalized matching law. *Journal of the Experimental Analysis of Behavior*, 52, 65-76. doi: 10.1901/jeab.1989.52-65
- JEAB (1993). *The 30 Most Cited Articles from JEAB*. Retrouvé de seab.envmed.rochester.edu/society/history/jeab_highly_cited.shtml
- Mazur, J. E. (2001). Hyperbolic value addition and general models of animal choice. *Psychological Review*, 108, 96-112. doi: 10.1037/0033-295x.108.1.96
- Mazur, J. E. (2006). Mathematical models and the experimental analysis of behavior. *Journal of the Experimental Analysis of Behavior*, 85, 275-291. doi: 10.1901/jeab.2006.65-05
- McDowell, J. J. (2004). A computational model of selection by consequences. *Journal of the Experimental Analysis of Behavior*, 81, 297-317. doi: 10.1901/jeab.2004.81-297
- McDowell, J. J. (2013a). On the theoretical and empirical status of the matching law and matching theory. *Psychological Bulletin*, 139, 1000-1028. doi: 10.1037/a0029924
- McDowell, J. J. (2013b). A quantitative evolutionary theory of adaptive behavior dynamics. *Psychological Review*, 120, 731-750. doi: 10.1037/a0034244

- McDowell, J. J., & Ansari, Z. (2005). The quantitative law of effect is a robust emergent emergent property of an evolutionary algorithm for reinforcement learning. Dans M. Capcarrere, A. Freitas, P. Bentley, C. Johnson & J. Timmis (Dir.), *Advances in artificial life: ECAL 2005, LNAI 3630*. (pp. 413-422). Berlin: Springer-Verlag.
- McLean, A. P. (2006). The sampling distribution of k . *Behavioural Processes*, 72, 300-308. doi: 10.1016/j.beproc.2006.03.006
- Nevin, J. A., & Baum, W. M. (1980). Feedback functions for variable-interval reinforcement. *Journal of the Experimental Analysis of Behavior*, 34, 207-217. doi: 10.1901/jeab.1980.34-207
- Nevin, J. A., & Grace, R. C. (2000). Behavioral momentum and the Law of Effect. *Behavioral and Brain Sciences*, 23, 73-130. doi: 10.1017/s0140525x00002405
- Rachlin, H., Battalio, R. C., Kagel, J. H., & Green, L. (1981). Maximization theory in behavioral psychology. *The Behavioral and Brain Sciences*, 4, 371-388. doi: 10.1017/S0140525X00009407
- Seth, A. K. (2007). The ecology of action selection: insights from artificial life. *Philosophical Transactions of the Royal Society B*, 362, 1545-1558. doi: 10.1098/rstb.2007.2052
- Shimp, C. P. (1992). Computational behavior dynamics: an alternative description of Nevin (1969). *Journal of the Experimental Analysis of Behavior*, 57, 289-299. doi: 10.1901/jeab.1992.57-289

Skinner, B. F. (1981). Selection by consequences. *Science*, 213, 501-504. doi:

10.1126/science.7244649

Timberlake, W. (1982). The emperor's clothes: assumption of the matching theory.

Dans M. L. Commons, R. J. Herrnstein & H. Rachlin (Dir.), *Quantitative analyses of behavior : Matching and maximizing accounts* (Vol. II, pp. 549-568). Cambridge: Ballinger.

Wearden, J. H., & Burgess, I. S. (1982). Matching since Baum (1979). *Journal of the*

Experimental Analysis of Behavior, 38, 339-348. doi: 10.1901/jeab.1982.38-

339

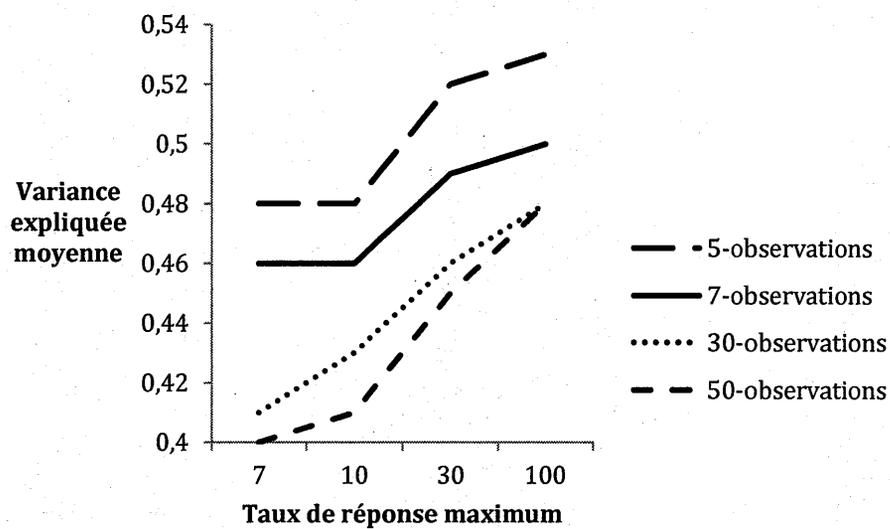


Figure 1. Les valeurs moyennes de la variance expliquée en fonction du taux de réponse maximum et de la quantité d'observations. À noter que la variance expliquée augmente lorsque le taux de réponse maximum augmente et qu'elle diminue légèrement lorsque la quantité d'observations augmente.

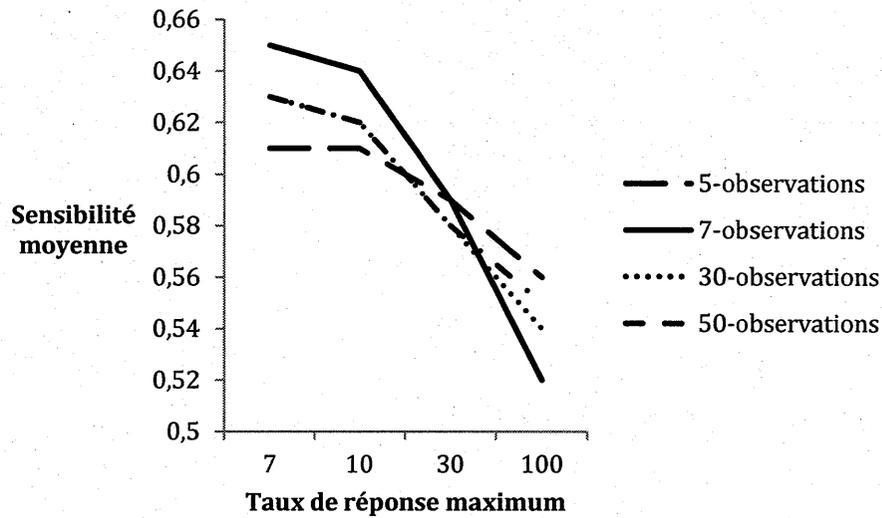


Figure 2. Les valeurs moyennes de la sensibilité en fonction du taux de réponse maximum et de la quantité d'observations. À noter que la valeur moyenne diminue lorsque la quantité de réponse maximum augmente. Aussi, notez que les conditions de 5 et 7 observations sont plus sujettes à l'erreur d'échantillonnage que les conditions 30 et 50.

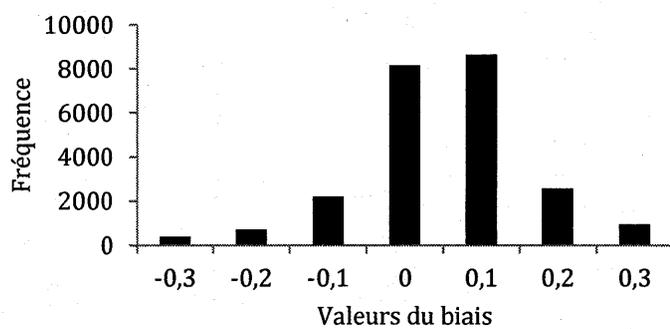
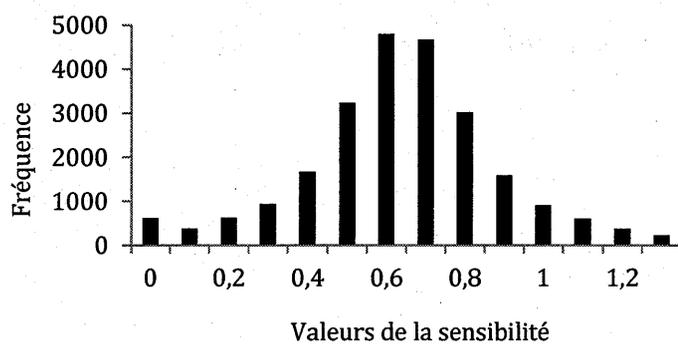
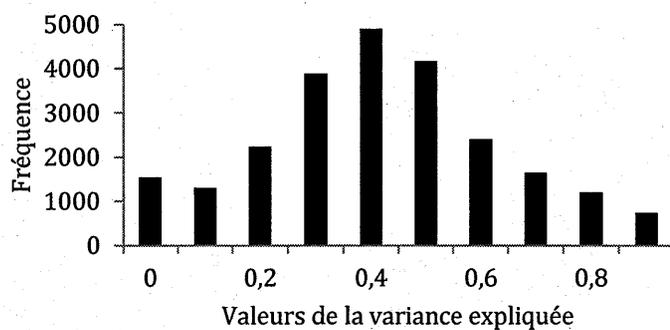


Figure 3. Les distributions de la variance expliquée, de la sensibilité et du biais générées par les 24 000 essais.

Tableau 1.*Tableau 1.* Tableau récapitulatif des bornes de la distribution uniforme discrète

<u>Valeurs</u>	<u>Borne inférieure</u>	<u>Borne supérieure</u>
B_1	1	Taux de réponse maximum
B_2	1	Taux de réponse maximum
R_1	1	Valeur générée pour B_1
R_2	1	Valeur générée pour B_2

Tableau 2.

Tableau 2. Les valeurs moyennes de la variance expliquée en fonction du taux de réponse maximum et de la quantité d'observation

Taux de réponse maximum	Quantité d'observations							
	5		7		30		50	
	M	Et	M	Et	M	Et	M	Et
7	,48	,29	,46	,26	,41	,13	,40	,10
10	,48	,29	,46	,26	,43	,14	,41	,10
30	,52	,29	,49	,26	,46	,14	,45	,11
100	,53	,30	,50	,26	,48	,14	,48	,11

Note. M= Moyenne Et = Écart type

Tableau 3.

Tableau 3. Les valeurs moyennes de la sensibilité en fonction du taux de réponse maximum et de la quantité d'observations

Taux de réponse maximum	Quantité d'observations							
	5		7		30		50	
	M	Et	M	Et	M	Et	M	Et
7	,61	,50	,65	,37	,63	,15	,63	,11
10	,61	,50	,64	,34	,62	,14	,62	,11
30	,59	,44	,59	,32	,58	,13	,58	,11
100	,56	,41	,52	,30	,55	,13	,54	,10

Note. M= Moyenne Et = Écart type

CHAPITRE IV

PRÉSENTATION DE L'ARTICLE 3

MATCHING WITHOUT LEARNING

Référence complète : Caron, P.-O. (2015). Matching without learning. *Adaptive Behavior*, 23, 227-233. doi: 10.1177/1059712315590484

Matching without learning

Pier-Olivier Caron

Université du Québec à Montréal

Correspondence:

Pier-Oliver Caron

Laboratoire des sciences appliquées du comportement

Département de Psychologie

Université du Québec à Montréal

C.P. 8888, succ. Centre-ville

Montréal, Qc, Canada, H3C 3P8

Email: pocaron19@gmail.com

Author reports no conflict of interest.

The study was supported by the Fonds de recherche du Québec – Société et culture

Abstract

Matching behavior is a phenomenon describing response rate ratios of an organism as a function of their associated reinforcer rate ratios (Baum, 1974). The generalized matching law (GML), its quantitative formulation, has been frequently found to explain over 80% of the variance in concurrent reinforcement schedules (Davison & McCarthy, 1981). However, Caron (2014) found by means of Monte Carlo simulations that matching behavior could be due to environmental constraints on behavior rather than a mere decision-making process. The purpose of the current study is to systemically investigate the influence of constraints induced by concurrent schedules of reinforcement. A Monte Carlo simulation was carried out. Results showed that the GML reached much better explained variances with real (and artificial) organisms than the current simulated results. Thus, a learning process seems partly necessary to generate matching behavior. According to the current findings, concurrent reinforcement schedules clearly induced a quantitative dependency between behavior rates and reinforcers rates. The simulation demonstrates that matching behavior is not only a consequence of a behavioral (decision-making) process, but of environmental conditions.

Keywords: Matching law, Monte-Carlo simulations, operant conditioning, matching behavior, learning.

Matching without learning

Introduction

In a concurrent reinforcement schedule (much like a two-armed bandit), much attention has been given to the molar relation concerning an organism's responses as a function of reinforcers, e.g., the matching law (Baum, 1974). The most common version of the law in experimental behavior analysis is the generalized matching law (GML) (Baum, 1974), which states that from a session-by-session standpoint (or a molar perspective) the responses ratio of an organism should conform to the reinforcer ratios. This relationship is represented by the following equation:

$$\log(B_1/B_2) = a \log(R_1/R_2) + \log c \quad (1)$$

where B_1 and B_2 correspond to response rates, R_1 and R_2 correspond to reinforcer rates, parameter a designates sensitivity, and the parameter c designates the bias. After a short learning period with a given reinforcer ratio, the organism reaches the steady state predicted by equation 1, and if the reinforcers ratio changes, the organism's behaviors will adjust accordingly. This phenomenon is sometimes called matching behavior. Even though the matching equation has been extensively studied and found to hold in several experimental and natural studies (see Davison & McCarthy, 1988; McDowell, 2013a; Wearden & Burgess, 1982), the underlying processes by which organisms reach the steady state has yet to be understood.

Several computational models have been developed over the years to account for the molecular performance (a response-by-response perspective) of organisms in concurrent reinforcement schedules, that is matching behavior. These include a

genetic algorithm of selection by consequences (McDowell, 2013b), a Bayesian decision-making algorithm (Saito, Katahira, Okanoya & Okada, 2014), and many neural network algorithms (Dawson, Dupuis, Spetch & Kelly, 2009; Iigaya & Fusi, 2013; Loewenstein, 2008). Though the computation involved in each of these models is quite different, each is based on the same qualitative mechanism: a quantitative learning process contingent on the distribution of reinforcers (or reinforcement learning; Sutton & Barto, 1998). For convenience, the action selection in concurrent schedules is generally stochastic rather than deterministic (McDowell, 2004; Shimp, 1992). At every time step t , the algorithm updates the probability of B_i ($i = 1, 2$) according to whether a reinforcer has been delivered (which increases the probability) or not (decreases the probability). Thus, all models of matching behavior are related to melioration theory, the first theoretical model to account for the matching law. Melioration theory (Herrnstein, 1997) states that the agent compares the rates of return from possible alternatives and shifts toward the one yielding the highest return. From a computational standpoint, it is the same as stipulating that an action selection is based on reinforcer rate ratios (i.e., the matching law), but according to a molecular perspective. It is not surprising that, despite the algorithmic differences between models, they all reach the same computational goal: to mimic matching behavior and respect the GML's predictions. The phenomenon of interest is built within the algorithm. Sakai and Fukai (2008) even showed that partial maximization, if it includes past choices and other available information of reward, will lead to matching

behavior regardless of the mathematical algorithm. Thus, theoretical models with similar computational outcomes cannot be distinguished empirically.

Past models have aimed to explain matching behavior as a behavioral process within the organism through action selection and learning (e.g., McDowell, 2013b), or estimation of expected incomes (e.g., Gallistel, 2005; Saito, et al., 2014). However, none have tried to account for matching behavior through the use of environmental processes. An unconventional way to look at matching behavior is by the means of environmental constraints¹ (properties restraining choices) rather than mere behavioral processes (e.g., decision-making algorithms or reinforcement learning). These constraints are rooted in a feedback system made up of interactions between an organism's behavior and its environment (Baum, 1973). Feedback functions describe how the consequences of behavior feeds back its effect to the organism, and inversely how an organism, through its behavior, produces consequences. In other terms, it conceptualizes the quantitative behavior-environment interaction.

Inherent to reinforcement schedules, feedback systems impose constraints on behaviors and reinforcers. For instance, an organism's responses and their associated reinforcers are systematically constrained by their quantitative interdependency : the amount of reinforcers cannot be higher than the number of responses (McDowell & Ansari, 2005). Equation 2 illustrates this mathematical relationship;

$$R_{ij} \leq B_{ij} \quad (2)$$

where subscripts indicate the number of obtained reinforcers (R) or behaviors (B) from option i at the session j ($j = 1, 2, 3, \dots, n$). Equation 2 comes from the basic

definition of a contingency of reinforcement (Skinner, 1938); a response must be emitted in order to be reinforced. In fact, few instances of behavior are reinforced through concurrent reinforcement schedules (McDowell & Ansari, 2005). If no behavior is emitted before the reinforcer occurs, then either (a) another response has been reinforced or (b) it is not a reinforcer.

Insert figure 1 here

A probability density function offers a simple way to see the influence of this constraint. The upper panels of figure 1 show the empirical ($j = 100\ 000$) probability density function of behaviors (left) and reinforcers (right) sampled from a uniform distribution, but where R_{ij} is constrained by the upper bound B_{ij} . The influence of equation 2 can be seen in the upper right panel: the distribution is exponential rather than uniform. The two panels in the middle row show the logarithm of the ratio of these distributions, which appears to be Gaussian. Finally, the bottom panel presents both distributions as analyzed with the GML (the x -axis shows the reinforcer rate ratio and y -axis shows the response rate ratio). A linear trend is visible to the naked eye as well as statistically ($r^2 = .50$, $a = .50$ and $\log c = .00$). Matching behavior would have occurred in a biological agent.

Equation 2 is not the only constraint imposed by a concurrent reinforcement schedule. Another relevant constraint is the theoretical maximum number of possible responses (B_t) or reinforcers (R_t) such as:

$$B_1 + B_2 = B_t \quad (3), \text{ or}$$

$$R_1 + R_2 = R_t \quad (4)$$

which are computationally similar. Equations 3 and 4 have been discussed in matching theory (Herrnstein, 1997; Rachlin, Battalio, Kagel & Green, 1981). Their theoretical implications for living agents go beyond the scope of this paper. It suffices to say that all experimental and natural studies (within the experimental analysis of behavior) with organisms end when a given time has elapsed (e.g., 1 hour) or a given amount of reinforcers have been distributed (e.g., 60), whichever comes first. It is impossible to observe a living organism (and artificial ones either) emitting an infinite number of responses. The same analysis as depicted in figure 1 was carried out using equation 3 and 4. The visual representations of results are quite similar. However, an ordinary least squares regression revealed a stronger relationship between the reinforcer rate ratio and response rate ratio ($r^2 = .62$, $a = .62$ and $\log c = .00$).

These preliminary results demonstrate that, regardless of the effect of the reinforcer, fitting the GML to behavioral data should produce spurious correlations (i.e., systematically positive non-null correlations regardless of sampling errors). The complexity of matching behavior can be conceptualized largely as a reflection of the complexity of the environment and, more specifically, of how behaviors and reinforcers are observed. Thus, matching is not necessarily achieved by any formal decision-making algorithm, but could be induced by concurrent reinforcement schedules (Caron, 2014). The equilibrium stated by equation 1 can be seen as not the mere product of a learning process, but by the mathematical properties that relate behaviors to reinforcers.

Despite that the constraints induced by concurrent schedules of reinforcement can have a substantial effect, no investigation of their influence has been carried out. To address this issue, the current study simulates the constraints of equation 2, which stipulates that the amount of reinforcers cannot be higher than the number of responses, and equation 3, which constrains the theoretical number of possible responses by session. The objective is to assess their influences on the GML. It offers a new perspective of the GML as a product of the environment (as it will be modelled in the remaining of the study) rather than a behavioral process. In order to mimic the real-life observation procedure of matching behavior, both equations will be tested with a Monte-Carlo simulation method.

Numerical simulation 1

In order to investigate the influence of the first constraint on matching behavior, a Monte Carlo simulation was carried out. The simulation will serve to replicate that of Caron (2014) which found that the GML could account for 47% of the variance when equation 2 was implemented². Though simulations by Caron (2014) were limited to 16 conditions, the current simulation will include 50 conditions with a larger range of parameters. Therefore, the purpose of the first simulation is twofold: (1) to replicate Caron's results, (2) to test additional conditions (sample size and maximum bound of responses, see below for details).

A Monte Carlo approach was used to assess the effect of implementing equation 2, i.e., the amount of reinforcers is always equal to less than the number of responses. The simulation was carried out in Matlab (2012a) and was as follows;

1. Generate two samples of observed behavior (B_i) with length n from a discrete uniform distribution ($1, B_i$);
2. Generate two samples of observed reinforcers from a discrete uniform distribution ($1, B_{ij}$) such as every $R_{ij} \leq B_{ij}$,
3. Fit equation 1 to the data set using ordinary least squares correlations and record a , $\log c$ and the r^2 ;
4. Repeat steps 1, 2, and 3 a total of 10 000 times.

Number of sessions ($j = 1, 2, 3, \dots, n$), or how many times an organism is observed (i.e., the sample size)³, and B_i (maximum bound of the number of responses) was varied from 10, 20, 30, 40, and 50, and 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, and 100 respectively.

Results

The current Monte Carlo simulations revealed that the GML explained on average 47% of the variance when equation 2 was implemented, supporting preliminary work by Caron (2014). Top panel of figure 2 shows that when $n = 10$, the expected explained variance is .41, an asymptote is reached at approximately at $n = 30$ or 50, the variance finally reaching .47 at $n = 80$. There were substantial influences of B_i on the explained variance, especially for the ($n = 10$) conditions, which showed higher average explained variances than others B_i values. The bottom panel of figure 2 depicts the influence of B_i and n on the slope (a) of the GML. Average slope patterns are relatively orderly (at the third decimal). The results show that expected sensitivity slightly decreases as the number of sessions increase. An asymptote is

reached at 80 sessions. No average differences were found for B_t values, with the exception of sampling errors being higher with lower sample sizes (an intuitive and expected finding). Finally, equation 2 had no substantial effect on $\log c$ which remained, on average, .00 (Caron, 2014).

Insert figure 2 here

Matching behaviors were partially explained without the implementation of any behavioral process nor any effect of reinforcers on behavior. In other words, learning was not necessary to obtain relatively high average explained variance for the GML. The occurrence of responses and reinforcers were independent and highly correlated.

This first part of the study investigates the first environmental constraint; that the amount of reinforcers cannot be higher than the number of responses. The next simulation assesses the influence of equation 3 on the GML, i.e., the theoretical number of possible responses by sessions (B_t). As pointed earlier, an organism cannot emit an infinite number of responses in a finite condition. Thus, in a given session, the response rate is bounded.

Numerical simulation 2

The second Monte Carlo simulation was based on the first one. The purpose of the simulation was to assess the effect of implementing equation 3, i.e., a maximum number of possible responses and reinforcers in a single session, on the parameters of the GML. The simulation was carried out in Matlab (2012a) and was as follows;

1. Generate two samples of observed behavior (B_i) with length n from a discrete uniform distribution ($1, B_i$);
2. Generate another sample such as $B_{1j} - B_{2j} = B_{2j}$.
3. Generate two samples of observed reinforcers from discrete uniform distribution ($1, B_{ij}$), such as $R_{ij} \leq B_{ij}$.
4. Fit equation 1 to the data set and record a , $\log c$ and the r^2 .
5. Repeat steps 1, 2, 3, and 4 a total of 10 000 times.

Like simulation 1, the number of sessions (n) and the maximum bound of the number of responses (B_i) varied from 10, 20, 30, 40, and 50, and 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, and 100 respectively.

Results and discussion

The first simulation revealed an average expected explained variance of .47. Adding the second constraint within the Monte Carlo method in numerical simulation 2 increased the average to .63. In other words, with no behavioral process implemented, the GML explained on average 63% of the variance. There were substantial influences of B_i on the explained variances, but notably the difference is only perceptible at the third decimal. As can be seen in the bottom panel of figure 3, average slopes were more uniformly ordered; no difference between the B_i values are observable. The average slope in the second simulation is .76 compared to .57 in the first simulation, which is not surprising given the increase in explained variance. Like the numerical simulation 1, average $\log c$ was still .00 for all conditions (varying at the third decimal).

Insert figure 3 here

In sum, adding an environmental constraint on the generation of behavior and reinforcers increased the explained variance and the sensitivity (slope) in simulation 2. As in simulation 1, the GML accounted for most of the variance without any programmed learning process. In fact, it is surprising that two simple constraints (equations 2 and 3) had such an influence on the parameters of the GML.

General Discussion

The purpose of the current study was to assess the influence of environmental constraints on matching behavior. According to the current findings, concurrent reinforcement schedules clearly induced a quantitative dependency between behaviors and reinforcers. These simulations show that, as simple as reinforcement constraints appear, they have a substantial impact on the GML's parameters. The Monte Carlo simulations revealed that the GML explained on average 47% of the variance when equation 2 was implemented, and increased to 63% when equation 3 was added. Environmental constraints likely have an influence within feedback systems : an effect substantial enough to generate 63 % of explained variance by the GML. Matching behavior can thus be conceptualized not only as the result of a behavioral (decision-making) process, but as the product of environmental conditions.

This paper sought to investigate whether computational learning models are necessary to produce matching behavior. The answer is partly yes. Compared to the results of the current computation of environmental constraints, the GML reaches

much better explained variances with real (and artificial) organisms especially in experimental studies. In most experiments with animal and human subjects, the GML accounts for a large proportion of variance (higher than .80) and the parameter a varies around .80 (Baum, 1979; Davison & McCarthy, 1988; McDowell, 2013a). In the second numerical simulation, in which the number of responses was constrained, the GML accounted for .63 of the variance and the parameter a varied around .76 on average. The average slope, the parameter a , was approximately the same as for biological agents (.76), whereas the average explained variance was lower (.63). The gap between simulations and experimental studies point out that, at least, a decision-making process would be necessary to explain all the variance accounted by the GML. In real-life settings, the variance cannot be distinguished between environmental constraints and behavioral processes. Both of these could account for matching behavior. At the very least, these simulations show that environmental constraints can spuriously increase the explained variance accounted by the GML. Their influence in real-life settings has yet to be experimentally tested, regardless of the behavioral process taking place.

The current results do not enlighten the current model of living-agents matching behavior. However, simulations point out some of the limitations in the actual view of matching behavior. First, they show that matching behavior is not merely an emergent property of behavioral processes, but can be an artefact shaped by environmental constraints. At best, they suggest a new computational perspective of matching behavior: modelling the environment rather than the organism. This

leads to a Skinnerian account of the matching phenomenon: the content of the black box will not be the main point of interest, but rather the environment which acts upon it. The standpoint advocated by Davison & McCarthy (1988) and Herrnstein (1997) that any behavioral model of choice should first account for matching behavior (such as melioration theory and other related models) is weakened. Results challenge matching behavior per se and strengthen an interpretation of matching behavior as a product of a feedback system. This new direction can and should be investigated.

Finally, the current findings can be particularly useful for data gathered for real-life descriptive analyses of organisms (i.e., observing organisms' behaviors with only natural variations and without any experimental control), in which the likelihood of the operant function of reinforcers (and consequently matching behaviors) is unknown (Caron, 2014). In natural settings, it is impossible to conclude without doubt whether, for example, a child's behavior is at a steady state, whether its behavior are reinforced by the contingencies and what behavioral processes are taking place (Bijou, Peterson & Holt, 1968). The current findings, that the expected average variance explained by the GML is .63 with a slope of .76 on average, could be used as a lower bound or a null hypothesis to assess whether the GML accounts for the data better than a pure random process. For instance, Rivard, Forget, Kerr and Bégin (2014) analyzed the matching behavior of 14 children with autism spectrum disorder in order to assess their sensitivity to attention from their therapist. They used a rule of thumb to evaluate whether children's behaviors were sensitive or not. If the GML explained more than .50 of the variance of children's behaviors (see Reed, 2009),

they were concluded to be sensitive. In this example, using the current simulation results would lead to the use of an empirically orientated test rather than a rule of thumb. Though their conclusions in this instance would remain relatively unaffected, their results would be more accurate and precise, and the confidence in them would increase.

In summary, computational learning models appear in part necessary to produce matching behavior. Based on these findings, there is evidence that other environmental constraints could increase the average explained variance accounted for by the GML. The current simulations investigated two possible environmental constraints, though others can be conceptualized. Future simulations could explore if constraints restraining choice lead to more robust outcomes or higher explained variances. A more comprehensive and exhaustive description of environmental constraints is needed to account for matching behaviors, whether it concerns concurrent schedules of reinforcement or a two-armed bandit. Still, it opens more avenues toward an environmentalism-orientated behaviorism rather than a cryptocognivism.

Acknowledgements

I thank Philippe Valois, Jacques Forget and Stephanie Caldas for their comments on earlier drafts.

Funding

The author is currently subsidized by the Fonds de recherche du Québec – Société et culture.

References

- Baum, W. M. (1973). The correlation-based law of effect. *Journal of the Experimental Analysis of Behavior*, 20, 137-153. doi: 10.1901/jeab.1973.20-137
- Baum, W. M. (1974). On two types of deviation from the matching law: bias and undermatching. *Journal of the Experimental Analysis of Behavior*, 22, 231-242. doi: 10.1901/jeab.1974.22-231
- Baum, W. M. (1979). Matching, undermatching, and overmatching in studies of choice. *Journal of the Experimental Analysis of Behavior*, 32, 269-281. doi: 10.1901/jeab.1979.32-269
- Bijou, S. W., Peterson, R. F., & Ault, M. H. (1968). A method to integrate descriptive and experimental field studies at the level of data and empirical concepts. *Journal of Applied Behavior Analysis*, 1, 175-191. doi: 10.1901/jaba.1968.1-175
- Caron, P.-O. (2013). On applying the matching law to between-subject data. *Animal Behaviour*, 85, 857-860. doi: 10.1016/j.anbehav.2013.01.022
- Caron, P.-O. (2014). La loi généralisée de l'appariement : une simulation de Monte-Carlo. *Acta Comportamentalia*, 22, 169-179.
- Davison, M., & McCarthy, D. (1988). *The matching law: a research review*. Hilldale (NJ): Erlbaum.
- Dawson, M. R. W., Dupuis, B., Spetch, M. L., & Kelly, D. M. (2009). Simple artificial neural networks that match probability and exploit and explore when

- confronting a multiarmed bandit. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 20, 1368-1371. doi: 10.1109/TNN.2009.2025588
- Gallistel, C. R. (2005). Deconstructing the law of effect. *Games and Economic Behavior*, 52, 410-423. doi: doi:10.1016/j.geb.2004.06.012
- Herrnstein, R. J. (1997). *The matching law. Papers in psychology and economics*. Cambridge (MA): Harvard University Press.
- Iigaya, K., & Fusi, S. (2013). Dynamical regimes in neural network models of matching behavior. *Neural Computation*, 25, 3093-3112. doi: 10.1162/NECO_a_00522
- Loewenstein, Y. (2008). Robustness of learning that is based on covariance-driven synaptic plasticity. *PLoS Computational Biology*, 4, e1000007. doi: 10.1371/journal.pcbi.1000007
- McDowell, J. J. (2004). A computational model of selection by consequences. *Journal of the Experimental Analysis of Behavior*, 81, 297-317. doi: 10.1901/jeab.2004.81-297
- McDowell, J. J. (2013a). On the theoretical and empirical status of the matching law and matching theory. *Psychological Bulletin*, 139, 1000-1028. doi: 10.1037/a0029924
- McDowell, J. J. (2013b). A quantitative evolutionary theory of adaptive behavior dynamics. *Psychological Review*, 120, 731-750. doi: 10.1037/a0034244
- McDowell, J. J., & Ansari, Z. (2005). The quantitative law of effect is a robust emergent property of an evolutionary algorithm for reinforcement learning. In

- M. Capcarrere, A. Freitas, P. Bentley, C. Johnson & J. Timmis (Eds.),
Advances in artificial life: ECAL 2005, LNAI 3630. (pp. 413-422). Berlin:
Springer-Verlag.
- Rachlin, H., Battalio, R. C., Kagel, J. H., & Green, L. (1981). Maximization theory in
behavioral psychology. *The Behavioral and Brain Sciences*, 4, 371-388. doi:
10.1017/S0140525X00009407
- Reed, D. D. (2009). Using Microsoft Office Excel® 2007 to conduct generalized
matching analyses. *Journal of Applied Behavior Analysis*, 42, 867-875. doi:
10.1901/jaba.2009.42-867
- Rivard, M., Forget, J., Kerr, K., & Bégin, J. (2014). Matching law and sensitivity to
therapist's attention in children with autism spectrum disorders. *The
Psychological Record*, 65, 79-88. doi: 10.1007/s40732-014-0015-1
- Saito, H., Katahira, K., Okanoya, K., & Okada, M. (2014). Bayesian deterministic
decision making: A normative account of the operant matching law and
heavy-tailed reward history dependency of choices. *Frontiers in
Computational Neuroscience*, 8, 1-7. doi: 10.3389/fncom.2014.00018
- Sakai, Y., & Fukai, T. (2008). When does reward maximization lead to matching
law? *PLoS One*, 3, e3795. doi: 0.1371/journal.pone.0003795
- Skinner, B. F. (1938). *The behavior of organism*. New York: Appleton Century Croft.
- Shimp, C. P. (1992). Computational behavior dynamics: an alternative description of
Nevin (1969). *Journal of the Experimental Analysis of Behavior*, 57, 289-299.
doi: 10.1901/jeab.1992.57-289

Sutton, R. S., & Barto, A. G. (1998). *Reinforcement learning : an introduction*.

Cambridge, MA: MIT Press.

Wearden, J. H., & Burgess, I. S. (1982). Matching since Baum (1979). *Journal of the*

Experimental Analysis of Behavior, 38, 339-348. doi: 10.1901/jeab.1982.38-

339

Footnote

¹ Herein, the word “constraint” designates “restriction of variability”. It may be understood as “systematic bias”, “limitation“ or “boundary“.

² Notice that the study was published in French.

³ Remember that the GML is a within-subject model (Caron, 2013) and that the sample size is the number of sessions by subject.

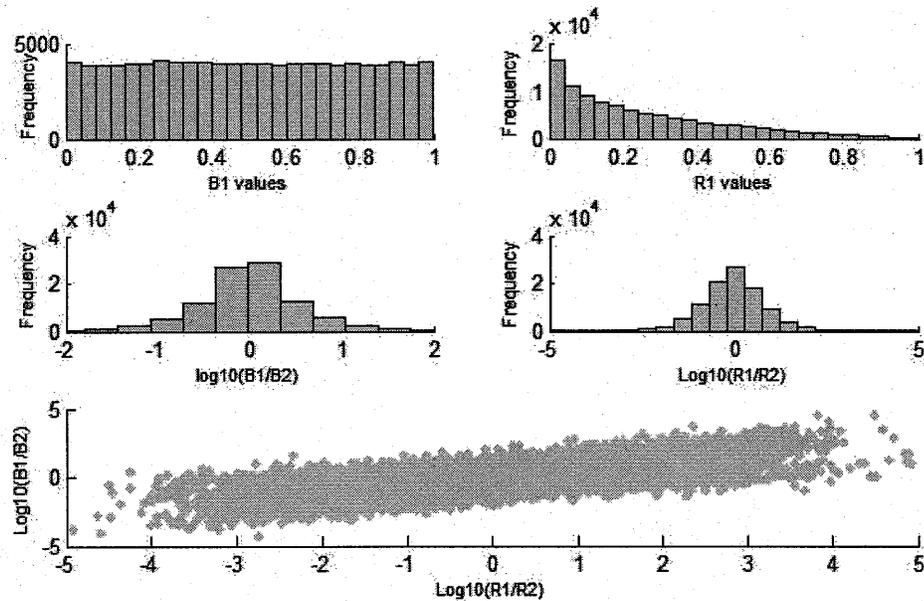


Figure 1. Illustration of the influence of the first constraint. The upper panels show the empirical ($j = 100\,000$) probability density function of behaviors (left) and reinforcers (right). Behaviors were sampled from a uniform distribution, $[0, 1]$. Data from the upper right panel was sampled according to equation 2, i.e., where B_{ij} was the upper bound of R_{ij} , $[0, B_{ij}]$. The middle panels show the logarithm of the ratio of two samples (same as upper panels) responses (left) and reinforcer (right). The bottom panel shows data as fitted according to the GML (x-axis as the reinforcer rate ratio and y-axis as the response rate ratio). A linear trend is observed ($r^2 = .50$, $a = .50$ and $\log c = .00$, see equation (1) for parameters

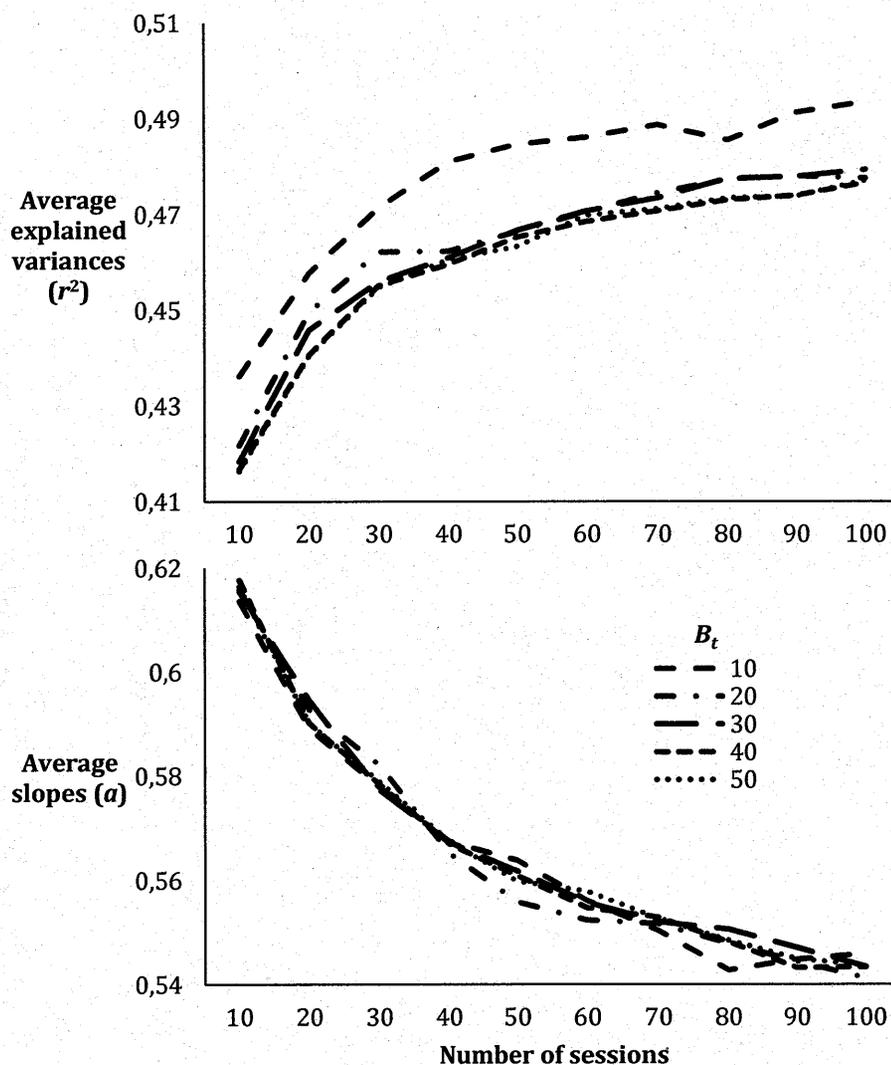


Figure 2. Results from simulation 1. Top panel depicts the average explained variances of the GML according to the number of sessions (n) (abscissa) and the upper bound of the uniform distribution (B_t) (line color). The expected explained variance reaches an asymptote approximately at $n = 30$, that finally reaches .47 at $n = 80$. There were substantial influences of B_t , especially on the ($n = 10$) conditions which seems more sensitive to sample variations. Bottom panel presents the average slopes according to the same conditions (abscissa and line color). Average slope decelerated pattern is relatively orderly.

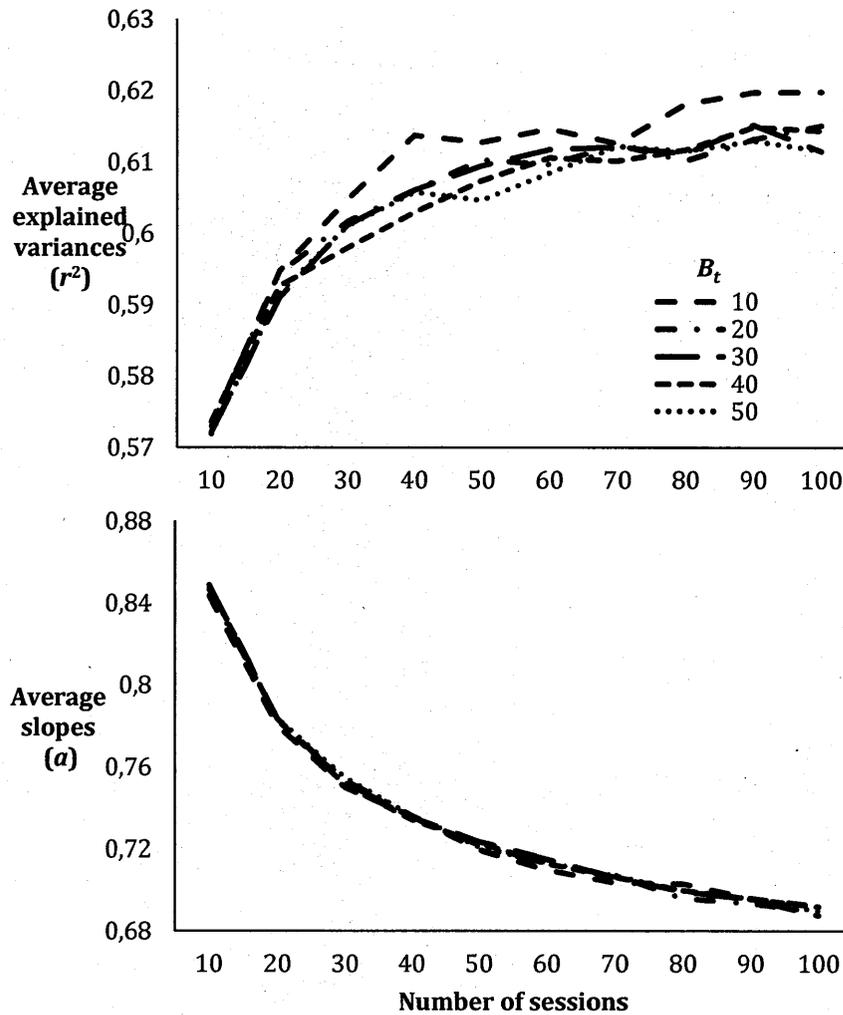


Figure 3. Results from simulation 2. Top panel depicts the average explained variances of the GML according to the number of sessions (n) (abscissa) and the upper bound of the uniform distribution (B_t) (line color). The expected explained variance reaches an asymptote approximately at $n = 40$, that finally reaches .61 at $n = 80$. There were less influences of B_t (compared to figure 2). Bottom panel presents the average slopes according to the same conditions (abscissa and line color). Average slope decelerated pattern was near perfectly orderly.

CHAPITRE V

PRÉSENTATION DE L'ARTICLE 4

ON THE STATISTICAL PROPERTIES OF OPERANT SETTINGS AND THEIR
CONTRIBUTION TO THE EVALUATION OF SENSITIVITY TO
REINFORCEMENT

Référence complète : Caron, P.-O. (2017). On the statistical properties of operant settings and their contribution to the evaluation of sensitivity to reinforcement. *Adaptive Behavior*, 25, 185-193. doi: 10.1177/1059712317719967

On the statistical properties of operant settings and their contribution to the evaluation
of sensitivity to reinforcement

Pier-Olivier Caron

Université du Québec à Montréal

Correspondence:

Pier-Olivier Caron

Laboratoire des sciences appliquées du comportement

Département de Psychologie

Université du Québec à Montréal

C.P. 8888, succ. Centre-ville

Montréal, Qc, Canada, H3C 3P8

Email: pocaron19@gmail.com

Author reports no conflict of interest.

The author is currently subsidized by the Fonds de recherche du Québec – Société et culture. The author is now in the Department of Sexology.

Abstract

When using the matching law in applied settings, a recurring problem is to assess when subjects adjust their responses as a function of their associated reinforcers. Specifically, the main concern is to determine if subjects are sensitive to reinforcement or if they are not. Many researchers have followed (explicitly or implicitly) the criterion that 50% of explained variance is deemed acceptable to consider the subject sensitive. However, it is neither theoretically nor empirically grounded. The current paper presents a null hypothesis statistical test to assess if an organism's behavior is sensitive to reinforcement as quantitatively expressed by the matching law. We first introduce the motivation as to why such a test is warranted and formally described the basis of the model used to compute the null hypothesis and show some of its advantages. We conclude the paper with a hypothetical example.

Keywords : matching law, sensitivity to reinforcement, ratio correlation

On the statistical properties of operant settings and
their contribution to the evaluation of sensitivity to reinforcement

Introduction

A problem when using the matching law (Herrnstein, 1961), especially in the applied literature, is to assess when subjects are sensitive to reinforcement (when they adjust their responses as a function of associated reinforcers). The purpose of the current paper is to propose a null hypothesis statistical test (NHST) to assess if an organism's behavior is, in all likelihood, sensitive to reinforcement as quantitatively expressed by the matching law. Specifically, it tests if the matching relation lies solely on a pure random process or if some behavioral processes are required to explain the data. First, we define some preliminary matters such as the matching law and sensitivity to reinforcement. After, we explain the motives warranting the test and the basis of our model. Finally, we end the paper with a hypothetical example.

The matching law

The matching law states that the ratio of two response rates is correlated to the ratio of their respective reinforcers rate (Herrnstein, 1961). This relation is quantitatively formalized by the equation:

$$\frac{B_i}{B_e} = \frac{R_i}{R_e},$$

where B_s refer to response rate, R_s to reinforcer rate and the indices (i and e) distinguish between at least two options. This equation is generally referred to as the strict matching law (SML). To account for systematic deviation found in organisms' response allocation (Baum, 1979; Davison & McCarthy, 1988; McDowell, 2013), the generalized matching law (GML; Baum, 1974) has been proposed. It is represented by the equation:

$$\frac{B_i}{B_e} = c \left(\frac{R_i}{R_e} \right)^a,$$

where a refers to sensitivity to reinforcement (i.e. the degree to which organisms adjust their behavior according to reinforcer ratio, and c refers to the response rate independent of the reinforcer rates. The GML is often presented in a logarithm form:

$$\log \left(\frac{B_i}{B_e} \right) = a \log \left(\frac{R_i}{R_e} \right) + \log c.$$

In log form, the relation is transformed into a linear equation where a becomes the slope and $\log c$ the intercept. They are more easily distinguishable in a graph than their curvilinear counterpart (see Caron, 2017; Baum, 1974).

Sensitivity to reinforcement

It is of interest to evaluate a subject's sensitivity to reinforcement, because it provides information on how subjects will adjust their behavior according to the modification in reinforcer (Forget & Rivard, 2010; McDowell, 1981; Myerson & Hale, 1984; Noll, 1995). For instance, Rivard, et al. (2014) investigated social

sensitivity of preschoolers with autism spectrum disorder (ASD) in an early behavioral intervention setting. A challenging problem here is to separate the broad social deficit, one of the main symptoms of ASD (American Psychiatric Association., 2013), into specific quantitative measures. The authors relied on the GML to assess how much children changed their social behaviors in response to changes in reinforcement rates. The sensitivity parameter provided quantitative information on how children would adjust their behavior according to their social environment.

The GML alone does not inform if the subject is sensitive to reinforcement. A sensitivity value (α) tending toward zero or largely exceeding unity is insufficient. The explained variance (or the correlation) also has to be considered. For instance, sensitivity can be low and the correlation significant, or sensitivity can be high, but the correlation non-significant, which for practitioners, in both cases, are not straightforward to interpret. Authors adopting an applied standpoint such as Rivard et al., (2014) and others, like Borrero and his colleagues (Borrero et al., 2007; Borrero & Vollmer, 2002; Jacobs, Borrero & Vollmer, 2013; St. Peter et al., 2005; Sy, Borrero & Borrero, 2010), accept that explained variances over 50% are good evidences in favor to sensitivity to reinforcement. This convention is well captured by Reed's statement as well as being referred by Rivard et al. (2014) that :

“In applied studies using naturally occurring matching relations (i.e., not instances in which the researcher programs rates of reinforcement), [variance

accounted for] is typically deemed acceptable if the metric is greater than 50%.”

(Reed, 2009, p. 874)

The main concern here is that the criterion is not theoretically orientated. Still, the criterion is a testimony that, since few experimental studies found explained variances lower than 50%, then it must be somewhat of a lower bound in applied studies also. In the experimental literature, the matching law explains so much variance in behavioral data, over 80% in many procedures and with many species (Baum, 1979; Davison & McCarthy, 1988; McDowell, 2013), that the traditional null hypothesis would obviously be rejected. At the very least, the criterion illustrates that researchers expect high explained variances when they used the GML and that using NHST with a null hypothesis where the population parameter equals zero increases what would be considered false positives. A surprising fact for non-behavior analysts is that NHST is not explicitly recommended by Reed’s tutorial on correlation (and other similar works like Dallery & Soto, 2013). In statistical textbooks, the correlation procedure, which the matching law is, would imperatively include NHST. Yet, there is actually no other method than Reed’s suggestion to evaluate sensitivity to reinforcement.

We do not argue that NHST with population correlation parameter equaling zero is the appropriate way to assess sensitivity to reinforcement. In fact, as we pointed out, the matching relation will always be significant, because the correlations are always large. However, to ensure that subjects adjust their behavior according to

reinforcers, enough evidence has to favor the presence of a behavioral process (any kind of processes leading organisms' behavior to follow the matching law, see Caron, 2017, Herrnstein, 1997). We argue that the obtained matching relation should be tested to see if it significantly deviates from pure randomness. Subject's behavior should be purely random if there is no behavioral process (null hypothesis) or show trends otherwise.

The question now is what looks like random behavior? A possible approach is that components (numerators and denominators, being B_i , B_e , R_i , and R_e) of the matching equation are correlated together. This concern on the matching law was studied by Caron (2015) who evaluated the influence of conditional distributions on the matching law by simulating a feedback system similar to reinforcement schedules. The author tested the relation that in most operant situations the expected occurrence of reinforcers is conditional to the occurrence of a response and found that this could explain 47% of the variance. This effect could reach 63% with the addition of another dependency between responses like a maximum of behavior by session or, in other terms that response rates are reciprocal. Specifically, high correlations between ratios were due to the conditional dependencies between response rates and reinforcer rates rather than a behavioral process trying to balance ratios.

It has been long acknowledged by statisticians (Pearson, 1897; Yule, 1910) that correlations between two ratios will be inflated if components (B_i , B_e , R_i , R_e) are correlated. Worse, correlations between ratios can often be larger than the simple

correlation between their components. In other terms, the hypothesis test of a ratio correlation is biased if the correlations between components are not taken into account. To resolve this issue, Pearson (1897) proposed an equation to account for correlation between components. If we can formally derive the spuriousness held in the correlations between components, we would then obtain a good approximation for a null hypothesis for testing the matching law.

The new null hypothesis statistical test for the matching law

If there is no correlation between components, then the NHST that the population parameter is zero is legitimate. However, this is inappropriate when there are correlations between components, because they will bias the correlation between ratios. Pearson (1897) proposed an approximate equation to evaluate the expected correlation between ratios when numerators and denominators are correlated together, which is the following equation:

$$r_{\frac{A}{B} \frac{C}{D}} = \frac{r_{AC}V_A V_C - r_{AD}V_A V_D - r_{BC}V_B V_C + r_{BD}V_B V_D}{\sqrt{V_A^2 + V_B^2 - 2r_{AB}V_A V_B} \sqrt{V_C^2 + V_D^2 - 2r_{CD}V_C V_D}}$$

where r s represent correlations, V s represent the relative variance (standard deviation divided by mean), and indices correspond to the component. To simplify notation we used $A = B_1$, $B = B_e$, $C = R_i$, $D = R_e$ either for the SML or the GML². For the remaining of the current paper, this notation will be kept.

The purpose of computing $r_{\frac{A}{B} \frac{C}{D}}$ is that, if we can define a priori the correlations

r_{AC} , r_{AD} , r_{BC} , r_{BD} , r_{AB} and r_{CD} , as well as means and variances of each component to

compute the relative variance, then it would be possible to assess a null hypothesis to compare to the empirical correlation. If the observed correlation between ratios is significantly different from $r_{\frac{A}{B}, \frac{C}{D}}$, then the null hypothesis that the matching relation is due solely to the correlation between behavior and reinforcer in a given schedules of reinforcement (i.e. correlation between components) can be rejected. As such, the conclusion that the subject is sensitive to the ratio of reinforcers would be warranted. In order to define a priori the correlations, the means and the variances, a model of concurrent reinforcement schedules describing the distributions of response rates and reinforcer rates, and their conditional relations is needed.

The model

In the current section, a model involving three assumptions is developed based on the inherent properties of concurrent reinforcement schedules. They describe how behavior and reinforcers are generated, the conditional relation between behavior, and between behavior and reinforcer. While this may come forth as too restrictive or inaccurate, it relies on our knowledge about the operant situation. For the moment, an approximation of the quantitative relation can be deemed sufficient. As the understanding of the relation between responses and reinforcers within reinforcement schedules increase, the model will need to undergo revision.

Assumption 1 : how responses and reinforcers are generated

At first, it must be acknowledge that the occurrence of behavior and reinforcer have to follow a statistical distribution (a description of the frequency each outcome

will occur). We recommend to generate responses and reinforcers with a Bernoulli process, because it is a stochastic process involving binary random variables and discrete values. The number of emitted responses and contingent reinforcers are sum of Bernoulli process (a binomial distribution). The binomial distribution has the interesting properties of having two parameter (p , the probability of occurrence, and n , the sample size). It is noteworthy that any other discrete distributions such as a Poisson or a uniform distribution could be used. The binomial was preferred over the uniform distribution, because the probabilities of occurrence can be manipulated, and the Poisson distribution, because it converges toward the binomial distribution as the sample size increases.

Assumption 2 : the conditional relation between responses

A second assumption, suggested by Caron (2015), is that the correlation between components A and B (that is, B_i and B_e) is negatively perfect. Since there is only two possible responses which are mutually exclusive, knowing one determines the other. This is especially true in most applied settings where an interval sample recording is used to observe behavior. Let n be the number of behavior observable in a session and θ the probability of occurrence of A , then the frequency of A for the session will be $A \sim \text{binom}(\theta, n)$ and $B = n - A$. This assumption corresponds to an operant procedure ending when a given time has elapsed or a given amount of reinforcers has been distributed (Caron, 2015). No organism can emit an infinite number of responses in a finite time length. It is worth noting that this assumption can

be altered by proposing any other correlation between -1 to 1 as long as this likely reflects the operant situation. A correlation of zero would imply no correlation between behavior (like Caron, 2014 simulated).

Assumption 3 : the conditional relations between responses and reinforcers

Finally, the last assumption of the model is that the occurrence of reinforcer is conditional to the occurrence of behavior. This is similar to the constraint that the reinforcer rate is always lower than the response rate (Caron, 2015; McDowell & Ansari, 2005). For instance, the organism has to emit at least one response to receive one reinforcer. This is true in ratio schedules of reinforcement as well as in interval schedules. The effect of this last assumption is minimized in experimental settings but can be quite detrimental in applied settings (see, St. Peter et al., 2005) where reinforcer rates are not experimentally controlled. This is also accounted by the mean probabilities of reinforcement over a complete, where it is quite high in ratio schedules and lower in interval schedules. Formally, the assumption of the model is that the expected number of reinforcers is conditional to the expected number of response emitted given a probability of reinforcement p_j , such that $C \sim binom(p_1, A)$ and $D \sim binom(p_2, B)$, where j represent the option; $j = \{1,2\}$. Thus the mean and variance of C and D directly depends on A and B . This is a generalization of the constraint that the reinforcer rate is always lower than the response rate, because probabilities p_j can be varied.

Means, variances and covariance

From the assumptions, we can compute the mean, the variance and the covariance between components which is needed to calculate $r_{\frac{A C}{B D}}$. The variance of A is $\sigma_A^2 = n\theta(1 - \theta)$, the mean of A is $\mathbb{E}(A) = n\theta$, the conditional variance of C as $\sigma_C^2 = n\theta p_1(1 - \theta p_1)$ and the conditional mean of C is $\mathbb{E}(C) = n\theta p_1$ (see Casella & Berger, 2002, for details). This is the same for B and D respectively. We can also compute the covariance of A and C (as well as B and D) as $cov(A, C) = \theta p_1 - \theta^2 p_1$. Then the relative variance is computed as $V_x = \frac{\sigma_x}{\mathbb{E}(x)}$ (where x refers to a component). Once these elements are gathered, the estimation of $r_{\frac{A C}{B D}}$ is possible.

The hypothesis test

In order to complete the hypothesis test, $r_{\frac{A C}{B D}}$ has to be computed and used as a null hypothesis to compare statistically to the empirical correlation found with the GML. The NHST will give the likelihood of data given the assumptions of the model. The resulting p -value will inform on the statistical likelihood of sensitivity of reinforcement. If the outcome is significant, then the null hypothesis that the data are well accounted by a model involving no learning can be rejected.

Details to compute NHST with an alternative value are found in many statistical textbooks such as Howell (2012). We have to note that testing the correlation is the same as testing the sensitivity parameter. In the bivariate case, if there is a correlation between both variables, then there must be a slope relating both.

Testing either will lead to the same outcome. For the sake of simplicity, the current description will rely on correlation. Most statistical programs will test for a null hypothesis that the correlation is not different from zero. To use an alternate null hypothesis, such as $r_{\frac{A C}{B D}}$, the computation is

$$z = \frac{\operatorname{atanh}(r) - \operatorname{atanh}\left(r_{\frac{A C}{B D}}\right)}{\sqrt{\frac{1}{n-3}}}$$

where r is the empirical correlation and n the sample size. The inverse hyperbolic tangent (atanh) is used to account for the non-normality of the sampling distribution of r when the null hypothesis is non-zero. This equation yields a z -value that can be compared to chosen alpha (generally; $\alpha = 0.05$, which yields a critical z -value of 1.64 in a unidirectional hypothesis test). When the z -value exceeds the threshold, the null hypothesis is rejected. A behavioral process, such as sensitivity to reinforcement, is more likely to take place. The null model alone does not account for the variance, and another phenomenon is probably at play. This provides evidence to applied researchers that the subjects are sensitive to reinforcement before conducting their intervention.

Advantages

$r_{\frac{A C}{B D}}$ is a convenient null hypothesis because it takes into account the response rates and the reinforcer rates. Using a binomial distribution enables to vary the

probability parameter compared to a discrete uniform distribution where the probabilities of the sampling distribution is fixed to 0.50 (e.g., Caron's, 2014; 2015; simulations). This also resolves the problem, as St. Peter et al. (2005) pointed out, that

“In many cases, attention [the consequence] occurred at a very high rate and duration throughout the observation period. However, because only attention following problem behavior was used in the matching analysis, spurious matching was obtained because the increased response rates resulted in higher rates of contact with attention.” (St. Peter, et al., 2005, p. 441)

Quantitatively speaking, when the expected occurrence of reinforcers is high and since the occurrence of a reinforcers is conditional to the occurrence of a response, spurious correlations are more likely to be found. The correlation $r_{\frac{A}{B} \frac{C}{D}}$ is sensitive to response rates and reinforcer rates. If this last rate is high, the correlation between components is also higher and the null hypothesis increases. Alternatively, if the reinforcer rate is low, the null hypothesis becomes also lower.

An illustration

To illustrate the hypothesis test, we present an example, which is inspired by the procedure of Rivard et al. (2014) and Caron, Forget and Rivard (in press). Hypothetically, a subject was placed in an operant situation where it had to choose between two options and was rewarded accordingly. The reinforcer rates ratios were

not manipulated experimentally. An interval-sampling procedure, that is, separating a session into many equal intervals in which a single instance of behavior can be recorded, was used to sample subject's responses and their associated reinforcers. A session lasted 20 instances of recording, which was the maximum number of behavior the subject could emit. Finally, 20 sessions were recorded.

INSERT FIGURE 1

Figure 1 shows the response rates ratios and the reinforcer rates ratios of a hypothetical subject. The response allocation of the subject is well described by the GML, $r(18) = 0.86$ with 74% of explained variance. The subject shows an undermatching of 0.58 and no bias (0.00) toward an option or the other. This subject's matching relation is very similar to others found in the applied literature such as Rivard et al.'s (2014) or St. Peter et al.'s (2005) studies.

To prepare the hypothetical test, subject's probabilities of emitting response 1 and 2 as well as their respective probability to be reinforced have to be compute. These information can be can be calculated from the original data. After, according to the operant situation, a hypothetical interresponse correlation has to be choose between -1 and 1 (the R implementation choose by default -1, see Appendix 1). According to the hypothetical example, the probabilities of emitting a behavior to option 1 or 2 were of 0.56, and 0.44. Also, the reinforcement probabilities of these options were 0.44, and 0.29 respectively. By proceeding with the computation of

reinforced behavior probabilities (p_j), that is, by dividing the current estimate of reinforcer probability by the probability to emit the behavior, we see that the occurrences of reinforcers were high (.78, and .67, respectively). Applied researcher could be worried that the rate is so high that it could inflate the correlation found the GML.

INSERT TABLE 1

Once all the data are gathered, we can compute $r_{\frac{A}{B} \frac{C}{D}}$ from the probabilities of each component. Appendix 1 shows the code in R to implement the evaluation. It gives the hypothetical correlation, if the first four arguments are given. It gives the hypothetical correlation as well as the hypothesis test if the empirical correlation (r_{emp}) is added. Table 1 summarizes the calculation for the subject's behavior. Section 3.4 and 3.5 already presented most of the equations used in table 1. Be reminded that correlations are the covariance between components divided the product of their standard deviations. The two most interesting data in table 1 are the $r_{\frac{A}{B} \frac{C}{D}}$ and the z-value which were both respectively 0.85 and 0.22. The expected correlation between response rates ratios and reinforcer rates ratios was high, but it could stem from the already large correlations between components. As a reference point, consider reinforcement probabilities both of 0.40 (instead of .78 and .67) for option 1 and 2 (see Appendix 2 for several examples of combination). With these values, $r_{\frac{A}{B} \frac{C}{D}}$ would be 0.63 rather than 0.85 which illustrates the substantial influence

of component correlations, the sensitivity of $r_{\frac{A C}{B D}}$ to different responses and reinforcers rates, and that $r_{\frac{A C}{B D}}$ accounts for high correlation between components by being more restrictive. The z-value obtained for the results was of -0.69 which is below the traditional unidirectional test of 1.64 (for $\alpha = 0.05$). This indicates that the data provide weak evidence for a behavioral process outside of the proposed model. Applied researchers should reconsider the legitimacy of the matching relation. Other procedure should be implemented to further analyse subject's behavior, such as experimental control of the probabilities of reinforcement. Interestingly, the herein hypothetical example is quite similar to subjects' behavior in Caron et al. (in press), and Borrero and his colleagues' works, where the GML seems to describe adequately behavior. As St. Peter et al. (2005) suggested, this may be only because of the high probabilities of reinforcement, a problem addressed by the proposed null model. Certainly, previous works on the GML in natural settings should be re-evaluated in regards of the current study.

Conclusion

A null hypothesis for statistical testing of the GML, and especially of sensitivity to reinforcement, has been proposed. Although the test is not necessary for experimental studies in which reinforcers ratio is controlled (though it can be interesting), it is convenient and informative for applied researchers who want to investigate the GML in uncontrolled environments.

Compared to Reed's criterion, the current hypothesis testing is statistically grounded and flexible rather than being a mere rule of thumb. $r_{\frac{A}{B} \frac{C}{D}}$ can be computed a priori and has a theoretical interpretation in terms of correlations between components. It is what is expected if only responses and reinforcers were generated by their probability distribution without any behavioral process. Moreover, it accounts for different response and reinforcer rates as well as the increase in correlation due to high reinforcer rates. It answers a concern raised by applied researchers who were worried that high occurrence of reinforcer (reinforcer rates highly correlated to response rates) could spuriously inflated the explained variance of the GML. $r_{\frac{A}{B} \frac{C}{D}}$ automatically accounts for high or low correlations between components.

The model for implementing the null hypothesis entails some limits as it is based on a hypothetical model of reinforcement schedules. Notwithstanding this limitation, the current study requires molecular studies on feedback functions inherent to reinforcement schedules and on the moment-by-moment generating processes of responses and reinforcers. By investigating thoroughly the processes by which they occur, we will deepen our understanding in the mechanisms generating the matching law, but more importantly, the behavior of organism.

Acknowledgements

I thank Anne-Josée Piazza for their comments on an earlier draft.

Conflict of interest

Author reports no conflict of interest.

Funding

The author is currently subsidized by the Fonds de recherche du Québec –
Société et culture.

References

- American Psychiatric Association. (2013). *Diagnostic and statistical manual of mental disorders (5th edition)*. Washington, DC: American Psychiatric Association.
- Baum, W. M. (1974). On two types of deviation from the matching law: bias and undermatching. *Journal of the Experimental Analysis of Behavior*, *22*, 231-242. doi: 10.1901/jeab.1974.22-231
- Baum, W. M. (1979). Matching, undermatching, and overmatching in studies of choice. *Journal of the Experimental Analysis of Behavior*, *32*, 269-281. doi: 10.1901/jeab.1979.32-269
- Caron, P.-O. (2014). La loi généralisée de l'appariement : une simulation de Monte-Carlo [The generalized matching law : a Monte Carlo simulation]. *Acta Comportamentalia*, *22*, 169-179.
- Caron, P.-O. (2015). Matching without learning. *Adaptive Behavior*, *23*, 227-233. doi: 10.1177/1059712315590484
- Caron, P.-O. (2017). Sur la loi de l'appariement [On the matching law]. *Psychologie Française*, *62*, 29-55. doi: 10.1016/j.psfr.2015.10.003
- Caron, P.-O., Forget, J., & Rivard, M. (in press). The response allocation of children in mainstream day care according to social reinforcer ratios. *European Journal of Behavior Analysis*. doi: 10.1080/15021149.2017.1309956
- Casella, G., & Berger, R. L. (2002). *Statistical inference*. Pacific Grove: Duxbury.

- Davison, M., & McCarthy, D. (1988). *The matching law: a research review*. Hilldale (NJ): Erlbaum.
- Dallery, J., & Soto, P. L. (2013). Quantitative description of environment-behavior relations. In G. J. Madden (Ed.), *APA Handbook of Behavior Analysis Vol. 1. Methods and Principles*. Washington, DC: American Psychological Association.
- Forget, J., & Rivard, M. (2010). Évaluer la sensibilité sociale de l'enfant à l'attention de l'adulte. Perspective de recherche en Autisme [Evaluating social sensitivity of children to adult attention. Research perspectives in Autism.]. In G. Magerotte & E. Willaye (Eds.), *Intervention comportementale clinique* (pp. 235-287). Bruxelles: De Boeck.
- Herrnstein, R. J. (1961). Relative and absolute strength of response as a function of frequency of reinforcement. *Journal of the Experimental Analysis of Behavior*, 4, 267-272. doi: 10.1901/jeab.1961.4-267
- Herrnstein, R. J. (1997). *The matching law. Papers in psychology and economics*. Cambridge (MA): Harvard University Press.
- Howell, D. C. (2012). *Statistical methods for psychology*. Belmont: Wadsworth.
- McDowell, J. J. (1981). On the validity and utility of Herrnstein's hyperbola in applied behavior analysis. In C. M. Bradshaw, E. Szabadi & C. F. Lowe (Eds.), *Quantification of steady-state operant behaviour* (pp. 95-109). North Holland: Elsevier.

- McDowell, J. J. (2013). On the theoretical and empirical status of the matching law and matching theory. *Psychological Bulletin*, *139*, 1000-1028. doi: 10.1037/a0029924
- McDowell, J. J., & Ansari, Z. (2005). The quantitative law of effect is a robust emergent property of an evolutionary algorithm for reinforcement learning. In M. Capcarrere, A. Freitas, P. Bentley, C. Johnson & J. Timmis (Eds.), *Advances in artificial life: ECAL 2005, LNAI 3630*. (pp. 413-422). Berlin: Springer-Verlag.
- Myerson, J., & Hale, S. (1984). Practical implications of the matching law. *Journal of Applied Behavior Analysis*, *17*, 367-380. doi: 10.1901/jaba.1984.17-367
- Noll, J. P. (1995). The matching law as a theory of choice in behavior therapy. In W. T. O'Donohue & L. Krasner (Eds.), *Theories of behavior therapy: Exploring behavior change*. (pp. 129-144): Washington, DC, US: American Psychological Association. doi: 10.1037/10169-005
- Pearson, K. (1897). On a form of spurious correlation which may arise when indices are used in the measurement of organs. *Proceedings of the Royal Society of London*, *60*, 489-497.
- Reed, D. D. (2009). Using Microsoft Office Excel® 2007 to conduct generalized matching analyses. *Journal of Applied Behavior Analysis*, *42*, 867-875. doi: 10.1901/jaba.2009.42-867

- Rivard, M., Forget, J., Kerr, K., & Bégin, J. (2014). Matching law and sensitivity to therapist's attention in children with autism spectrum disorders. *The Psychological Record*, 65, 79-88. doi: 10.1007/s40732-014-0015-1
- St. Peter, C. C., Vollmer, T. R., Bourret, J. C., Borrero, C. S. W., Sloman, K. N., & Rapp, J. T. (2005). On the role of attention in naturally occurring matching relations. *Journal of Applied Behavior Analysis*, 38(4), 429-443. doi: 10.1901/jaba.2005.172-04
- Yule, G. Y. (1910). On the interpretation of correlations between indices or ratios. *Journal of the Royal Statistical Society*, 73, 644-647. doi: 10.2307/2339906

Footnote

¹ It is worth to note that in many cases, whether the consequences are truly reinforcers (if they increase or maintain the probabilities of behavior) is not functionally analyzed: consequences are hypothesized as reinforcers. From a conceptual standpoint, it would be more appropriate to talk about sensitivity to consequences. For sake of simplicity, we will not distinguish between reinforcer and consequence even though, at some moment, it would be more appropriate to call reinforcer contingent consequence. .

² Preliminary simulations have showed that the computation of $r_{\frac{A}{B} \frac{C}{D}}$ is approximately the same if the equation is in log form or not. No significant difference between Caron'(2015) simulation and $r_{\frac{A}{B} \frac{C}{D}}$ were found.

Hypothetical example

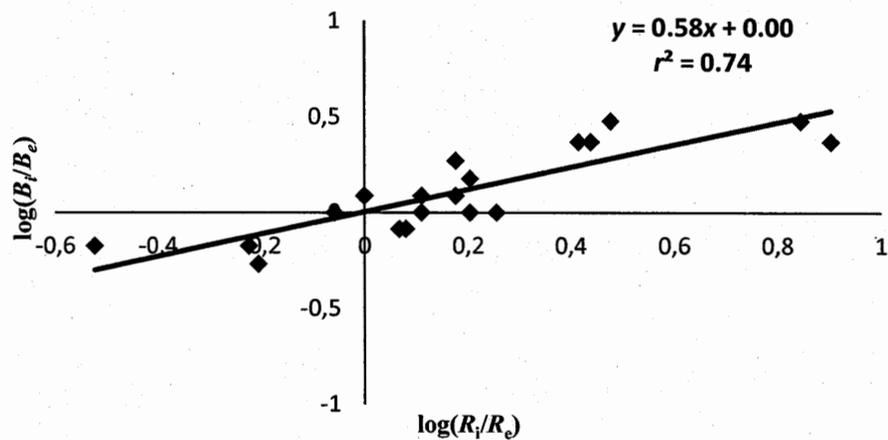


Figure 1. Hypothetical subject's response allocation as a function of reinforcer rates ratios. The response allocation of the subject is well described by the GML, $r(18) = 0.86$ and explains 74% of the variance. The subject shows an undermatching of 0.58 and no bias (0.00) toward an option or the other. See text for further details.

Table 1. Summary of the hypothetical example

	Notation	Components			
		A	B	C	D
Mean	$E(x)$	11.25	8.7	8.75	5.85
Probability	p_j or θ	0.56	0.44	0.44	0.29
Variance	σ_x	4.92	4.92	4.92	4.14
Relative variance	Vx	0.20	0.25	0.25	0.35
Correlation	Corr(x,y)	-1.00			B
		0.73	-0.73		C
		-0.88	0.88	-0.64	D
NHST	r_{AC} $\frac{B'D}{B'D}$ z-value			0.90	
				-0.69	

Appendix 1

The code in R to implement the evaluation of the matching relation. See text for details.

```
eval.matching =
function(B1,B2,R1,R2,n=NULL,r.emp=NULL,r.cpt=NULL,alpha=NULL) {

# function(B1,B2,R1,R2,n,r.emp,r.cpt,alpha)
#
# Evaluate the probability of a matching relation
# according to the expected hypothetical correlation
# inherent to operant situations
#
# B1 = probability of behavior 1
# B2 = probability of behavior 2
# R1 = probability of consequence 1
# R2 = probability of consequence 2
# n = the maximum number of possible behavior
# r.emp = the empirical correlation
# r.cpt = the correlation between behavior,
#         default value -1
# alpha = probability of making a type I error,
#         default value 0.05, unilateral
#
# Example :
# eval.matching(0.9,0.1,0.1,0.7,20,.64)

if(missing(n)){
n=100
}

if(missing(r.cpt)){
r.cpt=-1
}

if(missing(alpha)){
alpha=0.05
}

p0 = B1
p1 = R1
p2 = R2
p00 = B2

EA = n*p0
EB = n*p00
EC = n*p0*p1
ED = n*p00*p2

VA = sqrt(n*p0*(1-p0))
```

```

VB = sqrt(n*p00*(1-p00))
VC = sqrt(n*p0*p1*(1-p0*p1))
VD = sqrt(n*p00*p2*(1-p00*p2))
CA = VA/EA
CB = VB/EB
CC = VC/EC
CD = VD/ED

rAC = n*(p0*p1-p0*p0*p1)/(VA*VC)
rAB = r.cpt
rBD = n*(p00*p2-p00*p00*p2)/(VB*VD)
rCB = r.cpt * rAC
rAD = r.cpt * rBD
rCD = rAD*rAC

r = (rAC*CA*CC - rAD*CA*CD - rCB*CC*CB + rBD*CB*CD)/(sqrt(CA^2+CB^2-
2*rAB*CA*CB)*sqrt(CC^2+CD^2- 2*rCD*CC*CD))

if(missing(r.emp)){
return(r)
}else{
z = (atanh(r.emp)-atanh(r))/(sqrt(1/(n-3)))
p = 1-pnorm(z)
if (p < alpha){
Stat = 'Sig'
} else {
Stat = 'n.s.'}
return(list(r,z,p,Stat))
}
}

```

Appendix 2

The following table contains every $r_{A/C} \frac{c}{B'D}$ for reinforcement probabilities p_j from 0.10 to

0.90. Only the θ of 0.10 to 0.50 are given, since 0.60 to 0.90 is an approximate (at the second decimal) reflection of these values.

θ	p_1	p_2								
		0.10	0.20	0.30	0.40	0.50	0.60	0.70	0.80	0.90
0.10	0.10	0.31	0.33	0.34	0.35	0.35	0.35	0.36	0.36	0.36
	0.20	0.41	0.44	0.46	0.47	0.47	0.48	0.48	0.48	0.48
	0.30	0.48	0.53	0.55	0.56	0.56	0.57	0.57	0.58	0.58
	0.40	0.54	0.59	0.62	0.63	0.64	0.65	0.65	0.66	0.66
	0.50	0.59	0.65	0.68	0.70	0.71	0.71	0.72	0.73	0.73
	0.60	0.62	0.70	0.73	0.75	0.76	0.77	0.78	0.79	0.79
	0.70	0.66	0.74	0.78	0.80	0.82	0.83	0.84	0.84	0.85
	0.80	0.68	0.77	0.82	0.85	0.86	0.88	0.89	0.89	0.90
	0.90	0.71	0.81	0.86	0.89	0.91	0.92	0.93	0.94	0.95
0.20	0.10	0.31	0.34	0.36	0.36	0.37	0.37	0.37	0.38	0.38
	0.20	0.40	0.45	0.47	0.48	0.49	0.49	0.50	0.50	0.50
	0.30	0.46	0.52	0.55	0.56	0.58	0.58	0.59	0.60	0.60
	0.40	0.50	0.57	0.61	0.63	0.65	0.66	0.67	0.67	0.68
	0.50	0.53	0.62	0.66	0.69	0.71	0.72	0.73	0.74	0.75
	0.60	0.56	0.65	0.70	0.74	0.76	0.77	0.79	0.80	0.80
	0.70	0.58	0.68	0.74	0.78	0.80	0.82	0.84	0.85	0.86
	0.80	0.59	0.71	0.77	0.81	0.84	0.86	0.88	0.89	0.91
	0.90	0.61	0.73	0.80	0.85	0.88	0.90	0.92	0.94	0.95
0.30	0.10	0.32	0.35	0.37	0.38	0.39	0.39	0.39	0.40	0.40
	0.20	0.39	0.45	0.48	0.49	0.50	0.51	0.52	0.52	0.53
	0.30	0.44	0.51	0.55	0.57	0.59	0.60	0.61	0.62	0.62
	0.40	0.47	0.55	0.60	0.63	0.65	0.67	0.68	0.69	0.70
	0.50	0.49	0.59	0.64	0.68	0.71	0.73	0.74	0.75	0.76
	0.60	0.51	0.61	0.68	0.72	0.75	0.77	0.79	0.81	0.82
	0.70	0.52	0.64	0.71	0.75	0.79	0.82	0.84	0.85	0.87
	0.80	0.53	0.65	0.73	0.78	0.82	0.85	0.88	0.89	0.91
	0.90	0.54	0.67	0.75	0.81	0.85	0.88	0.91	0.93	0.95
0.40	0.10	0.32	0.36	0.38	0.40	0.41	0.41	0.42	0.42	0.42
	0.20	0.38	0.45	0.48	0.51	0.52	0.53	0.54	0.55	0.55
	0.30	0.42	0.50	0.55	0.58	0.60	0.62	0.63	0.64	0.65
	0.40	0.44	0.54	0.59	0.63	0.66	0.68	0.70	0.71	0.72
	0.50	0.46	0.56	0.63	0.67	0.71	0.73	0.75	0.77	0.78
	0.60	0.47	0.58	0.66	0.71	0.75	0.77	0.80	0.82	0.83
	0.70	0.48	0.60	0.68	0.73	0.78	0.81	0.84	0.86	0.88
	0.80	0.48	0.61	0.70	0.76	0.80	0.84	0.87	0.89	0.92
	0.90	0.49	0.62	0.71	0.78	0.83	0.87	0.90	0.93	0.95
	0.10	0.32	0.37	0.40	0.42	0.43	0.44	0.44	0.45	0.45

0.50	0.20	0.37	0.45	0.49	0.52	0.54	0.56	0.57	0.58	0.59
	0.30	0.40	0.49	0.55	0.59	0.61	0.64	0.65	0.67	0.68
	0.40	0.42	0.52	0.59	0.63	0.67	0.69	0.72	0.73	0.75
	0.50	0.43	0.54	0.61	0.67	0.71	0.74	0.76	0.79	0.80
	0.60	0.44	0.56	0.64	0.69	0.74	0.77	0.80	0.83	0.85
	0.70	0.44	0.57	0.65	0.72	0.76	0.80	0.84	0.86	0.89
	0.80	0.45	0.58	0.67	0.73	0.79	0.83	0.86	0.89	0.92
	0.90	0.45	0.59	0.68	0.75	0.80	0.85	0.89	0.92	0.95

CHAPITRE VI

PRÉSENTATION DE L'ARTICLE 5

DES OUTILS POUR ÉVALUER LA SENSIBILITÉ AU RENFORCEMENT SOUS
EXCEL, R ET MATLAB

Soumis au Journal de Thérapie Comportementale et Cognitive

Des outils pour évaluer la sensibilité au renforcement sous Excel, R et Matlab

Tools to evaluate sensitivity to reinforcement in Excel, R and Matlab

Caron, Pier-Olivier

Département de Sexologie, Université du Québec à Montréal

Titre court : Outils d'évaluation de la sensibilité au renforcement

Nombre de mots : 4486

Notes des auteurs

L'auteur avec qui correspondre est Pier-Olivier Caron, Université du Québec à Montréal, Département de Sexologie, C.P. 8888 succursale Centre-ville, Montréal (Québec, Canada), H3C 3P8, (courriel : pocaron19@gmail.com).

L'auteur a reçu une bourse du Fonds de recherche du Québec – Société et culture. L'auteur était au département de psychologie de l'Université du Québec à Montréal pendant ces travaux.

Conflits d'intérêt : aucun

Résumé

C'est dans les années 90 que l'on note un accroissement important des études sur les applications en milieux naturels et en contextes appliqués de la loi de l'appariement. Le problème est cependant qu'il n'existe que des règles arbitraires non soutenues empiriquement et théoriquement pour évaluer si, effectivement, les comportements d'un agent respectent les prédictions de la loi de l'appariement (si le modèle s'applique bien aux données comportementales). Depuis des travaux récents, une avenue intéressante se basant sur les propriétés statistiques inhérentes aux situations opérantes et utilisant ces dernières comme modèle nul répond à ce problème. Cette conceptualisation possède plusieurs avantages : elle s'accorde avec une perspective molaire-moléculaire du comportement, elle repose sur des mathématiques formelles et elle est flexible par rapport aux probabilités comportementales et de renforcement. Cependant, il n'existe aucune façon de réaliser ces calculs. Dans l'optique de démocratiser son utilisation et d'améliorer la qualité des études publiées sur la loi de l'appariement, l'objectif du présent article est de présenter trois logiciels implémentant les calculs du modèle et du test d'hypothèse pour évaluer la sensibilité au renforcement. Un exemple est présenté en guise de conclusion afin d'illustrer la procédure.

Mots clés : loi de l'appariement, logiciel, sensibilité au renforcement, conditionnement opérant, R, Matlab, Excel

Abstract

In the 90s, there is an increase in the number of paper published on the matching in natural and applied settings. The problem however is that there is only arbitrary rules of thumb, neither supported empirically nor theoretically, to evaluate whether a subject's behavior is sensitive to reinforcement or not (i.e., if their behavior follow the matching law). Recent works on the statistical properties in operant settings address this problem. This approach have numerous advantages such as being consistent with an molar-molecular perspectives, as being derived from formal mathematics, and as being flexible in accounting for different probabilities of reinforcement and responses. Unfortunately, there is no simple way to carry out the computation implied by this model. The current paper present a software (in Microsoft Office Excel) and two script (in R and Matlab) implementing the works on the statistical properties in operant settings. Finally, an example is used to illustrate the procedure. The current work is an attempt to promote the use of quantitative analysis as well as a more rigorous approach in testing the matching law.

Keywords : matching law, software, sensitivity to reinforcement, operant conditioning, R, Matlab, Excel

Des outils pour évaluer la sensibilité au renforcement

sous Excel, R et Matlab

La loi de l'appariement (angl. *matching law*, [1]) est un modèle provenant de l'analyse expérimentale du comportement. Elle s'est révélée décrire précisément les choix des organismes lorsque ceux-ci répondent à un programme de renforcement concurrent [2-11]. Spécifiquement, le modèle stipule que la fréquence d'un comportement est proportionnelle au taux relatif de renforçateurs obtenus. L'appariement possède une importante notoriété dans la littérature scientifique expérimentale et acquiert progressivement une importance clinique significative depuis les années 90 [10].

S'en suit depuis des études transactionnelles sur l'applicabilité de l'appariement en contexte naturel. Ces études focalisent principalement sur la description des choix d'humains. Leur objectif est d'évaluer l'étendue des situations dans lesquelles le modèle semble s'appliquer.

Si le programme de recherche est prometteur de prime abord, les chercheurs se butent à la difficulté de tirer des conclusions expérimentalement valides. Le problème est qu'en l'absence de contrôle de la variable indépendante, il est impossible de confirmer hors de tout doute le lien entre les taux comportementaux et de renforcement [12]. La majeure partie des études ont d'ailleurs recours à des devis non expérimentaux. En effet, 68 % des études transactionnelles sur l'appariement

recourent à des observations descriptives où le protocole de recherche n'implique aucune manipulation expérimentale, restreignant l'applicabilité de leurs conclusions [13]. Autrement dit, en absence d'un devis expérimental, la problématique revient à déterminer à quel moment les résultats obtenus par la loi de l'appariement sont vraisemblablement dus au contrôle exercé par le ratio des renforçateurs sur les comportements de l'organisme.

Cette conclusion mène à un second problème : il est difficile de tirer la conclusion qu'un organisme suit effectivement les prédictions de la loi de l'appariement. Aucune règle théoriquement valide n'existe actuellement pour déterminer si l'organisme dans la situation opérante est sensible ou non aux contingences de renforcement. L'obtention de variances expliquées élevées n'est pas garante du contrôle des ratios de comportements par rapport aux ratios de renforçateurs. Pourtant, toutes les études sur l'appariement, particulièrement les études transactionnelles, n'ont recours qu'à une heuristique de décision selon laquelle une variance expliquée de plus de 50 % est suffisante pour juger l'organisme sensible aux contingences [14, 15], et ce, sans égard à d'autres paramètres aussi intéressants, tels que le paramètre de sensibilité et le biais. Ces paramètres, seuls, ne sont pas plus suffisants. L'heuristique est cependant problématique, car il n'est ni justifié théoriquement ni empiriquement.

À quel moment l'organisme est-il sensible ou non aux contingences de renforcement? Pour répondre à cette question, une série d'études [10, 16, 17] propose

l'idée selon laquelle une situation opérante possède des propriétés contraignant la fréquence d'apparition des comportements et des conséquences, corrélant ainsi les composantes de l'équation d'appariement (comportements et renforçateurs) et, conséquemment, la corrélation entre leurs ratios. Ces conjectures permettent l'élaboration d'un modèle nul (un modèle ne contenant que l'influence des propriétés) permettant d'évaluer les relations d'appariement des organismes à la fois flexible et orientée théoriquement. Il implique que la variance expliquée d'une relation d'appariement attendue dans une situation opérante est élevée sans nécessiter de processus comportementaux.

Les études [16, 17] montrent que des contraintes simples et connues par la communauté en analyse du comportement ont une influence non négligeable sur les paramètres de la loi de l'appariement. Par exemple, la contrainte selon laquelle l'apparition d'une conséquence contingente doit être conditionnellement précédée de la présence d'un comportement (voir [18]) implique que la quantité de réponses est toujours supérieure à celle des renforçateurs, ou encore la contrainte selon laquelle les fréquences entre deux comportements sont réciproques lorsque deux seules options sont possibles dans la population [voir 19]. La première contrainte explique à elle seule 47 % de la variance expliquée en moyenne et l'ajout de la seconde augmente le taux à 63 % [17].

Suite à ces travaux, un modèle nul permettant de calculer a priori l'influence des corrélations entre les comportements et les renforçateurs [20]. Le modèle se base

sur le fait que ces articles aient engendré des résultats intéressants à la fois sur le plan de la conceptualisation des contraintes inhérentes au programme de renforcement, et aussi leur influence non négligeable sur la loi de l'appariement. Essentiellement, ce modèle explique les très bonnes performances, en termes de variance expliquée, de la loi de l'appariement et montre une piste intéressante afin d'évaluer les relations d'appariement : le modèle nul.

L'utilité du modèle nul réside en sa quantification des corrélations entre les ratios des comportements et des renforçateurs moyennant quelques hypothèses sous-jacentes. Le modèle conceptualise ce qui est attendu dans une situation opérante lorsqu'aucun processus comportemental n'est impliqué. Il évalue si la relation d'appariement est due plausiblement aux contraintes de l'environnement. Au contraire, un participant dont les comportements se distinguent fortement du modèle nul signifie que d'autres phénomènes sont impliqués dans ces choix. Ainsi, un profil comportemental d'un participant qui ressemble à celui du modèle indique que ses comportements ne se distinguent pas d'une structure aléatoire excluant la présence de mécanismes internes. Par rasoir d'Occam, l'intervenant préférera le modèle le plus simple, celui dont les construits hypothétiques sont les plus vraisemblables.

Le modèle possède plusieurs avantages. Il s'accorde avec une perspective molaire-moléculaire du comportement, il repose sur des mathématiques formelles, il est flexible par rapport aux probabilités comportementales et de renforcement, et il

s'exporte facilement pour que d'autres chercheurs et intervenants puissent l'utiliser.

Nous verrons chacun de ces points plus en détail.

Une force de la modélisation employée dans cette thèse est qu'elle se conçoit aussi bien à l'échelle molaire que moléculaire. Les fondements statistiques sont aussi exacts lorsque la taille d'échantillon est faible que lorsqu'elle est élevée : c'est la précision et la puissance statistique qui varient. En utilisant une telle conceptualisation, le problème d'expliquer le processus menant à l'équilibre molaire de l'appariement s'évanouit. Il n'est pas nécessaire d'employer un mécanisme différent pour chacune des échelles ou, plus élégamment, de partir d'un modèle molaire et d'en baser un autre moléculaire qui, sur le plan formel, est plus insuffisant (voir à ce sujet [10]). Il s'agit ici d'une propriété avantageuse du modèle nul.

Une autre force du modèle est sa robustesse formelle. (La présentation du modèle dépasse le cadre de cet article – quoique le lecteur trouvera en annexe les détails du calcul – mais le lecteur est référé à l'article [20].) Ce dernier se base sur des théorèmes garantissant sa véracité computationnelle. Cela ne certifie pas que les contraintes hypothétiques soient exactes (ce sont des conjectures), mais bien que les calculs qu'elles impliquent s'avèrent vrais sous toutes les conditions. Autrement dit, même si dans un futur proche, les chercheurs s'aperçoivent d'une limite dans l'applicabilité du modèle, les contributions de la présente thèse seront encore valides. Ce n'est pas l'apanage de toutes les contributions en psychologie. Il faut remarquer enfin que, puisque les hypothèses sous-jacentes sont explicites, la formalisation du

modèle est facilement révisable. L'étude, quant à ses limites et son applicabilité, est d'autant plus facilitée. Cette contribution est en contraste avec le critère [14] selon lequel une variance expliquée de plus de 50 % suffit à conclure que l'organisme est sensible aux contingences de renforcement. Ce critère n'est pas soutenu ni empiriquement ni théoriquement alors que le modèle nul est dérivé d'hypothèses statistiques et que l'équation calculant la corrélation entre les ratios est formellement valide.

La troisième force du modèle nul est qu'il rend compte des probabilités de comportement et de renforcement. St. Peter et al. [21] mentionnent que lorsque la fréquence des conséquences est élevée et puisque l'occurrence d'un renforçateur est conditionnelle à celle d'un comportement, alors la corrélation entre les ratios devient fallacieusement plus élevée. Le modèle nul rend compte de ce phénomène. Un exemple permettra de mieux comprendre [20]. Dans une expérience hypothétique, un participant émet en moyenne 56 % de comportement B_1 , 44 % de comportement B_2 et chacune des réponses est associée respectivement à probabilité de renforcement est de 78 % et 67 %. Ces résultats entraînent, selon le modèle nul, une corrélation entre ratios de 0,85. Par contre, si les probabilités de renforcement sont diminuées, par exemple, les deux à 40 %, alors la corrélation entre ratios est de 0,63. Le modèle répond par conséquent au problème soulevé par St. Peter et al. (2005).

Devant autant d'avantages, il apparaît impératif d'offrir aux chercheurs intéressés des outils informatiques afin de réaliser les calculs.

Fonctionnement du logiciel Excel

La présente section est un tutoriel montrant le fonctionnement du document informatique permettant de calculer automatiquement la corrélation hypothétique du modèle nul. Le document est une feuille de calcul sous Microsoft Office Excel 2010. Le document sera disponible en lien avec cet article.

Avant débiter, il faut noter que la relation d'appariement du sujet doit avoir été préalablement mesurée avant de mener la présente analyse. L'utilisateur est dirigé vers l'ouvrage de Reed [14] pour plus de détails sur l'analyse de la relation d'appariement. En fin de section, la programmation sous les logiciels R et Matlab est offerte. Pour éviter une opération de « copier-coller » abusive, ces codes de programmation sont aussi disponibles avec cet article.

INSÉRER LA FIGURE 1

La figure 1 montre la feuille de calcul une fois que le téléchargement est complété et que le document est ouvert. La feuille est séparée en trois sections : l'entrée des données, les notes explicatives et la sortie statistique. Des données sont déjà entrées à titre illustratif. Il faut noter que les calculs sont intégrés dans une feuille de calcul masquée non nécessaire à l'utilisateur.

L'entrée des données est située en haut à gauche. Dans cette section, quelques indices tirés des données empiriques sont utilisés afin de calculer la corrélation entre les ratios. Spécifiquement, il faut ajouter sous les colonnes intitulées B_1 , B_2 , R_1 et R_2 ,

les probabilités moyennes respectives de voir apparaître les comportements (B_1 et B_2) et les conséquences (R_1 et R_2). Dans cet exemple, les probabilités sont respectivement 0,90, 0,10, 0,10 et 0,40. Pour ces quatre colonnes, il est impératif d'entrer des proportions, c'est-à-dire des valeurs entre 0 et 1.

Sous ces colonnes, cinq lignes permettent d'ajuster le modèle et l'inférence statistique. D'abord, sur la ligne intitulée *Corrélation empirique*, il faut entrer la corrélation obtenue lorsque l'utilisateur a testé préalablement la relation d'appariement, c'est-à-dire la corrélation observée entre les comportements et les renforçateurs obtenus d'un participant. Il faut faire attention ici de bien entrer la corrélation de Pearson (r) et non la variance expliquée (r^2) qui est le carré de la corrélation. Ensuite, sous cette ligne, se trouve la ligne intitulée *Corrélation entre comportements*. Il faut y entrer la contrainte sous laquelle l'échantillonnage (l'observation) des comportements s'est réalisé. Une corrélation négativement parfaite de -1 est suggérée [17, 21]. Cela signifie que les comportements B_1 et B_2 sont réciproques : connaître la fréquence d'un comportement détermine la fréquence de l'autre. Dans les conditions où deux seuls comportements sont possibles et où il y a un maximum de comportements observables par séance, alors la contrainte est vraisemblable. Une façon de le vérifier est de constater si la probabilité du comportement B_1 est égale à la différence de 1 moins la probabilité du comportement B_2 . Si c'est approximativement le cas, la contrainte est adéquate. Dans le cas contraire, une valeur de zéro peut être préférée. À noter qu'une valeur arbitraire

peut aussi être utilisée selon l'échantillonnage utilisé. Elle doit se situer entre -1 et 1, et doit, dans la mesure du possible, représenter l'échantillonnage comportemental. Il est suggéré d'utiliser -1 dans le cas d'un échantillonnage par intervalle et 0 pour un échantillonnage continu. Le premier cas est d'ailleurs ce qui est programmé par défaut. Le *nombre de séances* correspond au nombre de données (taille d'échantillon) avec laquelle l'analyse de l'appariement est réalisée. Techniquement, la valeur est un nombre entier positif. La quatrième ligne, *Alpha*, correspond à la probabilité de faire une erreur de type I, c'est-à-dire la probabilité de rejeter l'hypothèse nulle lorsqu'elle est fausse. La valeur est fixée à 0,05 comme dans la plupart des domaines en sciences humaines. Enfin, la cinquième ligne intitulée *Direction du test*, permet de choisir si l'inférence statistique est bidirectionnelle (teste simultanément si la corrélation empirique est significativement plus grande ou plus petite que la corrélation hypothétique) ou unilatérale (teste uniquement si la corrélation empirique est significativement plus grande que la corrélation hypothétique, ou son contraire et non les deux à la fois). Par défaut, le test est unilatéral et évalue si la corrélation empirique surpasse la corrélation hypothétique. Pour modifier la direction du test, il faut modifier selon les modalités suivantes : 0 représente un test unilatéral supérieur (par défaut), 1 correspond à un test unilatéral inférieur et 2 représente un test bilatéral. Pour obtenir le résultat dans la sortie statistique, il faut impérativement inclure le nombre de séances et la corrélation empirique.

La deuxième section consiste aux notes explicatives situées à droite lorsque la feuille de calcul est ouverte. Ces commentaires mentionnent simplement ce qui est énuméré précédemment. La première note explique ce qu'il faut entrer sous les colonnes intitulées B_1 , B_2 , R_1 et R_2 . La deuxième note commente la corrélation empirique, la corrélation entre les comportements, le nombre de séances d'observation, la valeur alpha et la direction du test.

La troisième section présente la sortie statistique. La première valeur, *Corrélation comparative*, consiste à la corrélation hypothétique du modèle nul (la corrélation $r_{\frac{A\ C}{B\ D}}$ selon [20]). Si l'utilisateur souhaite connaître la valeur de la corrélation hypothétique sans la comparer à une autre valeur comparative, c'est cette cellule qui l'en informera. La *valeur-z* obtenue est la différence entre une statistique observée (la corrélation empirique) et le paramètre de population hypothétique. Statistiquement, une distance de 1,64 (pour un test unilatéral) ou de 1,96 (pour un test bilatéral) signifie que l'hypothèse nulle d'absence de lien est rejetée. Conjointement à cela, la ligne *Probabilité (valeur-p)* indique la probabilité de la corrélation obtenue par rapport à la corrélation hypothétique. Il s'agit de la probabilité de la *valeur-z*. Enfin, la ligne *Significatif* indique littéralement si la différence est significative par l'abréviation *Sig* ou *n.s.* dans le cas contraire. L'utilisateur n'a qu'à consulter cette ligne pour connaître si le sujet se comporte statistiquement différemment du modèle nul. Si c'est le cas, alors les comportements du sujet sont vraisemblablement

sensibles aux contingences de renforcement. Autrement, les données ne sont pas une preuve suffisante pour soutenir la conclusion.

Fonctionnement du logiciel de R et de Matlab

Afin de permettre une plus grande dissémination de l'évaluation des relations d'appariement, une fonction R et une fonction Matlab sont offertes. Cette section décrit leur fonctionnement simultanément, car les deux sont semblables.

Évaluation de la relation d'appariement sous R

La figure 2 montre le code nécessaire à l'implantation de l'évaluation de la relation. Copier l'ensemble de la figure dans la console R ou télécharger le fichier d'extension zip obtenu de l'auteur permettra d'utiliser *eval.app* comme fonction. Le code est disponible avec cet article.

L'annexe 1 montre le calcul permettant l'évaluation de la probabilité d'une corrélation empirique obtenue d'une relation d'appariement par rapport à la corrélation hypothétique proposée par le modèle nul. Ces calculs sont décrits par [20]. Il faut simplement rappeler qu'elle fonctionne avec un minimum de quatre arguments (B_1 , B_2 , R_1 et R_2). Dans ce cas, elle rapporte la corrélation hypothétique seulement. Si on y ajoute la corrélation empirique et N , la fonction rapporte le test d'hypothèse. Les trois autres arguments, alpha, la corrélation entre les comportements (*r.cpt*) et la direction du test (*Dir*), sont déjà fixés et peuvent être modifiés au besoin. La sortie de la fonction retourne, comme c'est le cas avec la feuille de calcul Microsoft Office

Excel 2010, quatre valeurs. La première est la corrélation hypothétique du modèle nul. La deuxième est la valeur z . La troisième est la valeur p associée à la valeur z . Enfin, la quatrième est l'indice littéral indiquant si la relation d'appariement observée est significativement différente de celle du modèle nul. Bref, la sortie R est très similaire à la sortie de la feuille de calcul.

Évaluation de la relation d'appariement sous Matlab

L'annexe 2 présente le code nécessaire à l'évaluation des relations d'appariement dans le logiciel Matlab. Puisqu'elle est fonctionnellement similaire au code R, elle ne sera pas décrite davantage. Pour la faire fonctionner, il faut « copier-coller » le code dans un fichier d'extension m ou obtenir le fichier de l'auteur. Le programme fonctionne avec un minimum de quatre arguments (B_1 , B_2 , R_1 et R_2). Alors, il rapporte seulement la corrélation hypothétique. Si on y ajoute la corrélation empirique, la fonction rapporte le test d'hypothèse. La sortie est la même que celle de la fonction R et de la feuille de calcul dans Microsoft Office Excel 2010. Encore une fois, le code sera disponible directement de l'auteur.

Illustration

Pour illustrer le fonctionnement de la feuille Excel, un exemple hypothétique inspiré de Caron, Forget et Rivard [15] est utilisé. L'objectif de l'étude est d'analyser par l'intermédiaire de la loi de l'appariement la relation naturelle qui existe entre les comportements de jouer et l'attention sociale. Dans la procédure de l'étude, un enfant

âgé de quatre ans est placé dans une situation de jeu libre en garderie. L'enfant peut émettre deux catégories de comportement : jouer ou émettre d'autres réponses. Le renforçateur étudié est l'attention sociale contingente à l'un et l'autre de ces comportements. Les ratios de renforçateur ne sont pas contrôlés. Une procédure d'observation par intervalle intermittent (5 s d'observation suivie de 5 s d'enregistrement manuscrit) est utilisée. Les comportements de l'enfant sont observés pendant 20 séances.

INSÉRER LA FIGURE 2

La figure 2 présente les ratios de renforcement (en abscisse) par rapport aux ratios de comportement (en ordonnée). Les axes sont sous forme logarithmique. L'allocation des réponses du participant son très bien expliquée par la loi généralisée de l'appariement $r_{(18)} = 0,90$ et cette dernière explique 81,74% de la variance. Le participant montre un sous-appariement de 0,80 et un biais de 0,04, c'est-à-dire une préférence négligeable pour le comportement de jouer (B_1). Cette relation d'appariement est très similaire à celle obtenue dans la littérature appliquée sur le sujet [13, 15, 21].

Afin de préparer l'analyse, il faut calculer la probabilité d'émettre une réponse de jouer (B_1) et celle d'un autre comportement (B_2) ainsi que leur probabilité respective d'être renforcée (R_1 et R_2). Ces renseignements sont calculés à partir des données empiriques. Dans cet exemple les valeurs sont de $\Pr(B_1) = 0,67$,

$\Pr(B_2) = 0,34$. Pour calculer les probabilités de renforcement, il faut calculer le taux de renforcement par séance divisé par la probabilité de la réponse (sans la division, le calcul donnerait la probabilité d'un renforçateur conditionnel à la réponse). Ces calculs donnent ainsi les valeurs de $\Pr(R_1) = 0,66$ et $\Pr(R_2) = 0,59$. Ces deux valeurs sont relativement élevées et pourraient inquiéter un intervenant ou un chercheur, c'est-à-dire, comme St. Peter [21] le souligne, que les taux de renforcement sont si élevés que la relation d'appariement pourrait être falacieuse. Ensuite, il faut déterminer une corrélation interréponses entre les valeurs de -1 et 1. Puisque dans ce cas, $\Pr(B_1) \approx 1 - \Pr(B_2)$ et que la procédure est par intervalle intermittent, la valeur de -1 est tout à fait vraisemblable.

INSÉRER LE TABLEAU 1

Une fois les probabilités de B_1 , B_2 , R_1 et R_2 ainsi que le nombre de séances ($n = 20$) et la corrélation empirique ($r = 0,90$), la feuille affiche les résultats présentés au tableau 1. Notez qu'il est facultatif d'entrer la corrélation interréponses de -1, car le logiciel choisit cette valeur par défaut. Le tableau montre que la corrélation attendue par le modèle nul est de 0,78 (corrélation comparative), ce qui correspond à une différence (en score z) de 1,87. Puisque, dans ce cas, nous testons à savoir si la relation d'appariement de participant est meilleure que celle attendue par le modèle nul, on choisit une valeur alpha de 0,05 et un test unidirectionnel (valeurs par défaut dans la feuille). Avec ce test d'hypothèse, le test est significatif : on rejette l'hypothèse selon laquelle le participant agit seulement en fonction des propriétés

statistiques inhérentes aux opérantes. Autrement dit, les comportements de sujet sont vraisemblablement sensibles aux contingences de renforcement.

De façon intéressante, la valeur p est assez près du seuil de signification, soit 0,03. Avoir utilisé un test bidirectionnel, par exemple, le test ne serait plus significatif. Cela illustre bien comment le modèle nul est beaucoup plus sévère qu'une hypothèse nulle traditionnelle. Le critère de Reed quant à lui conclurait que la corrélation empirique est très convaincante. Ici, le résultat est plus nuancé.

Il est aussi possible d'illustrer la flexibilité du test en modifiant les probabilités de renforcement par $\Pr(R_1) = 0,20$ et $\Pr(R_2) = 0,30$, alors la corrélation du modèle nul devient 0,503 (au lieu de 0,78). Avec les mêmes probabilités de comportement et la même corrélation empirique, cela donne un score z de 3,87, $p < 0.001$, ce qui est beaucoup plus convaincant comme rejet de l'hypothèse nulle. Cet exemple illustre bien comment le test rend compte du problème soulevé par St. Peter [21].

Discussion

L'objectif du présent article est de présenter trois logiciels implémentant les calculs des propriétés statistiques inhérentes aux situations opérantes et du test d'hypothèse pour évaluer la sensibilité au renforcement. Dans l'optique de démocratiser l'utilisation de cette analyse et d'ainsi améliorer la qualité des études publiées sur la loi de l'appariement, trois logiciels sont rédigés et offerts aux lecteurs.

L'analyste du comportement avec peu ou pas d'expérience dans la façon de conduire des analyses sur la loi de l'appariement a dorénavant les outils nécessaires pour analyser l'interaction comportement-renforcement dans plusieurs contextes de recherche et de milieux cliniques. Le lecteur doit néanmoins rester vigilant, car le présent ouvrage détaille l'une de plusieurs approches possibles quant à l'évaluation de l'appariement. De plus, les calculs des procédures et les logiciels employés ne sont qu'une suggestion parmi plusieurs logiciels que le lecteur pourrait vouloir utiliser. Il est donc libre d'implémenter la procédure comme il le souhaite. Finalement, les lecteurs et potentiels utilisateurs sont encouragés à modifier et ajuster les paramètres afin de bien refléter leurs propres travaux et, si possible, de contribuer à l'étude sur des propriétés statistiques inhérentes aux situations opérantes.

Références

1. Herrnstein RJ. Relative and absolute strength of response as a function of frequency of reinforcement. *J Exp Anal Behav.* 1961;4:267-72.
2. Baum WM. Matching, undermatching, and overmatching in studies of choice. *J Exp Anal Behav.* 1979;32(2):269-81.
3. Wearden JH, Burgess IS. Matching since Baum (1979). *J Exp Anal Behav.* 1982;38(3):339-48.
4. Baum WM. Matching, statistics, and common sense. *J Exp Anal Behav.* 1983;39(3):499-501.
5. Davison M, McCarthy D. *The matching law: a research review.* Hillsdale (NJ): Erlbaum; 1988.
6. Pierce WD, Epling WF. Choice, matching, and human behavior: A review of the literature. *Behav Anal.* 1983;6(1):57-76.
7. Forget J, Donais S, Giroux N. La loi de l'appariement et ses applications en psychologie clinique et en éducation. *Rev Psychoeduc Orient.* 2001;30(2):311-27.
8. McDowell JJ. On the classic and modern theories of matching. *J Exp Anal Behav.* 2005;84(1):111-27.
9. McDowell JJ. On the theoretical and empirical status of the matching law and matching theory. *Psychol Bull.* 2013;139(5):1000-28.
10. Caron P-O. Sur la loi de l'appariement. *Psychol Fr.* 2017;62:29-55.

11. McDowell JJ. On the falsifiability of matching theory. *J Exp Anal Behav.* 1986;45(1):63-74.
12. Bijou SW, Peterson RF, Ault MH. A method to integrate descriptive and experimental field studies at the level of data and empirical concepts. *J Appl Behav Anal.* 1968;1(2):175-91.
13. Caron P-O, Royer F, Forget J. La sensibilité sociale : une recension critique. *Acta Comport.* 2014;22(3):334-51.
14. Reed DD. Using Microsoft Office Excel® 2007 to conduct generalized matching analyses. *J Appl Behav Anal.* 2009;42(4):867-75.
15. Rivard M, Forget J, Kerr K, Bégin J. Matching law and sensitivity to therapist's attention in children with autism spectrum disorders. *Psychol Rec.* 2014;65(1):79-88.
16. Caron P-O. La loi généralisée de l'appariement : une simulation de Monte-Carlo. *Acta Comport.* 2014;22(2):169-79.
17. Caron P-O. Matching without learning. *Adapt Behav.* 2015;23(4):227-33.
18. McDowell JJ, Ansari Z. The quantitative law of effect is a robust emergent property of an evolutionary algorithm for reinforcement learning. In: Capcarrere M, Freitas A, Bentley P, Johnson C, Timmis J, editors. *Advances in artificial life: ECAL 2005*, LNAI 3630 Berlin: Springer-Verlag; 2005. p. 413-22.
19. Rachlin H. Economics of the matching law. In: Commons ML, Herrnstein RJ, Rachlin H, editors. *Quantitative analyses of behavior : Matching and maximizing accounts. II.* Cambridge: Ballinger; 1982. p. 347-74.

20. Caron P-O. On the statistical properties of operant settings and their contribution to the evaluation of sensitivity to reinforcement. *Adapt Behav.* accepted.

21. St. Peter CC, Vollmer TR, Bourret JC, Borrero CSW, Sloman KN, Rapp JT. On the role of attention in naturally occurring matching relations. *J Appl Behav Anal.* 2005;38(4):429-43.

Tableau 1. Résumé des résultats

Entrée statistique			
B_1	B_2	R_1	R_2
0,671	0,344	0,658	0,587
Test d'hypothèse			
Corrélation empirique			0,90
Corrélation entre comportement			-1,00
Nombre de séances			20
Alpha			
Direction du test			
Sortie statistique			
Corrélation comparative			0,78
Valeur z			1,87
Probabilité (valeur p)			0,03
Significatif			Sig

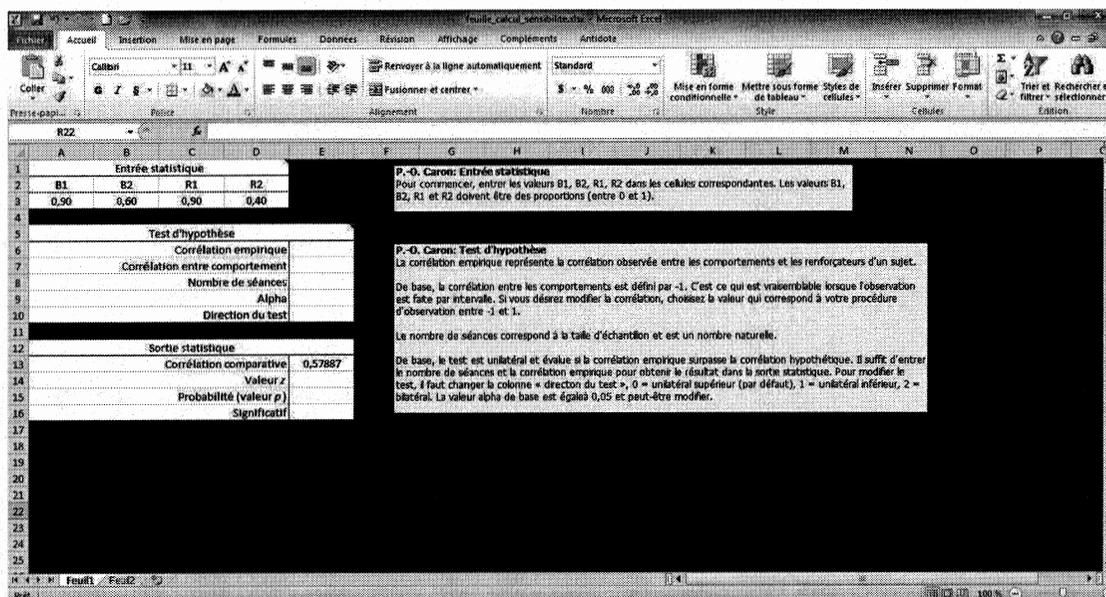


Figure 1. Ouverture de la feuille de calcul permettant d'évaluer la sensibilité sous Microsoft Office Excel 2010. Noter la présence de trois sections : l'entrée d'indices en haut à gauche, la sortie statistique au centre gauche et les notes explicatives à droite. Des données sont déjà entrées à titre démonstratif.

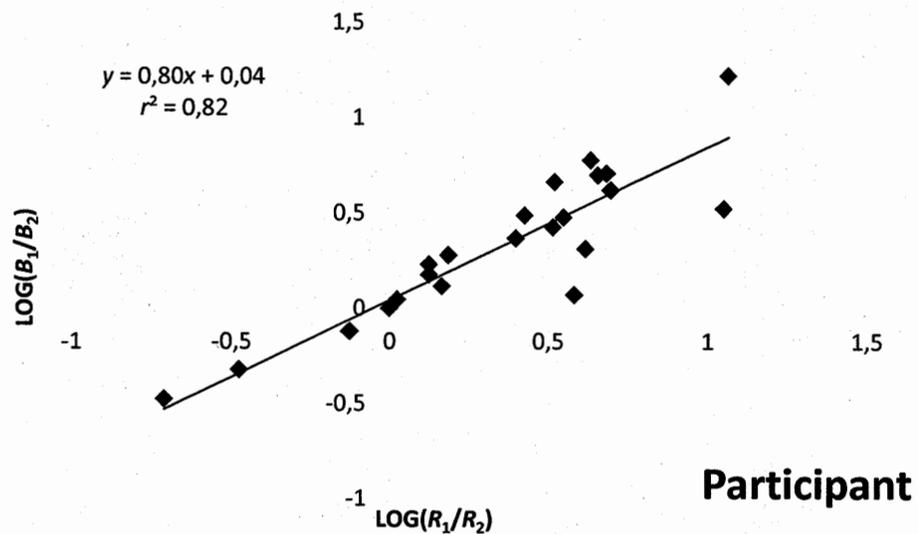


Figure 2. Les résultats hypothétiques du participant. Ils représentent la relation d'appariement du sujet. Il s'agit de la relation entre le ratio des renforçateurs par rapport aux ratios des comportements, et ce, sous forme logarithmique. Le coefficient (0,80) représente la sensibilité et la constante (0,04) représente le biais. La variance expliquée est de 0,82, soit une corrélation de 0,90. Exemple inspiré de Caron, Forget et Rivard [15].

```

eval.app =
function(B1,B2,R1,R2,n=NULL,r.emp=NULL,r.cpt=NULL,Alpha=NULL,Dir=NUL
L){

# fonction(B1,B2,R1,R2,n,r.emp,r.cpt,alpha)
#
# Évalue la probabilité d'une relation d'appariement
# en fonction de la corrélation hypothétique attendue
# inhérente à la situation opérante
#
# voir Caron, P.-O.(soumis) Evaluating sensitivity to reinforcement.
#
# B1 = probabilité du comportement 1
# B2 = probabilité du comportement 2
# R1 = probabilité de la conséquence 1
# R2 = probabilité de la conséquence 2
# n = le nombre de séances
# r.emp = la corrélation empirique
# r.cpt = la corrélation entre les comportements,
#         automatiquement fixée à -1
# alpha = la probabilité de faire une erreur de type I,
#         automatiquement fixé à 0.05, unilatéral
#
# dir = direction du test: 0 = unilatérale droite,
#      1 = unilatérale gauche, 2 = bilatérale,
#      automatiquement fixé à 0
# Exemple :
# eval.app(0.9,0.1,0.1,0.4,100,r.emp=0.69)

if(missing(n) & missing(r.emp)){
n=100
}

if(missing(r.cpt)){
r.cpt=-1
}

if(missing(Alpha)){
Alpha=0.05
}

if(missing(Dir)){
Dir=0
}

p0 = B1
p1 = R1
p2 = R2
p00 = B2

EA = n*p0

```

```

EB = n*p00
EC = n*p0*p1
ED = n*p00*p2

VA = sqrt(n*p0*(1-p0))
VB = sqrt(n*p00*(1-p00))
VC = sqrt(n*p0*p1*(1-p0*p1))
VD = sqrt(n*p00*p2*(1-p00*p2))
CA = VA/EA
CB = VB/EB
CC = VC/EC
CD = VD/ED

rAC = n*(p0*p1-p0*p0*p1)/(VA*VC)
rAB = r.cpt
rBD = n*(p00*p2-p00*p00*p2)/(VB*VD)
rCB = r.cpt * rAC
rAD = r.cpt * rBD
rCD = rAD*rAC

r = (rAC*CA*CC - rAD*CA*CD - rCB*CC*CB + rBD*CB*CD)/(sqrt(CA^2+CB^2-
2*rAB*CA*CB)*sqrt(CC^2+CD^2- 2*rCD*CC*CD))

if(missing(r.emp)){
  return(r)
}else{
  z = (atanh(r.emp)-atanh(r))/(sqrt(1/(n-3)))
  if (Dir == 0){
    p = 1-pnorm(z)
  }else{
    if (Dir == 1){
      p = pnorm(z)
    }else{
      p = (min(1-pnorm(abs(z)),pnorm(abs(z))))*2
    }
  }
  if (p <= Alpha){
    Stat = 'Sig'
  } else {
    Stat = 'n.s.'
  }
}
return(list(r,z,p,Stat))
}

```

Figure 3. Présentation du code R nécessaire à l'évaluation d'une relation d'appariement.

```

function Res = EvalApp(B1,B2,R1,R2,n,rempr,rcpt,Alpha,Dir)
% fonction(B1,B2,R1,R2,n,r.emp,r.cpt,alpha)
%
% Évalue la probabilité d'une relation d'appariement
% en fonction de la corrélation hypothétique attendue
% inhérente à la situation opérante
%
% voir Caron, P.-O.(soumis) Evaluating sensitivity to reinforcement.
%
% B1 = probabilité du comportement 1
% B2 = probabilité du comportement 2
% R1 = probabilité de la conséquence 1
% R2 = probabilité de la conséquence 2
% n = le nombre de séances
% rempr = la corrélation empirique
% rcpt = la corrélation entre les comportements,
%       automatiquement fixée à -1
% alpha = la probabilité de faire une erreur de type I,
%       automatiquement fixé à 0.05
%
% Exemple :
% EvalApp(0.9,0.1,0.1,100,0.69)

if ~exist('n','var')
    n = 100;
end

if nargin < 7
    if ~exist('rcpt','var')
        rcpt = -1;
    end
end

if nargin < 8
    if ~exist('Alpha','var')
        Alpha = 0.05;
    end
end

if nargin < 9
    if ~exist('Dir','var')
        Dir = 0;
    end
end

p0 = B1;
p1 = R1;
p2 = R2;
p00 = B2;

EA = n*p0;
EB = n*p00;
EC = n*p0*p1;

```

```

ED = n*p00*p2;

VA = sqrt(n*p0*(1-p0));
VB = sqrt(n*p00*(1-p00));
VC = sqrt(n*p0*p1*(1-p0*p1));
VD = sqrt(n*p00*p2*(1-p00*p2));
CA = VA/EA;
CB = VB/EB;
CC = VC/EC;
CD = VD/ED;

rAC = n*(p0*p1-p0*p0*p1)/(VA*VC);
rAB = rcpt;
rBD = n*(p00*p2-p00*p00*p2)/(VB*VD);
rCB = rcpt * rAC;
rAD = rcpt * rBD;
rCD = rAD*rAC;

r = (rAC*CA*CC - rAD*CA*CD - rCB*CC*CB + rBD*CB*CD)/(sqrt(CA^2+CB^2-
2*rAB*CA*CB)*sqrt(CC^2+CD^2- 2*rCD*CC*CD));
if nargin < 5
    Res = r;
else
    z = (atanh(remp)-atanh(r))/(sqrt(1/(n-3)));
    if Dir == 0
        p = 1-normcdf(z);
    elseif Dir == 1
        p = normcdf(z);
    else
        p = 2*min((1-normcdf(abs(z))),normcdf(abs(z)));
    end
    if p < Alpha
        Stat = 'Sig';
    else
        Stat = 'n.s.';
    end
    Res.r = r;
    Res.z = z;
    Res.p = p;
    Res.stat = Stat;
end

```

Figure 4. Présentation du code Matlab nécessaire à l'évaluation d'une relation d'appariement.

CHAPITRE VII

DISCUSSION GÉNÉRALE

Ce chapitre divisé en quatre sections synthétise les cinq articles. En premier lieu, les contributions de la présente thèse sont résumées. En deuxième lieu, le parallèle entre les articles de simulation (article 2 et 3) par rapport à l'article formel (article 4) est discuté. Enfin, les perspectives de recherche futures sont abordées.

7.1. Les contributions de la thèse

Les contributions de la thèse sont résumées dans cette section. Il s'agit de présenter brièvement l'originalité de la thèse et d'offrir un aperçu des implications de celle-ci. Les contributions présentées sont : la synthèse des travaux sur la loi de l'appariement et les problématiques actuelles, la démonstration de l'influence des contraintes inhérentes aux situations opérantes, ainsi que leur implication, l'idée d'une computation skinnérienne, la méthode d'évaluation de cette influence et l'offre de moyens d'évaluation automatique des relations d'appariement.

7.1.1. Synthétiser des travaux et implications sur la recherche actuelle

L'une des contributions de la thèse est de résumer les développements théoriques et empiriques sur la loi de l'appariement et les différentes versions de ces équations. Il s'agit d'une présentation du formalisme mathématique des versions de la loi de l'appariement et de leur comparaison sur les plans théoriques et empiriques. Aucune étude n'a, jusqu'à présent, synthétisé l'ensemble des équations. Il faut

mentionner que plusieurs des équations n'ont jamais été abordées auparavant en langue française.

Cette synthèse expose explicitement certains choix de la thèse. Par exemple, le fait que seule la loi généralisée de l'appariement soient privilégiée. Elle justifie son abstention des autres modèles plus complexes tels que la concaténation de la loi généralisée de l'appariement et la loi moderne de l'appariement. Brièvement, comme l'article le décrit, la puissance descriptive de la loi généralisée de l'appariement fait consensus dans la littérature scientifique expérimentale. Cependant, les deux autres versions sont négligées, car ou bien elles sont perçues comme alambiquées, ou bien, quoiqu'elles conçoivent adéquatement la représentation des chercheurs, elles manquent de soutien empirique. Toutes les versions de l'appariement, en incluant les premières équations, expliquent bien la variance dans les jeux de données. Parmi les versions modernes, le gain de variances expliquées est souvent marginal par rapport au coût relié à l'ajout d'un paramètre libre supplémentaire. Les versions modernes sont d'ailleurs compatibles, c'est-à-dire que si la loi généralisée de l'appariement explique bien tel ou tel jeu de données, alors les autres équations le feront également.

L'article 1 met aussi l'accent sur l'ère du temps actuel en analyse expérimentale du comportement. D'abord, il souligne la pensée de Killeen (2015) selon laquelle la loi de l'appariement ne pourrait être que le fruit de l'appareillage sous laquelle le chercheur étudie le modèle plutôt que le produit de l'organisme. L'idée selon laquelle les contraintes des programmes de renforcement peuvent faire émerger des relations d'appariement, bien que proposée avant ce papier, partage ce même courant de pensée. Ce constat rend caduque l'évaluation de l'appariement à l'échelle molaire et souligne l'importance des modèles moléculaires. Ainsi, Killeen suggère de dévier de la pratique actuelle autour de l'appariement. Selon l'auteur, il faut tenter de nouvelles perspectives moléculaires afin d'élucider les processus d'apprentissage menant à des opérants molaires stables.

Ensuite, l'article 1 montre la pertinence d'utiliser des modèles computationnels au sein de l'analyse du comportement et que cette pratique est encouragée. Ils ont l'avantage de pouvoir gérer moment par moment les interactions entre un agent artificiel et son environnement. Le programmeur contrôle toutes les interactions et peut isoler l'influence des variables qu'il manipule. Même s'il s'agit d'une simplification de la situation réelle, la modélisation et la simulation de phénomène naturel permettent d'approfondir les connaissances sur son fonctionnement ainsi que les conséquences de quelques variations dans sa formalisation. La vraisemblance devient quantifiable. La contribution des modèles computationnels est double : premièrement, ils démontrent de façon convaincante que des théories quantitatives de l'apprentissage rendent compte de l'appariement et, deuxièmement, qu'il existe une panoplie d'algorithmes d'apprentissage menant à l'appariement.

Enfin, l'article 1 présente la pertinence d'employer la loi de l'appariement pour les thérapies comportementales. Plusieurs auteurs notent les contributions de l'appariement aux études appliquées (Forget & Rivard, 2010; Jacobs, Borrero & Vollmer, 2013; McDowell, 1981, 1982; Myerson & Hale, 1984; Noll, 1995; Pierce & Epling, 1995; Vyse, 1986) et il s'en est suivi des études transactionnelles sur l'applicabilité de l'appariement en contexte naturel focalisant sur la description des choix d'humains. En revanche, à quel moment faut-il considérer que l'organisme est sensible aux contingences de renforcement? L'évaluation de la relation d'appariement se calcule de façon corrélationnelle; la sensibilité peut prendre n'importe quelle valeur des nombres réels et la corrélation, n'importe quelle valeur réelle entre -1 et 1. Lorsque la corrélation (et simultanément la sensibilité, car dans une analyse bivariée les deux sont fonctionnellement monotones) est nulle, alors l'organisme ne s'ajuste pas aux contingences en vigueur. Il existe bien des façons de tester si l'organisme apparie, sur-apparie ou sous-apparie. Comme le souligne l'article 4, les tests statistiques d'hypothèse nulle peuvent être utilisés, mais aucun chercheur en analyse

du comportement n'y a recours et les quelques autres possibilités pour se faire ne suffisent pas. Par exemple, Baum (1974) propose qu'une valeur de sensibilité inférieure à 0,90 corresponde à un sous-appariement, qu'une valeur supérieure à 1,10 corresponde à un sur-appariement et que les valeurs intermédiaires représentent un appariement strict. Mullins, Agunwamba et Donohoe (1982), quant à eux, proposent d'utiliser une valeur- p pour tester si la sensibilité est significativement différente de 1. Toutefois, ces deux techniques sont inappropriées, car elles ne permettent pas de conclure qu'un organisme est sensible aux contingences de renforcement : elles désignent le profil comportemental. Enfin, la proposition de Reed (2009) selon laquelle une variance expliquée de 50 % suffit à conclure que le sujet est sensible, quoiqu'appropriée pour vérifier la question, n'est ni soutenue empiriquement ni théoriquement. Cette section de l'article 1 conclut en suggérant l'article 2 comme piste potentielle pour résoudre ce problème.

En somme, l'article 1 justifie les deux questions centrales de la thèse : pourquoi la loi de l'appariement explique-t-elle autant de variances expliquées et comment évaluer la relation d'appariement? Elle motive les conjectures permettant la modélisation des contraintes inhérentes au programme de renforcement.

7.1.2. Montrer l'influence des contraintes inhérentes aux situations opérantes

L'une des contributions les plus importantes de la thèse est la proposition formelle de conjecture sur l'existence de contraintes au sein des programmes de renforcement et que celles-ci ont un effet sur les paramètres de la loi de l'appariement. Les articles 2 et 3 montrent que des contraintes simples et connues par la communauté en analyse du comportement ont une influence non négligeable. Par exemple, la contrainte selon laquelle l'apparition d'une conséquence contingente doit être conditionnellement précédée de la présence d'un comportement implique le fait que la quantité de réponses est toujours supérieure à celle des renforçateurs, ou encore la contrainte selon laquelle les fréquences entre deux comportements sont réciproques lorsque deux seules options sont possibles dans la population. La

première contrainte explique à elle seule 47 % de la variance expliquée en moyenne et l'ajout de la seconde augmente l'explication à 63 %. Ces résultats soutiennent la position de l'article 4 en montrant que des corrélations existent entre les composantes de l'équation d'appariement. Essentiellement, cette contribution répond aux deux questions soulevées dans l'article 1. D'abord, elle explique les très bonnes performances, en termes de variance expliquée, de la loi de l'appariement. Ensuite, elle montre une piste intéressante afin d'évaluer les relations d'appariement. Ce dernier élément est développé dans l'article 4.

7.1.3. Programmer une simulation skinnérienne

Une contribution plus marginale et décrite succinctement dans l'article 3 est de montrer que les simulations de Monte-Carlo utilisées sont conceptualisées de façon skinnérienne. Dans la plupart des computations, le chercheur modélise des processus internes aux organismes tels que l'apprentissage, les réseaux neuronaux, les mécanismes de mémoire et d'oubli, ou l'implantation d'heuristiques. En psychologie, ces techniques se réclament généralement des sciences cognitives, bien que plusieurs behavioristes de l'analyse expérimentale du comportement les utilisent dans une perspective strictement behavioriste. Notamment, il y a le principe unifié de renforcement par réseaux neuronaux (Donahoe, Burgos & Palmer, 1993), l'algorithme génétique de sélection par conséquences (McDowell, 2004) et divers algorithmes d'apprentissage par renforcement (Katahira, 2015; Sakai & Fukai, 2008), et ce, sans mentionner les différentes techniques d'analyse statistique plus répandues en sciences cognitives qu'en analyse du comportement (par exemple, les modèles logistiques ou bayésiens). Cela dit, ces modèles comportementaux entrent dans l'interdite boîte noire; ils conceptualisent ce qui se passe à l'intérieur de l'agent. Ils s'éloignent d'une conception skinnérienne de la relation comportement-environnement.

À l'opposé, les articles 2 et 3 se situent dans une telle perspective. Ils proposent des simulations décrites selon un point de vue environnemental. Ce sont les

contraintes dues aux propriétés des programmes de renforcement et de la définition même d'une contingence de renforcement qui sont étudiées et non les mécanismes internes de l'agent. Les résultats des simulations montrent ce à quoi le comportement de l'agent doit ressembler étant donné les contraintes. La computation est en accord avec une vision skinnérienne orientée vers l'environnement et son influence sur le comportement plutôt qu'une vision plus cognitiviste. Cette piste de computation peu développée jusqu'à présent pourra s'avérer intéressante à poursuivre.

7.1.4. Proposer une méthode d'évaluation des contraintes sur la loi de l'appariement

La troisième contribution de la thèse est de proposer, dans l'article 4, un modèle nul permettant de calculer a priori l'influence des corrélations entre les comportements et les renforçateurs. Le modèle se base sur le fait que les articles 2 et 3 aient engendré des résultats intéressants à la fois sur le plan de la conceptualisation des contraintes inhérentes au programme de renforcement, et aussi leur influence non négligeable sur la loi de l'appariement.

L'utilité du modèle nul réside en sa quantification des corrélations entre les ratios des comportements et des renforçateurs moyennant quelques hypothèses sous-jacentes. Le modèle conceptualise ce qui est attendu dans une situation opérante lorsqu'aucun processus comportemental n'est impliqué. Il évalue si la relation d'appariement est due plausiblement aux contraintes de l'environnement. Au contraire, un participant dont les comportements se distinguent fortement du modèle nul signifie que d'autres phénomènes sont impliqués dans ces choix. Ainsi, un profil comportemental d'un participant qui ressemble à celui du modèle indique que ses comportements ne se distinguent pas d'une structure aléatoire excluant la présence de mécanismes internes. Par rasoir d'Occam, l'intervenant préférera le modèle le plus simple, celui dont les construits hypothétiques sont les plus vraisemblables.

Le modèle possède plusieurs avantages. Il s'accorde avec une perspective molaire-moléculaire du comportement, il repose sur des mathématiques formelles, il est flexible par rapport aux probabilités comportementales et de renforcement, et il s'exporte facilement pour que d'autres chercheurs et intervenants puissent l'utiliser. Nous verrons chacune de ces points plus en détail.

Une force de la modélisation employée dans cette thèse est qu'elle se conçoit aussi bien à l'échelle molaire que moléculaire. Les fondements statistiques des distributions binomiales sont aussi exacts lorsque la taille d'échantillon est faible que lorsqu'elle est élevée : c'est la précision et la puissance statistique qui varient. En utilisant une telle conceptualisation, le problème d'expliquer le processus menant à l'équilibre molaire de l'appariement s'évanouit. Il n'est pas nécessaire d'employer un mécanisme différent pour chacune des échelles (par exemple, la maximisation molaire) ou, plus élégamment, de partir d'un modèle molaire et d'en baser un autre moléculaire qui, sur le plan formel, est plus insuffisant (par exemple, l'amélioration locale). Il s'agit ici d'une propriété avantageuse du modèle nul.

Une autre force du modèle est sa robustesse formelle. Il se base sur des théorèmes garantissant sa véracité computationnelle. Cela ne certifie pas que les contraintes hypothétiques soient exactes, ce sont des conjectures, mais bien que, une fois leur vraisemblance acceptée, les calculs qu'elles impliquent s'avèrent vrais sous toutes les conditions. Autrement dit, même si dans un futur proche, les chercheurs s'aperçoivent d'une limite dans l'applicabilité du modèle, les contributions de la présente thèse seront encore valides. Ce n'est pas l'apanage de toutes les contributions en psychologie. Il faut remarquer enfin que, puisque les hypothèses sous-jacentes sont explicites, la formalisation du modèle est facilement révisable. L'étude, quant à ses limites et son applicabilité, est d'autant plus facilitée. Cette contribution est en contraste avec le critère de Reed (2009) selon lequel une variance expliquée de plus de 50 % suffit à conclure que l'organisme est sensible aux contingences de renforcement. Ce critère n'est pas soutenu ni empiriquement ni

théoriquement alors que le modèle nul est dérivé d'hypothèses statistiques et que l'équation calculant la corrélation entre les ratios est formellement valide.

La troisième force du modèle nul est qu'il rend compte des probabilités de comportement et de renforcement. St. Peter et al. (2005) mentionnent que lorsque la fréquence des conséquences est élevée et puisque l'occurrence d'un renforçateur est conditionnelle à celle d'un comportement, alors la corrélation entre les ratios devient fallacieusement plus élevée. Le modèle nul rend compte de ce phénomène. En utilisant des distributions binomiales, le paramètre de probabilité peut être varié. (Cela ne pouvait être fait avec les simulations des articles 2 et 3 qui utilisent des distributions uniformes discrètes dont seule l'étendue est paramétrique.) L'article 4 illustre ce point. Dans une expérience hypothétique, un participant émet en moyenne 56 % de comportement 1, 44 % de comportement 2 et reçoit une conséquence de façon contingente 78 % et 67 % (probabilité de renforcement) de ces comportements respectivement. Ces résultats entraînent, selon le modèle nul, une corrélation entre ratios de 0,85. Par contre, si les probabilités de renforcement sont diminuées, les deux à 40 %, alors la corrélation entre ratios est de 0,63. Le modèle répond donc au problème soulevé par St. Peter et al. (2005).

7.2. Lier les simulations et le modèle nul

Dans cette section, des analyses statistiques supplémentaires sont réalisées afin d'examiner la relation entre les simulations de l'article 3 et du modèle nul de l'article 4. Il est intéressant de constater dans quelle mesure la modélisation par simulations de Monte-Carlo convergent vers le modèle formel. Ainsi, elle synthétise les contributions des articles 2, 3 et 4. Pour réaliser cette analyse, la programmation de la deuxième simulation de l'article 2 est ajustée pour rendre des différences de modélisation entraînées par le fait d'utiliser des distributions binomiales.

Une simulation de Monte-Carlo est utilisée. Elle emploie les deux contraintes de l'article 3, c'est-à-dire le maximum de comportements observables et la

conditionnalité entre réponse et renforçateur et y ajoute le fait que les réponses et les renforçateurs sont générés par une distribution binomiale plutôt que d'une distribution uniforme discrète. La simulation est réalisée dans Matlab (2012a) et la programmation va comme suit ;

1. Générer un échantillon de comportements B_1 de longueur n (où n est large) selon une distribution binomiale dont la probabilité est θ et le maximum de comportements observables est B_t , soit; $B_1 \sim \text{binom}(\theta, B_t)$.
2. Générer un échantillon de comportements B_2 calculé par la différence entre B_t et B_1 , soit pour chaque séance; $B_t - B_1 = B_2$.
3. Générer deux échantillons de renforçateurs R_1 et R_2 par une distribution binomiale dont les paramètres sont les probabilités respectives p_x (où l'indice x désigne l'indice pour l'option 1 ou 2) et dont le maximum de renforçateurs possibles est la valeur B_x de la séance correspondante, soit pour une séance j par exemple; $R_1 \sim \text{binom}(p_1, B_1)$.
4. Remplacer les valeurs 0 par 1 dans les quatre vecteurs par 1 afin d'éviter des logarithmes indéfinis.
5. Réaliser la corrélation entre le log ratio des comportements et le log ratio des renforçateurs et enregistrer les corrélations obtenues.
6. Calculer la valeur de corrélation attendue par le modèle nul pour les paramètres θ , p_1 et p_2 en suivant les suggestions de l'article 4.
7. Répéter toutes ces opérations pour les valeurs θ , p_1 et p_2 de 0,10 à 0,90 par saut de 0,10, soit pour 9^3 conditions.

Les résultats de cette analyse montrent de façon globale que les prévisions des simulations convergent vers celles du modèle nul. Il n'y a pas de différences significatives entre les deux. Le tableau 1 présente la somme des distances χ^2 entre les simulations et les prédictions du modèle nul pour chacune des valeurs des paramètres de θ , p_1 et p_2 . En termes d'unité de distance χ^2 , la plus petite distance équivaut à 0,016. Dans la métrique originale, la plus grande surestimation est de 0,021 et la plus

grande sous-estimation est de -0,076. Ces résultats montrent que les simulations sous-estiment légèrement la corrélation entre les ratios. Les plus grandes divergences se situent lorsque les probabilités de renforcement p_1 et p_2 égalent 0,10. La divergence diminue rapidement à mesure que la probabilité augmente et se stabilise entre 0,20 et 0,30. Enfin, l'effet de probabilité de réponses θ est négligeable. Elle est à son apogée lorsqu'elle est centrée à 0,50 et diminue symétriquement lorsque θ augmente ou diminue. Il faut rappeler que la probabilité du comportement 1 et du comportement 2 est réciproque. Si l'espérance de l'un est de 0,10, par exemple, alors l'autre est nécessairement de 0,90, ce qui explique l'effet symétrique de θ autour de 0,50.

Tableau 7.1. Effets (en somme de distance χ^2) de θ , p_1 et p_2 sur les corrélations

Valeur du paramètre	Effet de θ	Effet de p_1	Effet de p_2
0,10	0,079	0,247	0,238
0,20	0,063	0,110	0,104
0,30	0,083	0,069	0,067
0,40	0,100	0,051	0,060
0,50	0,121	0,053	0,053
0,60	0,100	0,053	0,052
0,70	0,093	0,060	0,062
0,80	0,067	0,077	0,079
0,90	0,086	0,072	0,077

Les divergences s'expliquent principalement par le fait que le modèle nul repose sur une approximation de la corrélation de ratio (l'équation de Pearson, 1897, est approximative) et que les simulations comportent de l'erreur d'échantillonnage. Aussi, la simulation utilise les logarithmes pour évaluer la loi de l'appariement, ce qui n'est pas nécessaire avec le modèle nul. Néanmoins, cet ajout fait qu'une transformation est appliquée aux ratios, car le logarithme d'une valeur non naturelle est indéfini. Ces simples différences peuvent contribuer aux divergences négligeables observées. Outre ces limitations, les résultats montrent une bonne précision de la corrélation entre ratios qui, dans le pire des scénarios, est exacte à la deuxième

décimale. Il faudra être plus indulgent lorsque les probabilités de renforcement sont faibles, condition dans laquelle la discordance apparaît davantage.

7.3. Perspectives futures

L'influence de la loi de l'appariement sur l'analyse du comportement autant expérimentale qu'appliquée est substantielle. Elle est l'un des modèles postskinnérien les plus puissants et les plus fertiles afin de décrire les choix des organismes. Elle est soutenue théoriquement et empiriquement depuis 55 ans et rend compte de l'accumulation des données empiriques. La loi de l'appariement est aussi à l'origine d'une majorité de modèles issus de l'analyse quantitative du comportement. Les dernières décennies sont marquées par la croissance d'études en contexte appliqué initiées par le cadre prometteur qu'elle offre à la thérapie comportementale ainsi que l'augmentation des modèles computationnels visant à expliquer l'équilibre comportemental qu'elle suppose. L'objectif de la présente thèse est de répondre aux deux questions suivantes, ressortant de ces deux avenues de recherche : d'où proviennent les variances expliquées de la loi de l'appariement et comment évaluer la relation d'appariement? La réponse repose sur une modélisation conceptualisant la situation opérante en termes de contraintes restreignant la variabilité des comportements et des conséquences. Ces contraintes augmentent la corrélation entre les composantes de l'équation de l'appariement et, par le fait même, la corrélation entre leurs ratios.

Une piste de recherche future consiste à approfondir les contraintes inhérentes aux programmes de renforcement. La présente thèse en examine trois (la relation conditionnelle entre réponse et renforçateur, la réciprocité comportementale et les distributions statistiques générant les événements), mais il pourrait y avoir plusieurs autres contraintes et celles présentement employées pourraient être inexactes. Il s'agit pour l'instant d'un modèle hypothétique des contingences de renforcement reposant sur des conjectures. Par exemple, le modèle nul se base sur les distributions binomiales pour générer les réponses et les renforçateurs. Peut-être qu'une

distribution plus complexe saura mieux rendre compte de l'occurrence des unités d'une contingence de renforcement. Les études futures explorant l'influence de contraintes supplémentaires montreront si elles génèrent des variances expliquées plus élevées et si elles décrivent mieux le comportement des organismes. Elles pourront encourager l'exploration de voies computationnelles différentes permettant de mieux représenter les systèmes de feedback.

Pour approfondir les contraintes inhérentes aux situations opérantes, une analyse moléculaire des contingences de renforcement auprès d'organismes vivants, plutôt qu'une analyse molaire comme cela est le cas actuellement, est impérative dans la mesure où elle informera des conditionnalités entre fréquences d'apparition des réponses et des renforçateurs. Cet approfondissement permettra de développer davantage les hypothèses sous-jacentes au modèle nul, d'en augmenter la précision et d'améliorer les prises de décisions statistiques inférentielles par rapport aux relations d'appariement des organismes. Il s'agit d'accroître la compréhension des liens unissant réponses et renforçateurs afin de créer une représentation computationnelle exhaustive des contingences de renforcement. En examinant les processus par lesquels les comportements et les conséquences surviennent, les mécanismes générant la loi de l'appariement seront davantage éclaircis, mais surtout, le comportement des organismes.

RÉFÉRENCES

- Baum, W. M. (1974). On two types of deviation from the matching law: bias and undermatching. *Journal of the Experimental Analysis of Behavior*, 22, 231-242. doi: 10.1901/jeab.1974.22-231
- Baum, W. M. (1979). Matching, undermatching, and overmatching in studies of choice. *Journal of the Experimental Analysis of Behavior*, 32, 269-281. doi: 10.1901/jeab.1979.32-269
- Baum, W. M. (1983). Matching, statistics, and common sense. *Journal of the Experimental Analysis of Behavior*, 39, 499-501. doi: 10.1901/jeab.1983.39-499
- Bijou, S. W., Peterson, R. F., & Ault, M. H. (1968). A method to integrate descriptive and experimental field studies at the level of data and empirical concepts. *Journal of Applied Behavior Analysis*, 1, 175-191. doi: 10.1901/jaba.1968.1-175
- Caron, P.-O., Royer, F., & Forget, J. (2014). La sensibilité sociale : une recension critique. *Acta Comportamentalia*, 22, 334-351.
- Davison, M., & Jenkins, P. E. (1985). Stimulus discriminability, contingency discriminability, and schedule performance. *Animal Learning & Behavior*, 13, 77-84. doi: 10.3758/bf03213368
- Davison, M., & McCarthy, D. (1988). The matching law: a research review. Hilldale (NJ): Erlbaum.
- de Villiers, P. (1977). Choice in concurrent schedules and a quantitative formulation of the law of effect. In W. K. Honing & J. E. R. Staddon (Eds.), *Handbook of Operant Behavior* (pp. 233-287). New Jersey: Prentice Hall.

- Donahoe, J. W., Burgos, J. E., & Palmer, D. C. (1993). A selectionist approach to reinforcement. *Journal of the Experimental Analysis of Behavior*, *60*, 17-40. doi: 10.1901/jeab.1993.60-17
- Ferster, C. B., & Skinner, B. F. (1957). *Schedules of reinforcement*. New York: Appleton-Century-Croft.
- Findley, J. D. (1958). Preference and switching under concurrent scheduling. *Journal of the Experimental Analysis of Behavior*, *1*, 123-144. doi: 10.1901/jeab.1958.1-123
- Forget, J., Donais, S., & Giroux, N. (2001). La loi de l'appariement et ses applications en psychologie clinique et en éducation. *Revue Canadienne de Psycho-Education*, *30*, 311-327.
- Forget, J., & Rivard, M. (2010). Évaluer la sensibilité sociale de l'enfant à l'attention de l'adulte. Perspective de recherche en Autisme. In G. Magerotte & E. Willaye (Eds.), *Intervention comportementale clinique* (pp. 235-287). Bruxelles: De Boeck.
- Grace, R. C., & Hucks, A. D. (2013). The allocation of operant behavior. In G. J. Madden, W. V. Dube, T. D. Hackenberg, G. P. Hanley & K. A. Lattal (Eds.), *APA handbook of behavior analysis, Vol. 1: Methods and principles* (pp. 307-337). Washington, DC, US: American Psychological Association. doi: 10.1037/13937-014
- Haykin, S. (2009). *Neural networks and learning machines*. Upper Saddle River (NJ): Pearson.
- Herrnstein, R. J. (1961). Relative and absolute strength of response as a function of frequency of reinforcement. *Journal of the Experimental Analysis of Behavior*, *4*, 267-272. doi: 10.1901/jeab.1961.4-267

- Herrnstein, R. J. (1997). *The matching law. Papers in psychology and economics*. Cambridge (MA): Harvard University Press.
- Jacobs, E. A., Borrero, J. C., & Vollmer, T. R. (2013). Translational applications of quantitative choice models. In G. J. Madden, W. V. Dube, T. D. Hackenberg, G. P. Hanley & K. A. Lattal (Eds.), *APA handbook of behavior analysis, Vol. 2: Translating principles into practice* (pp. 165-190). Washington, DC, US: American Psychological Association. doi: 10.1037/13938-007
- Katahira, K. (2015). The relation between reinforcement learning parameters and the influence of reinforcement history on choice behavior. *Journal of Mathematical Psychology*, *66*, 59-69. doi: 10.4016/j.jmp.2015.03.006
- Killeen, P. (2015). The logistics of choice. *Journal of the Experimental Analysis of Behavior*, *104*, 74-9
- Mazur, J. E. (2001). Hyperbolic value addition and general models of animal choice. *Psychological Review*, *108*, 96-112. doi: 10.1037/0033-295x.108.1.96
- Mazur, J. E. (2006). Mathematical models and the experimental analysis of behavior. *Journal of the Experimental Analysis of Behavior*, *85*, 275-291. doi: 10.1901/jeab.2006.65-052. doi: 10.1002/jeab.156
- McDowell, J. J. (1981). On the validity and utility of Herrnstein's hyperbola in applied behavior analysis. In C. M. Bradshaw, E. Szabadi & C. F. Lowe (Eds.), *Quantification of steady-state operant behaviour* (pp. 95-109). North Holland: Elsevier.
- McDowell, J. J. (1982). The importance of Herrnstein's mathematical statement of the law of effect for behavior therapy. *American Psychologist*, *37*, 771-779. doi: 10.1037/0003-066x.37.7.771

- McDowell, J. J. (1986). On the falsifiability of matching theory. *Journal of the Experimental Analysis of Behavior*, 45, 63-74. doi: 10.1901/jeab.1986.45-63
- McDowell, J. J. (2004). A computational model of selection by consequences. *Journal of the Experimental Analysis of Behavior*, 81, 297-317. doi: 10.1901/jeab.2004.81-297
- McDowell, J. J. (2005). On the classic and modern theories of matching. *Journal of the Experimental Analysis of Behavior*, 84, 111-127. doi: 10.1901/jeab.2005.59-04
- McDowell, J. J. (2013). On the theoretical and empirical status of the matching law and matching theory. *Psychological Bulletin*, 139, 1000-1028. doi: 10.1037/a0029924
- Mullins, E., Agunwamba, C. C., & Donohoe, A. J. (1982). On the analysis of studies of choice. *Journal of the Experimental Analysis of Behavior*, 37, 323-327. doi: 10.1901/jeab.1982.37-323
- Myerson, J., & Hale, S. (1984). Practical implications of the matching law. *Journal of Applied Behavior Analysis*, 17, 367-380. doi: 10.1901/jaba.1984.17-367
- Nevin, J. A., & Grace, R. C. (2000). Behavioral momentum and the Law of Effect. *Behavioral and Brain Sciences*, 23, 73-130. doi: 10.1017/s0140525x00002405
- Noll, J. P. (1995). The matching law as a theory of choice in behavior therapy. In W. T. O'Donohue & L. Krasner (Eds.), *Theories of behavior therapy: Exploring behavior change*. (pp. 129-144): Washington, DC, US: American Psychological Association. doi: 10.1037/10169-005
- Pearson, K. (1897). On a form of spurious correlation which may arise when indices are used in the measurement of organs. *Proceedings of the Royal Society of London*, 60, 489-497.

- Pierce, W. D., & Epling, W. F. (1983). Choice, matching, and human behavior: A review of the literature. *The Behavior Analyst, 6*, 57-76.
- Pierce, W. D., & Epling, W. F. (1995). The applied importance of research on the matching law. *Journal of Applied Behavior Analysis, 28*, 237-241. doi: 10.1901/jaba.1995.28-237
- Rachlin, H., Battalio, R. C., Kagel, J. H., & Green, L. (1981). Maximization theory in behavioral psychology. *The Behavioral and Brain Sciences, 4*, 371-388. doi: 10.1017/S0140525X00009407
- Reed, D. D. (2009). Using Microsoft Office Excel® 2007 to conduct generalized matching analyses. *Journal of Applied Behavior Analysis, 42*, 867-875. doi: 10.1901/jaba.2009.42-867
- Rivard, M., Forget, J., Kerr, K., & Bégin, J. (2014). Matching law and sensitivity to therapist's attention in children with autism spectrum disorders. *The Psychological Record, 65*, 79-88. doi: 10.1007/s40732-014-0015-1
- Sakai, Y., & Fukai, T. (2008). The actor-critic learning is behind the matching law: Matching versus optimal behaviors. *Neural Computation, 20*, 227-251. doi: 10.1162/neco.2008.20.1.227
- Skinner, B. F. (1938). *The behavior of organism*. New York: Appleton Century Croft.
- St. Peter, C. C., Vollmer, T. R., Bourret, J. C., Borrero, C. S. W., Sloman, K. N., & Rapp, J. T. (2005). On the role of attention in naturally occurring matching relations. *Journal of Applied Behavior Analysis, 38*, 429-443. doi: 10.1901/jaba.2005.172-04
- Sutton, R. S., & Barto, A. G. (1998). *Reinforcement learning : an introduction*. Cambridge, MA: MIT Press.

Thorndike, E. L. (1911). *Animal Intelligence*. New York: Macmillan.

Vyse, S. A. (1986). Methodology, the matching law, and applied behavior analysis. *The Behavior Analyst*, 9, 157-160.

Wearden, J. H., & Burgess, I. S. (1982). Matching since Baum (1979). *Journal of the Experimental Analysis of Behavior*, 38, 339-348. doi: 10.1901/jeab.1982.38-339