

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL

MODÉLISATION INDIVIDUELLE DES RÉSERVES EN ASSURANCE

I.A.R.D. – DISTRIBUTION TWEEDIE MULTIVARIÉE AVEC CHOC

COMMUN

MÉMOIRE

PRÉSENTÉ

COMME EXIGENCE PARTIELLE

DE LA MAÎTRISE EN MATHÉMATIQUES

PAR

JUAN SEBASTIAN YANEZ

AOÛT 2017

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL
Service des bibliothèques

Avertissement

La diffusion de ce mémoire se fait dans le respect des droits de son auteur, qui a signé le formulaire *Autorisation de reproduire et de diffuser un travail de recherche de cycles supérieurs* (SDU-522 – Rév.10-2015). Cette autorisation stipule que «conformément à l'article 11 du Règlement no 8 des études de cycles supérieurs, [l'auteur] concède à l'Université du Québec à Montréal une licence non exclusive d'utilisation et de publication de la totalité ou d'une partie importante de [son] travail de recherche pour des fins pédagogiques et non commerciales. Plus précisément, [l'auteur] autorise l'Université du Québec à Montréal à reproduire, diffuser, prêter, distribuer ou vendre des copies de [son] travail de recherche à des fins non commerciales sur quelque support que ce soit, y compris l'Internet. Cette licence et cette autorisation n'entraînent pas une renonciation de [la] part [de l'auteur] à [ses] droits moraux ni à [ses] droits de propriété intellectuelle. Sauf entente contraire, [l'auteur] conserve la liberté de diffuser et de commercialiser ou non ce travail dont [il] possède un exemplaire.»

REMERCIEMENTS

Je tiens prioritairement à remercier très sincèrement mon directeur de recherche, M. Mathieu Pigeon, pour son appui durant la rédaction de ce mémoire. Son contact m'a énormément apporté lors du travail réalisé. Je profite aussi pour remercier mes parents et ma sœur pour leur soutien tout au long de mes études, en particulier lors de mes études de deuxième cycle.

TABLE DES MATIÈRES

REMERCIEMENTS	i
LISTE DES FIGURES	vii
LISTE DES TABLEAUX	ix
RÉSUMÉ	xi
INTRODUCTION	1
CHAPITRE I	
NOTATION ET APPROCHES COLLECTIVES CLASSIQUES	7
1.1 Notation	7
1.2 Présentation de modèles collectifs classiques	14
1.2.1 Modèle de Mack	14
1.2.2 Modèles linéaires généralisés	15
CHAPITRE II	
CONSTRUCTION D'UN MODÈLE TWEEDIE MULTIVARIÉ AVEC UN CHOC COMMUN	21
2.1 La famille de distributions Tweedie	21
2.2 Exemples de distributions Tweedie	24
2.3 Modèle Tweedie Multivarié avec un choc commun	26
2.3.1 Situation où $p \neq 1$	30
2.3.2 Situation où $p = 1$	36
CHAPITRE III	
CONSTRUCTION DU MODÈLE POUR RÉSERVES INDIVIDUELLES	39
3.1 Construction du modèle pour la sévérité des paiements	40
3.1.1 Situation où $p \neq 1$	43
3.1.2 Situation où $p = 1$	43
3.1.3 Analyse de l'espérance, variance et covariance des paiements	44

3.2	Construction d'un modèle pour le nombre de paiements	46
3.2.1	Modèles supposant l'indépendance entres les secteurs d'activités	47
3.2.2	Modèles supposant la dépendance entres les secteurs d'activités	49
CHAPITRE IV		
ANALYSE DE LA RÉSERVE		51
4.1	Espérance et variance de la somme des paiements par secteur d'activité	51
4.2	Espérance et variance de la somme des paiements d'une cellule pour tous les secteurs d'activités	54
4.3	Espérance et variance des réserves	61
CHAPITRE V		
ESTIMATION DES PARAMÈTRES		63
5.1	Estimation du paramètre de puissance p	64
5.2	Estimation des paramètres des effets individuels	65
5.2.1	Estimation des paramètres des effets individuels par cellule ($\lambda_{i,j}^{(l)}$ et $\gamma_{i,j}^{(l)}$)	65
5.2.2	Estimation des paramètres des effets individuels par année d'ac- cident et de développement ($\lambda_{\mathbf{I};i}^{(l)}$, $\lambda_{\mathbf{J};j}^{(l)}$, $\gamma_{\mathbf{I};i}^{(l)}$ et $\gamma_{\mathbf{J};j}^{(l)}$)	70
5.3	Estimation des paramètres du choc commun (λ et γ)	72
5.3.1	Estimation des paramètres	72
5.3.2	Analyse de l'impact relatif du choc commun $W_{i,j}$ dans le mon- tant total des paiements d'une cellule (i, j) et d'un même sec- teur d'activités (l) $S_{i,j}^{(l)}$	78
CHAPITRE VI		
ILLUSTRATION AVEC DONNÉES		81
6.1	Analyse préliminaire	83
6.2	Prédiction du nombre de sinistres encourus non déclarés	89
6.3	Estimation des paramètres	92
6.3.1	Paramètres du modèle pour la fréquence	92
6.3.2	Paramètres du modèle pour la sévérité	93
6.4	Prédictions des réserves	94

6.4.1 Comparaison avec d'autres modèles	99
CONCLUSION	105
RÉFÉRENCES	107

LISTE DES FIGURES

Figure	Page
0.1 Développement d'un sinistre en assurances I.A.R.D.	2
2.1 Fonctions de densité de $Y \sim \text{Tweedie}_p(1, 1)$ pour des valeurs de $p = 1, 1.5, 2$	25
2.2 Fonctions de répartition de $Y \sim \text{Tweedie}_p(1, 1)$ pour des valeurs de $p = 1, 1.5, 2$	26
5.1 $\Pr[W_{i,j} = 0]$ en fonction de p et δ	79
6.1 Montants collectifs cumulatifs pour les dommages corporels par année de survenance	84
6.2 Montants collectifs cumulatifs pour les dommages matériels par année de survenance	84
6.3 Nombre de paiements pour les dommages corporels par année de survenance	85
6.4 Nombre de paiements pour les dommages matériels par année de survenance	85
6.5 Distributions prédictives pour la réserve par secteur d'activité et pour le portefeuille complet	99
6.6 Distributions prédictives des réservés totales	103

LISTE DES TABLEAUX

Tableau	Page
1.1 Triangle de développement incrémental de la ligne d'affaires l . . .	10
1.2 Triangle de développement cumulé de la ligne d'affaires l	10
1.3 Triangle de développement incrémental complet de la ligne d'affaires l	11
1.4 Triangle de développement cumulé complet de la ligne d'affaires l .	11
1.5 Triangle de développement incrémental du nombre paiements de la ligne d'affaires l	12
1.6 Triangle de développement incrémental des paiements individuels de la ligne d'affaires l	13
6.1 Nombre de polices et nombre de sinistres par secteur d'activité . .	82
6.2 Paiements totaux pour les dommages corporels	82
6.3 Paiements totaux pour les dommages matériels	82
6.4 Nombre de paiements pour les dommages corporels	83
6.5 Nombre de paiements pour les dommages matériels	83
6.6 Paiements totaux pour les dommages corporels modifiés par année de survenance	87
6.7 Paiements totaux pour les dommages matériels modifiés par année de survenance	87
6.8 Nombre de paiements modifiés pour les dommages corporels par année de survenance	87
6.9 Nombre de paiements modifiés pour les dommages matériels par année de survenance	88
6.10 Probabilité que le délai de déclaration dépasse la date d'évaluation t_i	90

6.11	Espérance du nombre de paiements encourus mais non reportés .	91
6.12	Répartition du nombre de paiements par année de survenance pour les dommages corporels encourus mais non déclarés	92
6.13	Répartition du nombre de paiements par année de survenance pour les dommages matériels encourus mais non déclarés	92
6.14	Estimation des paramètres de la fréquence des paiements	93
6.15	Estimations des paramètres pour la sévérité des paiements	94
6.16	Espérances des réserves par année de survenance	96
6.17	Écart-type des réserves par année de survenance	97
6.18	Valeurs prédites obtenues à partir de simulations	98
6.19	Résumé des réserves totales	102

RÉSUMÉ

Dans ce mémoire on présente un modèle stochastique pour les réserves en assurances I.A.R.D. (Incendie, Accidents et Risques Divers). On cherche à combiner deux approches étudiées dans la littérature : l'utilisation de la dépendance entre différentes lignes d'affaires (ou secteurs d'activités) et la modélisation individuelle des réserves. Afin d'étudier cette dépendance, on propose d'utiliser la famille de distributions Tweedie multivariée avec choc commun. L'avantage de cette famille est qu'elle est particulièrement flexible et, surtout, que les prédictions peuvent être obtenues sous forme fermée. En outre, on montrera que l'utilisation des données individuelles plutôt que collectives ouvre la porte à d'autres méthodes d'estimation des paramètres. Les résultats théoriques sont illustrés à l'aide d'un jeu de données réel.

Mots Clés— Réserves individuelles, Dépendance, Distribution Tweedie multivariée, Choc commun

INTRODUCTION

Les compagnies d'assurances I.A.R.D. (Incendie, Accidents et Risques Divers) doivent contrôler leur solvabilité afin de protéger leurs assurés. À intervalles réguliers, généralement une ou deux fois par année, la compagnie doit considérer l'ensemble de son portefeuille de polices d'assurances et évaluer le risque qu'il représente. En particulier, au niveau du passif de ses états financiers, la compagnie d'assurances doit inscrire un montant associé aux réserves. En effet, lorsqu'un sinistre survient, il y a un délai avant que tous les paiements pour couvrir ce sinistre ne soient effectués. Ce délai est provoqué, notamment, par le fait que l'assuré ne déclare pas un sinistre à la date à laquelle celui-ci est survenu et le fait qu'un sinistre peut créer un flux de paiements à faire chaque année avant que le dossier ne soit fermé. La précision de la prédiction de cette réserve a donc une grande importance.

Le développement typique d'un sinistre est illustré à la figure 0.1. Le sinistre survient à la date de survenance (t_1) et est déclaré à l'assureur à la date de déclaration (t_2). Pour plusieurs situations (incendie, dommages matériels à une voiture, etc.), ces deux dates correspondent mais pour d'autres situations (dommages corporels, responsabilité civile), une période de temps plus ou moins longue peut séparer ces deux moments. Par la suite, un ou plusieurs paiements peuvent être effectués (t_3 , t_4 et t_5) avant la fermeture du dossier (t_6). À une certaine date d'évaluation, les sinistres peuvent être séparés en plusieurs catégories en fonction du stade atteint par leur développement. Pour la suite du mémoire, les principales catégories sont les suivantes :

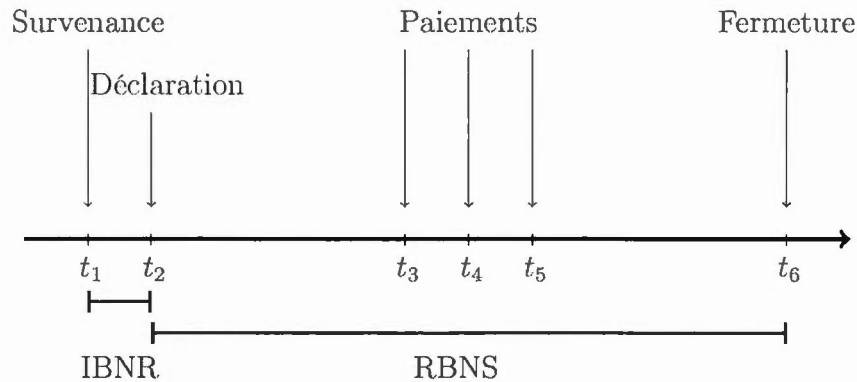


Figure 0.1 Développement d'un sinistre en assurances I.A.R.D.

- si la date d'évaluation se trouve entre la date de survenance et la date de déclaration, le sinistre est considéré comme survenu mais non déclaré (*Incurred But Not Reported*, ou IBNR) ; et
- si la date d'évaluation se trouve entre la date de déclaration et la date de fermeture du dossier, le sinistre est considéré comme déclaré mais non fermé (*Reported But Not Settled*, ou RBNS).

L'approche la plus populaire est dite collective. Sous celle-ci, on s'intéresse à la somme des réserves selon des données agrégées, c'est à dire que les paiements peuvent être regroupés selon l'année de survenance (année où le sinistre est survenu) et l'année de développement (nombre d'années entre la date à laquelle le paiement est effectué et l'année de survenance). Par exemple dans la figure 0.1 le paiement qui est effectué en t_3 a pour date de survenance t_1 et pour date de développement $t_3 - t_1$. Les données sont dites agrégées parce que l'on somme tous les paiements ayant la même année de survenance et la même année de développement dans une même cellule. Parmi les modèles qui utilisent une approche collective, il y a des modèles non-paramétriques, dont le plus connu, et base de plusieurs autres modèles, est le modèle Chain-Ladder (voir (Mack, 1999) et (Mack, 1993)), et des

modèles paramétriques basés, par exemple, sur des modèles linéaires généralisés (*generalized linear models*).

L'approche individuelle consiste à considérer les paiements de façon individuelle plutôt qu'agrégée. Les modèles individuels sont apparus récemment dans la littérature, notamment avec les articles de (Arjas, 1989) et de (Norberg, 1993), mais comme mentionné par (Hesselager et Verrall, 2014), ces modèles ne sont pas encore très populaires dans la pratique. En effet, l'absence de données détaillées fiables et la pauvreté des capacités informatiques (jusqu'à récemment) ont considérablement ralenti le développement de cette classe de modèles. Comme pour les modèles collectifs, il est possible de les diviser en modèles paramétriques et non-paramétriques. Des exemples de modèles paramétriques sont présentés dans les articles de (Arjas, 1989) et (Norberg, 1993), alors que des exemples de modèles non-paramétriques se retrouvent dans (Drieskens, Henry, Walhin et Wielandts, 2014) et (Rosenlund, 2012). Ce mémoire, en particulier, est largement inspiré de l'article de (Charpentier et Pigeon, 2016). Dans cet article, les auteurs ont étudié les propriétés des modèles Poisson et Quasi-Poisson pour des données individuelles et collectives. Les modèles individuels peuvent capter des micro-structures du développement des paiements (voir figure 0.1) et donc prendre en compte l'hétérogénéité et les changements structuraux. Enfin, des études comme (Jin et Frees, 2013) montrent, de façon empirique, que dans plusieurs scénarios, les réserves obtenues avec des modèles individuels ont une précision plus élevée que celles obtenues avec une approche collective.

Le mémoire présenté combine deux courants assez nouveaux dans la littérature : le premier consiste à utiliser une approche individuelle plutôt que collective et le deuxième prend en compte la dépendance entre les réserves de différentes lignes d'affaires d'une même compagnie. On fera une revue de ces deux approches, puis on expliquera en quoi étudier la dépendance des paiements individuels par ligne

d'affaires pourrait être intéressant.

Lorsqu'un assureur a plusieurs lignes d'affaires, l'approche classique est d'additionner les réserves de chaque ligne. Cette approche est juste uniquement si les lignes d'affaires sont indépendantes. Dans le cas contraire, on sous-estime ou on sur-estime le montant de réserve nécessaire. C'est pourquoi plusieurs modèles ont été développés afin de prendre en compte cette dépendance. Cette dernière est parfois modélisée par des copules, par exemple (Brehin 2002) qui utilisent une copule gaussienne pour modéliser la distribution conjointe des pertes, (Alai et Wüthrich, 2009) qui utilise une copule gaussienne multivariée pour adapter la corrélation des années comptable et, récemment, (Abdallah, Boucher, et Cossette, 2015) qui utilisent une structure de copule archimédienne hiérarchique pour capturer la dépendance entre les années de calendrier des différentes lignes d'affaires. D'autres méthodes paramétriques ont également été utilisées, notamment des lois multivariées telles que des lognormales (voir (Shi, Basu et Meyers, 2012) et (Merz, Wüthrich, et Hashorva, 2013)) et une famille Sarmanov bivariée (voir (Abdallah, Boucher, Cossette, et Trufin, 2016)). Ce mémoire est basé sur le modèle proposé par (Avanzi, Taylor, Vu, et Wong, 2016) qui utilisent une loi Tweedie multivariée avec un choc commun telle que proposée par (Furman et Landsman, 2010) mais appliquée au contexte des réserves en assurances.

La loi Tweedie appartient à la famille de dispersion exponentielle (EDF) et inclut plusieurs distributions telles que la distribution Poisson et la distribution Gamma. Dans (Avanzi, Taylor, Vu, et Wong, 2016), les auteurs mentionnent plusieurs avantages liés à l'utilisation de cette distribution : il s'agit d'un modèle très flexible car il inclut une grande gamme de distributions, la structure de dépendance est transparente grâce à la présence d'un choc commun et les moments et les cumulants peuvent être obtenus analytiquement. Enfin, ils notent que la fonction de densité de probabilité multivariée peut être évaluée.

Le modèle développé dans ce mémoire est inspiré de celui présenté dans (Avanzi, Taylor, Vu, et Wong, 2016) mais adapté à l'approche individuelle illustrée dans (Charpentier et Pigeon, 2016). Pour y parvenir on doit modéliser la sévérité et la fréquence des sinistres séparément en supposant qu'elles sont indépendantes. Ainsi la dépendance entre les lignes d'affaires est étudiée séparément par fréquence et par sévérité des paiements. L'analyse de la fréquence est moins complexe puisque l'on a une donnée (le nombre de paiements) par cellule, c'est-à-dire au croisement d'une année de survenance, d'une année de développement et d'une ligne d'affaires. Lors de la modélisation des réserves collectives on a aussi une seule donnée (la somme des paiements) par cellule, on peut utiliser les modèles dans la littérature énoncés précédemment. La modélisation de la sévérité des paiements est différente car on a plusieurs données (les paiements non agrégés) par cellule. Ce changement ouvre la porte à des méthodes d'estimation différentes telles que la méthode des moments.

Ainsi, on considère que la méthode suggérée dans ce mémoire pourrait être intéressante pour un assureur qui veut capter la dépendance entre la sévérité et fréquence des paiements parmi plusieurs lignes d'affaires, tout en ayant un modèle dont le temps d'estimation des paramètres et le temps pour réaliser des simulations reste relativement raisonnable sans ressources informatiques exceptionnelles.

Ce mémoire est organisé de la façon suivante. Tout d'abord on présentera la notation qui sera utilisée et les principales approches collectives classiques au chapitre 1. Par la suite, le chapitre 2 introduira la loi Tweedie multivariée avec un choc commun tel que proposé par (Furman et Landsman, 2010). Puis, on adaptera ce modèle à la sévérité et on proposera des modèles pour la fréquence au chapitre 3. Par la suite, on calculera de façon théorique les moments clé des réserves au chapitre 4. Après, on proposera des méthodes d'estimation des paramètres cherchés au chapitre 5. Finalement, on fera une application du modèle avec des

données d'un assureur au chapitre 6.

CHAPITRE I

NOTATION ET APPROCHES COLLECTIVES CLASSIQUES

1.1 Notation

On considère un portefeuille contenant L sous-portefeuilles de différents secteurs d'activités, $l \in \{1, \dots, L\}$. On pose $X_{k,i,j}^{(l)}$, qui représente le k^e paiement incrémental qui correspond à l'année de survenance $i \in \{1, \dots, I\}$ et à l'année de développement $j \in \{0, \dots, J\}$ dans le secteur d'activité $l \in \{1, \dots, L\}$. On note que pour chaque triplet (i, j, l) , il y a un nombre de paiements qui peut être différent de celui d'un autre triplet. Ainsi, le nombre total de paiements correspondant à l'année de survenance i , à l'année de développement j et au secteur d'activité l est noté $K_{i,j}^{(l)}$.

Dans le domaine de la modélisation des réserves en assurances I.A.R.D., on ne travaille généralement pas directement sur les paiements. On s'intéresse plutôt aux paiements incrémentaux standardisés, c'est-à-dire que l'on prend en compte l'exposition au risque. Dans le cadre du modèle proposé dans ce mémoire, on considèrera l'exposition uniquement dans la modélisation du nombre de sinistre(s).

L'ensemble des paiements observés est représenté par

$$\mathcal{X}^U = \{X_{k,i,j}^{(l)}; 1 \leq k \leq K_{i,j}^{(l)}, 1 \leq i \leq I, 0 \leq j \leq I - i, 1 \leq l \leq L\},$$

et l'ensemble des paiements à prédire est représenté par ¹

$$\mathcal{X}^D = \{X_{k,i,j}^{(l)}; 1 \leq k \leq K_{i,j}^{(l)}, 1 \leq i \leq I, I - i + 1 \leq j \leq J, 1 \leq l \leq L\}.$$

L'ensemble des paiements observés dans un secteur d'activité (l) est représenté par

$$\mathcal{X}^{(l)U} = \{X_{k,i,j}^{(l)}; 1 \leq k \leq K_{i,j}^{(l)}, 1 \leq i \leq I, 0 \leq j \leq I - i\}$$

et l'ensemble des paiements à prédire dans un secteur d'activité (l) est représenté par

$$\mathcal{X}^{(l)D} = \{X_{k,i,j}^{(l)}; 1 \leq k \leq K_{i,j}^{(l)}, 1 \leq i \leq I, I - i + 1 \leq j \leq J\}.$$

Le but est de prédire l'ensemble inconnu $\mathcal{X}^D$ et, en particulier, de trouver le total des paiements non observés. On note que dans cet ensemble, contrairement à l'ensemble $\mathcal{X}^U$, les valeurs de $K_{i,j}^{(l)}$ doivent également être prédites et ce, en tenant compte de l'exposition au risque. Lorsque que l'on travaille avec des données individuelles, on modélise souvent la fréquence et la sévérité séparément. Dans ce cas, l'exposition au risque est prise en compte uniquement dans la modélisation de la fréquence. Afin de limiter l'effet causé par les variations de l'exposition dans les différentes cellules on va s'intéresser aux $K_{i,j}^{(l)}$ standardisés, c'est-à-dire aux

$$N_{i,j}^{(l)} = \frac{K_{i,j}^{(l)}}{\omega_{i,j}^{(l)}}, \quad (1.1)$$

où $\omega_{i,j}^{(l)}$ est l'exposition au risque pour la cellule (i, j) du secteur d'activité l . On définit alors l'ensemble du nombre de paiements observés standardisés et non-standardisés par

$$\mathcal{N}^U = \{N_{i,j}^{(l)}; 1 \leq i \leq I, 0 \leq j \leq I - i, 1 \leq l \leq L\}$$

1. Le choix d'utiliser la lettre U (pour *Up*) pour représenter l'information observée et la lettre D (pour *Down*) pour représenter l'information à prédire est justifié par la représentation triangulaire des données qui sera introduite plus loin.

et

$$\mathcal{K}^U = \{K_{i,j}^{(l)}; 1 \leq i \leq I, 0 \leq j \leq I-i, 1 \leq l \leq L\}.$$

Enfin, on définit également l'ensemble du nombre de paiements à prédire standardisés et non-standardisés par

$$\mathcal{N}^D = \{N_{i,j}^{(l)}; 1 \leq i \leq I, I-i+1 \leq j \leq J, 1 \leq l \leq L\}$$

et

$$\mathcal{K}^D = \{K_{i,j}^{(l)}; 1 \leq i \leq I, I-i+1 \leq j \leq J, 1 \leq l \leq L\}.$$

Le but ultime est de prédire les ensembles $\mathcal{X}^D$ et $\mathcal{K}^D$ (à partir de $\mathcal{N}^D$).

On définit alors l'ensemble des paiements collectifs incrémentaux observés par

$$\mathcal{S}^U = \left\{ S_{i,j}^{(l)} = \sum_{k=1}^{K_{i,j}^{(l)}} X_{i,j}^{(l)}; 1 \leq i \leq I, 0 \leq j \leq I-i, 1 \leq l \leq L \right\},$$

et l'ensemble des paiements collectifs cumulatifs observés par

$$\mathcal{CS}^U = \left\{ CS_{i,j}^{(l)} = \sum_{m=0}^j S_{i,j}^{(l)}; 1 \leq i \leq I, 0 \leq j \leq I-i, 1 \leq l \leq L \right\}.$$

On définit également l'ensemble des paiements collectifs incrémentaux à prédire par

$$\mathcal{S}^D = \left\{ S_{i,j}^{(l)} = \sum_{k=1}^{K_{i,j}^{(l)}} X_{i,j}^{(l)}; 1 \leq i \leq I, I-i+1 \leq j \leq J, 1 \leq l \leq L \right\},$$

et l'ensemble des paiements collectifs cumulatifs à prédire par

$$\mathcal{CS}^D = \left\{ CS_{i,j}^{(l)} = \sum_{m=0}^j S_{i,j}^{(l)}; 1 \leq i \leq I, I-i+1 \leq j \leq J, 1 \leq l \leq L \right\}.$$

La sinistralité incrémentale observée ($\mathcal{S}^U$) de la ligne d'affaires l peut ainsi être représentée sous la forme d'un triangle de développement incrémental tel qu'illustré au tableau 1.1.

Tableau 1.1: Triangle de développement incrémental de la ligne d'affaires l .

(i/j)	0	1	...	J-1	J
1	$S_{1,0}^{(l)}$	$S_{1,1}^{(l)}$	...	$S_{1,J-1}^{(l)}$	$S_{1,J}^{(l)}$
2	$S_{2,0}^{(l)}$	$S_{2,1}^{(l)}$	...	$S_{2,J-1}^{(l)}$	
...	...	...	...		
I-1	$S_{I-1,0}^{(l)}$	$S_{I-1,1}^{(l)}$			
I	$S_{I,0}^{(l)}$				

Alors, la sinistralité cumulative observée (CS^U) de la ligne d'affaires l peut ainsi être représentée sous la forme d'un triangle de développement cumulé tel qu'illustré au tableau 1.2.

Tableau 1.2: Triangle de développement cumulé de la ligne d'affaires l .

(i/j)	0	1	...	J-1	J
1	$CS_{1,0}^{(l)}$	$CS_{1,1}^{(l)}$	...	$CS_{1,J-1}^{(l)}$	$CS_{1,J}^{(l)}$
2	$CS_{2,0}^{(l)}$	$CS_{2,1}^{(l)}$	...	$CS_{2,J-1}^{(l)}$	
...	...	...	...		
I-1	$CS_{I-1,0}^{(l)}$	$CS_{I-1,1}^{(l)}$			
I	$CS_{I,0}^{(l)}$				

La lecture des triangles de développement peut se faire selon divers angles :

- la lecture par colonne correspond à l'année de développement j , et reflète l'évolution de la vie des sinistres ;
- la lecture par ligne correspond à l'année de survenance i , et reflète les changements de souscriptions, de taille du portefeuille, etc. ; et
- la lecture par diagonale correspond à l'année de calendrier.

Puisque l'idée du provisionnement est de prévoir le montant final des sinistres afin de provisionner pour les paiements non-effectués, sous l'hypothèse que tous

les sinistres seront réglés après I années, on cherche à compléter le tableau en remplissant le triangle inférieur droit ($\mathcal{S}^D$ et $\mathcal{CS}^D$) avec des prédictions (voir tableaux 1.4 et 1.3).

Tableau 1.3: Triangle de développement incrémental complet de la ligne d'affaires l .

(i/j)	0	1	...	J-1	J
1	$S_{1,0}^{(l)}$	$S_{1,1}^{(l)}$	...	$S_{1,J-1}^{(l)}$	$S_{1,J}^{(l)}$
2	$S_{2,0}^{(l)}$	$S_{2,1}^{(l)}$	...	$S_{2,J-1}^{(l)}$	$\widehat{S}_{2,J}^{(l)}$
...	...	...	...	...	...
I-1	$S_{I-1,0}^{(l)}$	$S_{I-1,1}^{(l)}$	...	$\widehat{S}_{I-1,J-1}^{(l)}$	$\widehat{S}_{I-1,J}^{(l)}$
I	$S_{I,0}^{(l)}$	$\widehat{S}_{I,1}^{(l)}$	...	$\widehat{S}_{I,J-1}^{(l)}$	$\widehat{S}_{I,J}^{(l)}$

Tableau 1.4: Triangle de développement cumulé complet de la ligne d'affaires l .

(i/j)	0	1	...	J-1	J
1	$CS_{1,0}^{(l)}$	$CS_{1,1}^{(l)}$	...	$CS_{1,J-1}^{(l)}$	$CS_{1,J}^{(l)}$
2	$CS_{2,0}^{(l)}$	$CS_{2,1}^{(l)}$	...	$CS_{2,J-1}^{(l)}$	$\widehat{CS}_{2,J}^{(l)}$
...	...	...	...	...	...
I-1	$CS_{I-1,0}^{(l)}$	$CS_{I-1,1}^{(l)}$	...	$\widehat{CS}_{I-1,J-1}^{(l)}$	$\widehat{CS}_{I-1,J}^{(l)}$
I	$CS_{I,0}^{(l)}$	$\widehat{CS}_{I,1}^{(l)}$	...	$\widehat{CS}_{I,J-1}^{(l)}$	$\widehat{CS}_{I,J}^{(l)}$

Ayant estimé ces paiements futurs, le montant des provisions pour l'année de survenance i et la ligne d'affaires l est alors donné par

$$\widehat{R}_i^{(l)} = \widehat{CS}_{i,J}^{(l)} - CS_{i,I-i}^{(l)} = \widehat{S}_{i,I-i+1}^{(l)} + \widehat{S}_{i,I-i+2}^{(l)} + \dots + \widehat{S}_{i,J}^{(l)},$$

et le montant total des réserves pour la ligne d'affaires l est donné par

$$\widehat{R}^{(l)} = \sum_{i=1}^I \widehat{R}_i^{(l)} = \sum_{i=1}^I \widehat{CS}_{i,J}^{(l)} - C_{i,I-i}^{(l)} = \sum_{\widehat{S}_{i,j}^{(l)} \in \widehat{\mathcal{S}}^{(l)D}} \widehat{S}_{i,j}^{(l)},$$

$$\text{où } \widehat{\mathcal{S}}^{(l)D} = \left\{ \widehat{S}_{i,j}^{(l)}; 1 \leq i \leq I, I - i + 1 \leq j \leq J \right\}.$$

Ainsi, le montant total des réserves parmi toutes les ligne d'affaires est donné par

$$\widehat{R} = \sum_{l=1}^L \widehat{R}^{(l)} = \sum_{\widehat{S}_{i,j}^{(l)} \in \widehat{\mathcal{S}}^D} \widehat{S}_{i,j}^{(l)},$$

$$\text{où } \widehat{\mathcal{S}}^D = \left\{ \widehat{S}_{i,j}^{(l)}; 1 \leq i \leq I, I - i + 1 \leq j \leq J, 1 \leq l \leq L \right\}.$$

Rappelons que dans le mémoire proposé on va modéliser la fréquence et la sévérité séparément. De la même façon que pour les modèles collectifs où les paiements agrégés ($S_{i,j}^{(l)}$ ou $CS_{i,j}^{(l)}$) sont structurés sous forme de triangle, on peut considérer faire un regroupement similaire pour la fréquence et la sévérité. En particulier, la fréquence des paiements pour une ligne d'affaires a une seule donnée ($K_{i,j}^{(l)}$) par cellule (i, j) et donc est semblable au regroupement des paiements collectifs. Le tableau 1.5 illustre la structure en triangle de développement du nombre de paiements.

Tableau 1.5: Triangle de développement incrémental du nombre paiements de la ligne d'affaires l .

(i/j)	0	1	...	J-1	J
1	$K_{1,0}^{(l)}$	$K_{1,1}^{(l)}$	...	$K_{1,J-1}^{(l)}$	$K_{1,J}^{(l)}$
2	$K_{2,0}^{(l)}$	$K_{2,1}^{(l)}$	...	$K_{2,J-1}^{(l)}$	
...	...	...	...		
I-1	$K_{I-1,0}^{(l)}$	$K_{I-1,1}^{(l)}$			
I	$K_{I,0}^{(l)}$				

D'autre part, la sévérité des paiements pour une ligne d'affaires a plusieurs don-

nées $(X_{1,i,j}^{(l)}, X_{2,i,j}^{(l)}, \dots, X_{K_{i,j}^{(l)},i,j}^{(l)})$ par cellule (i, j) . Pour construire un triangle de développement pour la sévérité, on doit définir le vecteur qui contient les montants des paiements de la cellule (i, j) pour la ligne d'affaires l , sachant le nombre de paiements de ce secteur d'activité :

$$\left(\mathbf{X}_{i,j}^{(l)} \mid K_{i,j}^{(l)} \right) = \left[X_{1,i,j}^{(l)} \quad X_{2,i,j}^{(l)} \quad \dots \quad X_{K_{i,j}^{(l)},i,j}^{(l)} \right]^T.$$

Le tableau 1.6 illustre la structure en triangle de développement des paiements individuels.

Tableau 1.6: Triangle de développement incrémental des paiements individuels de la ligne d'affaires l .

(i/j)	0	1	...	J
1	$\left(\mathbf{X}_{1,0}^{(l)} \mid K_{1,0}^{(l)} \right)$	$\left(\mathbf{X}_{1,1}^{(l)} \mid K_{1,1}^{(l)} \right)$	...	$\left(\mathbf{X}_{1,J}^{(l)} \mid K_{1,J}^{(l)} \right)$
2	$\left(\mathbf{X}_{2,0}^{(l)} \mid K_{2,0}^{(l)} \right)$	$\left(\mathbf{X}_{2,1}^{(l)} \mid K_{2,1}^{(l)} \right)$	...	
...	...	...	...	
I-1	$\left(\mathbf{X}_{I-1,0}^{(l)} \mid K_{I-1,0}^{(l)} \right)$	$\left(\mathbf{X}_{I-1,1}^{(l)} \mid K_{I-1,1}^{(l)} \right)$		
I	$\left(\mathbf{X}_{I,0}^{(l)} \mid K_{I,0}^{(l)} \right)$			

Dans le présent mémoire, on utilisera une notation particulière peu commune dans la littérature actuarielle pour représenter les paramètres des distributions. Cette notation a pour but d'identifier rapidement de quel type de paramètre il s'agit et d'éviter l'utilisation d'un trop grand nombre de lettres grecques différentes. On considère un paramètre quelconque $\theta_{i,j}^{(l)}$. Ce dernier est identifié par le produit $\theta_{\mathbb{I};i}^{(l)} \theta_{\mathbb{J};j}^{(l)}$, où $\theta_{\mathbb{I};i}^{(l)}$ caractérise l'année de survenance (ou ligne dans un triangle de développement classique) et $\theta_{\mathbb{J};j}^{(l)}$ caractérise l'année de développement (ou colonne dans un triangle de développement classique). Les symboles $\mathbb{I}$ et $\mathbb{J}$ ne sont pas des nombres, ils indiquent simplement quel effet est modélisé.

1.2 Présentation de modèles collectifs classiques

1.2.1 Modèle de Mack

Le modèle de (Mack, 1993) est un modèle non-paramétrique basé sur des paiements collectifs cumulatifs, c'est-à-dire à partir d'un triangle de développement cumulé tel qu'illustré au tableau 1.2. Il s'agit d'une version stochastique de l'algorithme Chain-Ladder (voir (Mack, 1999) et (Mack, 1993)).

Definition 1 (Modèle de Mack). Le modèle repose sur les hypothèses suivantes :

Hypothèse (MC1) : indépendance par année de survenance, c'est-à-dire que

$CS_{i,j}^{(l)}$ et $CS_{i^*,j}^{(l)}$ sont indépendantes pour $i \neq i^*$; et

Hypothèse (MC2) : on peut lier $SC_{i,j}$ sachant le passé $SC_{i,0}, \dots, SC_{i,(j-1)}$

par des facteurs de développement $\lambda_{\mathbb{M};0}^{(l)}, \dots, \lambda_{\mathbb{M};j-1}^{(l)}$ tels que

$$\mathbb{E} \left[CS_{i,j}^{(l)} \middle| SC_{i,0}, \dots, SC_{i,(j-1)} \right] = \lambda_{\mathbb{M};j-1}^{(l)} CS_{i,(j-1)}^{(l)}.$$

On note que le $\mathbb{M}$ n'est pas un chiffre dans $\lambda_{\mathbb{M};j}^{(l)}$. Il indique qu'il s'agit d'un facteur de développement du modèle de Mack. La notation a pour but de distinguer ces facteurs des paramètres $\lambda_{\mathbb{I};i}^{(l)}$ et $\lambda_{\mathbb{J};j}^{(l)}$ qui seront utilisés dans le modèle individuel Tweedie Multivarié avec un choc commun.

Si les facteurs de développement sont connus, le meilleur estimateur pour le montant de la réserve pour l'année de survenance i , vu au temps I , est

$$\mathbb{E} \left[CS_{i,I}^{(l)} \middle| \mathcal{CS}^U \right] - CS_{i,(I-i)}^{(l)} = CS_{i,(j-1)}^{(l)} \left(\lambda_{\mathbb{M};I-i}^{(l)} \dots \lambda_{\mathbb{M};J-1}^{(l)} - 1 \right).$$

En pratique, les facteurs de développement ne sont pas connus et doivent être estimés. Sous les hypothèses (MC1) et (MC2), les estimateurs du modèle de Mack sont

$$\widehat{\lambda_{\mathbb{M};j}^{(l)}} = \frac{\sum_{i=1}^{I-j-1} SC_{i,(j+1)}^{(l)}}{\sum_{i=1}^{I-j-1} SC_{i,j}^{(l)}}.$$

Ces estimateurs possèdent plusieurs propriétés intéressantes telles que d'être sans biais et de conduire à des estimateurs pour les réserves également sans biais (voir, parmi d'autres, (Wüthrich et Merz, 2008) pour plus de détails).

On peut, par la suite utiliser les estimations des facteurs de développement pour estimer

$$\widehat{SC}_{i,j}^{(l)} = \left(\widehat{\lambda_{\mathbf{M};I-i}^{(l)}} \cdot \widehat{\lambda_{\mathbf{M};I-i+1}^{(l)}} \cdot \dots \cdot \widehat{\lambda_{\mathbf{M};j-1}^{(l)}} \right) SC_{i,I-i}^{(l)}, \text{ pour } j = I - i + 1, \dots, J.$$

Finalement, on peut calculer directement le montant total des réserves.

$$\widehat{R} = \sum_{l=1}^L \sum_{i=2}^I \widehat{SC}_{i,J}^{(l)} - SC_{i,I-i}^{(l)}.$$

1.2.2 Modèles linéaires généralisés

Les modèles linéaires généralisés (*Generalized Linear Models* ou GLM) sont des modèles paramétriques pour les paiements collectifs incrémentaux $S_{i,j}^{(l)}$.

Definition 2 (Modèle linéaire généralisé pour les paiements incrémentaux). Le modèle repose sur les hypothèses suivantes :

Hypothèse (GLM1) : indépendance des paiements collectifs incrémentaux $S_{i,j}^{(l)}$ par année de survenance (i) et/ou par année de développement (j) ; et

Hypothèse (GLM2) : la fonction de densité des paiements collectifs incrémentaux est

$$f_{S_{i,j}^{(l)}}(s; \theta_{i,j}^{(l)}, \psi_{i,j}^{(l)}) = c(s; \psi_{i,j}^{(l)}) \exp \left(\frac{s\theta_{i,j}^{(l)} - a(\theta_{i,j}^{(l)})}{\psi_{i,j}^{(l)}} \right),$$

où θ et ψ sont des paramètres et $c()$ et $a()$ des fonctions. Le paramètre θ est appelé le paramètre canonique et ψ le paramètre de dispersion. On

donne parfois les noms de mesure de base à la fonction $c()$ et log-partition à la fonction $a()$.

Par définition toutes les distributions ayant une fonction de densité de probabilité pouvant s'écrire sous la forme précédente sont dites membres de la famille exponentielle linéaire.

Pour une variable aléatoire dont la fonction de densité de probabilité est membre de la famille exponentielle linéaire, il est aisé d'obtenir l'espérance et la variance à l'aide des résultats présentés à la proposition 1.

Proposition 1. Sous les hypothèses **(GLM1)**, **(GLM2)** et, en définissant $V(\cdot)$ comme la fonction de variance, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[S_{i,j}^{(l)}] &= \mu_{i,j}^{(l)} = a'(\theta_{i,j}^{(l)}) \\ \text{Var}[S_{i,j}^{(l)}] &= \psi_{i,j}^{(l)} a''(\theta_{i,j}^{(l)}) \\ V(\mu_{i,j}^{(l)}) &= a''((a')^{-1}(\mu_{i,j}^{(l)})). \end{aligned}$$

Démonstration. Pour cette démonstration on a simplifié la notation en enlevant i, j et l . On sait que $\int f_S(s)ds = 1$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \int f_S(s)ds &= \int c(s, \psi) \exp((s\theta - a(\theta))/\psi)ds \\ 1 &= \int c(s, \psi) \exp(s\theta/\psi) \exp(-a(\theta)/\psi)ds \\ &= \int \frac{c(s, \psi) \exp(s\theta/\psi)}{\exp(a(\theta)/\psi)}ds \\ &= \frac{1}{\exp(a(\theta)/\psi)} \int c(s, \psi) \exp(s\theta/\psi)ds \\ &\rightarrow \int c(s, \psi) \exp(s\theta/\psi)ds = \exp(a(\theta)/\psi). \end{aligned}$$

On cherche

$$\begin{aligned}
 E[S] &= \int s f_S(s) ds \\
 &= \int s c(s, \psi) \exp((s\theta - a(\theta))/\psi) ds \\
 &= \frac{\int s c(s, \psi) \exp(s\theta/\psi) ds}{\exp(a(\theta)/\psi)} \\
 &= \frac{\int s c(s, \psi) \exp(s\theta/\psi) ds}{\int c(s, \psi) \exp(s\theta/\psi) ds} \\
 &= \frac{\int \psi \frac{\partial}{\partial \theta} c(s, \psi) \exp(s\theta/\psi) ds}{\int c(s, \psi) \exp(s\theta/\psi) ds} \\
 &= \frac{\psi \frac{\partial}{\partial \theta} \int c(s, \psi) \exp(s\theta/\psi) ds}{\int c(s, \psi) \exp(s\theta/\psi) ds} \\
 &= \frac{\psi \frac{\partial}{\partial \theta} \exp(a(\theta)/\psi)}{\exp(a(\theta)/\psi)} \\
 &= \frac{\frac{a'(\theta)}{\psi} \psi \exp(a(\theta)/\psi)}{\exp(a(\theta)/\psi)} \\
 &= a'(\theta).
 \end{aligned}$$

On cherche aussi

$$\begin{aligned}
 \text{Var}[S] &= E[S^2] - E[S]^2 \\
 &= E[S^2] - a'(\theta)^2,
 \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[S^2] &= \int s^2 f_S(s) ds \\
&= \int s^2 c(s, \psi) \exp((s\theta - a(\theta))/\psi) ds \\
&= \frac{\int s^2 c(s, \psi) \exp(s\theta/\psi) ds}{\exp(a(\theta)/\psi)} \\
&= \frac{\int s^2 c(s, \psi) \exp(s\theta/\psi) ds}{\int c(s, \psi) \exp(s\theta/\psi) ds} \\
&= \frac{\int \psi^2 \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} c(s, \psi) \exp(s\theta/\psi) ds}{\int c(s, \psi) \exp(s\theta/\psi) ds} \\
&= \frac{\psi^2 \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \int c(s, \psi) \exp(s\theta/\psi) ds}{\int c(s, \psi) \exp(s\theta/\psi) ds} \\
&= \frac{\psi^2 \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \exp(a(\theta)/\psi)}{\exp(a(\theta)/\psi)} \\
&= \frac{\psi \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{a'(\theta)\psi}{\psi} \exp(a(\theta)/\psi)}{\exp(a(\theta)/\psi)} \\
&= \frac{\psi \left(a''(\theta) \exp(a(\theta)/\psi) + \frac{a'(\theta)^2}{\psi} \exp(a(\theta)/\psi) \right)}{\exp(a(\theta)/\psi)} \\
&= \psi a''(\theta) + a'(\theta)^2.
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
\text{Var}[S] &= \mathbb{E}[S^2] - \mathbb{E}[S]^2 \\
&= \psi a''(\theta) + a'(\theta)^2 - a'(\theta)^2 = \psi a''(\theta).
\end{aligned}$$

Par définition, on a

$$\begin{aligned}
\text{Var}[S] &= \psi V(\mu) \\
\rightarrow V(\mu) &= \text{Var}[S] / \psi = (\psi a''(\theta)) / \psi = a''(\theta) = a''((a')^{-1}(\mu)).
\end{aligned}$$

□

On a L modèles (rappelons que L représente le nombre de lignes d'affaires dans le portefeuille) avec $(I)(J + 1)$ paramètres inconnus pour la moyenne, $\mu_{i,j}^{(l)}$. Afin d'estimer ces paramètres, on dispose de L triangles qui contiennent moins de $(I)(J + 1)$ données par triangle. Il faut donc ajouter davantage de contraintes au modèle afin de réduire le nombre de paramètres nécessaires. On considèrera ainsi une structure multiplicative où

$$\mathbb{E}[S_{i,j}^{(l)}] = \nu_{\mathbb{I};i}^{(l)} \nu_{\mathbb{J};j}^{(l)}$$

ce qui permet de réduire le nombre de paramètres par triangle à $I + J + 2$. Avec cette structure multiplicative, il est naturel de considérer une fonction de lien logarithmique

$$\ln \left(\mathbb{E}[S_{i,j}^{(l)}] \right) = \ln \left(\nu_{\mathbb{I};i}^{(l)} \right) + \ln \left(\nu_{\mathbb{J};j}^{(l)} \right).$$

Les paramètres $\nu_{\mathbb{I};i}^{(l)} \nu_{\mathbb{J};j}^{(l)}$ ont un degré de redondance pour chaque l . C'est-à-dire qu'il y a $I + J + 2$ paramètres pour chaque l , alors que le modèle n'est identifiable qu'avec $I + J + 1$ paramètres par secteur d'activité. Il faut rajouter une contrainte supplémentaire à chaque couple $\nu_{\mathbb{I};i}^{(l)} \nu_{\mathbb{J};j}^{(l)}$ afin que le modèle soit identifiable. Dans le cadre de ce mémoire, on propose de poser $\nu_{\mathbb{I};1}^{(l)} = 1, \forall l = 1, \dots, L$.

En choisissant $V \left(\mu_{i,j}^{(l)} \right) = (1) \mu_{i,j}^{(l)}$ comme fonction de variance et $\ln \left(\mathbb{E}[S_{i,j}^{(l)}] \right) = \ln \left(\nu_{\mathbb{I};i}^{(l)} \right) + \ln \left(\nu_{\mathbb{J};j}^{(l)} \right)$ comme fonction de lien, on obtient un modèle de Poisson. On peut également construire un modèle gamma en choisissant $V \left(\mu_{i,j}^{(l)} \right) = \left(\mu_{i,j}^{(l)} \right)^2$ comme fonction de variance et $\ln \left(\mathbb{E}[S_{i,j}^{(l)}] \right) = \ln \left(\nu_{\mathbb{I};i}^{(l)} \right) + \ln \left(\nu_{\mathbb{J};j}^{(l)} \right)$ comme fonction de lien.

Après avoir déterminé la distribution avec laquelle on travaillera, on peut estimer les paramètres $\nu_{\mathbb{I};i}^{(l)}$ et $\nu_{\mathbb{J};j}^{(l)}$, pour $i = 2, \dots, I$ et $j = 0, \dots, J$, par maximisation de la vraisemblance. Pour cette approche, on va supposer l'indépendance entre les lignes d'affaires, c'est-à-dire qu'on aura L fonctions de vraisemblance à maximiser. La fonction de vraisemblance de la ligne d'affaires l s'exprime comme :

$$L(\mathbf{s}^{(l)}; \boldsymbol{\nu}_{\mathbb{I}}^{(l)}, \boldsymbol{\nu}_{\mathbb{J}}^{(l)}, \psi^{(l)}) = \prod_{i=1}^I \prod_{j=0}^{I-i+1} f_{S_{i,j}^{(l)}}(s; \nu_{\mathbb{I};i}^{(l)}, \nu_{\mathbb{J};j}^{(l)}, \psi^{(l)}).$$

Avec les estimateurs $\widehat{\nu_{\mathbb{I};i}^{(l)}}$ et $\widehat{\nu_{\mathbb{J};j}^{(l)}}$ on peut calculer directement le montant total des réserves

$$\widehat{R} = \sum_{l=1}^L \sum_{i=2}^I \sum_{j=I-i+1}^J \widehat{\nu_{\mathbb{I};i}^{(l)}} \widehat{\nu_{\mathbb{J};j}^{(l)}}.$$

Rappelons que la réserve $\widehat{R}$ correspond à la somme des paiements collectifs à prédire $\mathcal{S}^D$.

CHAPITRE II

CONSTRUCTION D'UN MODÈLE TWEEDIE MULTIVARIÉ AVEC UN CHOC COMMUN

On cherche à construire un modèle qui permettra de capturer la dépendance par cellule (i, j) (que la cellule contienne une ou plusieurs données) entre les différentes lignes d'affaires à l'aide d'une variable de «choc commun». Il s'agit d'une variable aléatoire qui prendra la même valeur pour toutes les données d'une même cellule (i, j) dans toutes les lignes d'affaires. Afin de parvenir à construire un tel modèle, on définit dans ce chapitre un modèle Tweedie multivarié avec choc commun dans un cadre général puis, dans les chapitres suivants, on l'adaptera à la modélisation des réserves. À la section 2.1, on traitera le cas univarié où nous utiliserons la distribution Tweedie univariée. Par la suite, quelques exemples seront présentés à la section 2.2. Enfin, à la section 2.3, on verra comment obtenir une distribution multivariée à l'aide d'un choc commun.

2.1 La famille de distributions Tweedie

Cette présentation est basée sur l'introduction de l'article de (Alai, Landsman et Sherris, 2015), sur l'annexe de l'article de (Avanzi, Taylor, Vu, et Wong, 2016) et sur les chapitres 3 et 4 du livre de (Jorgensen, 1997).

Une variable aléatoire X appartient à la famille des distributions exponentielles

(*exponential distribution family*, EDF) si sa mesure de probabilité $P_{\theta,\lambda}$ est absolument continue par rapport à une certaine mesure Q_λ et peut être représentée comme suit pour une fonction $\kappa(\theta)$ appelée cumulant :

$$dP_{\theta,\lambda}(x) = e^{\theta x - \lambda \kappa(\theta)} dQ_\lambda.$$

Une variable aléatoire appartenant à cette famille a deux représentations. La première représentation est dite **additive** (avec un paramètre canonique θ et un paramètre d'indice λ). Le paramètre canonique a pour domaine

$$\Theta = \{\theta \in \mathbb{R} \mid \kappa(\theta) < \infty\}$$

et le paramètre λ appartient à l'ensemble des valeurs réelles positives, c'est-à-dire $\Lambda = \{\lambda \in \mathbb{R}^+\}$. Cette famille est également appelée (Jorgensen, 1997) la famille des distributions additives de dispersion exponentielle $ED^*(\theta, \lambda)$.

Pour une variable aléatoire X sous forme additive, la fonction génératrice des moments est

$$M_t(X) = \exp(\kappa(\theta + t) - \kappa(\theta)). \quad (2.1)$$

D'après (Jorgensen, 1997), la seconde représentation de la famille des distributions de dispersion exponentielle $ED(\mu, \sigma^2)$, appelée la représentation **reproductive**, est générée par la mesure

$$d\bar{P}_{\mu, \sigma^2}(x') = e^{\lambda(\theta x' - \kappa(\theta))} d\bar{Q}_\lambda,$$

où $d\bar{Q}_\lambda$ est obtenu à partir de dQ_λ en utilisant le changement de variable $X' = X/\lambda$. Le paramètre $\mu = \kappa'(\theta)$ est alors le paramètre de localisation et $\sigma^2 = 1/\lambda$ est le paramètre de dispersion.

La famille Tweedie est une sous-famille des EDF dont on note

1. Tweedie* la forme additive et,
2. Tweedie la forme reproductive.

Les membres de cette sous-famille ont une relation spéciale entre la variance et l'espérance traduite par la fonction variance donnée par

$$V(\mu) = \mu^p, \quad (2.2)$$

où p est le paramètre de puissance qui détermine le type de distribution. Le cumulant pour une distribution Tweedie est donné par

$$\kappa_p(\theta) = \begin{cases} \exp(\theta), & p = 1 \\ -\ln(-\theta), & p = 2 \\ \frac{\tau-1}{\tau} \left(\frac{\theta}{\tau-1}\right)^{\tau-1}, & p \neq (0, 1] \cup [2], \end{cases} \quad (2.3)$$

où $\tau = (p-2)/(p-1)$. De plus, le paramètre canonique appartient à l'ensemble Θ_p donné par

$$\Theta_p = \begin{cases} [0, \infty), & p < 0 \\ \mathbb{R}, & p = 0, 1 \\ (-\infty, 0), & 1 < p \leq 2 \\ (-\infty, 0], & 2 < p < \infty. \end{cases}$$

On a également la relation suivante (voir (Jorgensen, 1997)) entre les formes reproductive et additive pour la famille Tweedie

$$X \sim \text{Tweedie}_p^*(\theta, \lambda) = \text{Tweedie}_p(\lambda \kappa_p'(\theta), \lambda^{1-p}). \quad (2.4)$$

Enfin on note que (voir (Alai, Landsman et Sherris, 2015)) l'on peut obtenir les moments suivant :

$$E[X] = \lambda \kappa_p'(\theta),$$

$$\text{Var}[X] = \lambda \kappa_p''(\theta)$$

et

$$\text{E}[(X - \text{E}[X])^3] = \lambda \kappa_p'''(\theta).$$

2.2 Exemples de distributions Tweedie

Le paramètre p détermine quelle distribution appartenant à la famille Tweedie est utilisée. Le choix de certaines valeurs pour le paramètre p permet l'obtention de certaines distributions connues. Par exemple, avec $p = 1$ et $p = 2$ on obtient, respectivement, une distribution Poisson et une distribution gamma. Afin d'illustrer la famille Tweedie, on propose d'observer la fonction de densité et la fonction de répartition d'une variable aléatoire Y telle que

$$Y \sim \text{Tweedie}_p(1, 1), \quad p = 1, 1.5, 2.$$

Les figures 2.1 et 2.2 illustrent, respectivement, les fonctions de densité/masse de probabilité et les fonctions répartition de Y .

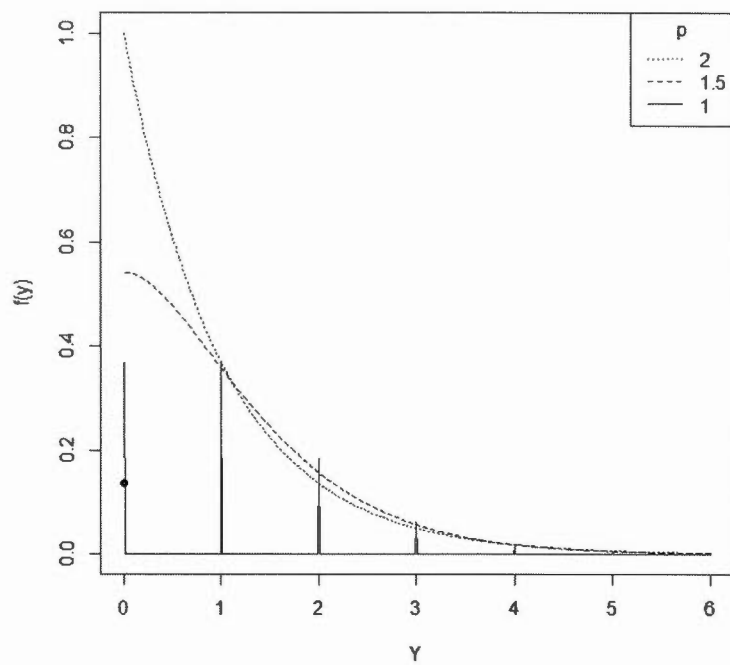


Figure 2.1 Fonctions de densité de $Y \sim \text{Tweedie}_p(1, 1)$ pour des valeurs de $p = 1, 1.5, 2$.

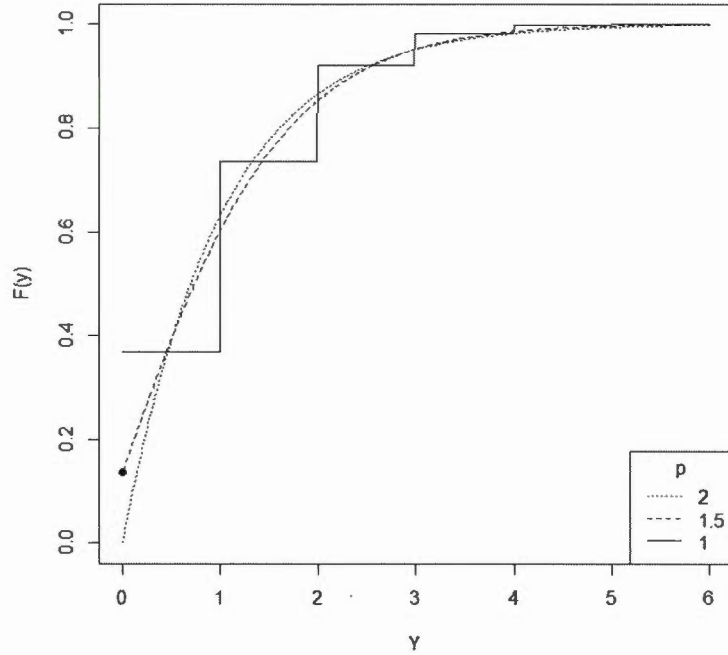


Figure 2.2 Fonctions de répartition de $Y \sim \text{Tweedie}_p(1, 1)$ pour des valeurs de $p = 1, 1.5, 2$.

2.3 Modèle Tweedie Multivarié avec un choc commun

On cherche à introduire la dépendance entre les éléments d'un vecteur aléatoire $\mathbf{X}$ de taille N avec une structure de choc commun. En définissant la variable aléatoire Y_0 comme le choc commun et les variables aléatoires $Y_n \forall n = 1, \dots, N$ comme les effets individuels, on a

$$X_n = c_n^* Y_0 + Y_n, \forall n = 1, \dots, N$$

où $c_n^*, \forall n = 1, \dots, N$ sont des constantes.

En supposant que les éléments du vecteur aléatoire

$$\mathbf{Y} = [Y_0 \dots Y_N]^T$$

sont indépendants, on constate que la dépendance entre les éléments du vecteur $\mathbf{X}$ est capturée uniquement grâce Y_0 qui est affectera l'ensemble des éléments de ce vecteur.

Théorème 1. On considère un vecteur aléatoire $\mathbf{X} = \mathbf{A}\mathbf{Y}$ où $\mathbf{Y}$ est un vecteur aléatoire colonne de taille $(N + 1) \times 1$ et dont les composantes sont indépendantes entre elles et suivent des lois Tweedie additives, c'est-à-dire $Y_n \sim \text{Tweedie}_p^*(a_n^*, b_n^*), n = 0, 1, \dots, N$. Soit $\mathbf{A}$, une matrice $N \times (N + 1)$ définie par

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} c_1^* & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ c_2^* & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ c_3^* & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_N^* & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix},$$

où $c_n^* = a_0^*/a_n^*, n = 1, 2, \dots, N$. Alors les composantes $X_n, n = 1, 2, \dots, N$, du vecteur $\mathbf{X}$ sont telles que

$$X_n = c_n^* Y_0 + Y_n \sim \text{Tweedie}_p^*(a_n^*, b_0^* (a_0^*/a_n^*)^\tau + b_n^*), \quad p \neq 1,$$

où $\tau = (p - 2)/(p - 1)$. La fonction de densité de probabilité multivariée de $\mathbf{X}$ est donnée par

$$f_{\mathbf{X}}(x_1, \dots, x_N) = \int_0^B f_{Y_0}^*(y_0) \prod_{n=1}^N f_{Y_n}^*\left(x_n - \frac{a_0^*}{a_n^*} y_0\right) dy_0,$$

où

$$B = \min\left(\frac{a_1^*}{a_0^*} x_1, \dots, \frac{a_N^*}{a_0^*} x_N\right)$$

et $f^*(.)$ est la fonction de densité de probabilité univariée d'une Tweedie additive.

Démonstration. Ce théorème a été prouvé par (Furman et Landsman, 2010) pour le cas $p \neq (0, 1] \cup [2]$. La fonction génératrice des moments de $X_n = c_n^* Y_0 + Y_n$ est (voir équation (2.1))

$$\begin{aligned} M_{X_n}(t) &= \exp(b_n^*(\kappa_p(a_n^* + t) - \kappa_p(a_n^*))) \times \exp(b_0^*(\kappa_p(a_0^* + c_n^* t) - \kappa_p(a_0^*))) \\ &= \exp(b_n^*(\kappa_p(a_n^* + t) - \kappa_p(a_n^*))) \times \exp(b_0^*(\kappa_p((a_n^* + t)c_n^*) - \kappa_p(a_n^* c_n^*))), \end{aligned}$$

où

$$\kappa_p(a^*) = \begin{cases} -\ln(-a^*), & p = 2 \\ \frac{\tau-1}{\tau} \left(\frac{a^*}{\tau-1}\right)^{\tau-1}, & p \neq (0, 1] \cup [2] \end{cases}$$

et $\tau = (p - 2)/(p - 1)$.

On distingue alors les deux cas ci-dessous.

Cas 1 : $p = 2$

$$\begin{aligned} \ln(M_{X_n}(t)) &= \ln(\exp(b_n^*(\kappa_2(a_n^* + t) - \kappa_2(a_n^*))) \times \exp(b_0^*(\kappa_2((a_n^* + t)c_n^*) \\ &\quad - \kappa_2(a_n^* c_n^*)))) \\ &= b_n^*(\kappa_2(a_n^* + t) - \kappa_2(a_n^*)) + b_0^*(\kappa_2((a_n^* + t)c_n^*) - \kappa_2(a_n^* c_n^*)) \\ &= b_n^*(-\ln(-(a_n^* + t)) - (-\ln(-a_n^*))) + b_0^*(-\ln((a_n^* + t)c_n^*) \\ &\quad - (-\ln(-a_n^* c_n^*))) \\ &= b_n^*(-\ln(-(a_n^* + t)) - (-\ln(-a_n^*))) \\ &\quad + b_0^*(-\ln(a_n^* + t) - (-\ln(-a_n^*))) \\ &= (b_n^* + b_0^*)(-\ln(-(a_n^* + t)) - (-\ln(-a_n^*))) \\ &= (b_n^* + b_0^*)(\kappa_2(a_n^* + t) - \kappa_2(a_n^*)). \end{aligned}$$

Ainsi, on obtient que

$$X_n \sim \text{Tweedie}_p^*(a_n^*, b_0^* + b_n^*), \quad p = 2.$$

Cas 2 : $p \neq (0, 1] \cup [2]$

$$\begin{aligned} \ln(M_{X_n}(t)) &= \ln(\exp(b_n^*(\kappa_p(a_n^* + t) - \kappa_p(a_n^*))) \times \exp(b_0^*(\kappa_p((a_n^* + t)c_n^*) - \kappa_p(a_n^*c_n^*)))) \\ &= b_n^*(\kappa_p(a_n^* + t) - \kappa_p(a_n^*)) + b_0^*(\kappa_p((a_n^* + t)c_n^*) - \kappa_p(a_n^*c_n^*)) \\ &= b_n^* \left(\frac{\tau-1}{\tau} \left(\frac{a_n^* + t}{\tau-1} \right)^\tau - \frac{\tau-1}{\tau} \left(\frac{a_n^*}{\tau-1} \right)^\tau \right) \\ &\quad + b_0^* \left(\frac{\tau-1}{\tau} \left(\frac{(a_n^* + t)c_n^*}{\tau-1} \right)^\tau - \frac{\tau-1}{\tau} \left(\frac{a_n^*c_n^*}{\tau-1} \right)^\tau \right) \\ &= b_n^* \left(\frac{\tau-1}{\tau} \left(\frac{a_n^* + t}{\tau-1} \right)^\tau - \frac{\tau-1}{\tau} \left(\frac{a_n^*}{\tau-1} \right)^\tau \right) \\ &\quad + b_0^* \left(\frac{c_n^*}{\tau-1} \right)^\tau \left(\frac{\tau-1}{\tau} \left(\frac{a_n^* + t}{\tau-1} \right)^\tau - \frac{\tau-1}{\tau} \left(\frac{a_n^*}{\tau-1} \right)^\tau \right) \\ &= (b_n^* + b_0^*(c_n^*)^\tau) \left(\frac{\tau-1}{\tau} \left(\frac{a_n^* + t}{\tau-1} \right)^\tau - \frac{\tau-1}{\tau} \left(\frac{a_n^*}{\tau-1} \right)^\tau \right) \\ &= \left(b_n^* + b_0^* \left(\frac{a_0^*}{a_n^*} \right)^\tau \right) (\kappa_p(a_n^* + t) - \kappa_p(a_n^*)). \end{aligned}$$

Ainsi, on obtient que

$$X_n \sim \text{Tweedie}_p^* \left(a_n^*, b_0^* \left(\frac{a_0^*}{a_n^*} \right)^\tau + b_n^* \right), \quad p \neq (0, 1] \cup [2].$$

□

Souvent, on utilise la forme additive de la loi Tweedie mais dans le contexte de modélisation des réserves, il est plus intéressant de travailler avec la forme reproductive puisque les paramètres peuvent être interprétés plus facilement. Cette forme possède un paramètre de localisation et un paramètre de dispersion qui spécifient l'espérance et la dispersion de la distribution. D'après (Jorgensen, 1997),

la relation entre la forme additive et la forme reproductive est

$$\text{Tweedie}_p^*(a^*, b^*) = \text{Tweedie}_p(\lambda \kappa'_p(a^*), (b^*)^{1-p}). \quad (2.5)$$

En notant que

$$\kappa'_p(a^*) = \begin{cases} \exp(a^*), & p = 1, \\ \left(\frac{a^*}{\tau-1}\right)^{\tau-1}, & p \neq 1, \end{cases}$$

on obtient

$$\text{Tweedie}_p^*(a^*, b^*) = \begin{cases} \text{Tweedie}_p(b^* \exp(a^*), 1) = \text{Poisson}(b^* \exp(a^*)), & p = 1 \\ \text{Tweedie}_p\left(b^* \left(\frac{a^*}{\tau-1}\right)^{\tau-1}, (b^*)^{1-p}\right), & p \neq 1, \end{cases}$$

où $\tau = (p-2)/(p-1)$. À la sous-section 2.3.1, on étudiera le cas où $p \neq 1$ et à la sous-section 2.3.2, le cas où $p = 1$.

2.3.1 Situation où $p \neq 1$.

En utilisant la relation entre la forme additive et reproductive, on obtient

$$\text{Tweedie}_p(a, b) = \text{Tweedie}_p^*\left(\frac{a^{1-p}}{b(1-p)}, b^{1/(1-p)}\right), p \neq 1.$$

Le théorème suivant permet de construire une distribution multivariée à partir de cette forme reproductive.

Théorème 2. On considère un vecteur aléatoire $\mathbf{X} = \mathbf{A}\mathbf{Y}$ où $\mathbf{Y}$ est un vecteur aléatoire colonne de taille $(N+1) \times 1$ dont les composantes sont indépendantes entre elles et suivent des lois Tweedie reproductives, c'est-à-dire $Y_n \sim \text{Tweedie}_p(a_n, b_n)$, $n = 0, 1, \dots, N$, $p \neq 1$. Soit $\mathbf{A}$ une matrice $N \times (N+1)$ définie

par

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} c_1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ c_2 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ c_3 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_N & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

où $c_n = \left(\frac{a_0}{a_n}\right)^{1-p} \frac{b_n}{b_0}$, $n = 1, 2, \dots, N$.

Alors les composantes X_n , $n = 1, 2, \dots, N$ du vecteur $\mathbf{X}$ sont telles que

$$X_n \sim \text{Tweedie}_p \left(a_n \left[\left(\frac{a_0}{a_n}\right)^{2-p} \frac{b_n}{b_0} + 1 \right], b_n \left[\left(\frac{a_0}{a_n}\right)^{2-p} \frac{b_n}{b_0} + 1 \right]^{1-p} \right)$$

et la fonction de densité de probabilité multivariée de $\mathbf{X}$ est donnée par

$$f_{\mathbf{X}}(x_1, \dots, x_N) = \int_0^B f_{Y_0}(y_0) \prod_{n=1}^N f_{Y_n} \left(x_n - \left(\frac{a_0}{a_n}\right)^{1-p} \frac{b_n}{b_0} y_0 \right) dy_0,$$

où

$$B = \min \left(\left(\frac{a_1}{a_0}\right)^{1-p} \frac{b_0}{b_1} x_1, \dots, \left(\frac{a_N}{a_0}\right)^{1-p} \frac{b_0}{b_N} x_N \right)$$

et $f(\cdot)$ est la fonction de densité de probabilité d'une Tweedie reproductive.

Démonstration. En utilisant la relation entre la forme additive et reproductive (voir équation (2.5)), on obtient

$$\begin{aligned} Y_n &\sim \text{Tweedie}_p \left(a_n = b_n^* \left(\frac{a_n^*}{\tau - 1} \right)^{\tau-1}, b_n = (b_n^*)^{1-p} \right), \quad p \neq 1 \\ &\sim \text{Tweedie}_p^* \left(a_n^* = \frac{a_n^{1-p}}{b_n(1-p)}, b_n^* = b_n^{1/(1-p)} \right), \quad p \neq 1, \end{aligned}$$

où $\tau = (p-2)/(p-1)$.

Et en notant que

$$\begin{aligned}
 c_n^* &= \frac{a_0^*}{a_n^*} \\
 &= \frac{\frac{a_0^{1-p}}{b_0(1-p)}}{\frac{a_n^{1-p}}{b_n(1-p)}} \\
 &= \left(\frac{a_0}{a_n}\right)^{1-p} \frac{b_n}{b_0} \\
 &= c_n,
 \end{aligned}$$

le théorème 1 permet de conclure que

$$\begin{aligned}
 X_n &\sim \text{Tweedie}_p^* \left(a_n^*, B_n^* = b_0^* \left(\frac{a_0^*}{a_n^*} \right)^\tau + b_n^* \right), \quad p \neq 1 \\
 &\sim \text{Tweedie}_p \left(A_n = B_n^* \left(\frac{a_n^*}{\tau - 1} \right)^{\tau-1}, B_n = (B_n^*)^{1-p} \right), \quad p \neq 1,
 \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
 A_n &= B_n^* \left(\frac{a_n^*}{\tau - 1} \right)^{\tau-1} \\
 &= \left(b_0^* \left(\frac{a_0^*}{a_n^*} \right)^\tau + b_n^* \right) \left(\frac{a_n^*}{\tau - 1} \right)^{\tau-1} \\
 &= \left(b_0^{1/(1-p)} \left(\left(\frac{a_0}{a_n} \right)^{1-p} \frac{b_n}{b_0} \right)^\tau + b_n^{1/(1-p)} \right) \left(\frac{\frac{a_n^{1-p}}{b_n(1-p)}}{\tau - 1} \right)^{\tau-1} \\
 &= \left(b_0^{1/(1-p)} \left(\left(\frac{a_0}{a_n} \right)^{1-p} \frac{b_n}{b_0} \right)^{\frac{p-2}{p-1}} + b_n^{1/(1-p)} \right) \left(\frac{\frac{a_n^{1-p}}{b_n(1-p)}}{(1/(1-p))} \right)^{1/(1-p)} \\
 &= \left(b_0^{\frac{1}{1-p} - \frac{p-2}{p-1}} \left(\frac{a_0}{a_n} \right)^{2-p} b_n^{\frac{p-2}{p-1}} + b_n^{1/(1-p)} \right) a_n b_n^{1-p} \\
 &= \left(b_0^{-1} \left(\frac{a_0}{a_n} \right)^{2-p} b_n^{\frac{p-2}{p-1} + 1-p} + 1 \right) a_n \\
 &= a_n \left[\left(\frac{a_0}{a_n} \right)^{2-p} \frac{b_n}{b_0} + 1 \right],
 \end{aligned}$$

et où

$$\begin{aligned}
B_n &= (B_n^*)^{1-p} \\
&= \left(b_0^* \left(\frac{a_0^*}{a_n^*} \right)^\tau + b_n^* \right)^{1-p} \\
&= \left(b_0^{1/(1-p)} \left(\left(\frac{a_0}{a_n} \right)^{1-p} \frac{b_n}{b_0} \right)^\tau + b_n^{1/(1-p)} \right)^{1-p} \\
&= \left(b_0^{1/(1-p)} \left(\left(\frac{a_0}{a_n} \right)^{1-p} \frac{b_n}{b_0} \right)^{\frac{p-2}{p-1}} + b_n^{1/(1-p)} \right)^{1-p} \\
&= \left(b_0^{\frac{1}{1-p} - \frac{p-2}{p-1}} \left(\frac{a_0}{a_n} \right)^{2-p} b_n^{\frac{p-2}{p-1}} + b_n^{1/(1-p)} \right)^{1-p} \\
&= \left(b_0^{-1} \left(\frac{a_0}{a_n} \right)^{2-p} b_n^{\frac{p-1}{p-1} + \frac{-1}{p-1}} + b_n^{1/(1-p)} \right)^{1-p} \\
&= b_n \left[\left(\frac{a_0}{a_n} \right)^{2-p} \frac{b_n}{b_0} + 1 \right]^{1-p}.
\end{aligned}$$

On déduit que

$$X_n \sim \text{Tweedie}_p \left(a_n \left[\left(\frac{a_0}{a_n} \right)^{2-p} \frac{b_n}{b_0} + 1 \right], b_n \left[\left(\frac{a_0}{a_n} \right)^{2-p} \frac{b_n}{b_0} + 1 \right]^{1-p} \right).$$

□

La proposition suivante nous permet d'obtenir certains moments pour la forme reproductive.

Proposition 2. Si $X \sim \text{Tweedie}_p(a, b)$ et

$$X_n \sim \text{Tweedie}_p \left(a_n \left[\left(\frac{a_0}{a_n} \right)^{2-p} \frac{b_n}{b_0} + 1 \right], b_n \left[\left(\frac{a_0}{a_n} \right)^{2-p} \frac{b_n}{b_0} + 1 \right]^{1-p} \right),$$

alors l'espérance de X et l'espérance de X_n sont données par

$$E[X] = a$$

et

$$E[X_n] = a_n \left[\left(\frac{a_0}{a_n} \right)^{2-p} \frac{b_n}{b_0} + 1 \right].$$

La variance de X et la variance de X_n sont données par

$$\text{Var}[X] = ba^p$$

et

$$\text{Var}[X_n] = vb_n a_n^p \left[\left(\frac{a_0}{a_n} \right)^{2-p} \frac{b_n}{b_0} + 1 \right].$$

Finalement, le troisième moment centré de X est donné par

$$E[(X - E[X])^3] = pb^2 a^{2p-1}.$$

Démonstration. En notant que

$$\kappa'_p(a^*) = \left(\frac{a^*}{\tau - 1} \right)^{\tau-1}, \quad p \neq 1,$$

on obtient, pour $p \neq 1$,

$$\begin{aligned} E[X] &= b^* \kappa'_p(a^*), \\ &= b^* \left(\frac{a^*}{\tau - 1} \right)^{\tau-1} \\ &= b^{1/(1-p)} \left(\frac{\frac{a^{1-p}}{b(1-p)}}{1/(1-p)} \right)^{(1/(1-p))} \\ &= a. \end{aligned}$$

On déduit que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X_n] &= A_n \\ &= a_n \left[\left(\frac{a_0}{a_n} \right)^{2-p} \frac{b_n}{b_0} + 1 \right]. \end{aligned}$$

En notant que

$$\kappa_p''(a^*) = \left(\frac{a^*}{\tau - 1} \right)^{\tau-2}, \quad p \neq 1,$$

on obtient, pour $p \neq 1$,

$$\begin{aligned} \text{Var}[X] &= b^* \kappa_p''(a^*) \\ &= b^* \left(\frac{a^*}{\tau - 1} \right)^{\tau-2} \\ &= \mathbb{E}[X] \left(\frac{a^*}{\tau - 1} \right)^{-1} \\ &= a \left(\frac{\frac{a^{1-p}}{b(1-p)}}{(1/(1-p))} \right)^{-1} \\ &= ba^p. \end{aligned}$$

On déduit que

$$\begin{aligned} \text{Var}[X_n] &= B_n A_n^p \\ &= b_n \left[\left(\frac{a_0}{a_n} \right)^{2-p} \frac{b_n}{b_0} + 1 \right]^{1-p} \left(a_n \left[\left(\frac{a_0}{a_n} \right)^{2-p} \frac{b_n}{b_0} + 1 \right] \right)^p \\ &= b_n a_n^p \left[\left(\frac{a_0}{a_n} \right)^{2-p} \frac{b_n}{b_0} + 1 \right]. \end{aligned}$$

Enfin, en notant que

$$\kappa_p'''(a^*) = \frac{\tau - 2}{\tau - 1} \left(\frac{a^*}{\tau - 1} \right)^{\tau-3}, \quad p \neq 1,$$

on obtient, pour $p \neq 1$,

$$\begin{aligned}
E[(X - E[X])^3] &= b^* \kappa'''(a^*) \\
&= \frac{\tau - 2}{\tau - 1} \left(\frac{a^*}{\tau - 1} \right)^{\tau - 3} \\
&= \frac{\tau - 2}{\tau - 1} \text{Var}[X] \left(\frac{a^*}{\tau - 1} \right)^{-1} \\
&= \frac{p/(1 - p)}{1/(1 - p)} b a^p \left(\frac{\frac{a^{1-p}}{b(1-p)}}{(1/(1 - p))} \right)^{-1} \\
&= p b^2 a^{2p-1}.
\end{aligned}$$

□

2.3.2 Situation où $p = 1$.

En modélisant avec une loi de Poisson, on rencontre souvent, en pratique, un problème de surdispersion, c'est-à-dire un cas où la variance est supérieure à l'espérance.

Théorème 3. Soit $\mathbf{Y}$, un vecteur aléatoire de taille $(N + 1) \times 1$ dont les composantes sont indépendantes entre elles et ont les propriétés suivantes :

- la variance est donnée par $a_n = \text{Var}[Y_n] = b_n V(E[Y_N])$, avec $V(x) = x$; et
- $E[Y_n] = b_n^* \exp(a_n^*)$.

On a alors

$$a_n = b_n b_n^* e^{a_n^*} \rightarrow \frac{a_n}{b_n} = b_n^* e^{a_n^*}.$$

Ainsi, la variable aléatoire $X_n = (b_n/b_0)Y_0 + Y_n$ a les caractéristiques suivantes :

- son paramètre de localisation est

$$E[X_n] = E\left[\frac{b_n}{b_0}Y_0 + Y_n\right] = a_0 \frac{b_n}{b_0} + a_n;$$

— sa variance est

$$\text{Var}[X_n] = \text{Var}\left[\frac{b_n}{b_0}Y_0 + Y_n\right] = \frac{b_n^2}{b_0^2}b_0a_0 + b_na_n = b_n\left(a_0\frac{b_n}{b_0} + a_n\right);$$

— son paramètre de dispersion est b_n .

En utilisant le résultat de ce théorème, on peut poser

$$\frac{Y_n}{b_n} \sim \text{Poisson}\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$$

et conclure que

$$\frac{X_n}{b_n} = \frac{b_n}{b_0}Y_0 + Y_n \sim \text{Poisson}\left(a_0\frac{b_n}{b_0} + a_n\right).$$

La fonction de masse de probabilité du vecteur multivarié $\mathbf{X} = [X_1 \ X_2 \ \dots \ X_N]^T$ est

$$p_{\mathbf{X}}(x_1, \dots, x_N) = \sum_{y_0=0}^{A_{i,j}} p_{Y_0}(y_0) \prod_{n=1}^N p_{Y_n}\left(x_n - \frac{b_n}{b_0}y_0\right),$$

avec

$$A_{i,j} = \min\left(\frac{b_0}{b_n}x_1, \dots, \frac{b_0}{b_N}x_N\right).$$

En posant $b_n = 1$, $n = 0, 1, \dots, N$, on obtient une distribution Poisson sans surdispersion.

CHAPITRE III

CONSTRUCTION DU MODÈLE POUR RÉSERVES INDIVIDUELLES

Dans cette section on va utiliser la distribution de Tweedie avec choc commun (décrite dans le chapitre 2) pour capturer la dépendance entre plusieurs lignes d'affaires en utilisant des données individuelles. Pour cette raison on devra développer deux modèles : dans la Section 3.1, on propose un modèle pour prédire la sévérité des paiements (modélisée à partir du montant des paiements individuels observés) et, dans la section 3.2, on propose un modèle pour prédire la fréquence des paiements (modélisée à partir du nombre de paiements individuels observés).

On s'intéressera surtout à la dépendance de la sévérité des paiements étant donné qu'il y a plusieurs paiements par cellule¹ (i, j) pour chaque ligne d'affaires (voir tableau 1.3 pour un rappel du triangle de développement). Cette caractéristique ne nous permet pas d'utiliser directement des modèles qui pourraient être utilisées pour des données collectives. La fréquence d'autre part, n'a qu'une seule donnée par cellule (i, j) pour chaque ligne d'affaires. Ainsi, le modèle proposé capture seulement la dépendance de la sévérité des paiements pour des lignes d'affaires différentes.

1. On rappelle que pour les modèles individuels, le terme «cellule (i, j) » est utilisé pour représenter l'ensemble des paiements individuels faits pendant la période de développement j pour les sinistres survenus pendant la période d'accident i .

3.1 Construction du modèle pour la sévérité des paiements

Pour prédire l'ensemble $\mathcal{X}^D$ (voir la notation introduite au chapitre 1), on considère un modèle Tweedie multivarié pour les paiements de plusieurs secteurs d'activités. Pour ce faire, on doit regrouper les $K_{i,j}^{(l)}$ paiements de la i^e année de surveillance, de la j^e année de développement et du l^e secteur d'activité dans un vecteur $\mathbf{X}_{i,j}^{(l)}$. Comme mentionné précédemment, pour prédire $\mathcal{X}^D$, on doit également prédire l'ensemble $\mathcal{K}^D$. Dans cette section, on va supposer que $\mathcal{K}^D$ est connu et, par la suite, on va construire un modèle pour réaliser des prédictions pour cet ensemble.

On définit le vecteur qui contient les montants des paiements de la cellule (i, j) pour la ligne d'affaires l , sachant le nombre de paiements de ce secteur d'activité :

$$\left(\mathbf{X}_{i,j}^{(l)} \middle| K_{i,j}^{(l)} \right) = \left[X_{1,i,j}^{(l)} \quad X_{2,i,j}^{(l)} \quad \dots \quad X_{K_{i,j}^{(l)},i,j}^{(l)} \right]^T.$$

Par la suite, on regroupe tous les vecteurs $\left(\mathbf{X}_{i,j}^{(l)} \middle| K_{i,j}^{(l)} \right)$ dans un seul vecteur, $\left(\mathbf{X}_{i,j} \middle| K_{i,j}^{(1)}, \dots, K_{i,j}^{(L)} \right)$ qui contiendra tous les paiements pour une cellule (i, j) :

$$\left(\mathbf{X}_{i,j} \middle| K_{i,j}^{(1)}, \dots, K_{i,j}^{(L)} \right) = \left[\left(\mathbf{X}_{i,j}^{(1)} \middle| K_{i,j}^{(1)} \right) \quad \left(\mathbf{X}_{i,j}^{(2)} \middle| K_{i,j}^{(2)} \right) \quad \dots \quad \left(\mathbf{X}_{i,j}^{(L)} \middle| K_{i,j}^{(L)} \right) \right]^T.$$

Ce vecteur $\left(\mathbf{X}_{i,j} \middle| K_{i,j}^{(1)}, \dots, K_{i,j}^{(L)} \right)$ est de taille $M = \sum_{l=1}^L K_{i,j}^{(l)}$.

Le modèle suppose que chaque paiement est la réalisation de la somme de deux variables aléatoires indépendantes

- la première variable $W_{i,j}$ est un « choc commun » qui est partagé par tous les paiements d'une même cellule (i, j) ; et
- la deuxième variable $Z_{k,i,j}^{(l)}$ représente « l'effet individuel » qui caractérise chaque paiement.

Definition 3 (Modèle Tweedie multivariée pour la sévérité des paiements). Le modèle repose sur les hypothèses suivantes :

Hypothèse (S1) : on a

$$\left(\mathbf{X}_{i,j} \mid K_{i,j}^{(1)}, \dots, K_{i,j}^{(L)} \right) = \left(\mathbf{A} \mathbf{Z}_{i,j} \mid K_{i,j}^{(1)}, \dots, K_{i,j}^{(L)} \right),$$

où $\left(\mathbf{Z}_{i,j} \mid K_{i,j}^{(1)}, \dots, K_{i,j}^{(L)} \right)$ est un vecteur aléatoire de taille $M + 1$ donné par

$$\left(\mathbf{Z}_{i,j} \mid K_{i,j}^{(1)}, \dots, K_{i,j}^{(L)} \right) = \left[W_{i,j} \quad Z_{1,i,j}^{(1)} \quad \dots \quad Z_{K_{i,j}^{(1)},i,j}^{(1)} \quad Z_{1,i,j}^{(2)} \quad \dots \quad Z_{K_{i,j}^{(L)},i,j}^{(L)} \right]^T$$

avec

$$W_{i,j} \sim \text{Tweedie}_p(\lambda, \gamma), \quad p \neq 1$$

$$\frac{W_{i,j}}{\gamma} \sim \text{Poisson} \left(\frac{\lambda}{\gamma} \right), \quad p = 1$$

$$Z_{k,i,j}^{(l)} \sim \text{Tweedie}_p \left(\lambda_{\mathbb{I};i}^{(l)} \lambda_{\mathbb{J};j}^{(l)}, \gamma_{i,j}^{(l)} \right), \quad p \neq 1$$

$$\frac{Z_{k,i,j}^{(l)}}{\gamma_{i,j}^{(l)}} \sim \text{Poisson} \left(\frac{\lambda_{\mathbb{I};i}^{(l)} \lambda_{\mathbb{J};j}^{(l)}}{\gamma_{i,j}^{(l)}} \right), \quad p = 1$$

et la matrice $\mathbf{A}$ est telle que

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \left(\frac{\lambda}{\lambda_{\mathbb{I};i}^{(1)} \lambda_{\mathbb{J};j}^{(1)}} \right)^{1-p} \frac{\gamma_{i,j}^{(1)}}{\gamma} & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \left(\frac{\lambda}{\lambda_{\mathbb{I};i}^{(2)} \lambda_{\mathbb{J};j}^{(2)}} \right)^{1-p} \frac{\gamma_{i,j}^{(2)}}{\gamma} & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \left(\frac{\lambda}{\lambda_{\mathbb{I};i}^{(l)} \lambda_{\mathbb{J};j}^{(l)}} \right)^{1-p} \frac{\gamma_{i,j}^{(l)}}{\gamma} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \left(\frac{\lambda}{\lambda_{\mathbb{I};i}^{(L)} \lambda_{\mathbb{J};j}^{(L)}} \right)^{1-p} \frac{\gamma_{i,j}^{(L)}}{\gamma} & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix};$$

Hypothèse (S2) : les composantes de $\left(\mathbf{Z}_{i,j} \mid K_{i,j}^{(1)}, \dots, K_{i,j}^{(L)} \right)$ sont mutuellement indépendantes.

Avec les hypothèses du modèle, chacune des composantes du vecteur

$$\left(\mathbf{X}_{i,j} \mid K_{i,j}^{(1)}, \dots, K_{i,j}^{(L)} \right)$$

s'exprime comme

$$X_{k,i,j}^{(l)} = \left(\frac{\lambda}{\lambda_{\mathbb{I};i}^{(l)} \lambda_{\mathbb{J};j}^{(l)}} \right)^{1-p} \frac{\gamma_{i,j}^{(l)}}{\gamma} W_{i,j} + Z_{k,i,j}^{(l)}. \quad (3.1)$$

Une simplification souvent faite lorsque l'on travaille avec des données agrégées est de supposer que $\gamma_{i,j}^{(l)} = \gamma^{(l)}$. Cette simplification implique que la variation des niveaux de dispersion entre les paiements des différentes lignes d'affaires est similaire pour toutes les cellules. Dans ce mémoire, on travaille avec les paiements individuels et dans ce contexte, on constate souvent que cette supposition n'est pas valide, c'est à dire que la dispersion entre les paiements individuels des différentes lignes d'affaires est différente pour chacune des cellules. L'avantage de travailler avec des données individuelles est qu'on a plusieurs paiements par cellule et donc, une estimation avec des paramètres ayant un effet ligne et colonne est envisageable. Ainsi, on suppose que

$$\gamma_{i,j}^{(l)} = \gamma_{\mathbb{I};i}^{(l)} \gamma_{\mathbb{J};j}^{(l)}. \quad (3.2)$$

Les paramètres $\lambda_{\mathbb{I};i}^{(l)} \lambda_{\mathbb{J};j}^{(l)}$ ont un degré de redondance pour chaque l . C'est-à-dire qu'il y a $I + J + 2$ paramètres pour chaque l , le modèle n'est identifiable qu'avec $I + J + 1$ paramètres par secteur d'activité. Il faut rajouter une contrainte supplémentaire à chaque couple $\lambda_{\mathbb{I};i}^{(l)} \lambda_{\mathbb{J};j}^{(l)}$ afin que le modèle soit identifiable. Dans le cadre de ce mémoire, on propose de poser $\lambda_{\mathbb{I};1}^{(l)} = 1, l = 1, \dots, L$.

Pour les mêmes raisons que pour $\lambda_{\mathbb{I};i}^{(l)} \lambda_{\mathbb{J};j}^{(l)}$, on doit poser une contrainte pour les paramètres $\gamma_{\mathbb{I};i}^{(l)}$ et $\gamma_{\mathbb{J};j}^{(l)}$. Encore une fois on propose de poser $\gamma_{\mathbb{I};1}^{(l)} = 1, l = 1, \dots, L$. À la sous-section 3.1.1, on traitera la situation où $p \neq 1$. Puis, à la sous-section 3.1.2, on traitera la situation où $p = 1$.

3.1.1 Situation où $p \neq 1$.

Proposition 3. Sous les hypothèses (S1) et (S2), et en posant $p \neq 1$ et $\gamma_{i,j}^{(l)} = \gamma_{\mathbb{I};i}^{(l)} \gamma_{\mathbb{J};j}^{(l)}$, les composantes de $(\mathbf{X}_{i,j} | K_{i,j}^{(1)}, \dots, K_{i,j}^{(L)})$ sont telles que

$$X_{k,i,j}^{(l)} \sim \text{Tweedie}_p \left(\Lambda_{i,j}^{(l)}, \Gamma_{i,j}^{(l)} \right),$$

où

$$\begin{aligned} \Lambda_{i,j}^{(l)} &= \lambda_{\mathbb{I};i}^{(l)} \lambda_{\mathbb{J};j}^{(l)} \left[\left(\frac{\lambda}{\lambda_{\mathbb{I};i}^{(l)} \lambda_{\mathbb{J};j}^{(l)}} \right)^{2-p} \frac{\gamma_{\mathbb{I};i}^{(l)} \gamma_{\mathbb{J};j}^{(l)}}{\gamma} + 1 \right] \\ \Gamma_{i,j}^{(l)} &= \gamma_{\mathbb{I};i}^{(l)} \gamma_{\mathbb{J};j}^{(l)} \left[\left(\frac{\lambda}{\lambda_{\mathbb{I};i}^{(l)} \lambda_{\mathbb{J};j}^{(l)}} \right)^{2-p} \frac{\gamma_{\mathbb{I};i}^{(l)} \gamma_{\mathbb{J};j}^{(l)}}{\gamma} + 1 \right]^{1-p} \end{aligned}$$

et la fonction de densité de $(\mathbf{X}_{i,j} | K_{i,j}^{(1)}, \dots, K_{i,j}^{(L)})$ est

$$\begin{aligned} f_{\mathbf{X}_{i,j} | K_{i,j}^{(1)}, \dots, K_{i,j}^{(L)}} \left(x_{1,i,j}^{(1)}, \dots, x_{K_{i,j}^{(L)}, i,j}^{(L)} | k_{i,j}^{(1)}, \dots, k_{i,j}^{(L)} \right) = \\ \int_0^{A_{i,j}} f_{W_{i,j}}(w_{i,j}) \prod_{l=1}^L \prod_{k=1}^{k_{i,j}^{(l)}} f_{Z_{k,i,j}^{(l)}} \left(x_{k,i,j}^{(l)} - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{\mathbb{I};i}^{(l)} \lambda_{\mathbb{J};j}^{(l)}} \right)^{1-p} \frac{\gamma_{\mathbb{I};i}^{(l)} \gamma_{\mathbb{J};j}^{(l)}}{\gamma} w_{i,j} \right) dw_{i,j}, \end{aligned}$$

avec

$$A_{i,j} = \min \left(\left(\frac{\lambda_{\mathbb{I};i}^{(1)} \xi_j^{(1)}}{\lambda} \right)^{1-p} \frac{\gamma}{\gamma^{(1)}} x_{1,i,j}^{(1)}, \dots, \left(\frac{\lambda_{\mathbb{I};i}^{(L)} \lambda_{\mathbb{J};j}^{(L)}}{\lambda} \right)^{1-p} \frac{\gamma}{\gamma_{\mathbb{I};i}^{(L)} \gamma_{\mathbb{J};j}^{(L)}} x_{k_{i,j}^{(L)}, i,j}^{(L)} \right).$$

Démonstration. Les résultats découlent directement du théorème 3. $\square$

3.1.2 Situation où $p = 1$.

Dans le cas où $p = 1$, le résultat de la proposition précédente peut se simplifier.

Proposition 4. Sous les hypothèses (S1) et (S2), et en posant $p = 1$ et $\gamma_{i,j}^{(l)} = \gamma_{\mathbb{I};i}^{(l)} \gamma_{\mathbb{J};j}^{(l)}$, les composantes de $(\mathbf{X}_{i,j} | K_{i,j}^{(1)}, \dots, K_{i,j}^{(L)})$ sont telles que

$$\frac{X_{k,i,j}^{(l)}}{\gamma_{\mathbb{I};i}^{(l)} \gamma_{\mathbb{J};j}^{(l)}} \sim \text{Poisson} \left(\frac{\lambda}{\gamma} + \frac{\lambda_{\mathbb{I};i}^{(l)} \lambda_{\mathbb{J};j}^{(l)}}{\gamma_{\mathbb{I};i}^{(l)} \gamma_{\mathbb{J};j}^{(l)}} \right).$$

La fonction de masse de probabilité du vecteur multivarié $(\mathbf{X}_{\mathbf{i}\mathbf{j}} \mid K_{i,j}^{(1)}, \dots, K_{i,j}^{(L)})$ est

$$p_{\mathbf{X}_{\mathbf{i}\mathbf{j}} \mid K_{i,j}^{(1)}, \dots, K_{i,j}^{(L)}} \left(x_{1,i,j}^{(1)}, \dots, x_{K_{i,j}^{(L)}, i,j}^{(L)} \mid k_{i,j}^{(1)}, \dots, k_{i,j}^{(L)} \right) = \sum_{w_{i,j}=0}^{A_{i,j}} p_{W_{i,j}}(w_{i,j}) \prod_{l=1}^L \prod_{k=1}^{k_{i,j}^{(l)}} p_{Z_{k,i,j}^{(l)}} \left(x_{k,i,j}^{(l)} - \frac{\gamma_{\mathbb{I};i}^{(l)} \gamma_{\mathbb{J};j}^{(l)}}{\gamma} w_{i,j} \right),$$

où

$$A_{i,j} = \min \left(\frac{\gamma}{\gamma_{\mathbb{I};i}^{(1)} \gamma_{\mathbb{J};j}^{(1)}} x_{1,i,j}^{(1)}, \dots, \frac{\gamma}{\gamma_{\mathbb{I};i}^{(L)} \gamma_{\mathbb{J};j}^{(L)}} x_{k_{i,j}^{(L)}, i,j}^{(L)} \right).$$

Démonstration. Les résultats découlent directement du théorème 2. $\square$

En posant $\gamma = \gamma_{\mathbb{I};i}^{(L)} \gamma_{\mathbb{J};j}^{(L)} = 1$ on obtient une distribution Poisson équidispersée.

3.1.3 Analyse de l'espérance, variance et covariance des paiements

En utilisant les résultats de la proposition 1 à la page 16, on peut facilement calculer les premiers moments de chacune des composantes de $(\mathbf{X}_{\mathbf{i}\mathbf{j}} \mid K_{i,j}^{(1)}, \dots, K_{i,j}^{(L)})$.

Pour $p \neq 1$, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X_{k,i,j}^{(l)}] &= \Lambda_{i,j}^{(l)} \\ &= \lambda_{\mathbb{I};i}^{(l)} \lambda_{\mathbb{J};j}^{(l)} + \left(\frac{\lambda}{\lambda_{\mathbb{I};i}^{(l)} \lambda_{\mathbb{J};j}^{(l)}} \right)^{1-p} \frac{\gamma_{\mathbb{I};i}^{(l)} \gamma_{\mathbb{J};j}^{(l)}}{\gamma} \lambda \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \text{Var}[X_{k,i,j}^{(l)}] &= \Gamma_{i,j}^{(l)} \left(\Lambda_{i,j}^{(l)} \right)^p \\ &= \gamma_{\mathbb{I};i}^{(l)} \gamma_{\mathbb{J};j}^{(l)} \left(\lambda_{\mathbb{I};i}^{(l)} \lambda_{\mathbb{J};j}^{(l)} \right)^p \left[\left(\frac{\lambda}{\lambda_{\mathbb{I};i}^{(l)} \lambda_{\mathbb{J};j}^{(l)}} \right)^{2-p} \frac{\gamma_{\mathbb{I};i}^{(l)} \gamma_{\mathbb{J};j}^{(l)}}{\gamma} + 1 \right] \\ &= \left(\left(\frac{\lambda}{\lambda_{\mathbb{I};i}^{(l)} \lambda_{\mathbb{J};j}^{(l)}} \right)^{1-p} \frac{\gamma_{\mathbb{I};i}^{(l)} \gamma_{\mathbb{J};j}^{(l)}}{\gamma} \right)^2 \gamma \lambda^p + \gamma_{\mathbb{I};i}^{(l)} \gamma_{\mathbb{J};j}^{(l)} \left(\lambda_{\mathbb{I};i}^{(l)} \lambda_{\mathbb{J};j}^{(l)} \right)^p. \end{aligned}$$

Dans le cas où $p = 1$ avec surdispersion, on obtient

$$\mathbb{E}[X_{k,i,j}^{(l)}] = \lambda_{\mathbb{I};i}^{(l)} \lambda_{\mathbb{J};j}^{(l)} + \frac{\gamma_{\mathbb{I};i}^{(l)} \gamma_{\mathbb{J};j}^{(l)}}{\gamma} \lambda$$

et

$$\text{Var}[X_{k,i,j}^{(l)}] = \left(\frac{\gamma_{\mathbb{I};i}^{(l)} \gamma_{\mathbb{J};j}^{(l)}}{\gamma} \right)^2 \gamma \lambda + \gamma_{\mathbb{I};i}^{(l)} \gamma_{\mathbb{J};j}^{(l)} \left(\lambda_{\mathbb{I};i}^{(l)} \lambda_{\mathbb{J};j}^{(l)} \right).$$

On peut également s'intéresser à une cellule quelconque (i, j) et calculer la covariance entre deux paiements différents. Posons $X_{k,i,j}^{(l)}$ et $X_{k^*,i,j}^{(l^*)}$, deux paiements différents de la même cellule mais pour deux lignes d'affaires différentes. On a alors

$$\begin{aligned} \text{Cov}[X_{k,i,j}^{(l)}, X_{k^*,i,j}^{(l^*)}] = \\ \text{Cov} \left[\left(\frac{\lambda}{\lambda_{\mathbb{I};i}^{(l)} \lambda_{\mathbb{J};j}^{(l)}} \right)^{1-p} \frac{\gamma_{\mathbb{I};i}^{(l)} \gamma_{\mathbb{J};j}^{(l)}}{\gamma} W_{i,j} + Z_{k,i,j}^{(l)}, \left(\frac{\lambda}{\lambda_{\mathbb{I};i}^{(l^*)} \lambda_{\mathbb{J};j}^{(l^*)}} \right)^{1-p} \frac{\gamma_{\mathbb{I};i}^{(l^*)} \gamma_{\mathbb{J};j}^{(l^*)}}{\gamma} W_{i,j} + Z_{k^*,i,j}^{(l^*)} \right]. \end{aligned}$$

En supposant l'indépendance entre $Z_{k,i,j}^{(l)}$, $Z_{k^*,i,j}^{(l^*)}$ et $W_{i,j}$, on obtient

$$\begin{aligned} \text{Cov}[X_{k,i,j}^{(l)}, X_{k^*,i,j}^{(l^*)}] &= \left(\frac{\lambda}{\lambda_{\mathbb{I};i}^{(l)} \lambda_{\mathbb{J};j}^{(l)}} \right)^{1-p} \frac{\gamma_{\mathbb{I};i}^{(l)} \gamma_{\mathbb{J};j}^{(l)}}{\gamma} \left(\frac{\lambda}{\lambda_{\mathbb{I};i}^{(l^*)} \lambda_{\mathbb{J};j}^{(l^*)}} \right)^{1-p} \frac{\gamma_{\mathbb{I};i}^{(l^*)} \gamma_{\mathbb{J};j}^{(l^*)}}{\gamma} \text{Var}[W_{i,j}] \\ &= \left(\frac{\lambda}{\lambda_{\mathbb{I};i}^{(l)} \lambda_{\mathbb{J};j}^{(l)}} \right)^{1-p} \frac{\gamma_{\mathbb{I};i}^{(l)} \gamma_{\mathbb{J};j}^{(l)}}{\gamma} \left(\frac{\lambda}{\lambda_{\mathbb{I};i}^{(l^*)} \lambda_{\mathbb{J};j}^{(l^*)}} \right)^{1-p} \frac{\gamma_{\mathbb{I};i}^{(l^*)} \gamma_{\mathbb{J};j}^{(l^*)}}{\gamma} \gamma \lambda^p \\ &= \frac{\lambda^{2-p}}{\left(\lambda_{\mathbb{I};i}^{(l)} \lambda_{\mathbb{J};j}^{(l)} \lambda_{\mathbb{I};i}^{(l^*)} \lambda_{\mathbb{J};j}^{(l^*)} \right)^{1-p}} \frac{\gamma_{\mathbb{I};i}^{(l)} \gamma_{\mathbb{J};j}^{(l)} \gamma_{\mathbb{I};i}^{(l^*)} \gamma_{\mathbb{J};j}^{(l^*)}}{\gamma}. \end{aligned}$$

Il est à noter que pour le cas particulier $l = l^*$, c'est-à-dire pour deux paiements de la même cellule et pour les mêmes lignes d'affaires, on a

$$\text{Cov}[X_{k,i,j}^{(l)}, X_{k^*,i,j}^{(l^*)}] = \text{Var}[X_{k,i,j}^{(l)}].$$

On peut aussi s'intéresser à la covariance entre des paiements de deux cellules ayant la même année de survenance et la même ligne d'affaires

$$\text{Cov}\left[X_{k,i,j}^{(l)}, X_{k^*,i,j^*}^{(l)}\right] = 0.$$

Ce résultat suggère qu'il y a une indépendance entre les paiements ayant une même année de survenance et, en particulier, entre deux paiements faits pour un sinistre. Le modèle suggéré dans ce mémoire ne prend pas en compte cette possible dépendance. Cependant, avec une distribution Tweedie multivariée avec choc commun, il est possible d'adapter ce choc afin d'affecter l'ensemble des paiements ayant une même année de survenance. Cette suggestion n'est qu'une possible extension du modèle proposé.

3.2 Construction d'un modèle pour le nombre de paiements

On veut maintenant développer un modèle pour prédire le nombre de paiements parmi plusieurs secteurs d'activités, c'est-à-dire pour prédire l'ensemble $\mathcal{K}^D$. Comme on l'a expliqué précédemment, on peut prédire $\mathcal{N}^D$ en utilisant $\mathcal{N}^U$ puis, en utilisant l'exposition au risque, trouver $\mathcal{K}^D$. Une première possibilité est de supposer que les ensembles $N_{i,j} = \{N_{i,j}^{(1)}, N_{i,j}^{(2)}, \dots, N_{i,j}^{(L)}\}$ sont indépendants pour tout couple (i, j) tel que $i \in \{1, \dots, I\}$ et $j \in \{0, \dots, J\}$, ce qui revient à travailler sur L triangles indépendants où chaque triangle est modélisé séparément. Classiquement, on choisirait alors un modèle Poisson ou Quasi-Poisson pour représenter les fréquences. Cette option sera considérée à la sous-section 3.2.1. Une autre possibilité est de supposer une dépendance entre les différents secteurs d'activités. On pourrait donc travailler avec plusieurs modèles disponibles dans la littérature, par exemple on pourrait utiliser le modèle proposé dans (Avanzi, Taylor, Vu, et Wong, 2016). Cette option sera considérée à la sous-section 3.2.2.

3.2.1 Modèles supposant l'indépendance entres les secteurs d'activités

Modèle Poisson supposant l'équidispersion.

Definition 4. En utilisant un modèle Poisson pour le nombre de paiements d'un secteur d'activité l , on doit supposer les hypothèses suivantes :

Hypothèse (FP1) : les $N_{i,j}^{(l)}$ sont indépendantes pour différentes années de survenance (i) et/ou développement (j) ;

Hypothèse (FP2) : les $N_{i,j}^{(l)}$ suivent des loi de Poisson telles que

$$N_{i,j}^{(l)} \sim \text{Poisson}(\eta_{\mathbb{I};i}^{(l)} \eta_{\mathbb{J};j}^{(l)})$$

et la fonction de masse est, par conséquent,

$$p_{N_{i,j}^{(l)}}(n_{i,j}^{(l)}) = e^{\eta_{\mathbb{I};i}^{(l)} \eta_{\mathbb{J};j}^{(l)}} \frac{(\eta_{\mathbb{I};i}^{(l)} \eta_{\mathbb{J};j}^{(l)})^{n_{i,j}^{(l)}}}{n_{i,j}^{(l)}!}.$$

On peut réécrire la fonction de masse de probabilité sous forme d'un modèle linéaire généralisé

$$p_{N_{i,j}^{(l)}}(n_{i,j}^{(l)}; \theta_{i,j}^{(l)}, \phi_{i,j}^{(l)}) = c(n_{i,j}^{(l)}; \phi_{i,j}^{(l)}) \exp\left(\frac{n_{i,j}^{(l)} \theta_{i,j}^{(l)} - a(\theta_{i,j}^{(l)})}{\phi_{i,j}^{(l)}}\right),$$

où

$$\begin{aligned} c(n_{i,j}^{(l)}; \phi_{i,j}^{(l)}) &= \frac{1}{n_{i,j}^{(l)}!} \\ \theta_{i,j}^{(l)} &= \ln(\eta_{\mathbb{I};i}^{(l)} \eta_{\mathbb{J};j}^{(l)}) \\ a(\theta_{i,j}^{(l)}) &= e^{\theta_{i,j}^{(l)}} \end{aligned}$$

et

$$\phi_{i,j}^{(l)} = 1.$$

La proposition ci-dessous permet d'obtenir les moments des variables $N_{i,j}^{(l)}$.

Proposition 5. Sous les hypothèses **FP1** et **FP2**, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[N_{i,j}^{(l)}] &= \mu_{i,j}^{(l)} = a'(\theta_{i,j}^{(l)}) = \eta_{\mathbb{I};i}^{(l)} \eta_{\mathbb{J};j}^{(l)} \\ \text{Var}[N_{i,j}^{(l)}] &= \phi_{i,j}^{(l)} a''(\theta_{i,j}^{(l)}) = \eta_{\mathbb{I};i}^{(l)} \eta_{\mathbb{J};j}^{(l)} \\ V(\mu_{i,j}^{(l)}) &= a''((a')^{-1}(\mu_{i,j}^{(l)})) = a''(\theta_{i,j}^{(l)}) = \mu_{i,j}^{(l)}. \end{aligned}$$

Démonstration. Les résultats découlent directement de la proposition 1. $\square$

On obtient un modèle avec $I+J+2$ paramètres. Comme lorsque l'on a modélisé la sévérité, il faut rajouter une contrainte supplémentaire afin d'éviter la redondance des paramètres. On pose $\eta_{\mathbb{I};i}^{(l)} = 1$, $l = 1, \dots, L$.

Modèle Quasi-Poisson. Lorsque l'on utilise un modèle Poisson on suppose que $\mathbb{E}[N_{i,j}^{(l)}] = \text{Var}[N_{i,j}^{(l)}]$. Souvent cette supposition n'est pas vérifiable empiriquement et on se retrouve souvent, dans le contexte de la modélisation de réserves d'assurance I.A.R.D., avec des cas de surdispersion ($\mathbb{E}[N_{i,j}^{(l)}] < \text{Var}[N_{i,j}^{(l)}]$). Pour tenir compte de la surdispersion, on travaille avec un modèle Quasi-Poisson présenté ci-dessous.

Définition 5. En utilisant un modèle Quasi-Poisson pour le nombre de paiements d'un secteur d'activité l , on doit supposer que

Hypothèse (FQ1) : les variables aléatoires $N_{i,j}^{(l)}$ sont indépendantes pour différentes années de survenance (i) et/ou développement (j) ; et

Hypothèse (FQ2) : le paramètre canonique θ , la log-partition $a(\cdot)$ et le paramètre de dispersion $\phi_{i,j}^{(l)}$ des variables $N_{i,j}^{(l)}$ sont

$$\begin{aligned} \theta_{i,j}^{(l)} &= \ln(\eta_{\mathbb{I};i}^{(l)} \eta_{\mathbb{J};j}^{(l)}) \\ a(\theta_{i,j}^{(l)}) &= e^{\theta_{i,j}^{(l)}} \end{aligned}$$

et

$$\phi_{i,j}^{(l)} = \phi^{(l)}.$$

Sous les deux hypothèses ci-dessus on peut obtenir les moments suivants

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[N_{i,j}^{(l)}] &= \mu_{i,j}^{(l)} = a'(\theta_{i,j}^{(l)}) = \eta_{\mathbb{I};i}^{(l)} \eta_{\mathbb{J};j}^{(l)} \\ \text{Var}[N_{i,j}^{(l)}] &= \phi_{i,j}^{(l)} a''(\theta_{i,j}^{(l)}) = \phi^{(l)} \eta_{\mathbb{I};i}^{(l)} \eta_{\mathbb{J};j}^{(l)} \end{aligned}$$

et

$$V(\mu_{i,j}^{(l)}) = a''((a')^{-1}(\mu_{i,j}^{(l)})) = a''(\theta_{i,j}^{(l)}) = \mu_{i,j}^{(l)}.$$

Les estimations des paramètres $\eta_{\mathbb{I};i}^{(l)}$ et $\eta_{\mathbb{J};j}^{(l)}$ dans le modèle Quasi-Poisson sont les mêmes que sont ceux obtenus par le modèle de Poisson dans la partie précédente. Il suffit d'obtenir une estimation pour $\phi^{(l)}$.

3.2.2 Modèles supposant la dépendance entre les secteurs d'activités

Les modèles utilisés pour les paiements collectifs peuvent également être utilisés pour modéliser le nombre de paiements. Notamment, on peut envisager de prendre en compte la dépendance entre des secteurs d'activités en considérant une des différentes approches proposées en introduction de ce mémoire : (Brehm 2002) qui utilise une copule gaussienne pour modéliser la distribution conjointe des pertes à combler ou (Alai et Wüthrich, 2009) qui utilisent une copule Gaussienne multivariée pour adapter la corrélation des années comptables. Il est aussi envisageable d'utiliser le modèle proposé par (Avanzi, Taylor, Vu, et Wong, 2016) qui utilise une loi Tweedie Multivariée avec un choc commun. Malgré l'efficacité de ces modèles pour capter la dépendance des paiements collectifs entre les secteurs d'activités, la dépendance de la fréquence des paiements individuels entre des secteurs d'activités n'est pas encore très étudiée dans la littérature. Dans ce mémoire on met

l'accent sur la modélisation de la sévérité des paiements individuels puisque l'on a plusieurs paiements par cellule, ce qui n'est pas le cas pour les nombres de sinistres. Malgré les similitudes avec les paiements collectifs, l'étude de la fréquence des paiements pourrait être intéressante et des recherches supplémentaires peuvent être envisagées.

CHAPITRE IV

ANALYSE DE LA RÉSERVE

Après avoir modélisé la sévérité et la fréquence des paiements, il est possible de calculer une réserve c'est-à-dire le montant nécessaire afin de garantir le paiement des sinistres encourus. Bien entendu, cette réserve est composée de montants prédits selon les années de survenance, les années de développement et les secteurs d'activités différents. En particulier, un assureur peut s'intéresser au montant de la réserve provenant de chaque secteur d'activité, ou au montant de la réserve qui correspond à chacune des années de survenance. Le but de ce chapitre est de déterminer les espérances et les variances des réserves obtenues à partir de la structure proposée au chapitre précédent. Rappelons le triangle de développement incrémental (tableau 1.3), sur lequel on peut voir clairement quels sont les montants qu'on devra prédire dans cette section.

4.1 Espérance et variance de la somme des paiements par secteur d'activité

Soit $S_{i,j}^{(l)}$, le montant total des paiements d'un même secteur d'activité l pour une période de survenance et une période de développement données. On a, en considérant les équations (3.1) et (3.2),

$$\begin{aligned}
S_{i,j}^{(l)} &= \sum_{k=1}^{K_{i,j}^{(l)}} X_{k,i,j}^{(l)} \\
&= \sum_{k=1}^{K_{i,j}^{(l)}} \left(\frac{\lambda}{\lambda_{\mathbb{I};i}^{(l)} \lambda_{\mathbb{J};j}^{(l)}} \right)^{1-p} \frac{\gamma_{\mathbb{I};i}^{(l)} \gamma_{\mathbb{J};j}^{(l)}}{\gamma} W_{i,j} + Z_{k,i,j}^{(l)} \\
&= \left(\frac{\lambda}{\lambda_{\mathbb{I};i}^{(l)} \lambda_{\mathbb{J};j}^{(l)}} \right)^{1-p} \frac{\gamma_{\mathbb{I};i}^{(l)} \gamma_{\mathbb{J};j}^{(l)}}{\gamma} K_{i,j}^{(l)} W_{i,j} + \sum_{k=1}^{K_{i,j}^{(l)}} Z_{k,i,j}^{(l)}. \tag{4.1}
\end{aligned}$$

La proposition suivante permet d'obtenir l'espérance et la variance de ce coût total par secteur d'activité.

Proposition 6. Sous les hypothèses (S1) et (S2), et en posant $\gamma_{i,j}^{(l)} = \gamma_{\mathbb{I};i}^{(l)} \gamma_{\mathbb{J};j}^{(l)}$, l'espérance et la variance de $S_{i,j}^{(l)}$ sont données par

$$\mathbb{E}[S_{i,j}^{(l)}] = \mathbb{E}[K_{i,j}^{(l)}] \left(\frac{\lambda^{2-p}}{\gamma} \left(\frac{1}{\lambda_{\mathbb{I};i}^{(l)} \lambda_{\mathbb{J};j}^{(l)}} \right)^{1-p} \gamma_{\mathbb{I};i}^{(l)} \gamma_{\mathbb{J};j}^{(l)} + \lambda_{\mathbb{I};i}^{(l)} \lambda_{\mathbb{J};j}^{(l)} \right)$$

et

$$\begin{aligned}
\text{Var}[S_{i,j}^{(l)}] &= \frac{\lambda^{2-p}}{\gamma} \left(\left(\frac{1}{\lambda_{\mathbb{I};i}^{(l)} \lambda_{\mathbb{J};j}^{(l)}} \right)^{1-p} \gamma_{\mathbb{I};i}^{(l)} \gamma_{\mathbb{J};j}^{(l)} \right)^2 \left(\text{Var}[K_{i,j}^{(l)}] + \mathbb{E}[K_{i,j}^{(l)}]^2 \right) \\
&\quad + \gamma_{\mathbb{I};i}^{(l)} \gamma_{\mathbb{J};j}^{(l)} \left(\lambda_{\mathbb{I};i}^{(l)} \lambda_{\mathbb{J};j}^{(l)} \right)^p \mathbb{E}[K_{i,j}^{(l)}] \\
&\quad + \left(\frac{\lambda^{2-p}}{\gamma} \left(\frac{1}{\lambda_{\mathbb{I};i}^{(l)} \lambda_{\mathbb{J};j}^{(l)}} \right)^{1-p} \gamma_{\mathbb{I};i}^{(l)} \gamma_{\mathbb{J};j}^{(l)} + \lambda_{\mathbb{I};i}^{(l)} \lambda_{\mathbb{J};j}^{(l)} \right)^2 \text{Var}[K_{i,j}^{(l)}].
\end{aligned}$$

Démonstration. En rappelant que le choc commun $W_{i,j}$ est indépendant des effets individuels $Z_{k,i,j}^{(l)}$ et que ceux-ci sont mutuellement indépendants, on peut calculer

l'espérance et la variance de la somme $S_{i,j}^{(l)}$. On a, avec l'équation (4.1),

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[S_{i,j}^{(l)}] &= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}[S_{i,j}^{(l)} | K_{i,j}^{(l)}]\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\left(\frac{\lambda}{\lambda_{\mathbb{I};i}^{(l)}\lambda_{\mathbb{J};j}^{(l)}}\right)^{1-p} \frac{\gamma_{\mathbb{I};i}^{(l)}\gamma_{\mathbb{J};j}^{(l)}}{\gamma} K_{i,j}^{(l)} W_{i,j} + \sum_{k=1}^{K_{i,j}^{(l)}} Z_{k,i,j}^{(l)} \mid K_{i,j}^{(l)}\right]\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\left(\frac{\lambda}{\lambda_{\mathbb{I};i}^{(l)}\lambda_{\mathbb{J};j}^{(l)}}\right)^{1-p} \frac{\gamma_{\mathbb{I};i}^{(l)}\gamma_{\mathbb{J};j}^{(l)}}{\gamma} K_{i,j}^{(l)} \mathbb{E}[W_{i,j}] + \sum_{k=1}^{K_{i,j}^{(l)}} \mathbb{E}[Z_{k,i,j}^{(l)}]\right] \\
&= \left(\frac{\lambda}{\lambda_{\mathbb{I};i}^{(l)}\lambda_{\mathbb{J};j}^{(l)}}\right)^{1-p} \frac{\gamma_{\mathbb{I};i}^{(l)}\gamma_{\mathbb{J};j}^{(l)}}{\gamma} \lambda \mathbb{E}[K_{i,j}^{(l)}] + \mathbb{E}[K_{i,j}^{(l)} \lambda_{\mathbb{I};i}^{(l)} \lambda_{\mathbb{J};j}^{(l)}] \\
&= \mathbb{E}[K_{i,j}^{(l)}] \left(\frac{\lambda^{2-p}}{\gamma} \left(\frac{1}{\lambda_{\mathbb{I};i}^{(l)}\lambda_{\mathbb{J};j}^{(l)}}\right)^{1-p} \gamma_{\mathbb{I};i}^{(l)}\gamma_{\mathbb{J};j}^{(l)} + \lambda_{\mathbb{I};i}^{(l)}\lambda_{\mathbb{J};j}^{(l)}\right).
\end{aligned}$$

La variance est calculée de façon similaire

$$\text{Var}[S_{i,j}^{(l)}] = \mathbb{E}[\text{Var}[S_{i,j}^{(l)} | K_{i,j}^{(l)}]] + \text{Var}[\mathbb{E}[S_{i,j}^{(l)} | K_{i,j}^{(l)}]],$$

où le premier terme de la variance est donné par

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}[\text{Var}[S_{i,j}^{(l)} | K_{i,j}^{(l)}]] = \\
&\mathbb{E}\left[\text{Var}\left[\left(\frac{\lambda}{\lambda_{\mathbb{I};i}^{(l)}\lambda_{\mathbb{J};j}^{(l)}}\right)^{1-p} \frac{\gamma_{\mathbb{I};i}^{(l)}\gamma_{\mathbb{J};j}^{(l)}}{\gamma} K_{i,j}^{(l)} W_{i,j} + \sum_{k=1}^{K_{i,j}^{(l)}} Z_{k,i,j}^{(l)} \mid K_{i,j}^{(l)}\right]\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\left(\left(\frac{\lambda}{\lambda_{\mathbb{I};i}^{(l)}\lambda_{\mathbb{J};j}^{(l)}}\right)^{1-p} \frac{\gamma_{\mathbb{I};i}^{(l)}\gamma_{\mathbb{J};j}^{(l)}}{\gamma} K_{i,j}^{(l)}\right)^2 \text{Var}[W_{i,j}] + \sum_{k=1}^{K_{i,j}^{(l)}} \text{Var}[Z_{k,i,j}^{(l)}]\right] \\
&= \gamma \lambda^p \left(\left(\frac{\lambda}{\lambda_{\mathbb{I};i}^{(l)}\lambda_{\mathbb{J};j}^{(l)}}\right)^{1-p} \frac{\gamma_{\mathbb{I};i}^{(l)}\gamma_{\mathbb{J};j}^{(l)}}{\gamma}\right)^2 \mathbb{E}[(K_{i,j}^{(l)})^2] \\
&\quad + \mathbb{E}[K_{i,j}^{(l)} \gamma_{\mathbb{I};i}^{(l)} \gamma_{\mathbb{J};j}^{(l)} (\lambda_{\mathbb{I};i}^{(l)} \lambda_{\mathbb{J};j}^{(l)})^p]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\lambda^{2-p}}{\gamma} \left(\left(\frac{1}{\lambda_{\mathbb{I};i}^{(l)} \lambda_{\mathbb{J};j}^{(l)}} \right)^{1-p} \gamma_{\mathbb{I};i}^{(l)} \gamma_{\mathbb{J};j}^{(l)} \right)^2 \left(\text{Var}[K_{i,j}^{(l)}] + \text{E}[K_{i,j}^{(l)}]^2 \right) \\
&\quad + \gamma_{\mathbb{I};i}^{(l)} \gamma_{\mathbb{J};j}^{(l)} \left(\lambda_{\mathbb{I};i}^{(l)} \lambda_{\mathbb{J};j}^{(l)} \right)^p \text{E}[K_{i,j}^{(l)}]
\end{aligned}$$

et le deuxième terme de la variance est donné par

$$\begin{aligned}
\text{Var}\left[\text{E}\left[S_{i,j}^{(l)} \mid K_{i,j}^{(l)}\right]\right] &= \text{Var}\left[\text{E}\left[\left(\frac{\lambda}{\lambda_{\mathbb{I};i}^{(l)} \lambda_{\mathbb{J};j}^{(l)}}\right)^{1-p} \frac{\gamma_{\mathbb{I};i}^{(l)} \gamma_{\mathbb{J};j}^{(l)}}{\gamma} K_{i,j}^{(l)} W_{i,j} + \sum_{k=1}^{K_{i,j}^{(l)}} Z_{k,i,j}^{(l)} \mid K_{i,j}^{(l)}\right]\right] \\
&= \text{Var}\left[\left(\frac{\lambda}{\lambda_{\mathbb{I};i}^{(l)} \lambda_{\mathbb{J};j}^{(l)}}\right)^{1-p} \frac{\gamma_{\mathbb{I};i}^{(l)} \gamma_{\mathbb{J};j}^{(l)}}{\gamma} K_{i,j}^{(l)} \text{E}[W_{i,j}] + K_{i,j}^{(l)} \text{E}[Z_{k,i,j}^{(l)}]\right] \\
&= \text{Var}\left[K_{i,j}^{(l)} \left(\lambda \left(\frac{\lambda}{\lambda_{\mathbb{I};i}^{(l)} \lambda_{\mathbb{J};j}^{(l)}}\right)^{1-p} \frac{\gamma_{\mathbb{I};i}^{(l)} \gamma_{\mathbb{J};j}^{(l)}}{\gamma} + \lambda_{\mathbb{I};i}^{(l)} \lambda_{\mathbb{J};j}^{(l)}\right)\right] \\
&= \left(\frac{\lambda^{2-p}}{\gamma} \left(\frac{1}{\lambda_{\mathbb{I};i}^{(l)} \lambda_{\mathbb{J};j}^{(l)}}\right)^{1-p} \gamma_{\mathbb{I};i}^{(l)} \gamma_{\mathbb{J};j}^{(l)} + \lambda_{\mathbb{I};i}^{(l)} \lambda_{\mathbb{J};j}^{(l)}\right)^2 \text{Var}[K_{i,j}^{(l)}].
\end{aligned}$$

□

4.2 Espérance et variance de la somme des paiements d'une cellule pour tous les secteurs d'activités

On veut trouver la somme des paiements ayant la même période de survénance et la même période de développement, c'est-à-dire la somme des paiements qui partagent le même choc commun $W_{i,j}$:

$$\begin{aligned}
S_{i,j} &= \sum_{l=1}^L \sum_{k=1}^{K_{i,j}^{(l)}} X_{k,i,j}^{(l)} \\
&= \sum_{l=1}^L S_{i,j}^{(l)} \\
&= \sum_{l=1}^L \left(\left(\frac{\lambda}{\lambda_{\mathbb{I};i}^{(l)} \lambda_{\mathbb{J};j}^{(l)}} \right)^{1-p} \frac{\gamma_{\mathbb{I};i}^{(l)} \gamma_{\mathbb{J};j}^{(l)}}{\gamma} K_{i,j}^{(l)} W_{i,j} + \sum_{k=1}^{K_{i,j}^{(l)}} Z_{k,i,j}^{(l)} \right) \\
&= \left(\sum_{l=1}^L K_{i,j}^{(l)} \left(\frac{\lambda}{\lambda_{\mathbb{I};i}^{(l)} \lambda_{\mathbb{J};j}^{(l)}} \right)^{1-p} \frac{\gamma_{\mathbb{I};i}^{(l)} \gamma_{\mathbb{J};j}^{(l)}}{\gamma} \right) W_{i,j} + \sum_{l=1}^L \sum_{k=1}^{K_{i,j}^{(l)}} Z_{k,i,j}^{(l)}.
\end{aligned}$$

Proposition 7. Sous les hypothèses (S1) et (S2), et en posant $\gamma_{i,j}^{(l)} = \gamma_{\mathbb{I};i}^{(l)} \gamma_{\mathbb{J};j}^{(l)}$, l'espérance et la variance de $S_{i,j}$ sont données par

$$\mathbb{E}[S_{i,j}] = \sum_{l=1}^L \mathbb{E}[K_{i,j}^{(l)}] \left(\frac{\lambda^{2-p}}{\gamma} \left(\frac{1}{\lambda_{\mathbb{I};i}^{(l)} \lambda_{\mathbb{J};j}^{(l)}} \right)^{1-p} \gamma_{\mathbb{I};i}^{(l)} \gamma_{\mathbb{J};j}^{(l)} + \lambda_{\mathbb{I};i}^{(l)} \lambda_{\mathbb{J};j}^{(l)} \right)$$

et

$$\text{Var}[S_{i,j}] = \mathbb{E} \left[\text{Var} \left[S_{i,j} \mid K_{i,j}^{(1)}, \dots, K_{i,j}^{(L)} \right] \right] + \text{Var} \left[\mathbb{E} \left[S_{i,j} \mid K_{i,j}^{(1)}, \dots, K_{i,j}^{(L)} \right] \right].$$

On peut considérer deux situations en fonction de la dépendance supposée entre les fréquences des différentes lignes d'affaires.

Cas 1 : Les $K_{i,j}^{(l)}$, $l = 1, \dots, L$ sont mutuellement indépendantes.

Alors, le premier terme de la variance est donné par

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E} \left[\text{Var} \left[S_{i,j} \mid K_{i,j}^{(1)}, \dots, K_{i,j}^{(L)} \right] \right] = \\
& \frac{\lambda^{2-p}}{\gamma} \left\{ \sum_{l=1}^L \left(\left(\frac{1}{\lambda_{\mathbb{I};i}^{(l)} \lambda_{\mathbb{J};j}^{(l)}} \right)^{1-p} \gamma_{\mathbb{I};i}^{(l)} \gamma_{\mathbb{J};j}^{(l)} \right)^2 \left(\text{Var} \left[K_{i,j}^{(l)} \right] + \mathbb{E} \left[K_{i,j}^{(l)} \right]^2 \right) \right. \\
& + 2 \sum_{l=1}^{L-1} \sum_{m=l+1}^L \left(\frac{1}{\lambda_{\mathbb{I};i}^{(l)} \lambda_{\mathbb{J};j}^{(l)} \lambda_{\mathbb{I};i}^{(m)} \lambda_{\mathbb{J};j}^{(m)}} \right)^{1-p} \gamma_{\mathbb{I};i}^{(l)} \gamma_{\mathbb{J};j}^{(l)} \gamma_{\mathbb{I};i}^{(m)} \gamma_{\mathbb{J};j}^{(m)} \mathbb{E} \left[K_{i,j}^{(l)} \right] \mathbb{E} \left[K_{i,j}^{(m)} \right] \Big\} \\
& + \sum_{l=1}^L \mathbb{E} \left[K_{i,j}^{(l)} \right] \gamma_{\mathbb{I};i}^{(l)} \gamma_{\mathbb{J};j}^{(l)} \left(\lambda_{\mathbb{I};i}^{(l)} \lambda_{\mathbb{J};j}^{(l)} \right)^p,
\end{aligned}$$

et le deuxième terme de la variance est donné par :

$$\begin{aligned}
\text{Var} \left[\mathbb{E} \left[S_{i,j} \mid K_{i,j}^{(1)}, \dots, K_{i,j}^{(L)} \right] \right] &= \sum_{l=1}^L \text{Var} \left[K_{i,j}^{(l)} \right] \\
&\cdot \left(\frac{\lambda^{2-p}}{\gamma} \left(\frac{1}{\lambda_{\mathbb{I};i}^{(l)} \lambda_{\mathbb{J};j}^{(l)}} \right)^{1-p} \gamma_{\mathbb{I};i}^{(l)} \gamma_{\mathbb{J};j}^{(l)} + \lambda_{\mathbb{I};i}^{(l)} \lambda_{\mathbb{J};j}^{(l)} \right)^2.
\end{aligned}$$

Cas 2 : Les $K_{i,j}^{(l)}$, $l = 1, \dots, L$ sont mutuellement dépendantes.

Alors, le premier terme de la variance est donné par

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E} \left[\text{Var} \left[S_{i,j} \mid K_{i,j}^{(1)}, \dots, K_{i,j}^{(L)} \right] \right] = \\
& \frac{\lambda^{2-p}}{\gamma} \left\{ \sum_{l=1}^L \left(\left(\frac{1}{\lambda_{\mathbb{I};i}^{(l)} \lambda_{\mathbb{J};j}^{(l)}} \right)^{1-p} \gamma_{\mathbb{I};i}^{(l)} \gamma_{\mathbb{J};j}^{(l)} \right)^2 \left(\text{Var} \left[K_{i,j}^{(l)} \right] + \mathbb{E} \left[K_{i,j}^{(l)} \right]^2 \right) \right. \\
& + 2 \sum_{l=1}^{L-1} \sum_{m=l+1}^L \left(\frac{1}{\lambda_{\mathbb{I};i}^{(l)} \lambda_{\mathbb{J};j}^{(l)} \lambda_{\mathbb{I};i}^{(m)} \lambda_{\mathbb{J};j}^{(m)}} \right)^{1-p} \gamma_{\mathbb{I};i}^{(l)} \gamma_{\mathbb{J};j}^{(l)} \gamma_{\mathbb{I};i}^{(m)} \gamma_{\mathbb{J};j}^{(m)} \\
& \cdot \left(\mathbb{E} \left[K_{i,j}^{(l)} \right] \mathbb{E} \left[K_{i,j}^{(m)} \right] + \text{Cov} \left[K_{i,j}^{(l)}, K_{i,j}^{(m)} \right] \right) \Big\} \\
& + \sum_{l=1}^L \mathbb{E} \left[K_{i,j}^{(l)} \right] \gamma_{\mathbb{I};i}^{(l)} \gamma_{\mathbb{J};j}^{(l)} \left(\lambda_{\mathbb{I};i}^{(l)} \lambda_{\mathbb{J};j}^{(l)} \right)^p,
\end{aligned}$$

et le deuxième terme de la variance est donné par

$$\begin{aligned} \text{Var}\left[\mathbb{E}\left[S_{i,j} \mid K_{i,j}^{(1)}, \dots, K_{i,j}^{(L)}\right]\right] = \\ \sum_{l=1}^L \text{Var}\left[K_{i,j}^{(l)}\right] \left(\frac{\lambda^{2-p}}{\gamma} \left(\frac{1}{\lambda_{\mathbb{I};i}^{(l)} \lambda_{\mathbb{J};j}^{(l)}} \right)^{1-p} \gamma_{\mathbb{I};i}^{(l)} \gamma_{\mathbb{J};j}^{(l)} + \lambda_{\mathbb{I};i}^{(l)} \lambda_{\mathbb{J};j}^{(l)} \right)^2 \\ + 2 \sum_{l=1}^{L-1} \sum_{m=l+1}^L \text{Cov}\left[K_{i,j}^{(l)}, K_{i,j}^{(m)}\right] \left(\frac{\lambda^{2-p}}{\gamma} \left(\frac{1}{\lambda_{\mathbb{I};i}^{(l)} \lambda_{\mathbb{J};j}^{(l)}} \right)^{1-p} \gamma_{\mathbb{I};i}^{(l)} \gamma_{\mathbb{J};j}^{(l)} + \lambda_{\mathbb{I};i}^{(l)} \lambda_{\mathbb{J};j}^{(l)} \right) \\ \left(\frac{\lambda^{2-p}}{\gamma} \left(\frac{1}{\lambda_{\mathbb{I};i}^{(m)} \lambda_{\mathbb{J};j}^{(m)}} \right)^{1-p} \gamma_{\mathbb{I};i}^{(m)} \gamma_{\mathbb{J};j}^{(m)} + \lambda_{\mathbb{I};i}^{(m)} \lambda_{\mathbb{J};j}^{(m)} \right). \end{aligned}$$

Démonstration.

Cas 1 : Les $K_{i,j}^{(l)}$, $l = 1, \dots, L$ sont mutuellement indépendantes.

Dans le but de calculer l'espérance, on utilise les résultats de la proposition 6 :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[S_{i,j}] &= \mathbb{E}\left[\sum_{l=1}^L S_{i,j}^{(l)}\right] \\ &= \sum_{l=1}^L \mathbb{E}\left[S_{i,j}^{(l)}\right] \\ &= \sum_{l=1}^L \mathbb{E}\left[K_{i,j}^{(l)}\right] \left(\frac{\lambda^{2-p}}{\gamma} \left(\frac{1}{\lambda_{\mathbb{I};i}^{(l)} \lambda_{\mathbb{J};j}^{(l)}} \right)^{1-p} \gamma_{\mathbb{I};i}^{(l)} \gamma_{\mathbb{J};j}^{(l)} + \lambda_{\mathbb{I};i}^{(l)} \lambda_{\mathbb{J};j}^{(l)} \right) \end{aligned}$$

La variance est calculée grâce à l'équation

$$\text{Var}[S_{i,j}] = \mathbb{E}\left[\text{Var}\left[S_{i,j} \mid K_{i,j}^{(1)}, \dots, K_{i,j}^{(L)}\right]\right] + \text{Var}\left[\mathbb{E}\left[S_{i,j} \mid K_{i,j}^{(1)}, \dots, K_{i,j}^{(L)}\right]\right],$$

où, le premier terme de la variance est donné par

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E} \left[\text{Var} \left[S_{i,j} \mid K_{i,j}^{(1)}, \dots, K_{i,j}^{(L)} \right] \right] = \\
& \mathbb{E} \left[\text{Var} \left[\left(\sum_{l=1}^L K_{i,j}^{(l)} \left(\frac{\lambda}{\lambda_{\mathbb{I};i}^{(l)} \lambda_{\mathbb{J};j}^{(l)}} \right)^{1-p} \frac{\gamma_{\mathbb{I};i}^{(l)} \gamma_{\mathbb{J};j}^{(l)}}{\gamma} \right) W_{i,j} + \sum_{l=1}^L \sum_{k=1}^{K_{i,j}^{(l)}} Z_{k,i,j}^{(l)} \mid K_{i,j}^{(1)}, \dots, K_{i,j}^{(L)} \right] \right] \\
& = \mathbb{E} \left[\left(\sum_{l=1}^L K_{i,j}^{(l)} \left(\frac{\lambda}{\lambda_{\mathbb{I};i}^{(l)} \lambda_{\mathbb{J};j}^{(l)}} \right)^{1-p} \frac{\gamma_{\mathbb{I};i}^{(l)} \gamma_{\mathbb{J};j}^{(l)}}{\gamma} \right)^2 \text{Var}[W_{i,j}] + \sum_{l=1}^L \sum_{k=1}^{K_{i,j}^{(l)}} \text{Var}[Z_{k,i,j}^{(l)}] \right] \\
& = \gamma \lambda^p \mathbb{E} \left[\left(\sum_{l=1}^L K_{i,j}^{(l)} \left(\frac{\lambda}{\lambda_{\mathbb{I};i}^{(l)} \lambda_{\mathbb{J};j}^{(l)}} \right)^{1-p} \frac{\gamma_{\mathbb{I};i}^{(l)} \gamma_{\mathbb{J};j}^{(l)}}{\gamma} \right)^2 \right] + \sum_{l=1}^L \mathbb{E}[K_{i,j}^{(l)}] \gamma_{\mathbb{I};i}^{(l)} \gamma_{\mathbb{J};j}^{(l)} \left(\lambda_{\mathbb{I};i}^{(l)} \lambda_{\mathbb{J};j}^{(l)} \right)^p \\
& = \gamma \lambda^p \mathbb{E} \left[\sum_{l=1}^L \left(K_{i,j}^{(l)} \left(\frac{\lambda}{\lambda_{\mathbb{I};i}^{(l)} \lambda_{\mathbb{J};j}^{(l)}} \right)^{1-p} \frac{\gamma_{\mathbb{I};i}^{(l)} \gamma_{\mathbb{J};j}^{(l)}}{\gamma} \right)^2 \right. \\
& \quad \left. + 2 \sum_{l=1}^{L-1} \sum_{m=l+1}^L K_{i,j}^{(l)} K_{i,j}^{(m)} \left(\frac{\lambda}{\lambda_{\mathbb{I};i}^{(l)} \lambda_{\mathbb{J};j}^{(l)}} \right)^{1-p} \frac{\gamma_{\mathbb{I};i}^{(l)} \gamma_{\mathbb{J};j}^{(l)}}{\gamma} \left(\frac{\lambda}{\lambda_{\mathbb{I};i}^{(m)} \lambda_{\mathbb{J};j}^{(m)}} \right)^{1-p} \frac{\gamma_{\mathbb{I};i}^{(m)} \gamma_{\mathbb{J};j}^{(m)}}{\gamma} \right] \\
& \quad \left. + \sum_{l=1}^L \mathbb{E}[K_{i,j}^{(l)}] \gamma_{\mathbb{I};i}^{(l)} \gamma_{\mathbb{J};j}^{(l)} \left(\lambda_{\mathbb{I};i}^{(l)} \lambda_{\mathbb{J};j}^{(l)} \right)^p \right] \\
& = \gamma \lambda^p \left\{ \sum_{l=1}^L \left(\left(\frac{\lambda}{\lambda_{\mathbb{I};i}^{(l)} \lambda_{\mathbb{J};j}^{(l)}} \right)^{1-p} \frac{\gamma_{\mathbb{I};i}^{(l)} \gamma_{\mathbb{J};j}^{(l)}}{\gamma} \right)^2 \mathbb{E}[(K_{i,j}^{(l)})^2] \right. \\
& \quad \left. + 2 \sum_{l=1}^{L-1} \sum_{m=l+1}^L \left(\frac{\lambda^2}{\lambda_{\mathbb{I};i}^{(l)} \lambda_{\mathbb{J};j}^{(l)} \lambda_{\mathbb{I};i}^{(m)} \lambda_{\mathbb{J};j}^{(m)}} \right)^{1-p} \frac{\gamma_{\mathbb{I};i}^{(l)} \gamma_{\mathbb{J};j}^{(l)} \gamma_{\mathbb{I};i}^{(m)} \gamma_{\mathbb{J};j}^{(m)}}{\gamma^2} \mathbb{E}[K_{i,j}^{(l)} K_{i,j}^{(m)}] \right\} \\
& \quad + \sum_{l=1}^L \mathbb{E}[K_{i,j}^{(l)}] \gamma_{\mathbb{I};i}^{(l)} \gamma_{\mathbb{J};j}^{(l)} \left(\lambda_{\mathbb{I};i}^{(l)} \lambda_{\mathbb{J};j}^{(l)} \right)^p
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\lambda^{2-p}}{\gamma} \left\{ \sum_{l=1}^L \left(\left(\frac{1}{\lambda_{\mathbb{I};i}^{(l)} \lambda_{\mathbb{J};j}^{(l)}} \right)^{1-p} \gamma_{\mathbb{I};i}^{(l)} \gamma_{\mathbb{J};j}^{(l)} \right)^2 \left(\text{Var}[K_{i,j}^{(l)}] + \text{E}[K_{i,j}^{(l)}]^2 \right) \right. \\
&\quad + 2 \sum_{l=1}^{L-1} \sum_{m=l+1}^L \left(\frac{1}{\lambda_{\mathbb{I};i}^{(l)} \lambda_{\mathbb{J};j}^{(l)} \lambda_{\mathbb{I};i}^{(m)} \lambda_{\mathbb{J};j}^{(m)}} \right)^{1-p} \\
&\quad \cdot \gamma_{\mathbb{I};i}^{(l)} \gamma_{\mathbb{J};j}^{(l)} \gamma_{\mathbb{I};i}^{(m)} \gamma_{\mathbb{J};j}^{(m)} \left(\text{E}[K_{i,j}^{(l)}] \text{E}[K_{i,j}^{(m)}] + \text{Cov}[K_{i,j}^{(l)}, K_{i,j}^{(m)}] \right) \Big\} \\
&\quad + \sum_{l=1}^L \text{E}[K_{i,j}^{(l)}] \gamma_{\mathbb{I};i}^{(l)} \gamma_{\mathbb{J};j}^{(l)} \left(\lambda_{\mathbb{I};i}^{(l)} \lambda_{\mathbb{J};j}^{(l)} \right)^p.
\end{aligned}$$

Si on suppose que les $K_{i,j}^{(l)}$, $l = 1, \dots, L$ sont mutuellement indépendantes, on obtient que $\text{Cov}[K_{i,j}^{(l)}, K_{i,j}^{(m)}] = 0$, et donc

$$\begin{aligned}
&\text{E}[\text{Var}[S_{i,j} | K_{i,j}^{(1)}, \dots, K_{i,j}^{(L)}]] = \\
&\frac{\lambda^{2-p}}{\gamma} \left\{ \sum_{l=1}^L \left(\left(\frac{1}{\lambda_{\mathbb{I};i}^{(l)} \lambda_{\mathbb{J};j}^{(l)}} \right)^{1-p} \gamma_{\mathbb{I};i}^{(l)} \gamma_{\mathbb{J};j}^{(l)} \right)^2 \left(\text{Var}[K_{i,j}^{(l)}] + \text{E}[K_{i,j}^{(l)}]^2 \right) \right. \\
&\quad + 2 \sum_{l=1}^{L-1} \sum_{m=l+1}^L \left(\frac{1}{\lambda_{\mathbb{I};i}^{(l)} \lambda_{\mathbb{J};j}^{(l)} \lambda_{\mathbb{I};i}^{(m)} \lambda_{\mathbb{J};j}^{(m)}} \right)^{1-p} \gamma_{\mathbb{I};i}^{(l)} \gamma_{\mathbb{J};j}^{(l)} \gamma_{\mathbb{I};i}^{(m)} \gamma_{\mathbb{J};j}^{(m)} \text{E}[K_{i,j}^{(l)}] \text{E}[K_{i,j}^{(m)}] \Big\} \\
&\quad + \sum_{l=1}^L \text{E}[K_{i,j}^{(l)}] \gamma_{\mathbb{I};i}^{(l)} \gamma_{\mathbb{J};j}^{(l)} \left(\lambda_{\mathbb{I};i}^{(l)} \lambda_{\mathbb{J};j}^{(l)} \right)^p.
\end{aligned}$$

Le deuxième terme de la variance est alors donné par

$$\begin{aligned}
& \text{Var} \left[\mathbb{E} \left[S_{i,j} \mid K_{i,j}^{(1)}, \dots, K_{i,j}^{(L)} \right] \right] = \\
& \text{Var} \left[\mathbb{E} \left[\left(\sum_{l=1}^L K_{i,j}^{(l)} \left(\frac{\lambda}{\lambda_{\mathbb{I};i}^{(l)} \lambda_{\mathbb{J};j}^{(l)}} \right)^{1-p} \frac{\gamma_{\mathbb{I};i}^{(l)} \gamma_{\mathbb{J};j}^{(l)}}{\gamma} \right) W_{i,j} + \sum_{l=1}^L \sum_{k=1}^{K_{i,j}^{(l)}} Z_{k,i,j}^{(l)} \mid K_{i,j}^{(1)}, \dots, K_{i,j}^{(L)} \right] \right] \\
& = \text{Var} \left[\left(\sum_{l=1}^L K_{i,j}^{(l)} \left(\frac{\lambda}{\lambda_{\mathbb{I};i}^{(l)} \lambda_{\mathbb{J};j}^{(l)}} \right)^{1-p} \frac{\gamma_{\mathbb{I};i}^{(l)} \gamma_{\mathbb{J};j}^{(l)}}{\gamma} \right) \mathbb{E}[W_{i,j}] + \sum_{l=1}^L K_{i,j}^{(l)} \mathbb{E}[Z_{k,i,j}^{(l)}] \right] \\
& = \text{Var} \left[\sum_{l=1}^L K_{i,j}^{(l)} \left(\frac{\lambda^{2-p}}{\gamma} \left(\frac{1}{\lambda_{\mathbb{I};i}^{(l)} \lambda_{\mathbb{J};j}^{(l)}} \right)^{1-p} \gamma_{\mathbb{I};i}^{(l)} \gamma_{\mathbb{J};j}^{(l)} + \lambda_{\mathbb{I};i}^{(l)} \lambda_{\mathbb{J};j}^{(l)} \right) \right].
\end{aligned}$$

Si on suppose que les $K_{i,j}^{(l)}$, $l = 1, \dots, L$ sont mutuellement indépendantes, alors on obtient

$$\begin{aligned}
\text{Var} \left[\mathbb{E} \left[S_{i,j} \mid K_{i,j}^{(1)}, \dots, K_{i,j}^{(L)} \right] \right] &= \sum_{l=1}^L \text{Var} \left[K_{i,j}^{(l)} \right] \\
&\quad \cdot \left(\frac{\lambda^{2-p}}{\gamma} \left(\frac{1}{\lambda_{\mathbb{I};i}^{(l)} \lambda_{\mathbb{J};j}^{(l)}} \right)^{1-p} \gamma_{\mathbb{I};i}^{(l)} \gamma_{\mathbb{J};j}^{(l)} + \lambda_{\mathbb{I};i}^{(l)} \lambda_{\mathbb{J};j}^{(l)} \right)^2.
\end{aligned}$$

Si les $K_{i,j}^{(l)}$ sont supposés dépendantes, alors on a

Cas 2 : Les $K_{i,j}^{(l)}$, $l = 1, \dots, L$ sont mutuellement dépendantes.

$$\begin{aligned}
& \text{Var} \left[\mathbb{E} \left[S_{i,j} \mid K_{i,j}^{(1)}, \dots, K_{i,j}^{(L)} \right] \right] = \\
& \sum_{l=1}^L \text{Var} \left[K_{i,j}^{(l)} \right] \left(\frac{\lambda^{2-p}}{\gamma} \left(\frac{1}{\lambda_{\mathbb{I};i}^{(l)} \lambda_{\mathbb{J};j}^{(l)}} \right)^{1-p} \gamma_{\mathbb{I};i}^{(l)} \gamma_{\mathbb{J};j}^{(l)} + \lambda_{\mathbb{I};i}^{(l)} \lambda_{\mathbb{J};j}^{(l)} \right)^2 \\
& + 2 \sum_{l=1}^{L-1} \sum_{m=l+1}^L \text{Cov} \left[K_{i,j}^{(l)}, K_{i,j}^{(m)} \right] \left(\frac{\lambda^{2-p}}{\gamma} \left(\frac{1}{\lambda_{\mathbb{I};i}^{(l)} \lambda_{\mathbb{J};j}^{(l)}} \right)^{1-p} \gamma_{\mathbb{I};i}^{(l)} \gamma_{\mathbb{J};j}^{(l)} + \lambda_{\mathbb{I};i}^{(l)} \lambda_{\mathbb{J};j}^{(l)} \right) \\
& \quad \left(\frac{\lambda^{2-p}}{\gamma} \left(\frac{1}{\lambda_{\mathbb{I};i}^{(m)} \lambda_{\mathbb{J};j}^{(m)}} \right)^{1-p} \gamma_{\mathbb{I};i}^{(m)} \gamma_{\mathbb{J};j}^{(m)} + \lambda_{\mathbb{I};i}^{(m)} \lambda_{\mathbb{J};j}^{(m)} \right).
\end{aligned}$$

□

4.3 Espérance et variance des réserves

Dans l'introduction, on avait défini les ensembles $\mathcal{X}^{(l)U}$ et $\mathcal{X}^{(l)D}$ qui représentent, respectivement, les paiements observés et à prévoir pour un secteur d'activité (l) . On avait aussi défini les ensembles $\mathcal{X}^U$ et $\mathcal{X}^D$ qui représentent, respectivement, les paiements observés et à prévoir pour l'ensemble des secteurs d'activités. On peut maintenant définir $R^{(l)}$ comme la somme de l'ensemble des paiements à prévoir pour un secteur d'activité l . On a alors

$$R^{(l)} = \sum_{X_{k,i,j}^{(l)} \in \mathcal{X}^{(l)D}} X_{k,i,j}^{(l)} = \sum_{i=1}^I \sum_{j=I-i+1}^J \sum_{k=1}^{K_{i,j}^{(l)}} X_{k,i,j}^{(l)} = \sum_{i=1}^I \sum_{j=I-i+1}^J S_{i,j}^{(l)}$$

On définit également R comme la somme de l'ensemble des paiements à prévoir parmi tous les secteurs d'activités, c'est-à-dire

$$R = \sum_{X_{k,i,j}^{(l)} \in \mathcal{X}^D} X_{k,i,j}^{(l)} = \sum_{i=1}^I \sum_{j=I-i+1}^J \sum_{l=1}^L \sum_{k=1}^{K_{i,j}^{(l)}} X_{k,i,j}^{(l)} = \sum_{i=1}^I \sum_{j=I-i+1}^J S_{i,j}.$$

Sous les hypothèses **(S1)** et **(S2)**, et en posant $\gamma_{i,j}^{(l)} = \gamma_{\mathbb{I};i}^{(l)} \gamma_{\mathbb{J};j}^{(l)}$, l'espérance et la variance de $R^{(l)}$ et R sont données par

$$\mathbb{E}[R^{(l)}] = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^I \sum_{j=I-i+1}^J S_{i,j}^{(l)}\right] = \sum_{i=1}^I \sum_{j=I-i+1}^J \mathbb{E}[S_{i,j}^{(l)}],$$

$$\text{Var}[R^{(l)}] = \text{Var}\left[\sum_{i=1}^I \sum_{j=I-i+1}^J S_{i,j}^{(l)}\right] = \sum_{i=1}^I \sum_{j=I-i+1}^J \text{Var}[S_{i,j}^{(l)}],$$

$$\mathbb{E}[R] = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^I \sum_{j=I-i+1}^J S_{i,j}\right] = \sum_{i=1}^I \sum_{j=I-i+1}^J \mathbb{E}[S_{i,j}]$$

et

$$\text{Var}[R] = \text{Var}\left[\sum_{i=1}^I \sum_{j=I-i+1}^J S_{i,j}\right] = \sum_{i=1}^I \sum_{j=I-i+1}^J \text{Var}[S_{i,j}].$$

Ces résultats s'obtiennent aisément à partir des propositions démontrées dans ce chapitre et de l'hypothèse d'indépendance entre les années de survenance et les années de développement.

CHAPITRE V

ESTIMATION DES PARAMÈTRES

Dans la littérature scientifique, deux méthodes ont été principalement utilisées pour estimer les paramètres d'une distribution Tweedie multivariée. La première est basée sur la méthode des moments, comme dans les articles de (Alai, Landsman et Sherris, 2015) et de (Furman et Landsman, 2010), et la deuxième repose sur une approche bayésienne, comme dans l'article de (Avanzi, Taylor, Vu, et Wong, 2016). La première approche, généralement rapide et précise, n'est pas applicable dans un contexte de modélisation des réserves car, comme mentionné dans l'article de (Avanzi, Taylor, Vu, et Wong, 2016), on se retrouve souvent avec une base de données de taille trop petite pour ce type de méthodes. D'un autre côté, la seconde approche demande de passer par des méthodes MCMC qui, malgré leur efficacité, peuvent demander un temps de calcul considérable. Dans ce mémoire, le fait de travailler avec un modèle individuel permet de contourner le problème lié à la première approche. En effet, dans chaque cellule (i, j) , on aura plusieurs paiements individuels plutôt qu'un seul collectif, ce qui a pour effet d'augmenter considérablement la taille effective de la base de données. Ainsi, l'estimation des différents paramètres reposera sur la méthode des moments.

5.1 Estimation du paramètre de puissance p

Étant donné que p est un paramètre de puissance, il change complètement le type de distribution avec laquelle on travaille. Par exemple, avec $p = 2$ et $p = 3$, on se retrouve avec les distributions gamma et inverse-Gaussienne respectivement. Il faut donc estimer dans un premier temps ce paramètre. L'article (Avanzi, Taylor, Vu, et Wong, 2016) propose une méthode par maximum de vraisemblance pour estimer p en utilisant un modèle linéaire généralisé basé sur la distribution de Tweedie univariée. On estimera donc le paramètre p uniquement puis les autres paramètres en supposant $p = \hat{p}$.

Pour estimer le paramètre de puissance du modèle, on propose de créer un modèle linéaire généralisé (Tweedie univarié) pour l'ensemble des données combinées, c'est-à-dire pour tous les paiements de toutes les lignes d'affaires. La structure de la moyenne de $X_{k,i,j}^{(l)}$, le paiement incrémental de la période j pour le k^e sinistre(s) de la période de survenance i de la ligne d'affaires l , est donnée par

$$d + \sum_{m=1}^L \left(d_{\mathbb{I};i}^{(m)} + d_{\mathbb{J};j}^{(m)} \right) I_{(m=l)},$$

où d , $d_{\mathbb{I};i}^{(l)}$ et $d_{\mathbb{J};j}^{(l)}$ sont les coefficients dans la régression et I est la fonction indicatrice. On propose de lier $E[X_{k,i,j}^{(l)}]$ avec la fonction de lien logarithmique, de sorte que

$$E[X_{k,i,j}^{(l)}] = \mu_{i,j}^{(l)} = e^{d + \sum_{m=1}^L (d_{\mathbb{I};i}^{(m)} + d_{\mathbb{J};j}^{(m)}) I_{(m=l)}}.$$

En supposant une dispersion constante pour l'ensemble de la base de données, la distribution $X_{k,i,j}^{(l)}$ sous forme reproductrice est donnée par

$$X_{k,i,j}^{(l)} \sim \text{Tweedie}_p \left(\mu_{i,j}^{(l)}, \phi \right).$$

L'estimation du paramètre p se trouve numériquement en testant une gamme de

valeurs de p . Pour chaque p testé on trouve les estimateurs

$$\begin{aligned}\widehat{\mathbf{d}}_{\mathbb{J}} &= \left\{ \widehat{d}_{\mathbb{J};j}^{(l)}; 1 \leq l \leq L, 0 \leq j \leq J \right\}, \\ \widehat{\mathbf{d}}_{\mathbb{I}} &= \left\{ \widehat{d}_{\mathbb{I};i}^{(l)}; 1 \leq l \leq L, 1 \leq i \leq I \right\}, \\ \widehat{d} \text{ et } \widehat{\phi} &\text{ qui maximisent la vraisemblance}\end{aligned}$$

$$L(\mathbf{X}; d, \mathbf{d}_{\mathbb{I}}, \mathbf{d}_{\mathbb{J}}, \phi) = \prod_{l=1}^L \prod_{i=1}^I \prod_{j=0}^{I-i} \prod_{k=1}^{K_{i,j}^{(l)}} f_{X_{k,i,j}^{(l)}} \left(x_{k,i,j}^{(l)}; d, \mathbf{d}_{\mathbb{I}}, \mathbf{d}_{\mathbb{J}}, \phi \right)$$

La valeur de p qui fournit la vraisemblance la plus élevée, parmi les vraisemblances calculées avec les valeurs p qu'on a testé, est sélectionnée comme l'estimateur $\hat{p}$. Cette analyse suppose l'indépendance entre les lignes, les colonnes et les lignes d'affaires. Même si cette hypothèse n'est pas parfaitement vérifiée en pratique, elle permet néanmoins d'avoir une estimation raisonnable de p . On pourrait aussi faire la totalité des estimations avec plusieurs valeurs de p pour ensuite prendre le meilleur des modèles (*profile likelihood*).

5.2 Estimation des paramètres des effets individuels

5.2.1 Estimation des paramètres des effets individuels par cellule ($\lambda_{i,j}^{(l)}$ et $\gamma_{i,j}^{(l)}$)

L'article de (Alai, Landsman et Sherris, 2015) propose une méthode pour estimer les paramètres d'une distribution Tweedie lorsque celle-ci est utilisée pour capter la dépendance entre les mortalités dans un contexte d'assurance vie. Cette section est fortement inspirée de l'approche qu'ils ont proposée. Dans cette première étape, on estimera des paramètres préliminaires qui nous permettront par la suite d'estimer $\lambda_{\mathbb{J};j}^{(l)}$, $\lambda_{\mathbb{I};i}^{(l)}$, $\gamma_{\mathbb{J};j}^{(l)}$ et $\gamma_{\mathbb{I};i}^{(l)}$. On suppose que

$$\lambda_{i,j}^{(l)} = \lambda_{\mathbb{I};i}^{(l)} \cdot \lambda_{\mathbb{J};j}^{(l)}$$

et

$$\gamma_{i,j}^{(l)} = \gamma_{\mathbb{I};i}^{(l)} \cdot \gamma_{\mathbb{J};j}^{(l)},$$

c'est-à-dire que dans un premier temps, on estime l'effet combiné de la ligne i et de la colonne j pour la cellule (i, j) . À partir de cette hypothèse, on peut réécrire la définition de $X_{k,i,j}^{(l)}$ comme suit :

$$X_{k,i,j}^{(l)} = \left(\frac{\lambda}{\lambda_{i,j}^{(l)}} \right)^{1-p} \frac{\gamma_{i,j}^{(l)}}{\gamma} W_{i,j} + Z_{k,i,j}^{(l)},$$

où

$$W_{i,j} \sim \text{Tweedie}_p(\lambda, \gamma), \quad p \neq 1$$

et

$$Z_{k,i,j}^{(l)} \sim \text{Tweedie}_p \left(\lambda_{i,j}^{(l)}, \gamma_{i,j}^{(l)} \right), \quad p \neq 1.$$

Ainsi, on a

$$X_{k,i,j}^{(l)} \sim \text{Tweedie}_p \left(\lambda_{i,j}^{(l)} \left[\left(\frac{\lambda}{\lambda_{i,j}^{(l)}} \right)^{2-p} \frac{\gamma_{i,j}^{(l)}}{\gamma} + 1 \right], \gamma_{i,j}^{(l)} \left[\left(\frac{\lambda}{\lambda_{i,j}^{(l)}} \right)^{2-p} \frac{\gamma_{i,j}^{(l)}}{\gamma} + 1 \right]^{1-p} \right),$$

pour $p \neq 1$.

Le but de cette section est d'estimer les paramètres $\lambda_{i,j}^{(l)}$ et $\gamma_{i,j}^{(l)}$ avec la méthode des moments. Pour ce faire, on doit définir les moments empiriques et théoriques de $X_{k,i,j}^{(l)}$ et de $Z_{k,i,j}^{(l)}$. Par la suite, on va utiliser la notation proposée dans l'article de (Alai, Landsman et Sherris, 2015) afin de définir les moments théoriques et empiriques des variables aléatoires. Soit Y , une variable aléatoire quelconque. On note $v_t(Y)$ et $\mu_t(Y)$ le t^e moment non-centré et le t^e moment centré (théorique) de Y , c'est-à-dire

$$v_t(Y) = \mathbb{E}[Y^t], \quad t \in \mathbb{Z}$$

et

$$\mu_t(Y) = E[(Y - E[Y])^t], \quad t \in \mathbb{Z}.$$

Soit $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_m)$, un vecteur aléatoire dont les composantes sont identiquement distribuées. On définit $\alpha_t(\mathbf{Y})$ comme le t^e moment non-centré empirique

$$\alpha_t(\mathbf{Y}) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m Y_i^t, \quad t \in \mathbb{Z}$$

Pour $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_m)$, les moments non-centrés empiriques sont des estimateurs sans biais des moments non-centrés théoriques de Y_1 , c'est-à-dire

$$E[\alpha_t(\mathbf{Y})] = E[Y_1^t], \quad t \in \mathbb{Z}.$$

On définit aussi $\tilde{m}_2(\mathbf{Y})$ et $\tilde{m}_3(\mathbf{Y})$ comme le deuxième et le troisième moments centrés empiriques

$$\tilde{m}_2(\mathbf{Y}) = \frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^m (Y_i - \alpha_1(\mathbf{Y}))^2$$

et

$$\tilde{m}_3(\mathbf{Y}) = \frac{m}{(m-1)(m-2)} \sum_{i=1}^m (Y_i - \alpha_1(\mathbf{Y}))^3.$$

Pour $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_m)$, ces derniers sont des estimateurs sans biais des mêmes moments centrés théoriques de Y_1 , c'est-à-dire de

$$E[\tilde{m}_2(\mathbf{Y})] = \mu_2(Y_1) \tag{5.1}$$

et

$$E[\tilde{m}_3(\mathbf{Y})] = \mu_3(Y_1). \tag{5.2}$$

On peut retrouver les moments de $Z_{k,i,j}^{(l)}$ en obtenant les moments de $X_{k,i,j}^{(l)}$, comme suggéré par la proposition ci-dessous.

Proposition 8. Avec les définitions précédentes, on a

$$\tilde{m}_2 \left(\mathbf{X}_{\mathbf{i}\mathbf{j}}^{(l)} \mid K_{i,j}^{(l)} \right) = \tilde{m}_2 \left(\mathbf{Z}_{\mathbf{i}\mathbf{j}}^{(l)} \mid K_{i,j}^{(l)} \right)$$

et

$$\tilde{m}_3 \left(\mathbf{X}_{\mathbf{i}\mathbf{j}}^{(l)} \mid K_{i,j}^{(l)} \right) = \tilde{m}_3 \left(\mathbf{Z}_{\mathbf{i}\mathbf{j}}^{(l)} \mid K_{i,j}^{(l)} \right).$$

Démonstration. On observe que

$$\begin{aligned} \alpha_1 \left(\mathbf{X}_{\mathbf{i}\mathbf{j}}^{(l)} \mid K_{i,j}^{(l)} \right) &= \frac{1}{K_{i,j}^{(l)}} \sum_{k=1}^{K_{i,j}^{(l)}} \left[\left(\frac{\lambda}{\lambda_{i,j}^{(l)}} \right)^{1-p} \frac{\gamma_{i,j}^{(l)}}{\gamma} W_{i,j} + Z_{k,i,j}^{(l)} \right] \\ &= \left(\frac{\lambda}{\lambda_{i,j}^{(l)}} \right)^{1-p} \frac{\gamma_{i,j}^{(l)}}{\gamma} W_{i,j} + \frac{1}{K_{i,j}^{(l)}} \sum_{k=1}^{K_{i,j}^{(l)}} Z_{k,i,j}^{(l)} \\ &= \left(\frac{\lambda}{\lambda_{i,j}^{(l)}} \right)^{1-p} \frac{\gamma_{i,j}^{(l)}}{\gamma} W_{i,j} + \alpha_1 \left(\mathbf{Z}_{\mathbf{i}\mathbf{j}}^{(l)} \mid K_{i,j}^{(l)} \right) \end{aligned}$$

et on déduit que

$$\begin{aligned} X_{k,i,j}^{(l)} - \alpha_1 \left(\mathbf{X}_{\mathbf{i}\mathbf{j}}^{(l)} \mid K_{i,j}^{(l)} \right) &= \left(\frac{\lambda}{\lambda_{i,j}^{(l)}} \right)^{1-p} \frac{\gamma_{i,j}^{(l)}}{\gamma} W_{i,j} \\ &\quad + Z_{k,i,j}^{(l)} - \left(\left(\frac{\lambda}{\lambda_{i,j}^{(l)}} \right)^{1-p} \frac{\gamma_{i,j}^{(l)}}{\gamma} W_{i,j} + \alpha_1 \left(\mathbf{Z}_{\mathbf{i}\mathbf{j}}^{(l)} \mid K_{i,j}^{(l)} \right) \right) \\ &= Z_{k,i,j}^{(l)} - \alpha_1 \left(\mathbf{Z}_{\mathbf{i}\mathbf{j}}^{(l)} \mid K_{i,j}^{(l)} \right). \end{aligned}$$

Le résultat de la proposition découle directement des formules énoncées. $\square$

Avant de proposer les estimateurs pour les paramètres recherchés, on doit calculer le deuxième et le troisième moments centrés théoriques de $Z_{k,i,j}^{(l)}$. On obtient directement les résultats à partir de la proposition 1 :

$$\mu_2(Z_{k,i,j}^{(l)}) = \gamma_{i,j}^{(l)} \left(\lambda_{i,j}^{(l)} \right)^p \quad (5.3)$$

et

$$\mu_3(Z_{k,i,j}^{(l)}) = p \left(\gamma_{i,j}^{(l)} \right)^2 \left(\lambda_{i,j}^{(l)} \right)^{2p-1}. \quad (5.4)$$

Proposition 9. Les estimateurs $\widehat{\gamma_{i,j}^{(l)}}$ et $\widehat{\lambda_{i,j}^{(l)}}$ par la méthode des moments sont

$$\widehat{\lambda_{i,j}^{(l)}} = \hat{p} \frac{\tilde{m}_2 \left(\mathbf{X}_{i,j}^{(l)} \mid K_{i,j}^{(l)} \right)^2}{\tilde{m}_3 \left(\mathbf{X}_{i,j}^{(l)} \mid K_{i,j}^{(l)} \right)}$$

et

$$\widehat{\gamma_{i,j}^{(l)}} = \hat{p}^{-\hat{p}} \frac{\tilde{m}_3 \left(\mathbf{X}_{i,j}^{(l)} \mid K_{i,j}^{(l)} \right)^{\hat{p}}}{\tilde{m}_2 \left(\mathbf{X}_{i,j}^{(l)} \mid K_{i,j}^{(l)} \right)^{2\hat{p}-1}}.$$

Démonstration. Selon la proposition 8, on a

$$\tilde{m}_2 \left(\mathbf{X}_{i,j}^{(l)} \mid K_{i,j}^{(l)} \right) = \tilde{m}_2 \left(\mathbf{Z}_{i,j}^{(l)} \mid K_{i,j}^{(l)} \right)$$

et

$$\tilde{m}_3 \left(\mathbf{X}_{i,j}^{(l)} \mid K_{i,j}^{(l)} \right) = \tilde{m}_3 \left(\mathbf{Z}_{i,j}^{(l)} \mid K_{i,j}^{(l)} \right).$$

En utilisant les équations 5.1, 5.2, 5.3 et 5.4, on a

$$\mathbb{E} \left[\tilde{m}_2 \left(\mathbf{Z}_{i,j}^{(l)} \mid K_{i,j}^{(l)} \right) \right] \equiv \mu_2 \left(Z_{1,i,j}^{(l)} \right) = \gamma_{i,j}^{(l)} \left(\lambda_{i,j}^{(l)} \right)^p$$

et

$$\mathbb{E} \left[\tilde{m}_3 \left(\mathbf{Z}_{i,j}^{(l)} \mid K_{i,j}^{(l)} \right) \right] \equiv \mu_3 \left(Z_{1,i,j}^{(l)} \right) = p \left(\gamma_{i,j}^{(l)} \right)^2 \left(\lambda_{i,j}^{(l)} \right)^{2p-1}.$$

Ainsi, on peut écrire

$$\mathbb{E} \left[\tilde{m}_2 \left(\mathbf{X}_{i,j}^{(l)} \mid K_{i,j}^{(l)} \right) \right] \equiv \mu_2 \left(X_{1,i,j}^{(l)} \right) = \gamma_{i,j}^{(l)} \left(\lambda_{i,j}^{(l)} \right)^p$$

et

$$\mathbb{E} \left[\tilde{m}_3 \left(\mathbf{X}_{i,j}^{(l)} \mid K_{i,j}^{(l)} \right) \right] \equiv \mu_3 \left(X_{1,i,j}^{(l)} \right) = p \left(\gamma_{i,j}^{(l)} \right)^2 \left(\lambda_{i,j}^{(l)} \right)^{2p-1}.$$

On obtient alors le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \mu_2 \left(X_{1,i,j}^{(l)} \right) = \gamma_{i,j}^{(l)} \left(\lambda_{i,j}^{(l)} \right)^p \\ \mu_3 \left(X_{1,i,j}^{(l)} \right) = p \left(\gamma_{i,j}^{(l)} \right)^2 \left(\lambda_{i,j}^{(l)} \right)^{2p-1} \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} p \frac{\mu_2 \left(X_{1,i,j}^{(l)} \right)^2}{\mu_3 \left(X_{1,i,j}^{(l)} \right)} = p \frac{\left(\gamma_{i,j}^{(l)} \left(\lambda_{i,j}^{(l)} \right)^p \right)^2}{p \left(\gamma_{i,j}^{(l)} \right)^2 \left(\lambda_{i,j}^{(l)} \right)^{2p-1}} = \lambda_{i,j}^{(l)} \\ p^{-p} \frac{\mu_3 \left(X_{1,i,j}^{(l)} \right)^p}{\mu_2 \left(X_{1,i,j}^{(l)} \right)^{2p-1}} = p^{-p} \frac{\left(p \left(\gamma_{i,j}^{(l)} \right)^2 \left(\lambda_{i,j}^{(l)} \right)^{2p-1} \right)^p}{\left(\gamma_{i,j}^{(l)} \left(\lambda_{i,j}^{(l)} \right)^p \right)^{2p-1}} = \gamma_{i,j}^{(l)}. \end{cases}$$

En posant $\hat{p} = p$, on obtient

$$\widehat{\lambda_{i,j}^{(l)}} = \hat{p} \frac{\tilde{m}_2 \left(\mathbf{X}_{i,j}^{(l)} \mid K_{i,j}^{(l)} \right)^2}{\tilde{m}_3 \left(\mathbf{X}_{i,j}^{(l)} \mid K_{i,j}^{(l)} \right)}$$

et

$$\widehat{\gamma_{i,j}^{(l)}} = \hat{p}^{-\hat{p}} \frac{\tilde{m}_3 \left(\mathbf{X}_{i,j}^{(l)} \mid K_{i,j}^{(l)} \right)^{\hat{p}}}{\tilde{m}_2 \left(\mathbf{X}_{i,j}^{(l)} \mid K_{i,j}^{(l)} \right)^{2\hat{p}-1}}.$$

□

5.2.2 Estimation des paramètres des effets individuels par année d'accident et de développement $(\lambda_{\mathbb{I};i}^{(l)}, \lambda_{\mathbb{J};j}^{(l)}, \gamma_{\mathbb{I};i}^{(l)} \text{ et } \gamma_{\mathbb{J};j}^{(l)})$

La méthode des moindres carrés permet de minimiser l'erreur produite entre des valeurs observées et des valeurs prédites. Pour le problème considéré, on veut minimiser le biais entre $\lambda_{i,j}^{(l)}$ et $\lambda_{\mathbb{I};i}^{(l)} \cdot \lambda_{\mathbb{J};j}^{(l)}$ et celui entre $\gamma_{i,j}^{(l)}$ et $\gamma_{\mathbb{I};i}^{(l)} \cdot \gamma_{\mathbb{J};j}^{(l)}$. On remplace $\lambda_{i,j}^{(l)}$ et $\gamma_{i,j}^{(l)}$ par les estimateurs trouvés à la sous-section précédente ($\widehat{\lambda_{i,j}^{(l)}}$ et $\widehat{\gamma_{i,j}^{(l)}}$, respectivement). On obtient les estimateurs $\widehat{\lambda_{\mathbb{I};i}^{(l)}}$, $\widehat{\lambda_{\mathbb{J};j}^{(l)}}$, $\widehat{\gamma_{\mathbb{I};i}^{(l)}}$ et $\widehat{\gamma_{\mathbb{J};j}^{(l)}}$ en résolvant les problèmes d'optimisation suivants :

$$\min_{\substack{\lambda_{\mathbb{I};1}^{(l)} \\ \lambda_{\mathbb{I};i}^{(l)} > 0, i=2, \dots, I \\ \lambda_{\mathbb{J};j}^{(l)} > 0, j=0, \dots, J}} \sum_{l=1}^L \sum_{i=1}^I \sum_{j=0}^{I-i} \left(\widehat{\lambda_{i,j}^{(l)}} - \widehat{\lambda_{\mathbb{I};i}^{(l)}} \widehat{\lambda_{\mathbb{J};j}^{(l)}} \right)^2$$

et

$$\min_{\substack{\widehat{\gamma_{\mathbb{I};1}^{(l)}}=1 \\ \widehat{\gamma_{\mathbb{I};1}^{(l)}} > 0, i=2, \dots, I \\ \widehat{\gamma_{\mathbb{J};j}^{(l)}} > 0, j=0, \dots, J}} \sum_{l=1}^L \sum_{i=1}^I \sum_{j=0}^{I-i} \left(\widehat{\gamma_{i,j}^{(l)}} - \widehat{\gamma_{\mathbb{I};i}^{(l)}} \widehat{\gamma_{\mathbb{J};j}^{(l)}} \right)^2.$$

Les problèmes sont simplifiés sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \widehat{\lambda_{\mathbb{I};1}^{(l)}} = 1 \\ \widehat{\lambda_{\mathbb{I};i}^{(l)}} = \frac{\sum_{j=0}^{I-i} \widehat{\lambda_{\mathbb{I};j}^{(l)}} \widehat{\lambda_{i,j}^{(l)}}}{\sum_{j=0}^{I-i} \left(\widehat{\lambda_{\mathbb{J};j}^{(l)}} \right)^2} & i = 2, \dots, I \\ \widehat{\lambda_{\mathbb{J};j}^{(l)}} = \frac{\sum_{i=1}^{I-j} \widehat{\lambda_{\mathbb{I};i}^{(l)}} \widehat{\lambda_{i,j}^{(l)}}}{\sum_{i=1}^{I-j} \left(\widehat{\lambda_{\mathbb{I};i}^{(l)}} \right)^2} & j = 0, \dots, J \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \widehat{\gamma_{\mathbb{I};1}^{(l)}} = 1 \\ \widehat{\gamma_{\mathbb{I};i}^{(l)}} = \frac{\sum_{j=0}^{I-i} \widehat{\gamma_{\mathbb{J};j}^{(l)}} \widehat{\gamma_{i,j}^{(l)}}}{\sum_{j=0}^{I-i} \left(\widehat{\gamma_{\mathbb{J};j}^{(l)}} \right)^2} & i = 2, \dots, I \\ \widehat{\gamma_{\mathbb{J};j}^{(l)}} = \frac{\sum_{i=1}^{I-j} \widehat{\gamma_{\mathbb{I};i}^{(l)}} \widehat{\gamma_{i,j}^{(l)}}}{\sum_{i=1}^{I-j} \left(\widehat{\gamma_{\mathbb{I};i}^{(l)}} \right)^2} & j = 0, \dots, J. \end{cases}$$

On peut résoudre les problèmes ci-dessus de façon itérative en posant $\widehat{\lambda_{\mathbb{I};i}^{(l)}}(t)$, $\widehat{\lambda_{\mathbb{J};j}^{(l)}}(t)$, $\widehat{\gamma_{\mathbb{I};i}^{(l)}}(t)$ et $\widehat{\gamma_{\mathbb{J};j}^{(l)}}(t)$, pour $t = 0, 1, \dots, T$, tels que

$$\begin{cases} \widehat{\lambda_{\mathbb{I};1}^{(l)}}(t) = 1 \\ \widehat{\lambda_{\mathbb{I};i}^{(l)}}(t) = \frac{\sum_{j=0}^{I-i} \widehat{\lambda_{\mathbb{I};j}^{(l)}}(t-1) \widehat{\lambda_{i,j}^{(l)}}}{\sum_{j=0}^{I-i} \left(\widehat{\lambda_{\mathbb{J};j}^{(l)}}(t-1) \right)^2} & i = 2, \dots, I \\ \widehat{\lambda_{\mathbb{J};j}^{(l)}}(t+1) = \frac{\sum_{i=1}^{I-j} \widehat{\lambda_{\mathbb{I};i}^{(l)}}(t) \widehat{\lambda_{i,j}^{(l)}}}{\sum_{i=1}^{I-j} \left(\widehat{\lambda_{\mathbb{I};i}^{(l)}}(t) \right)^2} & j = 0, \dots, J \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \widehat{\gamma_{\mathbb{I};1}^{(l)}}(t) = 1 \\ \widehat{\gamma_{\mathbb{I};i}^{(l)}}(t) = \frac{\sum_{j=0}^{I-i} \widehat{\gamma_{\mathbb{J};j}^{(l)}}(t-1) \widehat{\gamma_{i,j}^{(l)}}}{\sum_{j=0}^{I-i} \left(\widehat{\gamma_{\mathbb{J};j}^{(l)}}(t-1) \right)^2} & i = 2, \dots, I \\ \widehat{\gamma_{\mathbb{J};j}^{(l)}}(t+1) = \frac{\sum_{i=1}^{I-j} \widehat{\gamma_{\mathbb{I};i}^{(l)}}(t) \widehat{\gamma_{i,j}^{(l)}}}{\sum_{i=1}^{I-j} \left(\widehat{\gamma_{\mathbb{I};i}^{(l)}}(t) \right)^2} & j = 0, \dots, J. \end{cases}$$

En choisissant des $\widehat{\lambda_{\mathbb{J};j}^{(l)}}(0)$ et $\widehat{\gamma_{\mathbb{J};j}^{(l)}}(0)$ quelconques positives, par exemple $\widehat{\lambda_{\mathbb{J};j}^{(l)}}(0) = \widehat{\gamma_{\mathbb{J};j}^{(l)}}(0) = 1$ et en supposant $T \rightarrow \infty$, on obtient les estimateurs recherchés

$$\begin{aligned} \widehat{\lambda_{\mathbb{I};i}^{(l)}}(T) &= \widehat{\lambda_{\mathbb{I};i}^{(l)}} \\ \widehat{\lambda_{\mathbb{J};j}^{(l)}}(T) &= \widehat{\lambda_{\mathbb{J};j}^{(l)}} \\ \widehat{\gamma_{\mathbb{I};i}^{(l)}}(T) &= \widehat{\gamma_{\mathbb{I};i}^{(l)}} \\ \widehat{\gamma_{\mathbb{J};j}^{(l)}}(T) &= \widehat{\gamma_{\mathbb{J};j}^{(l)}}. \end{aligned}$$

5.3 Estimation des paramètres du choc commun (λ et γ)

5.3.1 Estimation des paramètres

Tout d'abord rappelons que la moyenne arithmétique, notée $\alpha_1(\cdot)$, d'un vecteur aléatoire $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_m)$, dont les composantes sont identiquement distribuées converge en probabilité vers l'espérance de n'importe quelle composante (par exemple $E[Y_1]$) lorsque $m \rightarrow \infty$. On a

$$\alpha_1(\mathbf{Y}) \xrightarrow{\mathcal{P}} E[Y_1].$$

En reprenant les suppositions concernant $\lambda_{i,j}^{(l)}$ et $\gamma_{i,j}^{(l)}$ de la section précédente, et en rappelant que les composantes du vecteur aléatoire $\left(\mathbf{X}_{\mathbb{I}\mathbb{J}}^{(l)} \mid K_{i,j}^{(l)} \right)$ sont identi-

quement distribuées, on peut déduire, pour $K_{i,j}^{(l)} \rightarrow \infty$, que

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^L \alpha_1 \left(\mathbf{X}_{i,j}^{(l)} \mid K_{i,j}^{(l)}, W_{i,j} \right) &\xrightarrow{\mathcal{P}} \sum_{l=1}^L E \left[X_{1,i,j}^{(l)} \mid W_{i,j} \right] \\ &\xrightarrow{\mathcal{P}} \sum_{l=1}^L E \left[\gamma_{i,j}^{(l)} \left(\frac{1}{\lambda_{i,j}^{(l)}} \right)^{1-p} \frac{\lambda^{1-p}}{\gamma} W_{i,j} + Z_{1,i,j}^{(l)} \mid W_{i,j} \right] \\ &\xrightarrow{\mathcal{P}} \sum_{l=1}^L \gamma_{i,j}^{(l)} \left(\frac{1}{\lambda_{i,j}^{(l)}} \right)^{1-p} \frac{\lambda^{1-p}}{\gamma} W_{i,j} + \lambda_{i,j}^{(l)}, \end{aligned}$$

où on remplace les paramètres $\lambda_{i,j}^{(l)}$, $\gamma_{i,j}^{(l)}$ et p par leurs estimateurs respectifs ($\widehat{\lambda_{i,j}^{(l)}}$, $\widehat{\gamma_{i,j}^{(l)}}$ et $\hat{p}$) calculés dans les sections précédentes. En notant que $\alpha_1 \left(\mathbf{X}_{i,j}^{(l)} \mid K_{i,j}^{(l)}, W_{i,j} \right) = \alpha_1 \left(\mathbf{X}_{i,j}^{(l)} \mid K_{i,j}^{(l)} \right)$, on peut prédire $(\lambda^{1-p}/\gamma)W_{i,j}$ comme suit :

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^L \alpha_1 \left(\mathbf{X}_{i,j}^{(l)} \mid K_{i,j}^{(l)} \right) &= \sum_{l=1}^L \left(\widehat{\gamma_{i,j}^{(l)}} \left(\frac{1}{\widehat{\lambda_{i,j}^{(l)}}} \right)^{1-\hat{p}} \left(\widehat{\frac{\lambda^{1-p}}{\gamma} W_{i,j}} \right) + \widehat{\lambda_{i,j}^{(l)}} \right) \\ \iff \left(\widehat{\frac{\lambda^{1-p}}{\gamma} W_{i,j}} \right) &= \frac{\sum_{l=1}^L \left(\alpha_1 \left(\mathbf{X}_{i,j}^{(l)} \mid K_{i,j}^{(l)} \right) - \widehat{\lambda_{i,j}^{(l)}} \right)}{\sum_{l=1}^L \widehat{\gamma_{i,j}^{(l)}} \left(\frac{1}{\widehat{\lambda_{i,j}^{(l)}}} \right)^{1-\hat{p}}}. \end{aligned}$$

On pose ensuite

$$\left(\widehat{\frac{\lambda^{1-p}}{\gamma} \mathbf{W}} \right) = \left\{ \left(\frac{\lambda^{1-p}}{\gamma} W_{i,j} \right); i = 1, \dots, I, j = 0, \dots, I - i \right\}.$$

Les variables étant indépendantes et identiquement distribuées, on constate que

$$E \left[\alpha_1 \left(\left(\widehat{\frac{\lambda^{1-p}}{\gamma} \mathbf{W}} \right) \right) \right] = E \left[\left(\frac{\lambda^{1-p}}{\gamma} W_{1,0} \right) \right] = \frac{\lambda^{2-p}}{\gamma}.$$

On définit alors le ratio

$$\delta = \frac{\lambda^{2-p}}{\gamma}$$

et on obtient par la méthode des moments $\hat{\delta}$, un estimateur sans biais pour δ :

$$\hat{\delta} = \alpha_1 \left(\left(\widehat{\frac{\lambda^{1-p}}{\gamma} \mathbf{W}} \right) \right).$$

Cette méthode nous permet seulement d'estimer δ mais ne permet pas de distinguer les paramètres λ et γ . Il est intéressant de noter que pour tous les résultats des propositions 6 et 7 du chapitre 4, λ et γ apparaissent sous forme du ratio δ . En d'autres termes, on est capable d'estimer l'espérance et la variance des réserves sans devoir estimer λ et γ séparément : il suffit de trouver un estimateur pour δ . C'est à la lumière de ce constat qu'on s'est intéressé à la distribution de $(\lambda^{1-p}/\gamma)W_{i,j}$, qui semble ne dépendre que de δ . On utilise le théorème suivant pour trouver la distribution de $(\lambda^{1-p}/\gamma)W_{i,j}$.

Théorème 4. Si $Y \sim \text{Tweedie}_p(a, b)$, $c = \frac{a^{1-p}}{b}$ et $d = \frac{a^{2-p}}{b}$, alors

$$cY \sim \begin{cases} \text{Poisson}(d), & p = 1 \\ \text{Tweedie}_p(d, d^{1-p}), & p \neq 1. \end{cases}$$

Démonstration. Pour faire cette démonstration, on utilisera la fonction génératrice des moments présentée dans le chapitre 2. Puisque dans la littérature, il est habituel de l'écrire sous forme additive, on fera appel aux transformations permettant de passer de la forme reproductive à la forme additive. Soit $Y \sim \text{Tweedie}_p^*(a^*, b^*)$ pour laquelle

$$M_Y(t) = \exp(b^*(\kappa_p(a^* + t) - \kappa_p(a^*))),$$

où

$$\kappa_p(a^*) = \begin{cases} \exp(a^*), & p = 1 \\ -\ln(-a^*), & p = 2 \\ \frac{\tau-1}{\tau} \left(\frac{a^*}{\tau-1}\right)^{\tau-1}, & p \neq (0, 1] \cup [2] \end{cases}$$

avec $\tau = (p-2)/(p-1)$. On rappelle que

$$\text{Tweedie}_p^*(a^*, b^*) = \begin{cases} \text{Tweedie}_p(b^* \exp(a^*), 1) = \text{Poisson}(b^* \exp(a^*)), & p = 1 \\ \text{Tweedie}_p\left(b^* \left(\frac{a^*}{\tau-1}\right)^{\tau-1}, (b^*)^{1-p}\right), & p \neq 1. \end{cases}$$

On distingue alors les trois cas ci-dessous.

Cas 1 : $p = 1$

$$Y \sim \text{Tweedie}_1^*(a^*, b) = \text{Quasi-Poisson}(a, b)$$

avec $a = \exp(a^*)b$ et $a^* = \ln(a) - \ln(b)$. On note que

$$c = \frac{a^{1-p}}{b} = \frac{1}{b}.$$

On a alors

$$Y/b \sim \text{Poisson}(a/b) = \text{Poisson}(d).$$

Cas 2 : $p = 2$

$$Y \sim \text{Tweedie}_2(a, b) = \text{Tweedie}_2^*(a^*, b^*)$$

avec $a = -b^*(1/a^*)$, $a^* = -1/ab$, $b = 1/b^*$ et $b^* = 1/b$. On note que

$$c = \frac{a^{1-p}}{b} = \frac{\left(-b^* \frac{1}{a^*}\right)^{1-2}}{(b^*)^{-1}} = -a^*.$$

Ainsi, on a

$$\begin{aligned} \ln(M_{cY}(t)) &= b^*(\kappa_p(a^* + ct) - \kappa_p(a^*)) \\ &= b^*(-\ln(-(a^* + (-a^*)t)) - (-\ln(-a^*))) \\ &= \frac{1}{b}(-\ln(-(-a^*)(-1 + t)) + \ln(-a^*)) \\ &= \frac{1}{b}(-\ln(-(-1 + t)) - \ln(-a^*) + \ln(-a^*)) \\ &= \frac{1}{b}(-\ln(-(-1 + t)) - (-\ln(-(-1)))) \\ &= d(\kappa_p(-1 + t) - \kappa_p(-1)). \end{aligned}$$

En notant que $\tau - 1 = \frac{1}{1-p}$, on obtient

$$\begin{aligned} cY &\sim \text{Tweedie}_2^*(-1, d) \\ &\sim \text{Tweedie}_2 \left(d \left(\frac{-1}{\frac{1}{1-2}} \right)^{\frac{1}{1-2}}, d^{1-2} \right) = \text{Tweedie}_2(d, d^{-1}). \end{aligned}$$

Cas 3 : $p \neq (0, 1] \cup [2]$

$$Y \sim \text{Tweedie}_p(a, b) = \text{Tweedie}_p^*(a^*, b^*), p \neq (0, 1] \cup [2]$$

avec

$$\begin{aligned} a &= b^* \left(\frac{a^*}{\tau - 1} \right)^{\tau-1} \\ a^* &= \frac{ba^{1-p}}{(1-p)} \\ b &= (b^*)^{1-p} \end{aligned}$$

et

$$b^* = b^{1/(1-p)}.$$

On note que

$$c = \frac{a^{1-p}}{b} = \frac{\left(b^* \left(\frac{a^*}{\tau-1} \right)^{\tau-1} \right)^{1-p}}{(b^*)^{1-p}} = \frac{a^*}{\tau-1}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\ln(M_{cY}(t)) &= b^*(\kappa_p(a^* + ct) - \kappa_p(a^*)) \\
&= b^* \left(\frac{\tau-1}{\tau} \left(\frac{a^* + \frac{a^*}{\tau-1}t}{\tau-1} \right)^\tau - \frac{\tau-1}{\tau} \left(\frac{a^*}{\tau-1} \right)^\tau \right) \\
&= b^* \left(\frac{a^*}{\tau-1} \right)^\tau \left(\frac{\tau-1}{\tau} \left(1 + \frac{1}{\tau-1}t \right)^\tau - \frac{\tau-1}{\tau} \right) \\
&= b^{\frac{1}{1-p}} \left(\frac{a^{1-p}}{b} \right)^{\frac{p-2}{p-1}} \left(\frac{\tau-1}{\tau} \left(\frac{\tau-1+t}{\tau-1} \right)^\tau - \frac{\tau-1}{\tau} \left(\frac{\tau-1}{\tau-1} \right)^\tau \right) \\
&= \frac{a^{2-p}}{b} \left(\frac{\tau-1}{\tau} \left(\frac{\tau-1+t}{\tau-1} \right)^\tau - \frac{\tau-1}{\tau} \left(\frac{\tau-1}{\tau-1} \right)^\tau \right) \\
&= d(\kappa_p(\tau-1+t) - \kappa_p(\tau-1)).
\end{aligned}$$

On obtient alors

$$\begin{aligned}
cY &\sim \text{Tweedie}_p^*(\tau-1, d), p \neq (0, 1] \cup [2] \\
&\sim \text{Tweedie}_p \left(d \left(\frac{\tau-1}{\tau-1} \right)^{\tau-1}, d^{1-p} \right) = \text{Tweedie}_p(d, d^{1-p}), p \neq (0, 1] \cup [2].
\end{aligned}$$

En conclusion, on a

$$cY \sim \begin{cases} \text{Poisson}(d), & p = 1 \\ \text{Tweedie}_p(d, d^{1-p}), & p \neq 1. \end{cases}$$

□

L'application de ce théorème permet d'obtenir directement

$$\frac{\lambda^{1-p}}{\gamma} W_{i,j} \sim \begin{cases} \text{Poisson}(\delta), & p = 1 \\ \text{Tweedie}_p(\delta, \delta^{1-p}), & p \neq 1. \end{cases}$$

5.3.2 Analyse de l'impact relatif du choc commun $W_{i,j}$ dans le montant total des paiements d'une cellule (i, j) et d'un même secteur d'activités (l) $S_{i,j}^{(l)}$

En reprenant le fait que $\frac{\lambda^{1-p}}{\gamma} W_{i,j}$ dépend seulement de p et de δ , il est intéressant d'analyser comment varie le choc commun selon ces deux paramètres. De plus, en rappelant que

$$\begin{aligned} S_{i,j}^{(l)} &= \sum_{k=1}^{K_{i,j}^{(l)}} \left(\frac{\lambda}{\lambda_{\mathbb{I};i}^{(l)} \lambda_{\mathbb{J};j}^{(l)}} \right)^{1-p} \frac{\gamma_{\mathbb{I};i}^{(l)} \gamma_{\mathbb{J};j}^{(l)}}{\gamma} W_{i,j} + Z_{k,i,j}^{(l)} \\ &= K_{i,j}^{(l)} \left(\frac{\lambda}{\lambda_{\mathbb{I};i}^{(l)} \lambda_{\mathbb{J};j}^{(l)}} \right)^{1-p} \frac{\gamma_{\mathbb{I};i}^{(l)} \gamma_{\mathbb{J};j}^{(l)}}{\gamma} W_{i,j} + \sum_{k=1}^{K_{i,j}^{(l)}} Z_{k,i,j}^{(l)}, \end{aligned}$$

on remarque que la variabilité et l'espérance de $\frac{\lambda^{1-p}}{\gamma} W_{i,j}$ a un impact plus important si le produit $\left(\frac{1}{\lambda_{\mathbb{I};i}^{(l)} \lambda_{\mathbb{J};j}^{(l)}} \right)^{1-p} \gamma_{\mathbb{I};i}^{(l)} \gamma_{\mathbb{J};j}^{(l)}$ et le nombre de paiements $K_{i,j}^{(l)}$ sont grands. En autres termes, la valeur

$$K_{i,j}^{(l)} \left(\frac{1}{\lambda_{\mathbb{I};i}^{(l)} \lambda_{\mathbb{J};j}^{(l)}} \right)^{1-p} \gamma_{\mathbb{I};i}^{(l)} \gamma_{\mathbb{J};j}^{(l)} \quad (5.5)$$

quantifie l'impact de $\frac{\lambda^{1-p}}{\gamma} W_{i,j}$ dans le calcul de la réserve de chaque cellule.

D'autre part on a constaté que la probabilité $\Pr \left[\frac{\lambda^{1-p}}{\gamma} W_{i,j} = 0 | p, \delta \right]$ illustre l'effet des paramètres p et δ sur la distribution de $W_{i,j}$ puisqu'avec ce cas particulier, on a

$$\Pr \left[\frac{\lambda^{1-p}}{\gamma} W_{i,j} = 0 | p, \delta \right] = \Pr[W_{i,j} = 0 | p, \delta].$$

De plus, considérer le cas où $W_{i,j} = 0$ implique que la valeur de la réserve d'une cellule est calculée seulement avec la somme des effets individuels des paiements. On traduit ceci avec l'équation

$$(S_{i,j}^{(l)} | W_{i,j} = 0) = \sum_{k=1}^{K_{i,j}^{(l)}} Z_{k,i,j}^{(l)}.$$

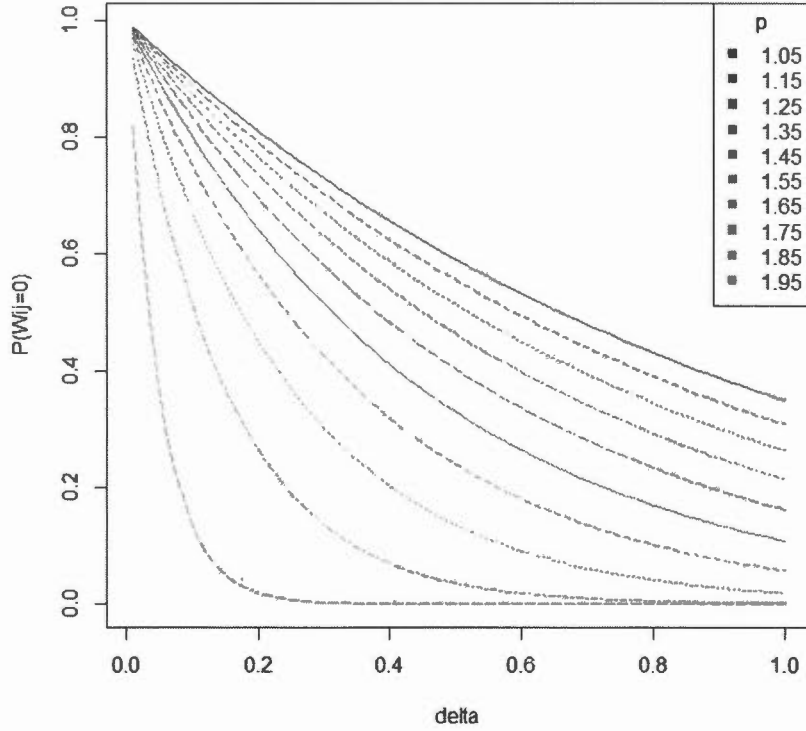


Figure 5.1 $\Pr[W_{i,j} = 0]$ en fonction de p et δ .

La figure 5.1 illustre la probabilité que le choc commun soit égal à zéro pour $p \in (1, 2)$ et $\delta \in (0, 1)$.

Le fait que la probabilité que le choc commun soit égal à zéro soit une fonction décroissante par rapport au paramètre δ et au paramètre p nous permet de conclure qu'utiliser un p «petit» ou un δ «petit» augmente $\Pr[W_{i,j} = 0|p, \delta]$. Rappelons que puisque le choc commun ne peut pas prendre de valeurs négatives, une valeur de $W_{i,j} = 0$, entraînera une réduction de la valeur de $S_{i,j}^{(l)}$. Dans tel cas $S_{i,j}^{(l)}$ sera exclusivement déterminée par les $K_{i,j}^{(l)}$ effets individuels $Z_{k,i,j}^{(l)}, k = 1, \dots, K_{i,j}^{(l)}$. C'est la valeur de l'équation (5.5), introduite dans cette section, qui déterminera

l'importance relative du choc commun dans le calcul de $S_{i,j}^{(l)}$. En conclusion, l'impact relatif du choc commun dans le montant total des paiements d'une cellule (i, j) et d'un même secteur d'activités l est déterminé par le paramètre p , le ratio δ et la valeur calculée en (5.5).

CHAPITRE VI

ILLUSTRATION AVEC DONNÉES

L'objectif de ce chapitre est d'illustrer l'utilisation du modèle proposé dans ce mémoire à l'aide d'une base de données réelles. Cette dernière contient deux secteurs d'activités (dommages corporels et matériels) en assurances automobile. Elle provient d'une compagnie d'assurances européenne regroupant des assurés de France et d'Allemagne. Par soucis de confidentialité, les données ont été légèrement transformées. Initialement, la base de données couvre les années 1999 à 2011 mais pour l'illustration, on a choisi un triangle avec cinq années pour chaque ligne d'affaires, c'est-à-dire les années 1999 à 2003. En procédant ainsi, on connaît en grande partie les réserves à prédire et on pourra comparer les résultats du modèle proposé avec les vrais montants payés par l'assureur. Le tableau 6.1 contient le nombre de sinistres déclarés à l'assureur ainsi que le nombre de polices qui leur sont associés. Dans ce tableau, on distingue aussi les sinistres par le fait qu'ils soient réglés ou ouverts. Un sinistre est considéré fermé lorsque l'assureur fait le dernier paiement résultant de celui-ci.

Tableau 6.1: Nombre de polices et nombre de sinistres par secteur d'activité.

	Polices	Sinistres	Sinistres réglés	Sinistres ouverts
Corporel	1 801	1 515	1 452	63
Matériel	43 488	52 633	52 587	46
Total	45 289	54 148	54 039	109

Malheureusement, l'exposition au risque n'est pas disponible dans la base alors elle est supposée constante pour toutes les années de survenance. Les montants ainsi que le nombre des paiements sont donnés dans les tableaux 6.2, 6.3, 6.4 et 6.5 (valeurs incrémentales). Il est à noter que les données avec $i + j > 2003$ sont supposées inconnues lors de la modélisation (données en **gras** dans les tableaux).

Tableau 6.2: Paiements totaux pour les dommages corporels.

	0	1	2	3	4
1999	174 724.11	364 496.64	146 553.92	327 539.03	23 779.67
2000	173 277.46	302 363.32	209 886.79	139 186.44	222 964.41
2001	211 537.51	282 915.89	170 028.48	115 791.17	52 718.20
2002	206 820.57	320 322.71	214 108.67	226 173.88	181 950.75
2003	201 624.36	254 520.58	143 747.13	229 326.38	189 387.24

Tableau 6.3: Paiements totaux pour les dommages matériels.

	0	1	2	3	4
1999	5 102 584.07	884 959.85	20 147.15	3 516.93	5 645.39
2000	5 589 099.97	860 527.52	19 937.03	17 443.64	10 851.46
2001	6 347 599.29	969 840.80	44 824.80	6 243.78	44 925.39
2002	6 610 172.60	1 050 649.65	33 245.69	6 909.87	843.72
2003	6 842 708.10	1 373 844.31	90 010.86	16 274.62	3 643.07

Tableau 6.4: Nombre de paiements pour les dominages corporels.

	0	1	2	3	4
1999	222	144	57	25	6
2000	213	130	51	31	23
2001	252	127	50	32	16
2002	231	139	69	32	19
2003	264	131	58	32	22

Tableau 6.5: Nombre de paiements pour les dommages matériels.

	0	1	2	3	4
1999	8 852	1 228	28	5	5
2000	9 686	1 222	26	11	5
2001	10 777	1 321	48	10	6
2002	10 869	1 381	51	13	2
2003	11 414	1 718	67	15	9

6.1 Analyse préliminaire

Dans cette analyse préliminaire, on va se concentrer sur les valeurs cumulatives (montants totaux et nombres de paiements) par cellule et par ligne d'affaires. Avec la notation définie dans les chapitres précédents, on a

$$CS_{i,j}^{(l)} = \sum_{m=0}^j S_{i,m}^{(l)}$$

$$CN_{i,j}^{(l)} = \sum_{m=0}^j N_{i,m}^{(l)}.$$

On peut observer la distribution de $CS_{i,j}^{(l)}$ et $CN_{i,j}^{(l)}$ dans les graphiques présentés aux figures 6.1, 6.2, 6.3 et 6.4.

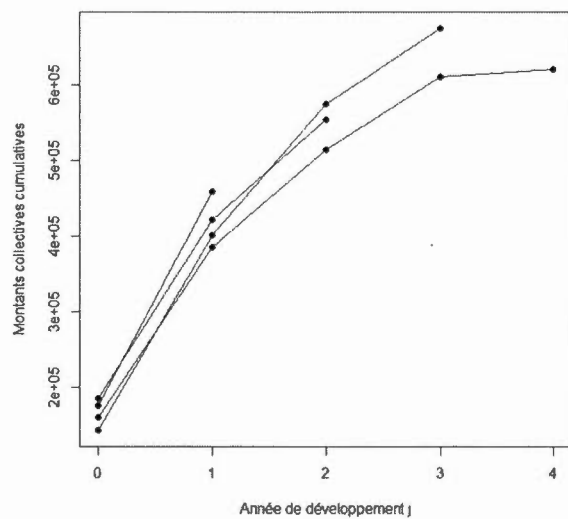


Figure 6.1 Montants collectifs cumulatifs pour les dommages corporels par année de survenance.

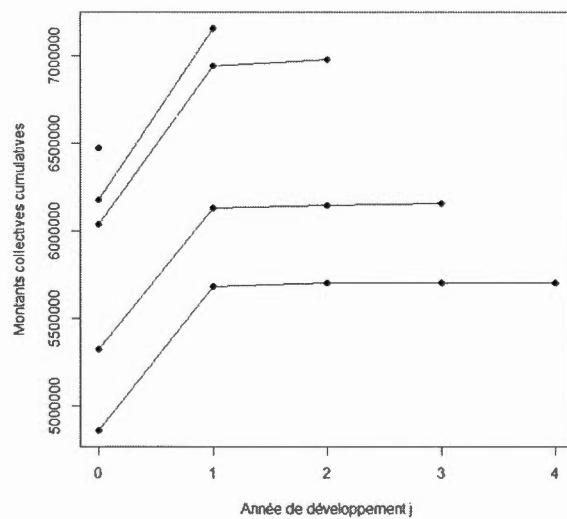


Figure 6.2 Montants collectifs cumulatifs pour les dommages matériels par année de survenance.

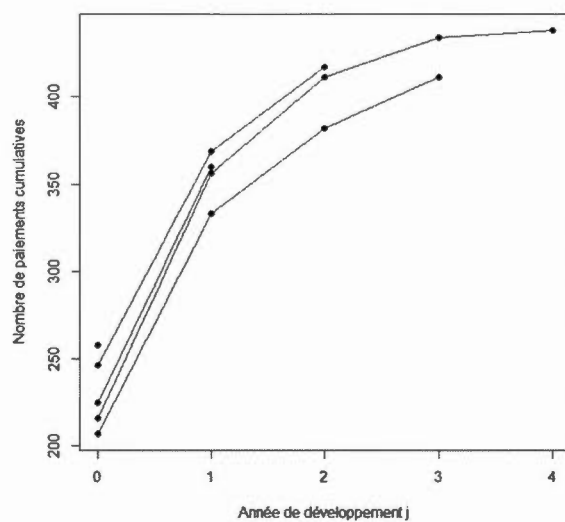


Figure 6.3 Nombre de paiements pour les dommages corporels par année de survenance.

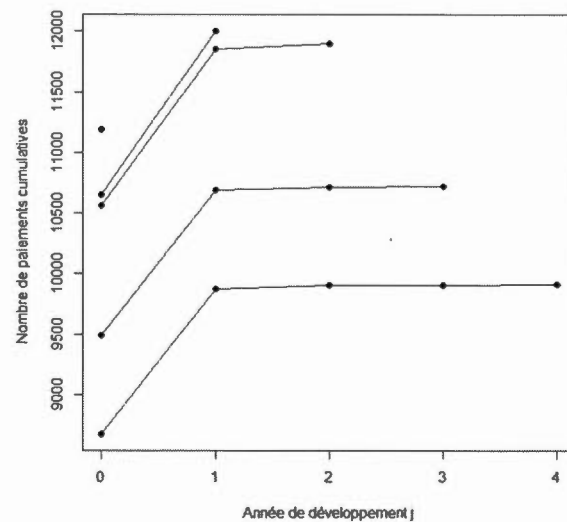


Figure 6.4 Nombre de paiements pour les dommages matériels par année de survenance.

On remarque que le développement des sinistres matériels varie davantage en fonction de l'année de survenance que celui des sinistres corporels. Le montant total payé pour des sinistres matériels dans la première année de développement ($j = 0$ sur les graphiques) représentent une part très importante du montant total payé pour les dommages matériels pour chaque année de survenance. En conséquence, on observe qu'une majorité des sinistres est payée pendant l'année de survenance ou l'année qui suit ($j = 0, 1$) et que très peu auront un développement qui dépassera deux ans. À l'inverse, les montants payés pour des dommages corporels ne sont pas aussi concentrés dans les premières années de développement.

Lors d'une analyse préliminaire de la base de données, on a constaté qu'il y avait des données particulièrement aberrantes (*outliers*) dans quelques cellules des deux triangles par rapport aux autres paiements de la cellule à laquelle ils appartiennent. C'était parfois de très petits paiements ou des valeurs anormalement élevées qui semblaient résulter d'erreurs d'encodage des données. Cette problématique de qualité des données est inhérente à l'utilisation de modèles individuels. Dans sa version actuelle, le modèle proposé dans ce mémoire est très sensible à la présence d'*outliers* puisque les paramètres des effets individuels sont calculés avec le deuxième et troisième moments centrés. Il a été décidé de modifier la base de données dans le but d'enlever les valeurs aberrantes, de façon automatique, de chaque cellule. Pour ce faire, on a enlevé les paiements inférieurs au 1^{er} ou supérieurs au 99^e quantiles des paiements de chaque cellule. Les triangles modifiés sont donnés dans les tableaux 6.6, 6.7, 6.8 et 6.9.

Tableau 6.6: Paiements totaux pour les dommages corporels modifiés par année de survenance.

	0	1	2	3	4
1999	160 936.44	225 022.65	128 755.26	96 784.14	9 981.68
2000	143 953.97	257 748.84	173 827.14	99 926.03	151 400.05
2001	186 215.85	236 150.09	131 972.74	71 377.29	32 287.41
2002	176 554.26	282 557.54	198 390.02	160 440.78	141 727.74
2003	176 823.96	217 017.00	119 858.82	158 805.04	87 045.05

Tableau 6.7: Paiements totaux pour les dommages matériels modifiés par année de survenance.

	0	1	2	3	4
1999	4 858 761.97	825 812.34	17 794.20	1 480.63	1 735.33
2000	5 321 178.17	809 830.39	17 056.88	8 035.99	1 439.91
2001	6 034 748.01	908 551.04	39 745.68	4 654.02	3 519.54
2002	6 180 476.95	978 749.63	31 166.11	5 848.76	0
2003	6 473 786.32	1 255 677.94	68 669.70	10 608.57	2 790.39

Tableau 6.8: Nombre de paiements modifiés pour les dommages corporels par année de survenance.

	0	1	2	3	4
1999	216	140	55	23	4
2000	207	126	49	29	21
2001	246	123	48	30	14
2002	225	135	67	30	17
2003	258	127	56	30	20

Tableau 6.9: Nombre de paiements modifiés pour les dommages matériels par année de survenance.

	0	1	2	3	4
1999	8 674	1 202	26	3	3
2000	9 492	1 196	24	9	3
2001	10 561	1 293	46	8	4
2002	10 651	1 353	49	11	0
2003	11 184	1 682	65	13	7

Il est important de noter qu'enlever les paiements supérieurs au 99^e quantile des paiements de chaque cellule, implique d'enlever les montants payés les plus importants de l'ensemble de la base de données. Ainsi, on risque de modifier le montant de la réserve à prédire. Pour les données non-ajustées de cet assureur, l'estimation des paramètres par la méthode des moments n'est pas adéquate à cause de la présence d'*outliers*. Les estimateurs pourraient être estimés par exemple, avec un algorithme MCMC (Avanzi, Taylor, Vu, et Wong, 2016), afin de contourner ce problème.

D'autre part, on considère que l'un des intérêts de travailler avec des données individuelles est l'accès à des méthodes d'estimation qui ne peuvent pas être utilisées avec les données collectives, notamment la méthode des moments. Afin de montrer l'avantage du modèle proposé dans ce mémoire, on fait ce réajustement artificiel, qui montre de toute façon l'efficacité de ce modèle pour une base de données sans *outliers*. Bien entendu, une extension possible serait de trouver d'autres méthodes d'estimation des paramètres plus robustes à la présence d'*outliers*, tout en profitant des caractéristiques particulières des données individuelles.

6.2 Prédiction du nombre de sinistres encourus non déclarés

Comme expliqué dans l'article de (Pigeon, Antonio, et Denuit, 2013) et dans l'introduction de ce mémoire, on doit faire la distinction entre les sinistres IBNR (*Incurred But Not Reported*) et RBNS/RBNP (*Reported But Not Settled, Reported But Not Paid*) lors de la modélisation des réserves. Une réclamation est dite IBNR lorsque l'accident est survenu mais l'assuré n'a pas encore déclaré le sinistre à la compagnie d'assurances : l'assureur est responsable du montant de la réclamation mais ignore l'existence de la réclamation. Une réclamation est dite RBNP lorsque l'accident est déclaré à l'assureur mais qu'aucun paiement n'a été effectué. Entre la date du premier paiement et la date de fermeture du dossier, la réclamation est dite RBNS : l'assureur est au courant de son existence, mais le montant final est encore inconnu.

Pour faire cette distinction, on considère un modèle stochastique permettant de prendre en compte le temps entre la survenance des sinistres et leur déclaration à l'assureur. Pour chacun des triangles, on modélise ce délai à l'aide d'une distribution exponentielle. Cette hypothèse, simple, est commune dans la littérature et est généralement représentative de la réalité. On définit la variable aléatoire $T_{m,i}^{(l)}$ qui représente le temps de déclaration du sinistre m de l'année de survenance i pour le secteur l , avec $m = 1, \dots, M_i^{(l)}$, où $M_i^{(l)}$ est le nombre de sinistres provenant de l'année de survenance i pour le secteur l . On a alors

$$T_{m,i}^{(l)} \sim \text{Exp}(\xi^{(l)}),$$

où on obtient, par la méthode de maximum de vraisemblance, $\widehat{\xi^{(1)}} = 2.219081$ et $\widehat{\xi^{(2)}} = 3.298678$.

On définit également la variable aléatoire $K_i^{(l)}$ qui représente le nombre de sinistres du secteur d'activité l pour la période de survenance i et $\omega_i^{(l)}$ qui représente l'exposition au risque correspondante (et supposée connue). L'article de (Pigeon,

Antonio, et Denuit, 2013) propose de travailler avec une distribution Poisson pour modéliser le nombre de sinistres encourus. En suivant cette approche, on propose

$$K_i^{(l)} \sim \text{Poisson}(\theta^{(l)} \omega_i^{(l)}).$$

Cette approche permet également d'obtenir un modèle pour $K_i^{*(l)}$, le nombre de sinistres encourus mais non déclarés pour la période de survenance i du secteur l , on modifiant (ou filtrant) la distribution de $K_i^{(l)}$ comme suit :

$$K_i^{*(l)} \sim \text{Poisson}(\theta^{(l)} \omega_i^{(l)} \Pr[T_{1,1}^{(l)} > t_i]),$$

où l'évaluation se fait t_i période(s) après l'année de survenance i . Dans les triangles de la base de données, ceci est traduit par : $t_i = I + 1 - i, i = 2, \dots, I$. Le tableau 6.10 contient les valeurs de $\Pr[T_{1,1}^{(l)} > t_i], i = 2, \dots, I$, c'est-à-dire la probabilité que le délai de déclaration dépasse la date d'évaluation, ou encore, la probabilité qu'un sinistre soit IBNR au moment de l'évaluation des réserves. Il est important de noter que les réserves $R_1^{(l)}, l = 1, 2$ ne sont pas calculées. On a supposé que l'ensemble des paiements après la survenance d'un sinistre seront faits après 4 ans, ainsi tous les paiements ayant cette année de survenance sont supposés connus, donc $R_1^{(l)} = 0, l = 1, 2$.

Tableau 6.10: Probabilité que le délai de déclaration dépasse la date d'évaluation t_i .

année de survenance	ligne d'affaires	
	dommages	dommages
	corporels	matériels
2	0.0001396567	0.0000018604
3	0.0012846841	0.0000503741
4	0.0118176437	0.0013639701
5	0.1087089865	0.0369319655

Tel que mentionné précédemment, la base de données n'indique pas l'exposition au risque alors pour l'illustration. On va supposer qu'elle est constante, c'est-à-dire que $\omega_i = 1, \forall i = 1, \dots, I$. Ainsi, avec la méthode de maximum de vraisemblance, on obtient que $\widehat{\theta^{(1)}} = 143.8562$ et $\widehat{\theta^{(2)}} = 4\,578.33$. Pour les prédictions, on s'intéresse aux espérances des $K_i^{*(l)}$ présentées au tableau 6.11.

Tableau 6.11: Espérance du nombre de paiements encourus mais non reportés.

année de survenance	ligne d'affaires	
	dommages corporels	dommages matériels
2	0.02	0.01
3	0.18	0.23
4	1.70	6.24
5	15.64	169.09

On constate que le nombre de paiements $K_i^{*(l)}$ est négligeable pour les années de survenance $i = 2$ et 3 . Il suffit donc d'ajouter, après la modélisation de la fréquence et de la sévérité, des paiements pour les années de survenance $i = 4$ et 5 . Les paiements de ces années vont être répartis dans les années de développement en fonction du délai de déclaration. En arrondissant les espérances, on obtient les résultats présentées dans les tableaux 6.12 et 6.13.

Tableau 6.12: Répartition du nombre de paiements par année de survenance pour les dommages corporels encourus mais non déclarés.

année de survenance	années de développement			
	$1 < T_{m,i}^{(1)} \leq 2$	$2 < T_{m,i}^{(1)} \leq 3$	$3 < T_{m,i}^{(1)} \leq 4$	$4 < T_{m,i}^{(1)}$
	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$	$j = 4$
4		2	0	0
5	14	2	0	0

Tableau 6.13: Répartition du nombre de paiements par année de survenance pour les dommages matériels encourus mais non déclarés.

année de survenance	années de développement			
	$1 < T_{m,i}^{(2)} \leq 2$	$2 < T_{m,i}^{(2)} \leq 3$	$3 < T_{m,i}^{(2)} \leq 4$	$4 < T_{m,i}^{(2)}$
	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$	$j = 4$
4		6	0	0
5	163	6	0	0

6.3 Estimation des paramètres

6.3.1 Paramètres du modèle pour la fréquence

Pour la fréquence, on propose d'utiliser le modèle Quasi-Poisson présenté dans le chapitre 3. Il est important de rappeler que ce modèle suppose l'indépendance de la fréquence des paiements entre les secteurs d'activités. Dans un projet futur, il pourrait être intéressant de développer une approche qui permettrait la modélisation cette dépendance. Les estimations des paramètres $\widehat{\eta_{\mathbf{I},i}^{(l)}}$ et $\widehat{\eta_{\mathbf{J},j}^{(l)}}$ obtenues avec la méthode des moindres carrés sont présentées au tableau 6.14.

Tableau 6.14: Estimation des paramètres de la fréquence des paiements.

	dommages corporels $l = 1$	dommages matériels $l = 2$		dommages corporels $l = 1$	dommages matériels $l = 2$
$\widehat{\eta_{\mathbb{I};1}}^{(l)}$	1.0000	1.0000	$\widehat{\eta_{\mathbb{J};0}}^{(l)}$	224.5266	8 749.2958
$\widehat{\eta_{\mathbb{I};2}}^{(l)}$	0.9470	1.0824	$\widehat{\eta_{\mathbb{J};1}}^{(l)}$	131.6017	1 120.7133
$\widehat{\eta_{\mathbb{I};3}}^{(l)}$	1.0238	1.2021	$\widehat{\eta_{\mathbb{J};2}}^{(l)}$	51.1640	29.2282
$\widehat{\eta_{\mathbb{I};4}}^{(l)}$	1.0109	1.2162	$\widehat{\eta_{\mathbb{J};3}}^{(l)}$	26.7077	5.7626
$\widehat{\eta_{\mathbb{I};5}}^{(l)}$	1.1491	1.2783	$\widehat{\eta_{\mathbb{J};4}}^{(l)}$	4.0000	3.0000
$\widehat{\phi}^{(l)}$	0.8237	2.8976			

6.3.2 Paramètres du modèle pour la sévérité

Pour l'estimation du paramètre p , on contraint la valeur de $\hat{p}$ à être comprise dans l'intervalle $[1, 2]$ afin d'obtenir un modèle qui s'interprète comme

- une distribution Poisson, si $p = 1$,
- une distribution composée Poisson-gamma, si $1 < p < 2$,
- une distribution gamma, si $p = 2$,

Dans un projet futur, il pourrait être intéressant d'explorer des modèles (et des techniques d'estimation) qui permettraient des valeurs de p supérieures à 2. Sous cette contrainte, on cherche la valeur de $\hat{p}$ qui maximise la vraisemblance du modèle décrit à la section 5.1. Pour le reste des paramètres du modèle pour la sévérité, on utilise la technique décrite au chapitre 5. Les estimations $\hat{p}$, $\widehat{\lambda_{\mathbb{I};i}}^{(l)}$, $\widehat{\lambda_{\mathbb{J};j}}^{(l)}$, $\widehat{\gamma_{\mathbb{I};i}}^{(l)}$, $\widehat{\gamma_{\mathbb{J};j}}^{(l)}$ et $\widehat{\delta}$ sont présentées au tableau 6.15

Tableau 6.15: Estimations des paramètres pour la sévérité des paiements.

	dommages corporels $l = 1$	dommages matériels $l = 2$		dommages corporels $l = 1$	dommages matériels $l = 2$
$\widehat{\lambda_{I;1}^{(l)}}$	1.0000	1.0000	$\widehat{\lambda_{J;0}^{(l)}}$	426.4661	320.0489
$\widehat{\lambda_{I;2}^{(l)}}$	0.8534	0.6338	$\widehat{\lambda_{J;1}^{(l)}}$	2 007.5232	402.8286
$\widehat{\lambda_{I;3}^{(l)}}$	0.7259	1.1521	$\widehat{\lambda_{J;2}^{(l)}}$	3 954.2221	533.5088
$\widehat{\lambda_{I;4}^{(l)}}$	1.3335	0.9417	$\widehat{\lambda_{J;3}^{(l)}}$	5 381.4003	1 902.6340
$\widehat{\lambda_{I;5}^{(l)}}$	0.9466	1.0094	$\widehat{\lambda_{J;4}^{(l)}}$	3 486.8902	512.2634
$\widehat{\gamma_{I;1}^{(l)}}$	1.0000	1.0000	$\widehat{\gamma_{J;0}^{(l)}}$	2.7462	0.6868
$\widehat{\gamma_{I;2}^{(l)}}$	0.8248	0.7780	$\widehat{\gamma_{J;1}^{(l)}}$	2.2431	0.9582
$\widehat{\gamma_{I;3}^{(l)}}$	0.9930	1.0550	$\widehat{\gamma_{J;2}^{(l)}}$	2.1622	0.8651
$\widehat{\gamma_{I;4}^{(l)}}$	1.4330	1.3625	$\widehat{\gamma_{J;3}^{(l)}}$	1.5884	0.3212
$\widehat{\gamma_{I;5}^{(l)}}$	1.1438	1.2407	$\widehat{\gamma_{J;4}^{(l)}}$	0.7532	0.6972
$\widehat{\delta}$	0.0708		$\widehat{p}$	2	

6.4 Prédiction des réserves

Les tableaux 6.16 et 6.17 résument les prévisions des coûts totaux par année d'accident pour chaque secteur d'activité. Les résultats représentés comprennent l'écart-type et la moyenne des réserves de chaque année de survenance ainsi que l'ensemble. Ces valeurs ont été obtenues en utilisant les formules de la proposition

7 (chapitre 4). Les moyennes des réserves sont calculées avec

$$\begin{aligned}\widehat{R}_i^{(l)} &= \sum_{j=I-i+1}^J \widehat{\eta_{\mathbb{I};i}^{(l)}} \widehat{\eta_{\mathbb{J};j}^{(l)}} \left(\widehat{\delta} \left(\frac{1}{\widehat{\lambda_{\mathbb{I};i}^{(l)}} \widehat{\lambda_{\mathbb{J};j}^{(l)}}} \right)^{1-\widehat{p}} \widehat{\gamma_{\mathbb{I};i}^{(l)}} \widehat{\gamma_{\mathbb{J};j}^{(l)}} + \widehat{\lambda_{\mathbb{I};i}^{(l)}} \widehat{\lambda_{\mathbb{J};j}^{(l)}} \right), \\ \widehat{R}_i &= \sum_{l=1}^L \widehat{R}_i^{(l)}, \\ \widehat{R} &= \sum_{i=2}^I \widehat{R}_i.\end{aligned}$$

Les variances sont calculées avec

$$\begin{aligned}\widehat{\text{Var}}[R_i^{(l)}] &= \sum_{j=I-i+1}^J \left[\widehat{\delta} \left(\left(\frac{1}{\widehat{\lambda_{\mathbb{I};i}^{(l)}} \widehat{\lambda_{\mathbb{J};j}^{(l)}}} \right)^{1-\widehat{p}} \widehat{\gamma_{\mathbb{I};i}^{(l)}} \widehat{\gamma_{\mathbb{J};j}^{(l)}} \right)^2 \left(\widehat{\phi^{(l)}} \widehat{\eta_{\mathbb{I};i}^{(l)}} \widehat{\eta_{\mathbb{J};j}^{(l)}} + \left(\widehat{\eta_{\mathbb{I};i}^{(l)}} \widehat{\eta_{\mathbb{J};j}^{(l)}} \right)^2 \right) \right. \\ &\quad \left. + \widehat{\gamma_{\mathbb{I};i}^{(l)}} \widehat{\gamma_{\mathbb{J};j}^{(l)}} \left(\widehat{\lambda_{\mathbb{I};i}^{(l)}} \widehat{\lambda_{\mathbb{J};j}^{(l)}} \right)^{\widehat{p}} \widehat{\eta_{\mathbb{I};i}^{(l)}} \widehat{\eta_{\mathbb{J};j}^{(l)}} \right. \\ &\quad \left. + \left(\widehat{\delta} \left(\frac{1}{\widehat{\lambda_{\mathbb{I};i}^{(l)}} \widehat{\lambda_{\mathbb{J};j}^{(l)}}} \right)^{1-\widehat{p}} \widehat{\gamma_{\mathbb{I};i}^{(l)}} \widehat{\gamma_{\mathbb{J};j}^{(l)}} + \widehat{\lambda_{\mathbb{I};i}^{(l)}} \widehat{\lambda_{\mathbb{J};j}^{(l)}} \right)^2 \widehat{\phi^{(l)}} \widehat{\eta_{\mathbb{I};i}^{(l)}} \widehat{\eta_{\mathbb{J};j}^{(l)}} \right],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\widehat{\text{Var}}[R_i] = & \sum_{j=I-i+1}^J \left[\widehat{\delta} \left\{ \sum_{l=1}^L \left(\left(\frac{1}{\widehat{\lambda_{\mathbb{I};i}^{(l)}} \widehat{\lambda_{\mathbb{J};j}^{(l)}}} \right)^{1-\widehat{p}} \widehat{\gamma_{\mathbb{I};i}^{(l)}} \widehat{\gamma_{\mathbb{J};j}^{(l)}} \right)^2 \right. \right. \\
& \cdot \left(\widehat{\phi^{(l)}} \widehat{\eta_{\mathbb{I};i}^{(l)}} \widehat{\eta_{\mathbb{J};j}^{(l)}} + \left(\widehat{\eta_{\mathbb{I};i}^{(l)}} \widehat{\eta_{\mathbb{J};j}^{(l)}} \right)^2 \right) \\
& + 2 \sum_{l=1}^{L-1} \sum_{m=l+1}^L \left(\frac{1}{\widehat{\lambda_{\mathbb{I};i}^{(l)}} \widehat{\lambda_{\mathbb{J};j}^{(l)}} \widehat{\lambda_{\mathbb{I};i}^{(m)}} \widehat{\lambda_{\mathbb{J};j}^{(m)}}} \right)^{1-\widehat{p}} \widehat{\gamma_{\mathbb{I};i}^{(l)}} \widehat{\gamma_{\mathbb{J};j}^{(l)}} \widehat{\gamma_{\mathbb{I};i}^{(m)}} \widehat{\gamma_{\mathbb{J};j}^{(m)}} \widehat{\eta_{\mathbb{I};i}^{(l)}} \widehat{\eta_{\mathbb{J};j}^{(l)}} \widehat{\eta_{\mathbb{I};i}^{(m)}} \widehat{\eta_{\mathbb{J};j}^{(m)}} \left. \right\} \\
& + \sum_{l=1}^L \widehat{\eta_{\mathbb{I};i}^{(l)}} \widehat{\eta_{\mathbb{J};j}^{(l)}} \widehat{\gamma_{\mathbb{I};i}^{(l)}} \widehat{\gamma_{\mathbb{J};j}^{(l)}} \left(\widehat{\lambda_{\mathbb{I};i}^{(l)}} \widehat{\lambda_{\mathbb{J};j}^{(l)}} \right)^{\widehat{p}} \\
& + \sum_{l=1}^L \widehat{\phi^{(l)}} \widehat{\eta_{\mathbb{I};i}^{(l)}} \widehat{\eta_{\mathbb{J};j}^{(l)}} \left[\widehat{\delta} \left(\frac{1}{\widehat{\lambda_{\mathbb{I};i}^{(l)}} \widehat{\lambda_{\mathbb{J};j}^{(l)}}} \right)^{1-\widehat{p}} \widehat{\gamma_{\mathbb{I};i}^{(l)}} \widehat{\gamma_{\mathbb{J};j}^{(l)}} + \widehat{\lambda_{\mathbb{I};i}^{(l)}} \widehat{\lambda_{\mathbb{J};j}^{(l)}} \right)^2 \left. \right], \\
\widehat{\text{Var}}[R] = & \sum_{i=2}^I \widehat{\text{Var}}[R_i].
\end{aligned}$$

Tableau 6.16: Espérances des réserves par année de survénance.

année de survenance	dommages corporels	dommages matériels	portefeuille
2	11 767.39	1 094.78	12 862.18
3	129 659.41	1 7789.15	147 448.56
4	577 786.91	34 174.32	611 961.23
5	790 765.26	669 840.59	1 460 605.85
Total	1 509 978.98	722 898.84	2 232 877.82

Tableau 6.17: Écart-type des réserves par année de survenance.

année de survenance	dominages corporels	dommages matériels	portefeuille
2	7 427.90	1 139.73	7 552.47
3	56 587.83	10 970.27	58 711.63
4	276 953.37	12 694.95	282 368.22
5	270 632.04	187 877.19	427 491.17
Total	391 410.56	188 628.32	515 736.96

On constate que

$$\sqrt{\widehat{\text{Var}}[R^{(1)}] + \widehat{\text{Var}}[R^{(2)}]} \approx 434\,492 < 515\,737 = \sqrt{\widehat{\text{Var}}[R]},$$

ce qui semble indiquer que les deux bases de données sont corrélées positivement.

On est capables d'estimer $\widehat{\text{Cov}}[R^{(1)}, R^{(2)}]$

$$\begin{aligned}
\widehat{\text{Var}}[R] &= \widehat{\text{Var}}[R^{(1)} + R^{(2)}] \\
&= \widehat{\text{Var}}[R^{(1)}] + \widehat{\text{Var}}[R^{(2)}] + 2\widehat{\text{Cov}}[R^{(1)}, R^{(2)}] \\
\rightarrow \widehat{\text{Cov}}[R^{(1)}, R^{(2)}] &= \frac{\widehat{\text{Var}}[R] - \widehat{\text{Var}}[R^{(1)}] - \widehat{\text{Var}}[R^{(2)}]}{2} \\
&= \frac{515736.96^2 - 391410.56^2 - 188628.32^2}{2} \\
&= 38600871162.
\end{aligned}$$

Par la suite on peut estimer

$$\begin{aligned}
\widehat{\rho}_{R^{(1)}, R^{(2)}} &= \frac{\widehat{\text{Cov}}[R^{(1)}, R^{(2)}]}{\sqrt{\widehat{\text{Var}}[R^{(1)}]}\sqrt{\widehat{\text{Var}}[R^{(2)}]}} \\
&= \frac{38600871162}{391410.56 \times 188628.32} \\
&= 0.5228266.
\end{aligned}$$

Ceci n'est pas surprenant étant donné que le modèle proposé dans ce mémoire met l'accent sur la dépendance entre les paiements individuels réalisés à la même période de développement parmi différentes lignes d'affaires. N'ayant pas accès à d'autres bases de données comprenant plusieurs lignes d'affaires et des données individuelles, il n'est pas possible de mettre ce résultat en perspective avec d'autres résultats.

En utilisant les paramètres prédits, il est possible de générer des simulations (100 000 dans cet exemple) et ainsi d'obtenir des distributions prédictives pour les réserves de chaque secteur d'activité et pour l'ensemble du portefeuille. Ces fonctions de densité sont représentées à la figure 6.4. On résume les estimations des prévisions des réserves dans le tableau 6.18. Les résultats représentés comprennent la moyenne, la variance et les valeurs au risque (*Value-at-risk*) pour les niveaux 75%, 95% et 99%.

Tableau 6.18: Valeurs prédites obtenues à partir de simulations.

ligne d'affaires (<i>l</i>)	Moyenne	Écart-type	Valeur au risque		
			75%	95%	99%
1	1 509 165	395 729	1 599 916	2 228 672	3 083 633
1 (théorique)	(1 509 979)	(391 411)			
2	723 196	185 632	719 964	959 677	1 588 538
2 (théorique)	(722 899)	(188 628)			
Total	2 232 361	516 212	2 311 728	3 128 352	4 420 725
Total (théorique)	(2 232 877)	(515 737)			
Observé	2 722 724				

Ceci illustre un des avantages du modèle proposé : le fait de pouvoir obtenir les estimations de la variance et de l'espérance des réserves sous forme fermée (tableaux 6.16 et 6.17). Dans le tableau 6.18, on remarque que les valeurs théoriques

(entre parenthèses) sont très proches des valeurs simulées. D'autre, part on note que les valeurs au risque avec niveaux 95% pour les réserves prédites par le modèle sont supérieures aux montants totaux observés. En autres mots, en utilisant le 95^e quantile de la distribution de la réserve prédite par le modèle, l'assureur aurait été capable de combler les paiements futurs pour cette base de données.

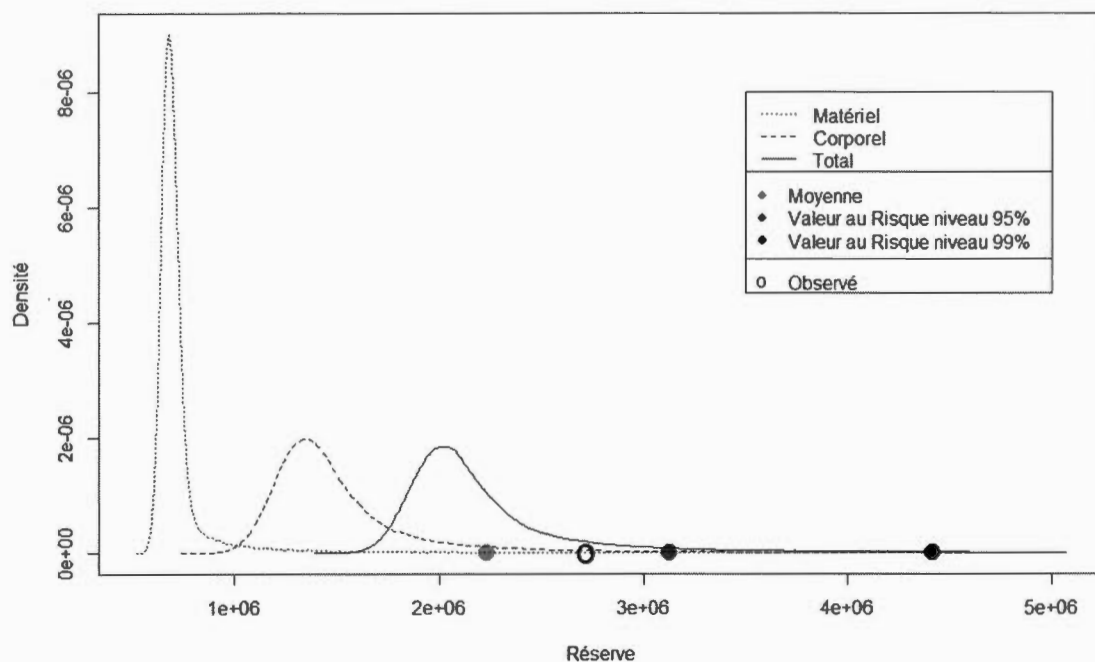


Figure 6.5 Distributions prédictives pour la réserve par secteur d'activité et pour le portefeuille complet.

6.4.1 Comparaison avec d'autres modèles

On va comparer les résultats obtenus avec les résultats obtenus pour d'autres modèles souvent utilisés dans la littérature et/ou en pratique. Notamment on va utiliser les modèles collectifs introduits à la section 1.2, c'est-à-dire le modèle de

Mack, le modèle Quasi-Poisson et le modèle gamma, pour chaque ligne d'affaires de façon indépendante. Étant donné que le modèle de Mack est un modèle non-paramétrique on ne peut pas obtenir des quantiles, et surtout on ne peut pas faire des simulations. Afin de contourner ce problème, on propose la procédure en deux étapes décrite par (England et Verrall, 2002).

On fera également la comparaison avec un modèle Tweedie pour les données individuelles sans choc commun, c'est-à-dire un modèle où les paiements $X_{k,i,j}^{(l)}$ ne vont dépendre que d'un «effet individuel». On va se servir du modèle de la fréquence déjà utilisé et dont les estimateurs ont été calculés à la sous-section 6.3.1. Afin de comparer les modèles Tweedie individuels, on utilisera le même estimateur du paramètre de puissance p (c'est-à-dire $\hat{p} = 2$). Les paiements individuels sont tels que

$$X_{k,i,j}^{(l)} \sim \text{Tweedie}_{\hat{p}} \left(\zeta_{\mathbb{I};i}^{(l)} \zeta_{\mathbb{J};j}^{(l)}, \xi_{\mathbb{I};i}^{(l)} \xi_{\mathbb{J};j}^{(l)} \right). \quad (6.1)$$

En posant $\zeta_{i,j}^{(l)} = \zeta_{\mathbb{I};i}^{(l)} \cdot \zeta_{\mathbb{J};j}^{(l)}$ et $\xi_{i,j}^{(l)} = \xi_{\mathbb{I};i}^{(l)} \cdot \xi_{\mathbb{J};j}^{(l)}$, on est capable de trouver les estimateurs $\widehat{\zeta_{i,j}^{(l)}}$ et $\widehat{\xi_{i,j}^{(l)}}$ par la méthode des moments en utilisant la moyenne et la variance empiriques de $\mathbf{X}_{i,j}^{(l)}$:

$$\begin{aligned} & \begin{cases} \alpha_1 \left(\mathbf{X}_{i,j}^{(l)} \right) = \zeta_{i,j}^{(l)} \\ \tilde{m}_2 \left(\mathbf{X}_{i,j}^{(l)} \right) = \xi_{i,j}^{(l)} \left(\zeta_{i,j}^{(l)} \right)^p \end{cases} \\ \iff & \begin{cases} \zeta_{i,j}^{(l)} = \alpha_1 \left(\mathbf{X}_{i,j}^{(l)} \right) \\ \xi_{i,j}^{(l)} = \frac{\tilde{m}_2 \left(\mathbf{X}_{i,j}^{(l)} \right)}{\left(\alpha_1 \left(\mathbf{X}_{i,j}^{(l)} \right) \right)^p}. \end{cases} \end{aligned}$$

On peut par la suite estimer les paramètres $\zeta_{\mathbb{I};i}^{(l)}$, $\zeta_{\mathbb{J};j}^{(l)}$, $\xi_{\mathbb{I};i}^{(l)}$ et $\xi_{\mathbb{J};j}^{(l)}$ par la méthode des moindres carrés introduite à la Sous-section 5.2.2.

Le tableau 6.19 contient la moyenne, la variance, et les valeurs au risque pour les niveaux 75%, 95% et 99% des réserves totales prédites par les différents modèles.

La figure 6.6 contient les distributions prédictives des quatre modèles suggérés. Ces valeurs sont calculées de façon empirique avec 100 000 simulations pour chaque modèle.

Tableau 6.19: Résumé des réserves totales.

Modèle	Moyenne	Écart-type	Valeur au risque		
			75%	95%	99%
Tweedie avec choc commun	2 232 360.88	516 212.34	2 311 728.36	3 128 351.89	4 420 724.92
Mack	2 059 931.52	127 444.06	2 175 442.07	2 364 096.19	2 501 891.03
Quasi-Poisson	2 058 237.01	75 617.25	2 108 792.25	2 184 498.10	2 238 081.00
Gamma	2 062 286.72	441 966.02	2 317 044.71	2 880 247.18	3 348 670.59
Tweedie sans choc commun	2 065 555.22	110 895.59	2 138 583.27	2 251 663.11	2 335 302.00
Observé	2 722 724.14				

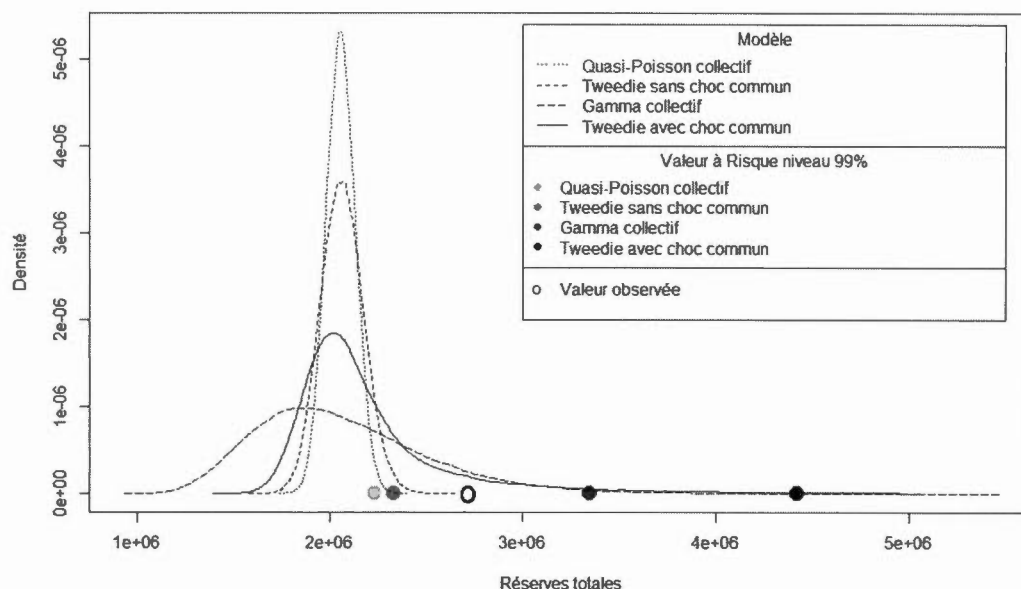


Figure 6.6 Distributions prédictives des réserves totales.

Parmi les prédictions des réserves du tableau 6.19, seulement les valeurs en **gras** sont suffisantes pour satisfaire les coûts totaux observés. Le modèle principal de ce mémoire a un écart-type important par rapport à ceux des autres modèles mais c'est grâce à cette variabilité que les montants de réserves prédits sont suffisants. Dans le cadre des données collectives, le modèle gamma est plus intéressant que le modèle Quasi-Poisson car les réserves prédites par celui-ci ne sont pas suffisantes. À cause de sa fonction de variance $V\left(\mu_{i,j}^{(l)}\right) = \left(\mu_{i,j}^{(l)}\right)^2$, le modèle gamma a souvent un écart-type plus important que celui du modèle Poisson qui a comme fonction de variance $V\left(\mu_{i,j}^{(l)}\right) = \mu_{i,j}^{(l)}$. Dans cet exemple, on voit l'intérêt à travailler avec une distribution Tweedie qui grâce à son paramètre de puissance p est très flexible et peut adapter sa fonction de variance $V\left(\mu_{i,j}^{(l)}\right) = \left(\mu_{i,j}^{(l)}\right)^p$ aux données. Dans le cadre des données individuelles, lier les deux bases de données avec un choc commun change complètement les résultats obtenus. Dans cet exemple particulier, le

modèle Tweedie individuel avec choc commun nous procure des meilleurs résultats que celui qui n'en a pas.

CONCLUSION

Dans ce mémoire, on a adapté le modèle proposé par (Avanzi, Taylor, Vu, et Wong, 2016) en utilisant une approche individuelle, notamment pour modéliser la dépendance de la sévérité des paiements individuels parmi les lignes d'affaires d'une compagnie. Ce nouveau modèle conserve les avantages de l'utilisation d'un modèle Tweedie avec choc commun collectif. Notamment la flexibilité due à la grande gamme de distributions qui font partie de cette famille et le fait que l'espérance et la variance soient calculables théoriquement (qui permet de faire un suivi lors des simulations des réserves). L'avantage principal du modèle proposé dans ce mémoire est que la dépendance entre la sévérité et la fréquence des paiements est étudiée séparément. Ceci rajoute encore plus de flexibilité à l'étude de la dépendance entre les lignes d'affaires. En particuliers, lors de la modélisation de la sévérité des paiements le fait qu'on ait plus de données par cellule nous permet d'utiliser la méthode des moments qui prend un temps de computation considérablement moins important que lorsque que l'on travaille avec des données collectives où l'on doit passer par des méthodes de Chaines de Markov Monte-Carlo (MCMC).

Une des problématiques observées lors de l'application du modèle à des vraies données est qu'il est sensible à la présence d'*outliers*. Malgré ceci, en modifiant artificiellement la base de données utilisée pour enlever ces *outliers*, on a constaté que le modèle donnait des résultats plus performants que ceux obtenus avec des méthodes collectives traditionnelles, puisque la réserve calculée permet de combler les paiements futures connus à l'avance. Ainsi, il semblerait que le modèle proposé est performant pour des bases de données sans *outliers*.

Le modèle proposé peut avoir plusieurs extensions en plus de celles déjà mentionnées dans le texte. En particulier, une étude plus approfondie pour modéliser la dépendance de la fréquence qui n'est pas du tout couverte dans cette première version du modèle. De plus, lors de la modélisation de la sévérité, on a choisi d'introduire un choc commun par cellule, mais on pourrait envisager d'autres structures, par année de développement, de survenance ou de calendrier.

L'étude de la dépendance entre les paiements individuels parmi différentes lignes d'affaires n'est pas encore très développée dans la littérature mais ce mémoire montre que cette approche a du potentiel.

RÉFÉRENCES

- Abdallah, A., Boucher, J. -P., et Cossette, H. (2015). Modeling dependence between loss triangles with hierarchical Archimedean copulas. *Astin Bulletin*, 45(03), 577-599.
- Abdallah, A., Boucher, J. -P., Cossette, H., et Trufin, J. (2016). Sarmanov family of bivariate distributions for multivariate loss reserving analysis. *North American Actuarial Journal*, 20(2), 184-200.
- Alai, D. H., et Wüthrich, M. V. (2009). Taylor approximations for model uncertainty within the Tweedie exponential dispersion family. *Astin Bulletin*, 39(02), 453-477.
- Alai, D. H., Landsman, Z., et Sherris, M. (2016). Multivariate Tweedie lifetimes : The impact of dependence. *Scandinavian Actuarial Journal*, 2016(8), 692-712.
- Arjas, E. (1989). The claims reserving problem in non-life insurance : Some structural ideas. *Astin Bulletin*, 19(2), 139-152.
- Avanzi, B., Taylor, G., Vu, P. A., et Wong, B. (2016). Stochastic loss reserving with dependence : A flexible multivariate Tweedie approach. *Insurance : Mathematics and Economics*, 71, 63-78.
- Brehm, P. (2002, September). Correlation and the aggregation of unpaid loss distributions. In *CAS Forum* (Vol. 2, pp. 1-23).
- Charpentier, A., et Pigeon, M. (2016). Macro vs. Micro Methods in Non-Life Claims Reserving (an Econometric Perspective). *Risks*, 4(2), 12.
- De Jong, P. (2012). Modeling dependence between loss triangles. *North American Actuarial Journal*, 16(1), 74-86.
- Drieskens, D., Henry, M., Walhin, J. -F., et Wielandts, J. (2012). Stochastic projection for large individual losses. *Scandinavian Actuarial Journal*, 2012(1), 1-39.
- England, P. D., et Verrall, R. J. (2002). Stochastic claims reserving in general insurance. *British Actuarial Journal*, 8(03), 443-518.

- Furman, E., et Landsman, Z. (2010). Multivariate Tweedie distributions and some related capital-at-risk analyses. *Insurance : Mathematics and Economics*, 46(2), 351-361.
- Hesselager, O., et Verrall, R. (2014). Reserving in Non-Life Insurance. *Encyclopedia of Actuarial Science*.
- Jin, X., et Frees, E. W. J. (2013). Comparing micro-and macro-Level loss reserving models. *Presentation at ARIA*.
- Jorgensen, B. (1997). *The theory of dispersion models*. CRC Press.
- Mack, T. (1993). Distribution-free calculation of the standard error of chain ladder reserve estimates. *Astin bulletin*, 23(02), 213-225.
- Mack, T. (1999). The standard error of chain ladder reserve estimates : Recursive calculation and inclusion of a tail factor. *Astin bulletin*, 29(02), 361-366.
- Merz, M., Wüthrich, M. V., et Hashorva, E. (2013). Dependence modelling in multivariate claims run-off triangles. *Annals of Actuarial Science*, 7(01), 3-25.
- Norberg, R. (1993). Prediction of outstanding liabilities in non-life insurance. *Astin Bulletin*, 23(01), 95-115.
- Pigeon, M., Antonio, K., et Denuit, M. (2013). Individual loss reserving with the multivariate skew normal framework. *Astin Bulletin*, 43(03), 399-428.
- Rosenlund, S. (2012). Bootstrapping individual claim histories. *ASTIN Bulletin-Actuarial Studies in non LifeInsurance*, 42(1), 291.
- Shi, P., Basu, S., et Meyers, G. G. (2012). A Bayesian log-normal model for multivariate loss reserving. *North American Actuarial Journal*, 16(1), 29-51.
- Wüthrich, M. V., et Merz, M. (2008). *Stochastic claims reserving methods in insurance* (Vol. 435). John Wiley and Sons.